Organisation

In diesem Projekt werden verschiedene Konzepte, die Sie im Modul Wahrscheinlichkeit und Statistik gelernt haben, angewendet. Ziel des Projekts ist es das intuitive Verständnis dieser Konzepte zu verbessern und an einer Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu arbeiten.

Der Code wird in Java implementiert, ausgehend von Code, der zur Verfügung gestellt wird. Die modifizierten Abschnitte des Codes müssen hervorgehoben und kommentiert werden. Der Bericht wird in LaTeX auf der Grundlage dieses Dokuments erstellt.

Die Arbeit wird in elektronischer Form abgegeben. Sie besteht aus einem Bericht im pdf-Format und entsprechenden Java-Dateien. Die Arbeit kann teilweise während den Unterrichtslektionen in Zweiergruppen erfolgen. Der Abgabetermin ist der **22. Mai 2015**.

Die 10 Punkte, welche maximal für das Projekt erzielt werden können, setzen sich folgendermassen zusammen:

- 5P Richtige Antworten zu den Fragen
- 3P Qualität der Erklärungen
- 1P Beherrschung der mathematischen Sprache
- 1P Präsentation / Seitenlayout / Kommentare zum Code

Beachten Sie, dass es besonders wichtig ist, dass Sie Ihren Lösungsweg und Ihre Überlegungen erläutern. Ihr Bericht muss für eine aussenstehende Person mit Grundkenntnissen in Wahrscheinlichkeitsrechnung verständlich sein.

Erläuterung des Problems

Wir betrachten ein Spiel, an welchem zwei Spieler teilnehmen. Zwei Aktionen sind für beide Spieler möglich: sie können kooperieren (cooperate) (C) oder sie können betrügen (deceive) (D). Der Gewinn jedes Spielers hängt von der Aktion des andern Spielers ab, wie die Tabelle zeigt:

Spieler 1 \ Spieler 2	C	D
C	(R,R)	(S,T)
D	(T,S)	(P,P)

wobei R,S,T und P, die möglichen Gewinne des ersten bzw. des zweiten Spieler sind. Weiter gilt $T > R > P > S$ und $2R > S + T$. Zum Beispiel:

Spieler 1 \ Spieler 2	C	D
C	$(3,3)$	$(0,5)$
D	$(5,0)$	$(1,1)$

Der totale Gewinn ist also maximal, wenn die beiden Spieler kooperieren. Der Einzelgewinn eines Spielers ist hingegen grösser für einen Spieler, der den andern betrügt, während der andere kooperiert. Wir definieren die beiden Zufallsvariablen:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{falls Spieler 1 kooperiert} \\ 0 & \text{falls Spieler 1 betrügt} \end{cases} \quad \text{und} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{falls Spieler 2 kooperiert} \\ 0 & \text{falls Spieler 2 betrügt} \end{cases}$$

Es gibt also vier verschiedene mögliche Ereignisse für das Variablenpaar (X, Y), nämlich $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, 0)$, welche den folgenden Gewinnen entsprechen (G_X, G_Y): (R, R), (S, T), (T, S) und (P, P).

Wir betrachten 3 Strategien:

1. Strategie PROB: Der Spieler 1 kooperiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% und der Spieler 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%.
2. Strategie REAC: Der Spieler 1 kooperiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% falls der Spieler 2 in der vorhergehenden Runde kooperiert hat und mit 35%, falls der Spieler 2 in der vorhergehenden Runde betrogen hat. Der Spieler zwei kooperiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%, unabhängig von der ausgeführten Aktion in der vorhergehenden Runde.
3. Strategie ALTE: Der Spieler 1 kooperiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%, falls er in der vorhergehenden Runde kooperiert hat und mit 65%, falls er in der vorhergehenden Runde betrogen hat. Der Spieler 2 kooperiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%, unabhängig von der ausgeführten Aktion in der vorhergehenden Runde.

Fragen

1. Beantworten Sie die folgenden Fragen zur Strategie PROB:
   (a) Implementieren Sie die Strategie des Spielers 1.
   (b) Mit welcher relativen Häufigkeit ereignen sich die Ereignisse $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(0, 0)$, falls die Spieler 10 mal spielen?
   (c) Welches ist der kumulierte durchschnittliche Gewinn der beiden Spieler? Welches ist der durchschnittliche Gewinn von jedem Spieler einzeln?
   (d) Die gleichen Fragen, falls die Spieler 100'000 mal spielen.
   (e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses und vergleichen Sie diese mit den erhaltenen relativen Häufigkeiten? Was können Sie daraus folgern?
   (f) Berechnen Sie den Erwartungswert des kumulierten und des Einzelgewinns der beiden Spieler. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den erhaltenen empirischen Gewinnen.
   (g) Benützen Sie Ihren Code um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit welcher der Spieler 1 kooperieren sollte um seinen Gewinn zu optimieren (wissend, dass die Strategie des zweiten Spielers die Gleiche bleibt).
   (h) Was lässt sich über den kumulierten Gewinn sagen, falls der Gewinn von Spieler 1 steigt?
2. Beantworten Sie die Fragen zur Strategie REAC:
   (a) Implementieren Sie die Strategie des Spielers 1.
   (b) Mit welcher relativen Häufigkeit werden die Ereignisse $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(0, 0)$ realisiert, wenn die Spieler 10'000 spielen?

(c) Welches ist der kumulierte mittlere Gewinn der beiden Spieler? Welches ist der mittlere Gewinn jedes Spielers?

(d) Wir definieren die Zufallsvariablen X_t und Y_t als Aktionen der Spieler 1 und 2 in Runde t. Sind die Zufallsvariablen X_t und Y_t unabhängig? Was lässt sich von den Variablen Y_t und Y_{t-1} sagen? Und von X_t und Y_t?

(e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses und vergleichen Sie es mit den erhaltenen relativen Häufigkeiten. Was lässt sich daraus ableiten?

(f) Berechnen Sie den erwarteten kumulierten Gewinn und den Einzelgewinn der beiden Spieler. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den erhaltenen empirischen Resultaten.

(g) Testen Sie die optimale Strategie PROB gegen die Strategie REAC. Welche Strategie scheint effizienter?

(h) Optimieren Sie die Strategie REAC (gegenüber der Strategie PROB).

3. Beantworten Sie die folgenden Fragen zur Strategie ALTE.

(a) Implementieren Sie die Strategie von Spieler 1.

(b) Mit welcher relativen Häufigkeit treten die Ereignisse $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(0, 0)$ ein, wenn die Spieler 10'000 mal spielen?

(c) Was ist der kumulierte mittlere Gewinn der beiden Spieler? Was ist der durchschnittliche Gewinn jedes einzelnen Spielers?

(d) Kann diese Strategie mit einer Markov-Kette modelliert werden? Erklären Sie warum.

(e) Geben Sie die Übergangsmatrix an sowie den Vektor mit der Anfangsverteilung.

(f) Besitzt diese Markov-Kette einen oder mehrere stationäre Zustände? Falls ja, welche(n)? Wie gross ist der mittlere Gewinn in diesem Fall?

(g) Konvergiert diese Markov-Kette gegen eine Grenzverteilung? Beantworten Sie diese Frage mithilfe der vorhergehenden Frage.

(h) Stellen Sie eine Verbindung mit den empirisch gewonnenen Resultaten her.

4. Das schwache Gesetz der grossen Zahlen stellt eine Verbindung zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses her. Geben Sie den Inhalt dieses Gesetzes wieder und erklären Sie es mithilfe Ihrer Resultate.

5. Definieren Sie Ihre eigene Strategie und begründen Sie diese. Welches ist Ihr mittlerer Gewinn.