

## سری اول تمرینات درس مبانی منطق

آخرین زمان تحویل: ۲۹ اسفند ۱۴۰۲

سوال ۱. با استقرای ریاضی ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

سوال ۲. نشان دهید مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح هم عدد هستند.

سوال ۳. ثابت کنید مجموعه تمام عبارات زبان منطق گزاره‌ها با مجموعه‌ی اتم‌های شمارا، شمارا است.

سوال ۴. تابع  $d(\psi)$  نمایانگر عمق فرمول  $\psi$  است که به عنوان ارتفاع درخت تجزیه آن تعریف می‌شود. این تابع را به صورت استقرایی روی مجموعه همه گزاره‌ها تعریف کنید.

سوال ۵. نشان بدهید عبارتهای  $(p_1 p_2)$  و  $p_1$  فرمول نیستند.

سوال ۶. زیرفرمول‌های فرمول  $((p_1 \vee p_2) \wedge p_2) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \wedge p_2)$  را به طور کامل بنویسید.

سوال ۷. برای فرمول  $p_3 \vee (p_1 \rightarrow p_3)$  یک دنباله‌ی ساختمان بنویسید و درخت تجزیه آن را رسم کنید.

سوال ۸. تبلیغ یک مجله تئیس می گوید «گر من در حال بازی کردن تئیس نیستم، آنگاه در حال تماشای تئیس هستم.» و «اگر در حال تماشای تئیس نیستم، در حال مطالعه درباره تئیس هستم.» اگر فرض کنیم گوینده نمی‌تواند دو کار را همزمان انجام دهد، گوینده مشغول چه کاری است؟ مفروضات را در منطق گزاره‌ای صورت‌بندی کنید و به سؤال پاسخ بدهید.

سوال ۹. معمای زیر توسط ریچارد اسمولیان طراحی شده است. آن را در منطق گزاره‌ها صورت‌بندی کنید و با کمک آموخته‌های خود به آن پاسخ بدهید:

به جزیره‌ای سفر کرده‌اید که برخی ساکنان آن راستگو هستند (یعنی در پاسخ به هر پرسشی پاسخ درست را بیان می‌کنند) و باقی ساکنان آن دروغگو هستند (یعنی در پاسخ به هر پرسشی نقیض پاسخ درست را بیان می‌کنند). شما به یکی از بومیان این جزیره برمی‌خورید و از او می‌پرسید: «آیا در جزیره می‌شود طلا پیدا کرد؟» او تنها پاسخ می‌دهد: «اگر من راستگو باشم، در جزیره طلا هست.» آیا می‌شود از این نتیجه گرفت که آیا در جزیره طلا هست یا نه و آیا این شخص راستگو است یا دروغگو؟

سوال ۱۰. رابط  $\downarrow$  چنان تعریف شده که  $\psi \downarrow \phi$  صادق است اگر  $\phi$  و  $\psi$  هر دو کاذب باشند. رابط‌های  $\{\neg, \rightarrow, \vee, \wedge\}$  را بر حسب  $\downarrow$  تعریف کنید.

سوال ۱۱. تعیین کنید کدام یک از فرمول‌های زیر توتولوژی هستند:

$$(p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_2 \rightarrow p_1), (p_1 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_1, (p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \vee p_2), (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1$$

سوال ۱۲. ثابت کنید

$$(A) \quad \phi \models \psi \text{ و } \psi \models \sigma \text{ آنگاه } \phi \models \sigma.$$

$$(B) \quad \phi \models \psi \text{ اگر } \phi \rightarrow \psi$$

سوال ۱۳. ثابت کنید  $\Gamma \models \phi$  اگر  $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$  ارضا ناپذیر است.

سوال ۱۴. ثابت کنید برای هر ارزیاب  $v$  داریم  $\llbracket \phi \rightarrow \psi \rrbracket_v \leq \llbracket \phi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v$  اگر  $\llbracket \phi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v$ .

سوال ۱۵. (A) ثابت کنید  $\neg(p_1 \vee p_2) \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$ .

(B) با استفاده از قضایای ثابت شده در مبحث جایگزینی ثابت کنید

$$\neg((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \models (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg p_3$$

(ج) با استقرا ثابت کنید به ازای هر  $n$  داریم

$$\neg(\dots(p_1 \vee p_2) \vee \dots) \vee p_n \models (\dots(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \dots) \wedge \neg p_n$$

سوال ۱۶. فرض کنید رابط سه‌موضعی  $A(X, Y, Z)$  را چنان تعریف کرده‌ایم که  $A(X, Y, Z)$  صادق است اگر و فقط اگر دقیقاً یکی از  $X, Y$  و  $Z$  صادق باشد.

(آ) با استفاده از رابط‌های  $\{\neg, \vee\}$  جمله‌ای بسازید معادل با  $A(X, Y, Z)$ .

(ب) نشان بدهید رابط  $\square$  و  $\circ$  ای وجود ندارند چنانکه

$$A(X, Y, Z) \models (X \square Y) \circ Z$$

سوال ۱۷. برای  $n$  دلخواه ثابت کنید

$$A \vee (B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \models (A \vee B_1) \wedge \dots \wedge (A \vee B_n)$$

سوال ۱۸. اثبات یا رد کنید:

۱. اگر  $A$  یک  $\{\neg, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ -فرمول باشد، آنگاه  $A$  ارضاشدنی است.

۲. اگر  $A$  یک  $\{\wedge, \vee\}$ -فرمول باشد، آنگاه  $A$  توتولوژی نیست.

سوال ۱۹. فرض کنید  $A \rightarrow B \models A$  و  $B$  دارای اتم‌های مشترک نیستند. ثابت کنید یا  $A$  ارضاناپذیر است یا  $B$  توتولوژی است (یا هر دو). توضیح بدهید که آیا شرط اتم مشترک نداشتن برای این حکم ضروری است یا نه.

سوال ۲۰. فرمول‌های زیر را به صورت نرمال عطفی ترجمه کنید:

$$p_1 \rightarrow p_2, (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg p_1 \rightarrow (p_3 \vee p_4))$$

سوال ۲۱. برای توتولوژی بودن یا همواره کاذب بودن فرمول‌هایی که در صورت نرمال عطفی هستند یک معیار ارائه کنید.