مجموعه‌ی سوال‌های درس مبانی منطق

سوال ۱. با استقرای ریاضی ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

پاسخ: برای پایهٔ استقرا ($n=1$) حکم بدیهی است:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$$

حال حکم را برای n فرض می‌گیریم و آن را برای $n+1$ ثابت می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} n^2 = (\sum_{k=1}^{n} n^2) + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

□

سوال ۲. فرض کنید عدد $o(\psi)$ نمایانگر تعداد ادات‌های منطقی در فرمول ψ و $|\psi|$ نمایانگر طول این فرمول باشد. با استفاده از استقرا ثابت کنید برای هر فرمول ψ نامعادلهٔ $3o(\psi)+1 \leqslant |\psi|$ صادق است.

پاسخ: حکم را با استقرا ثابت می‌کنیم. اگر ψ اتمی باشد طول آن یک و تعداد ادات‌های آن صفر است و بنابراین حکم به‌وضوح برقرار است. حال فرض می‌کنیم $\psi = (\neg\phi)$. واضحا $o(\phi) = o(\psi)-1$. بنا بر فرض استقرا داریم $3o(\phi)+1 \leqslant |\phi|$. بنابراین

$$|\psi| = |\phi| + 3 \geqslant (3o(\phi)+1)+3 = 3(o(\phi)+1)+1 = 3o(\psi)+1$$

به همین ترتیب فرض می‌کنیم $\psi = (\phi \bigcirc \sigma)$ (برای $\{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\} \ni \bigcirc$). واضح است که $o(\psi) = o(\phi) + o(\sigma) + 1$. بنابراین با کمک فرض‌های استقرایی $|\phi| \leqslant 3o(\phi) + 1$ و $|\sigma| \leqslant 3o(\sigma) + 1$ داریم

$$|\psi| = |\phi|+|\sigma|+3 \geqslant (3o(\phi)+1)+(3o(\sigma)+1)+3 = 3(o(\phi)+o(\sigma)+1)+2 \geqslant 3o(\psi)+1$$

□

سوال ۳. تبلیغ یک مجلهٔ تنیس می گوید «گر من در حال بازی کردن تنیس نیستم، آنگاه در حال تماشای تنیس هستم.» و «اگر در حال تماشای تنیس نیستم، در حال مطالعه درباره تنیس هستم.» اگر فرض کنیم گوینده نمی‌تواند دو کار را همزمان انجام دهد، گوینده مشغول چه کاری است؟ مفروضات را در منطق گزاره‌ای صورت‌بندی کنید و به سؤال پاسخ بدهید.

پاسخ:

فرض کنیم p معادل با گزاره (گوینده در حال تنیس بازی کردن است) و q معادل با (گوینده در حال تماشای تنیس است) و s معادل با (گوینده در حال مطالعه درباره تنیس است باشد.)باشد. پس گزاره های صادق ما $((\neg p) \leftarrow q)$ و $((\neg q) \leftarrow s)$ هستند. پس باید تابع ارزیابی را بیابیم که فقط یکی از سه اتم p یا q یا s را صادق ببیند و هر دو گزاره صادق ما را نیز صادق ببیند. تابع ارزیاب ν را به این شکل تعریف کنید:

$$\nu(p) = \bot$$

$$\nu(q) = \top$$

$$\nu(s) = \bot$$

تابع ν تنها یک اتم q ارضا می کند و هر دو گزاره شرطی ما را نیز صادق می بیند. پس گوینده درحال تماشای تنیس است. لازم به ذکر است اگر تابع ν اتمی غیر از اتم q را صادق ببیند. نمی تواند هر دو گزاره شرطی مفروض ما را صادق ببیند.

□

سوال ۴. معمای زیر توسط ریموند اسمولیان طراحی شده است. آن را در منطق گزاره‌ها صورت‌بندی کنید و با کمک آموخته‌های خود به آن پاسخ بدهید:

> به جزیره‌ای سفر کرده‌اید که برخی ساکنان آن راستگو هستند (یعنی در پاسخ به هر پرسشی پاسخ درست را بیان می‌کنند) و باقی ساکنان آن دروغگو هستند (یعنی در پاسخ به هر پرسشی نقیض پاسخ درست را بیان می‌کنند). شما به یکی از بومیان

این جزیره برمی‌خورید و از او می‌پرسید: «آیا در جزیره می‌شود طلا پیدا کرد؟» او تنها پاسخ می‌دهد: «اگر من راستگو باشم، در جزیره طلا هست.» آیا می‌شود از این نتیجه گرفت که آیا در جزیره طلا هست یا نه و آیا این شخص راستگو است یا دروغگو؟

سوال ۵. نشان دهید مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد صحیح هم‌عدد هستند.
پاسخ: تابع f را اینگونه تعریف می کنیم:
$f : N \to Z$

$$f(x) = \begin{cases} x & \textbf{if } x = 0 \\ (x+1)/2 & \textbf{if } \ x \ is \ odd \\ -x/2 & \textbf{if } \ x \ is \ even \end{cases}$$

حال نشان می دهیم که f یک به یک و پوشاست.
اثبات یک به یک بودن:
فرض کنیم x و y دو عدد طبیعی هستند. و $f(x) = f(y)$ نشان می دهیم که $x = y$.
اگر $f(x) = 0$ آنگاه لزوما $x = y = 0$ زیرا تنها اعدادی که توسط تابع f به 0 نظیر می شوند خود عدد 0 است.
حال فرض کنیم x و y هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. در اینصورت با توجه به این که ضابطه f برای اعداد زوج و فرد هر دو خطی و در نتیجه یک به یک هستند، حکم در این حالت نیز برقرار خواهد بود و داریم: $x = y$.
حالا کافی است نشان دهیم که اگر یکی از دو عدد زوج و یکی فرد باشد، خروجی تابع برای این دو برابر نخواهد بود. فرض کنیم
x زوج و y فرد است. آنگاه طبق فرض داریم:
$$(-x/2) = (y+1)/2$$
از این تساوی نتیجه می شود:
$$-x = y + 1$$
که می رسیم به
$$y + x = -1$$
که یک تناقض است زیرا x و y هر دو اعداد طبیعی هستند و حاصل جمع آن ها نمی تواند یک عدد منفی باشد.
اثبات پوشا بودن:

برای نشان دادن پوشا بودن تابع f باید نشان دهیم به ازای عدد صحیح دلخواه z عدد طبیعی x وجود دارد که $f(x) = z$

ما در اینجا با حالت بندی پوشا بودن f را نشان می دهیم:

حالت اول: $z = 0$

در این حالت اگر $x = 0$ آنگاه $f(x) = z$

حالت دوم: $z > 0$

در این حالت قرار می دهیم $x = 2z - 1$

آنگاه خواهیم داشت:

$$f(x) = f(2z-1) = ((2z-1)+1)/2 = z$$

حالت سوم: $z < 0$

در این حالت قرار می دهیم $x = -2z$

و مجدد

$$f(x) = f(-2z) = z$$

در نتیجه f پوشاست

$\square$

سوال ۶. نشان دهید مجموعهٔ اعداد گویا شمارا است.

پاسخ: ابتدا نشان می دهیم که مجموعه دوتایی های مرتبی که هر دو عضو از N آمده اند شماراست. تابع

$$f : N^2 \to N$$

را اینگونه تعریف می کنیم:

$$f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a - 1$$

ادعا: f یک به یک و پوشاست.

اثبات: ابتدا نشان می دهیم f یک به یک است:

فرض کنیم برای اعداد طبیعی a, a', b, b' داریم $f(a,b) = f(a',b')$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a - 1 = \frac{(a'+b')(a'+b'+1)}{2} + a' - 1$$

بدون کاستن از کلیت مسئله ((برهان خلف)) فرض می کنیم که $a < a'$. سپس داریم:

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = \frac{(a'+b')(a'+b'+1)}{2} + a' - a$$

با توجه به این که مجموع اعداد طبیعی 0 تا $a+b$ از فرمول $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ بدست می آید. می دانیم $a' - a >= a' + b' + 1$ که معادل است با $a + b' + 1 <= 0$ که تناقض است زیرا طبق فرض ما a, b' اعداد طبیعی هستند و حاصل جمع آن ها نمی تواند یک عدد منفی باشد. مشابها اگر فرض گنیم $a > a'$ به نتیجه مشابه می رسیم. پس لزوما $a = a'$ حال که می دانیم $a = a'$ داریم

$$f(a,b) = f(a,b')$$

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a - 1 = \frac{(a+b')(a+b'+1)}{2} + a - 1$$
$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = \frac{(a+b')(a+b'+1)}{2}$$
$$ab + b^2 + b = ab' + b'^2 + b'$$

$$a(b-b') = (b'-b)(b'+b+1)$$

تساوی بدست آمده نشان می دهد اگر $b \neq b'$ آنگاه $a < 0$ که با فرض طبیعی بودن a تناقض دارد.
پس $b = b'$

حال که نشان دادیم f یک به یک است. کافی است نشان دهیم پوشا نیز است: فرض کنیم $z \in N$ ما الگوریتمی برای یافتن دوتایی مرتب $(x, y) \in N^2$ ای ارائه می دهیم که $f(x,y) = z$.

فرض کنیم a بزرگترین عدد طبیعی ای باشد که $z => \frac{a(a+1)}{2}$ قرار می دهیم:

$$x = z - \frac{a(a+1)}{2} + 1$$

$$y = a - x$$

حال داریم

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x - 1$$
$$f(x,y) = \frac{a(a+1)}{2} + z - \frac{a(a+1)}{2} + 1 - 1$$
$$f(x,y) = z$$

در نتیجه f پوشاست.
ما در اینجا نشان می دهیم که مجموعه اعداد گویای نامنفی شماراست. می دانیم:

$$Q^2 = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in N \ \ and \ \ b \neq 0\}$$

تابع g را اینگونه تعریف می کنیم:

$$g : Q^+ \to N^2$$

$$g(\frac{a}{b}) = (a, b)$$

طبق تعریف، واضح است که g یک به یک است.
حال از قضیه زیر استفاده می کنیم:
قضیه: فرض کنیم A یک مجموعه و $B \subseteq A$. اگر A شمارا باشد، آنگاه B نیز شماراست.
ما نشان دادیم که N^2 شماراست. همچنین می دانیم $g(Q^+) \subset N^2$ پس طبق قضیه ذکر شده، $g(Q^+)$ شمارا و چون g یک به یک است. Q^+ شمارا است.
با استدلال مشابه می توان نشان داد که Q^- نیز شمارا و در نتیجه Q شماراست.
$\square$

سوال ۷. ثابت کنید مجموعهٔ تمام عبارات زبان منطق گزاره‌ها با مجموعه‌ی اتم‌های شمارا، شمارا است.
پاسخ: مطابق قضیه‌ی کانتور-شرودر-برنشتاین کافی است تابعی یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ به توی مجموعه‌ی فرمول‌ها و تابعی یک‌به‌یک از مجموعه‌ی فرمول‌ها به توی $\mathbb{N}$ معرفی کنیم. برای تابع اول این تابع را در نظر بگیرید:

$$f(n) = p_n$$

یک‌به‌یک بودن این تابع واضح است. برای تابع دوم این تابع را در نظر بگیرید (چنین تابعی را یک عددگذاری گودلی می‌نامیم):

$$g(A) = \begin{cases} 2 \cdot 3^{n+1} & \textbf{if } A = p_n \\ 2^2 \cdot 3^{g(A_1)} & \textbf{if } A = (\neg A_1) \\ 2^3 \cdot 3^{g(A_1)} \cdot 5^{g(A_2)} & \textbf{if } A = (A_1 \wedge A_2) \\ 2^4 \cdot 3^{g(A_1)} \cdot 5^{g(A_2)} & \textbf{if } A = (A_1 \vee A_2) \\ 2^5 \cdot 3^{g(A_1)} \cdot 5^{g(A_2)} & \textbf{if } A = (A_1 \to A_2) \end{cases}$$

با استفاده از قضیه‌ی اساسی حساب می‌توان نشان داد تنها در صورتی $g(A) = g(B)$ که $A = B$ و بنابراین g یک‌به‌یک است. $\square$

سوال ۸. برای هر یک از رشته‌های زیر یا درخت تجزیه‌ی آن را رسم کنید یا از طریق تلاش برای رسم درخت تجزیه نشان بدهید آن رشته یک فرمول نیست:

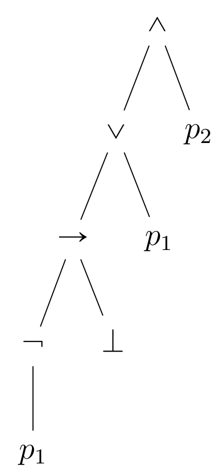
۱. $((((\neg p_1) \to \bot) \vee p_1) \wedge p_2)$

۲. $(((\neg(p_0 \vee p_1)) \wedge (p_2 \to p_3))) \to (p_3 \wedge p_4))$

(پ) $(p_1 \wedge \to \neg(p_2 \vee p_0))$

پاسخ:

۱.



۲. طبق الگوریتم تولید درخت تجزیه، ابتدا عمق فرمول و عمق رابط‌های منطقی را محاسبه می‌کنیم. اما عمق این عبارت -1 است که نشان می‌دهد این عبارت یک فرمول درست‌ساخت نیست.

۳. طبق الگوریتم تولید درخت تجزیه، باید تنها رابط دارای عمق 1 را در عبارت پیدا کنیم. اما بعد از محاسبه عمق رابط‌ها، مشاهده می‌شود که سه رابط با عمق 1 وجود دارد.

$\square$

سوال ۹. ثابت کنید:

۱. اگر c تعداد جایگاه‌هایی در فرمول A باشد که رابطی دوتایی در آن قرار گرفته و s تعداد جایگاه‌هایی در A باشد که یک اتم در آن قرار گرفته، داریم $s = c + 1$.

۲. اگر A فرمولی باشد که در آن از $\neg$ استفاده نشده است، طول A فرد است.

پاسخ:

۱. حکم را از طریق استقرا ثابت می‌کنیم. اگر A اتم باشد حکم بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای فرمول‌هایی با پیچیدگی کمتر از پیچیدگی A ثابت شده است. اگر $A = (\neg A_1)$ و c_1 تعداد جایگاه‌های رابط‌های دوتایی در A_1 و s_1 تعداد جایگاه‌های اتم‌ها در A_1 باشد، واضح است که $s = s_1$ و $c = c_1$ و بنابراین $s = c + 1$. همچنین اگر $A = (A_1 \Box A_2)$ (که در آن $\Box$ رابطی دوتایی است) و c_i تعداد جایگاه‌های رابط‌های دوتایی در A_i و s_i تعداد جایگاه‌های اتم‌ها در A_i باشد، داریم $c = c_1 + c_2 + 1$ و $s = s_1 + s_2$. حال با توجه به اینکه فرض کرده‌ایم $s_i = c_i + 1$، به‌سادگی می‌توان نشان داد $s = c + 1$.

۲. حکم را از طریق استقرا ثابت می‌کنیم. اگر A اتم باشد حکم بدیهی است. حال فرض کنید حکم برای فرمول‌هایی با پیچیدگی کمتر از پیچیدگی A ثابت شده است. تنها لازم است حالتی را بررسی کنیم که در آن $A = (A_1 \Box A_2)$ (که در آن $\Box$ رابطی دوتایی است) زیرا در صورتی که $A = (\neg A_1)$ فرض استفاده نشدن از نقیض برقرار نیست. حال واضح است که اگر طول A_1 و A_1 فرد باشد طول A نیز فرد است.

$\Box$

سوال ۱۰. فرض کنید $\models A \to B$ و A و B دارای اتم‌های مشترک نیستند. ثابت کنید یا A ارضاناپذیر است یا B توتولوژی است (یا هر دو). توضیح بدهید که آیا شرط اتم مشترک نداشتن برای این حکم ضروری است یا نه.

پاسخ: با استفاده از قضیه‌ی استنتاج می‌توانیم نتیجه بگیریم $A \models B$. بنابراین هر ارزیاب v که A را ارضا کند، B را نیز ارضا می‌کند. برای اثبات حکم کافی است فرض کنیم A ارضاناپذیر نیست و نتیجه بگیریم B توتولوژی است. اگر A ارضاناپذیر نباشد، ارزیاب vای وجود دارد که A را ارضا می‌کند. حال یک ارزیاب دلخواه u را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم B را ارضا می‌کند. ارزیاب v' را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$v'(p_n) = \begin{cases} u(p_n) & \text{if } p_n \in atoms(B) \\ v(p_n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال واضح است که v' نیز همانند v فرمول A را ارضا می‌کند زیرا مقدار این دو ارزیاب در اتم‌های موجود در A یکسان است و در جزوه ثابت کرده‌ایم اگر دو ارزیاب مقادیر یکسانی به اتم‌های داخل یک فرمول نسبت بدهند، به فرمول نیز مقدار یکسانی نسبت می‌دهند. بنابراین از آنجا که v' فرمول A را ارضا می‌کند فرمول B را نیز ارضا می‌کند. نیز، از آنجا که مقداری که ارزیاب v' به اتم‌های B نسبت می‌دهد همان مقداری است که ارزیاب u به آن‌ها نسبت می‌دهد، مقداری که این دو ارزیاب به B نسبت می‌دهند یکسان است. بنابراین ارزیاب u نیز B را ارضا می‌کند. با توجه به اینکه ارزیاب u دلخواه است، هر ارزیابی B را ارضا می‌کند و بنابراین B توتولوژی است.

در صورتی که شرط مشترک نبودن اتم‌ها را حذف کنیم حکم برقرار نیست؛ مثلاً $p \models p \to p$ اما p نه ارضاناپذیر است و نه توتولوژی. $\square$

سوال ۱۱. اثبات یا رد کنید:

۱. اگر A یک $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$-فرمول باشد، آنگاه A ارضاشدنی است.

۲. اگر A یک $\{\wedge, \vee\}$-فرمول باشد، آنگاه A توتولوژی نیست.

پاسخ:

۱. فرض کنید v ارزیابی باشد که به همه‌ی اتم‌ها مقدار T را نسبت می‌دهد. نشان می‌دهیم $v(A) = T$. اگر A اتم باشد حکم واضح است. حال فرض کنید A اتم نیست و حکم درباره‌ی فرمول‌هایی با پیچیدگی کمتر ثابت شده است. در این صورت یا $A = (A_1 \square A_2)$ ($\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$) و $v(A_1) = v(A_2) = T$. واضح است که برای هر چهار رابط $v(A) = T$. بنابراین A تحت لااقل یک ارزیاب صادق است و ارضاناپذیر نیست.

۲. فرض کنید v ارزیابی باشد که به همه‌ی اتم‌ها مقدار F را نسبت می‌دهد. نشان می‌دهیم $v(A) = F$. اگر A اتم باشد حکم واضح است. حال فرض کنید A اتم نیست و حکم درباره‌ی فرمول‌هایی با پیچیدگی کمتر ثابت شده است. در این صورت یا $A = (A_1 \wedge A_2)$ یا $A = (A_1 \vee A_2)$ و $v(A_1) = v(A_2) = F$. واضح است که در هر دو حالت $v(A) = F$. بنابراین A تحت لااقل یک ارزیاب کاذب است و توتولوژی نیست.

$\square$

سوال ۱۲. شخصی غریبه به جزیره‌ای وارد می‌شود که برخی ساکنان آن همیشه دروغ می‌گویند و برخی ساکنان آن همیشه راست. غریبه به دو ساکن جزیره با نام‌های الف و ب می‌رسد و از الف می‌پرسد که «آیا یکی از شما دو نفر دروغگو است؟» الف پاسخی بله/خیر می‌دهد که باعث می‌شود

غریبه بتواند راستگو بودن یا دروغگو بودن هر دو نفر را تعیین کند. با نوشتن گزاره‌ی مورد سؤال («آیا یکی از شما دو نفر دروغگو است؟») به زبان صوری و بررسی شرایط صدق آن، مشخص کنید پاسخ الف چه بوده است.
پاسخ: اتم p را به «الف دروغگو است.» و اتم q را به «ب دروغگو است.» تعبیر کنید. حال می‌توان سوال «آیا یکی از شما دو نفر دروغگو است؟» را به شکل این سوال ترجمه کرد که آیا گزاره‌ی $p \vee q$ صادق است یا خیر. می‌دانیم پاسخ الف به این سوال باعث می‌شود غریبه بتواند راستگو بودن یا دروغگو بودن الف و ب را به درستی تعیین کند، یعنی نتیجه بگیرد $\vDash p$ و $\vDash q$ برقرار هستند یا نه.

همچنین می‌دانیم الف یکی از دو پاسخ زیر را به غریبه داده است.:

$$\text{پاسخ الف} = \begin{cases} \vDash p \vee q & \text{(i)} \\ \nvDash p \vee q & \text{(ii)} \end{cases}$$

همچنین طبق فرض مسئله، الف می‌تواند راستگو یا دروغگو باشد. مسئله را با هر دو فرض بررسی می‌کنیم، و در هر یک از این دو حالت، دو پاسخی که الف ممکن است داده باشد را در نظر می‌گیریم.

۱. فرض کنید الف دروغگو باشد.

(آ) فرض کنید پاسخ الف $\vDash p \vee q$ باشد. چون الف دروغگو است داریم $\nvDash p \vee q$. درنتیجه $\vDash \neg(p \vee q)$ برقرار است. پس داریم $\vDash \neg p \wedge \neg q$. از طرفی می‌دانیم هر دو طرف یک ترکیب عطفیِ صادق باید صادق باشند. در نتیجه $\vDash \neg p$ و $\vDash \neg q$. اما $\vDash \neg p$ به معنی دروغگو نبودن الف است، که با فرض در تناقض است. بنابراین این حالت اتفاق نیافتاده است.

(ب) فرض کنید پاسخ الف $\nvDash p \vee q$ باشد. چون الف دروغگو است، پس داریم $\vDash p \vee q$. می‌دانیم که لااقل یکی از طرفین یک ترکیب فصلیِ صادق باید صادق باشد، اما نمی‌توان در حالت کلی نتیجه گرفت کدام‌یک از طرفین صادق است. بنابراین در این حالت غریبه نمی‌تواند نتیجه‌ای درباره‌ی راستگویی الف و ب بگیرد و در نتیجه، این حالت اتفاق نیافتاده است.

۲. فرض کنید الف راستگو باشد.

(آ) فرض کنید پاسخ الف $\vDash p \vee q$ باشد. مانند حالت قبل، چون نمی‌توان در حالت کلی نتیجه گرفت کدام‌یک از طرفین ترکیب فصلی صادق است، در این حالت نیز غریبه

نمی‌تواند نتیجه‌ای درباره‌ی راستگویی الف و ب بگیرد. پس این حالت هم اتفاق نیافتاده است.

(ب) فرض کنید پاسخ الف $\not\models p \vee q$ باشد. درنتیجه $\models \neg(p \vee q)$ برقرار است و داریم $\models \neg p \wedge \neg q$. همچنین می‌دانیم هر دو طرف یک ترکیب عطفی صادق باید صادق باشند. پس هر دوی $\models \neg p$ و $\models \neg q$ برقرار هستند، که به این معنی است که هر دوی الف و ب راستگو هستند.

همان‌طور که مشاهده شد، تنها حالت سازگار، حالتی است که الف راستگو بوده و پاسخ او به پرسش غریبه «نه» باشد. $\square$

سوال ۱۳. رابط سه‌موضعی $C(-,-,-)$ را به این صورت در نظر می‌گیریم: $C(X,Y,Z)$ یعنی اگر X آنگاه Y، وگرنه Z. پس برای هر ارزیاب v داریم:

$$v(C(X,Y,Z)) = \begin{cases} v(Y) & \text{if } v(X) = T \\ v(Z) & \text{if } v(X) = F \end{cases}$$

آیا $\{C\}$ کامل است؟ $\{\neg, C\}$ چطور؟

پاسخ: ثابت می‌کنیم تابع بولی یک‌موضعی‌ای که به هر ورودی مقدار F را نسبت می‌دهد قابل‌بیان با $\{C\}$ نیست و بنابراین این مجموعه کامل نیست. برای اثبات این حکم کافی است v را ارزیابی در نظر بگیریم که به همه‌ی اتم‌ها مقدار T را نسبت می‌دهد و با استدلالی مشابه استدلالی که برای پاسخ به پرسش ۵ (آ) استفاده کردیم نشان بدهیم این ارزیاب به تمام فرمول‌ها مقدار T را نسبت می‌دهد.

از آنجا که ثابت کرده‌ایم $\{\neg, \wedge\}$ کامل است، کافی است نشان بدهیم هر $\{\neg, \wedge\}$-فرمول، هم‌ارز یک $\{C, \neg\}$-فرمول است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد $C(A,B,A)$ هم‌ارز با $(A \wedge B)$ است. بنابراین کافی است با استقرا $\{\neg, \wedge\}$-فرمول‌ها را ترجمه کنیم. $\square$

سوال ۱۴. فرض کنید Σ و Γ دو مجموعه از فرمول‌ها باشند. گوییم Γ و Σ هم‌ارزند اگر و تنها اگر مجموعه‌ی فرمول‌های یکسانی را ارضا کنند. همچنین گوییم Γ مستقل است اگر برای هر $A \in \Gamma$ داشته باشیم

$$\Gamma \backslash \{A\} \not\models A$$

گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید:

۱. هر مجموعه‌ی متناهی از فرمول‌ها دارای یک زیرمجموعه‌ی مستقل هم‌ارز با خودش است.

۲. هر مجموعه‌ی نامتناهی از فرمول‌ها دارای یک زیرمجموعه‌ی مستقل هم‌ارز با خودش است.

(پ) برای هر مجموعه از فرمول‌ها مثل Γ یک مجموعه‌ی مستقل از فرمول‌ها مثل Σ وجود دارد که با Γ هم‌ارز است.

پاسخ: ابتدا توجّه کنید که می‌توان استقلال را به این صورت هم تعریف کرد: می‌گوییم Γ مستقل است اگر Γ زیرمجموعه‌ی سره‌ی هم‌ارز با خود نداشته باشد. معادل بودن این تعریف با تعریفی که در صورت سؤال آمده واضح است.

۱. اگر مجموعه مستقل باشد حکم واضح است. پس حکم را برای مجموعه‌ی متناهی غیر مستقل اثبات می‌کنیم.

از استقرای قوی روی اندازه‌ی مجموعه استفاده می‌کنیم. فرض کنید Γ یک مجموعه‌ی غیر مستقل و حکم برای هر مجموعه‌ی کوچک‌تر از آن برقرار باشد. چون Γ مستقل نیست، طبق تعریفِ معادل، باید زیرمجموعه‌ی سره‌ی هم‌ارزی مانند Δ داشته باشد. از آنجا که Δ کوچک‌تر از Γ است، طبق فرض استقرا، زیرمجموعه‌ی مستقل هم‌ارزی مانند Δ' دارد. واضح است که Δ' زیرمجموعه‌ی Γ و هم‌ارز با آن نیز هست.

۲. با مثال نقض رد می‌کنیم.

مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$\Gamma = \{p_1,\ p_1 \wedge p_2,\ p_1 \wedge p_2 \wedge p_3, \dots\}$$

برای هر دو عضو از Γ، یکی دیگری را نتیجه می‌دهد. هیچ عضوی هم به تنهایی تمام Γ را نتیجه نمی‌دهد. بنابراین Γ زیرمجموعه‌ی مستقل هم‌ارز ندارد.

۳. فرض کنید

$$\Gamma = \{A_n \mid 0 \leqslant n\}$$

یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. گزاره‌ی B_n و مجموعه‌ی Σ را به صورت زیر را درنظر بگیرید.

$$B_n = (\bigwedge_{i=0}^{n-1} A_i) \to A_n$$

$$\Sigma = \{B_n \mid 0 \leqslant n\}$$

نشان می‌دهیم Γ و Σ هم‌ارز هستند.

اعضای Σ شرطی هستند و از تعریف ارزشدهی می‌دانیم برای درست بودن شرطی در یک ارزشدهی کافی است تالی آن شرطی در آن ارزشدهی درست باشد. حال ارزشدهی دلخواهی را فرض کنید که همه‌ی اعضای Γ در آن درست هستند. واضح است که تالیِ همه‌ی اعضای Σ، و در نتیجه همه‌ی اعضای Σ در آن تابع ارزش درست هستند. در نتیجه $\Gamma \vDash \Sigma$.

برای اثبات $\Sigma \vDash \Gamma$، ابتدا مجموعه‌های Σ_n و Γ_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Sigma_n = \{B_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n\}$$

$$\Gamma_n = \{A_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n\}$$

با استقرا روی n نشان می‌دهیم برای هر n، $\Sigma_n \vDash \Gamma_n$. اگر $n = 0$، واضح است که $\{A_0\} \vDash \{A_0\}$. فرض کنید $n = m + 1$ و داشته باشیم $\Sigma_m \vDash \Gamma_m$. فرض کنید v یک ارزشدهی دلخواه باشد که همه‌ی اعضای $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{B_{m+1}\}$ در آن درست باشند. از فرض استقرا می‌دانیم همه‌ی اعضای Γ_n، یعنی $A_0, \ldots, A_m$ هم در v درست هستند. به عبارت دیگر مقدم B_{m+1}، و در نتیجه تالی آن، یعنی A_{m+1} نیز در v درست است. پس Γ_{m+1} در v درست است. بنابراین برای هر n داریم $\Sigma_n \vDash \Gamma_n$. برای نشان دادن $\Sigma \vDash \Gamma$، تابع ارزش v را طوری در نظر بگیرید که همه‌ی اعضای Σ در آن درست باشند. فرض کنید A_n عضو دلخواهی از Γ باشد. از آن‌جا که همه‌ی اعضای Σ، و به طور خاص اعضای Σ_n در v درست هستند، طبق نتیجه‌ی قبل اعضای Γ_n، از جمله A_n هم در v درست هستند.

اکنون $\tilde{\Sigma}$ را طوری تعریف کنید که شامل همه‌ی اعضای Σ به جز توتولوژی‌های آن باشد. بدیهی است که $\tilde{\Sigma}$ با Σ، و در نتیجه با Γ هم‌ارز است. حال کافی است نشان دهیم $\tilde{\Sigma}$ مستقل است.

فرمول دلخواهی از $\tilde{\Sigma}$ مانند B_n را در نظر بگیرید. از آنجا که B_n توتولوژی نیست، پس باید یک ارزشدهی مانند v موجود باشد که $v(B_n)$ نادرست است. در نتیجه، بنا به تعریف ارزشدهی روی شرطی، $v(A_n)$ نادرست و $v(\bigwedge_{i=0}^{n-1} A_i)$ درست است. از نادرست بودن $v(A_n)$ داریم برای همه‌ی iهای بزرگ‌تر از n، مقدم B_i در v نادرست، و در نتیجه B_i درست است. همچنین از درست بودن $v(\bigwedge_{i=0}^{n-1} A_i)$ داریم برای همه‌ی iهای کوچک‌تر از n، تالی B_i در v درست، و درنتیجه $v(B_i)$ درست است. بنابراین برای هر i که $i \neq n$، $v(B_i)$ درست است. پس $\tilde{\Sigma} \backslash \{B_n\} \nvDash B_n$.

$\square$

سوال ۱۵. (آ) ثابت کنید $\neg(p_1 \vee p_2) \mathrel{=\!\!|\!\vDash} \neg p_1 \wedge \neg p_2$.

(ب) با استفاده از قضایای ثابت‌شده در مبحث جایگزینی ثابت کنید

$$\neg((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \;=\!\!|\!\!\models (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg p_3$$

(ج) با استقرا ثابت کنید به ازای هر n داریم

$$\neg(\ldots(p_1 \vee p_2) \vee \ldots) \vee p_n) \;=\!\!|\!\!\models (\ldots(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \ldots) \wedge \neg p_n$$

پاسخ:

۱. جدول درستی گزاره‌های دو سمت هم‌ارزی را مجاسبه می‌کنیم.

p_1	p_2	$\neg(p_1 \vee p_2)$	$\neg p_1 \wedge \neg p_2$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	F	F

دو ستون آخر یکسان هستند، در نتیجه هم‌ارزی برقرار است.

۲. می‌دانیم جایگزین کردن گزاره‌های هم‌ارز به جای یک اتم در یک گزاره، تغییری در ارزش آن گزاره نمی‌دهد. به عبارت دیگر اگر $B \;=\!\!|\!\!\models A$ و $D \;=\!\!|\!\!\models C$ آنگاه $A[C/p_i] \;=\!\!|\!\!\models B[D/p_i]$ برای هر اتم p_i.

هم‌ارزی اثبات‌شده در بخش قبل را در نظر بگیرید. ابتدا با جایگزینی‌های متوالی p_2 را به p_3 تغییر می‌دهیم. حال با جایگزینی $(p_1 \vee p_2)$ به جای p_1 خواهیم داشت

$$\neg((p_1 \vee p_2) \vee p3) \;=\!\!|\!\!\models (\neg(p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3$$

حال گزاره‌ی $p_1 \wedge \neg p_3$¬ را در نظر بگیرید. با جایگزینی دو سمت هم‌ارزی اثبات‌شده در بخش قبل در این گزاره به جای p_1 داریم

$$(\neg(p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3 \;=\!\!|\!\!\models (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg p_3$$

چون هم‌ارزی تراگذری است، می‌توان نتیجه گرفت

$$\neg((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \;=\!\!|\!\!\models (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg p_3$$

۳. استقرا روی n:

پایه‌ی استقرا: فرض کنیم $n = 3$. طبق بخش قبل حکم برقرار است.

گام استقرا: فرض کنیم $n = m + 1$ و حکم برای m برقرار باشد.

$$\neg(\ldots(p_1 \vee p_2) \vee \ldots) \vee p_m) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\ldots(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \ldots) \wedge \neg p_m$$

ابتدا با جایگزینی‌های متوالی، همه‌ی اتم‌های p_2 تا p_m را به ترتیب با p_3 تا p_{m+1} جایگزین می‌کنیم.

$$\neg(\ldots(p_1 \vee p_3) \vee \ldots) \vee p_{m+1}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\ldots(\neg p_1 \wedge \neg p_3) \wedge \ldots) \wedge \neg p_{m+1}$$

ادامه‌ی کار مانند بخش قبل خواهد بود. هم‌ارزی بخش اوّل را به جای p_1 در هم‌ارزی بالا جایگزین می‌کنیم.

$$\neg(\ldots((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \ldots) \vee p_{m+1}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\ldots((\neg(p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3) \wedge \ldots) \wedge \neg p_{m+1}$$

حال گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$(\ldots(p_1 \wedge \neg p_3) \wedge \ldots) \wedge \neg p_{m+1}$$

اگر دو سمت هم‌ارزی بخش اوّل را در این گزاره با p_1 جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$(\ldots((\neg(p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3) \wedge \ldots) \wedge \neg p_{m+1} \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\ldots((\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg p_3) \wedge \ldots) \wedge \neg p_{m+1}$$

از تراگذری بودن هم‌ارزی می‌توان نتیجه گرفت

$$\neg(\ldots((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \ldots) \vee p_{m+1}) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\ldots((\neg p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg p_3) \wedge \ldots) \wedge \neg p_{m+1}$$

پس حکم برای $n = m + 1$ برقرار است.

$\square$

سوال ۱۶. فرض کنید رابط سه‌موضعی $A(X, Y, Z)$ را چنان تعریف کرده‌ایم که $A(X, Y, Z)$ صادق است اگر و فقط اگر دقیقاً یکی از X، Y و Z صادق باشد.

(آ) با استفاده از رابط‌های $\{\neg, \vee\}$ جمله‌ای بسازید معادل با $A(X, Y, Z)$.

(ب) نشان بدهید رابط دوموضعی $\square$ و $\bigcirc$ای وجود ندارند چنانکه

$$A(X, Y, Z) \mathrel{=}\!\mathrel{|}\!\mathrel{\models} (X \square Y) \bigcirc Z$$

پاسخ:

۱.

$$\neg(\neg X \vee Y \vee Z) \vee \neg(X \vee \neg Y \vee Z) \vee \neg(X \vee Y \vee \neg Z)$$

۲. فرض کنید جدول درستی ادات $\square$ چنین باشد:

$X \square Y$	Y	X
a	T	T
b	F	T
c	T	F
d	F	F

حال باید داشته باشیم

$$a \circ T = b \circ T = c \circ T = F \qquad d \circ T = T$$

با توجه به اینکه تنها دو ارزش صدق داریم، می‌توانیم نتیجه بگیریم $a = b = c$ و $a \neq d$. اما واضح است که $a \circ F = F$ در حالی که $b \circ F = T$ که نتیجه می‌دهد $a \neq b$. در نتیجه چنین دو رابطی وجود ندارند.

$\square$

سوال ۱۷. برای n دلخواه ثابت کنید

$$A \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \mathrel{=}\!\mathrel{|}\!\mathrel{\models} (A \vee B_1) \wedge \ldots \wedge (A \vee B_n)$$

پاسخ: فرض می‌کنیم همه‌ی فرمول‌های A و B_1 تا B_n اتم‌اند. واضح است که اگر حکم را در این حالت ثابت کنیم، حکم در باقی حالت‌ها نیز ثابت شده است چرا که هر مصداق از یک توتولوژی توتولوژی است.

برای اثبات حکم از استقرا استفاده می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا قرار دهید $n = 2$. در این حالت کافی است جدول درستی دو سوی هم‌ارزی را رسم کنیم:

$(A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2)$	$A \vee (B_1 \wedge B_2)$	B_2	B_1	A
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	F	T
T	T	F	F	T
T	T	T	T	F
F	F	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

حال فرض کنید حکم برای $n = k$ ثابت شده است. این هم‌ارزی از حالت پایه‌ی استقرا نتیجه می‌شود:

$$A \vee ((B_1 \wedge \ldots \wedge B_k) \wedge B_{k+1}) \mathrel{=\!\!\mid\models} (A \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_k) \wedge (A \vee B_{k+1})$$

نیز، با استفاده از قضایای ثابت‌شده در مبحث جایگزینی و مفروض بودن حکم برای $n = k$ می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$(A \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_k) \wedge (A \vee B_{k+1}) \mathrel{=\!\!\mid\models} (A \vee B_1) \wedge \ldots (A \vee B_k) \wedge (A \vee B_{k+1})$$

□

سوال ۱۸. ۱. فرض کنید A فصلی از لیترال‌ها باشد. الگوریتمی ارائه کنید که ابتدا بررسی کند آیا A یک توتولوژی هست یا نه و در صورتی که A یک توتولوژی باشد استنتاجی برای آن در دستگاه استنتاج طبیعی گنتزن ارائه کند.

۲. فرض کنید A فرمولی در صورت نرمال عطفی (CNF) باشد. الگوریتمی ارائه کنید که ابتدا بررسی کند آیا A یک توتولوژی هست یا نه و در صورتی که A یک توتولوژی باشد استنتاجی برای آن در دستگاه استنتاج طبیعی گنتزن ارائه کند.

الگوریتمی طراحی کنید که اگر برای مدتی نامتناهی به اجرا گذاشته شود همه‌ی توتولوژی‌های منطق گزاره‌ها را خروجی دهد. ثابت کنید الگوریتمتان کار خواسته‌شده را به‌درستی انجام می‌دهد.

پاسخ: تابع g را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(A)=\begin{cases} 2\cdot 3^{n+1} & \text{if } A=p_n \\ 2^2\cdot 3^{g(A_1)} & \text{if } A=(\neg A_1) \\ 2^3\cdot 3^{g(A_1)}\cdot 5^{g(A_2)} & \text{if } A=(A_1\wedge A_2) \\ 2^4\cdot 3^{g(A_1)}\cdot 5^{g(A_2)} & \text{if } A=(A_1\vee A_2) \\ 2^5\cdot 3^{g(A_1)}\cdot 5^{g(A_2)} & \text{if } A=(A_1\to A_2) \end{cases}$$

واضح است که این تابع به هر فرمول عددی یکتا نسبت می‌دهد. اگر یک عدد ورودی بگیریم، به‌سادگی می‌توانیم با تجزیه‌ی آن عدد به عوامل اول بررسی کنیم آیا این عدد در یکی از عبارات تعریف g قرار می‌گیرد یا نه، و در صورت لزوم همین کار را درباره‌ی توان عوامل اول آن نیز انجام بدهیم تا نهایتاً تعیین کنیم آیا فرمولی وجود دارد که تابع g به آن این عدد را نسبت بدهد یا نه و اگر چنین فرمولی وجود دارد این فرمول چیست. پس از بازسازی فرمول، به‌سادگی می‌توان اتم‌های آن را مشخص کرد و با ترسیم جدول‌ارزش توتولوژی بودن آن را تعیین کرد. واضح است که برای هر عدد طبیعی هر دوی این مراحل در زمان متناهی پایان می‌پذیرند. حال یک رایانه می‌تواند به‌ترتیب این فرمول را روی همه‌ی اعداد طبیعی از کوچک به بزرگ انجام بدهد و هر گاه به عددی می‌رسد که فرمول متناظرش توتولوژی است آن را چاپ کند. این برنامه اگر به مدت نامتناهی به اجرا گذاشته شود همه‌ی توتولوژی‌ها را خروجی می‌دهد زیرا به ازای هر توتولوژی A، این الگوریتم نهایتاً به $g(A)$ می‌رسد و پس از بازسازی A از روی $g(A)$ و بررسی توتولوژی بودنش آن را خروجی می‌دهد. $\square$

سوال ۱۹. در سال ۱۹۷۶ کنت آپل و ولفگانگ هاکن ثابت کردند هر نقشه‌ی متناهی را می‌توان با چهار رنگ رنگ‌آمیزی کرد، یعنی با چهار رنگ می‌توان هر نقشه‌ی متناهی را چنان رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو کشور همجوار هم‌رنگ نباشند. (یکی از دلایل شهرت این قضیه، قضیه‌ی چهار رنگ، استفاده‌ی گسترده‌ی ریاضی‌دانان از رایانه در اثبات آن است.) با فرض گرفتن این قضیه برای نقشه‌های متناهی ثابت کنید همین حکم درباره‌ی نقشه‌های نامتناهی نیز صادق است.

سوال ۲۰. با استفاده از استدلال‌های معناشناختی نشان بدهید فرمول‌های زیر معتبر هستند یا نه. برای فرمول‌هایی که معتبر نیستند مدل نقض ارائه کنید.

۱. $(\exists x\forall yR(x,y))\leftrightarrow(\forall y\exists xR(x,y))$

۲. $\exists x(P(x)\to\forall yP(y))$

سوال ۲۱. فرض کنید زبان $\mathcal{L}$ تنها دارای نماد تساوی است. مجموعه‌ی Γ از جملات زبان $\mathcal{L}$ را ارائه کنید که به ازای هر عدد طبیعی k مدلی با $2k$ عضو داشته باشد اما مدلی با $2k+1$ عضو نداشته باشد.

سوال ۲۲. برای رابط سه‌تایی «اگر p آنگاه q در غیر این صورت r» یک تعریف جدول‌ارزشی ارائه بدهید. سپس یک فرمول گزاره‌ای در زبان $\{\neg, \wedge, \rightarrow\}$ که معادل با این رابط باشد ارائه کنید.
پاسخ: تعریف جدول‌ارزشی رابط مطلوب به شکل زیر است:

p	q	r	if p then q else r
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

همچنین رابط مطلوب معادل با گزارهٔ $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ است. $\square$

سوال ۲۳. تابع $d(\psi)$ نمایانگر عمق فرمول ψ است که به عنوان ارتفاع درخت تجزیهٔ آن تعریف می‌شود. این تابع را به صورت استقرایی روی مجموعهٔ همهٔ گزاره‌ها تعریف کنید.
پاسخ: بدون جواب $\square$

سوال ۲۴. نشان بدهید عبارت‌های $((p_1 p_2)$ و $()p_1$ فرمول نیستند.
پاسخ: بدون جواب $\square$

سوال ۲۵. زیرفرمول‌های فرمول $\neg((p_1 \vee p_2) \wedge p_2)$ را به طور کامل بنویسید.
پاسخ: بدون جواب $\square$

سوال ۲۶. برای فرمول $\neg p_3 \vee (p_1 \rightarrow p_3)$ یک دنباله‌ی ساختمان بنویسید و درخت تجزیهٔ آن را رسم کنید.
پاسخ: بدون جواب $\square$

سوال ۲۷. تعیین کنید کدام یک از فرمول‌های زیر توتولوژی هستند:

$$(p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_2 \rightarrow p_1), (p_1 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_1, (p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_1 \vee p_2), (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1$$

سوال ۲۸. ثابت کنید

(آ) اگر $\psi \models \phi$ و $\sigma \models \psi$ آنگاه $\sigma \models \phi$.

(ب) $\models \phi \to \psi$ اگرر $\phi \models \psi$

پاسخ: ۲بدون جواب □

سوال ۲۹. ثابت کنید برای هر ارزیاب v داریم $[\![\phi \to \psi]\!]_v = 1$ اگرر $[\![\phi]\!]_v \leqslant [\![\psi]\!]_v$.
پاسخ: ببدون جواب □

سوال ۳۰. فرمول‌های زیر را به صورت نرمال عطفی ترجمه کنید:

$$p_1 \to p_2, (p_1 \to p_2) \wedge (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$$

سوال ۳۱. برای توتولوژی بودن یا همواره کاذب بودن فرمول‌هایی که در صورت نرمال عطفی هستند یک معیار ارائه کنید.

سوال ۳۲. رابط $\downarrow$ چنان تعریف شده که $\phi \downarrow \psi$ صادق است اگرر ϕ و ψ هر دو کاذب باشند. رابط‌های $\{\neg, \to, \vee, \wedge\}$ را بر حسب $\downarrow$ تعریف کنید.
پاسخ: بدون جواب □

سوال ۳۳. ثابت کنید $\Gamma \models \phi$ اگرر $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ارضاناپذیر است.
پاسخ: ابتدا ثابت می‌کنیم اگر طرف راست برقرار باشد طرف چپ برقرار است. فرض می‌کنیم $\Gamma \models \phi$. این یعنی هر ارزیاب v که به تمام فرمول‌های عضو Γ مقدار صادق نسبت بدهد، به ϕ هم مقدار صادق نسبت می‌دهد. به عبارت دیگر، هیچ ارزیابی وجود ندارد که به تمام فرمول‌های عضو Γ مقدار صادق و به ϕ مقدار کاذب نسبت بدهد. از آنجا که مقدار کاذب نسبت دادن به ϕ همان مقدار صادق نسبت دادن به $\neg\phi$ است، این یعنی $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ ارضاناپذیر است.
حال ثابت می‌کنیم اگر طرف چپ برقرار باشد طرف راست برقرار است. فرض می‌کنیم $\Gamma \cup \{\phi\}$ ارضاناپذیر است؛ یعنی هیچ ارزیاب v وجود ندارد که به همهٔ اعضای Γ و $\neq \phi$ مقدار صادق نسبت دهد. به عبارت دیگر، هیچ ارزیاب v وجود ندارد که به همهٔ اعضای Γ مقدار صادق و به ϕ مقدار کاذب نسبت بدهد. این یعنی هر ارزیاب v که به همهٔ اعضای Γ مقدار صادق نسبت دهد به ϕ هم مقدار صادق نسبت می‌دهد. جملهٔ اخیر معادل با $\Gamma \models \phi$ است. □