TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM Jan Rots

Antwoordformulier

UITWERKINGEN
concept

CTB2210 Constructiemechanica 3

Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.
Kladpapier wordt niet ingenomen.
Het nietje mag niet verwijderd worden.

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.
Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.
Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier.

Aantal opgaven: 5.
De opgaven hebben verschillende weging. Het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Rekenmachine, grafische rekenmachine, tekenmaterialen waaronder passer.

Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Boeken, dictaten, aantekeningen, andere formulebladen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies.

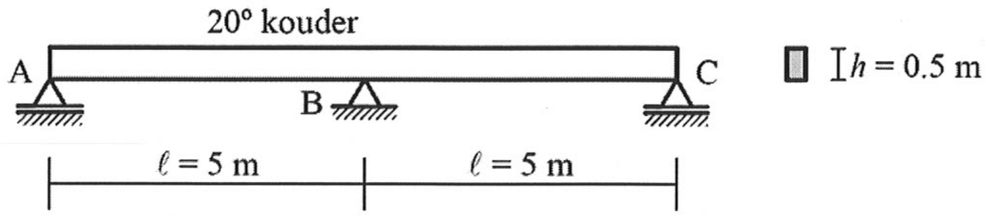
Mobiel UIT en opbergen in tas.
Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 1: Statisch onbepaalde constructie (ongeveer 35 minuten)

Gegeven: Een doorgaande ligger, als aangegeven. In een koude januarimaand wordt de bovenzijde van de ligger 20° kouder dan de onderzijde. De hoogte h van de ligger en de lengtematen l zijn aangegeven. Verder is de buigstijfheid EI = 10^4 kNm^2 en de uitzettingscoëfficient $\alpha = 10^{-5}$ per Kelvin.

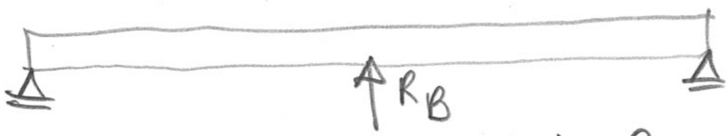


Gevraagd:

a. Schets onderstaand de momentenlijn met buigtekens, zonder te rekenen. Beredeneer hoe u tot deze momentenlijn komt, in maximaal 5 regels tekst desgewenst ondersteund met schetsje(s).

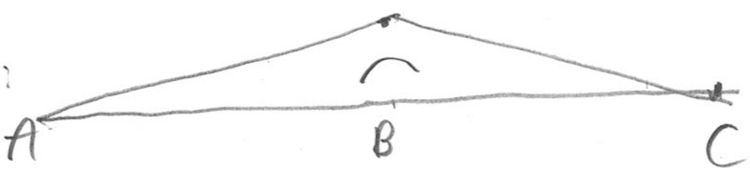
Ligger wil boven korter worden dan onder,
dus wil krommen:

Dit wordt verhinderd door de oplegreactie bij B.
⟹ er ontstaat een oplegreactie bij B omhoog



Geeft een buigend moment bij B met buigteken als volgt:

M-lijn:



STUDIENUMMER

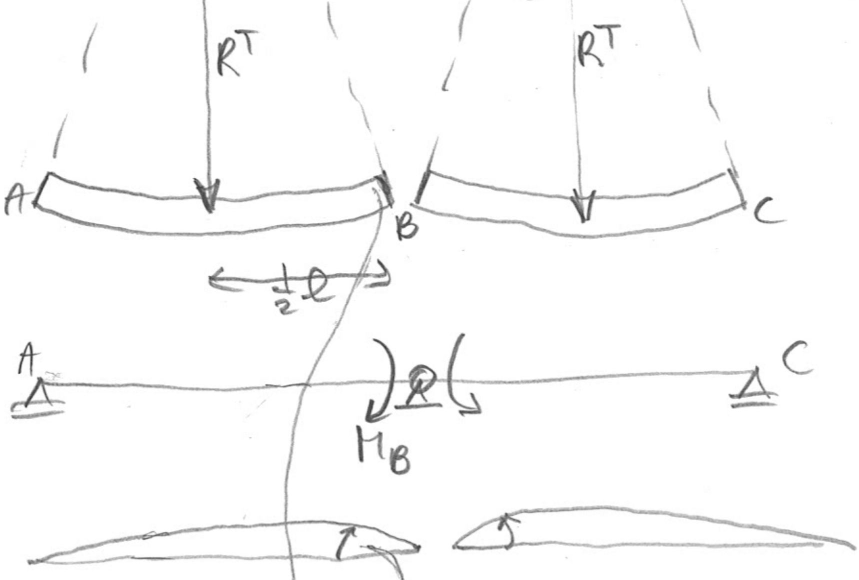
NAAM

b. Bereken het moment boven steunpunt B.
   Aanwijzing: het formuleblad bevat een formule voor kromming t.g.v. temperatuur.

Eerste methode: scharnier bij B, en M_B als onbekende:

t.g.v. temp:

t.g.v. M_B:



$$\varphi_B^{BA} = +\frac{\frac{1}{2}l}{R^T} - \frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI}$$

links: $R^T = \frac{1}{\kappa^T}$

$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$

$$\varphi_B^{BA} = \frac{1}{2}\frac{l\alpha\Delta T}{h} - \frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI}$$

rechts: $\varphi_B^{BC} = -\frac{\frac{1}{2}l}{RT} + \frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI} \Rightarrow \varphi_B^{BC} = -\frac{1}{2}\frac{l\alpha\Delta T}{h} + \frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI}$

Vormveranderingsvoorwaarde:

$$\varphi_B^{BA} = \varphi_B^{BC} \Rightarrow \frac{l\alpha\Delta T}{h} = \frac{2}{3}\frac{M_B l}{EI} \Rightarrow M_B = \frac{3}{2}\frac{EI\alpha\Delta T}{h}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{10^4\cdot 10^{-5}\cdot 20}{0{,}5}$$

$$= 6 \text{ kNm}$$

Nodig bij vraag c):

$\kappa^T = \frac{10^{-5}\cdot 20}{0{,}5} = 4\cdot 10^{-4} = 0{,}0004 \ (\frac{1}{m})$

$\kappa^M = \frac{M_B}{EI} = \frac{6}{10^4} = 6\cdot 10^{-4} = 0{,}0006 \ (\frac{1}{m})$

totaal $\kappa_B^{tot} = 0{,}0006 - 0{,}0004 = 0{,}0002 \ (\frac{1}{m})$

Variant

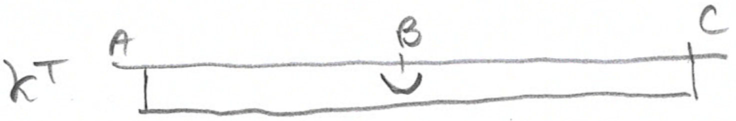
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM

b. Bereken het moment boven steunpunt B.
   Aanwijzing: het formuleblad bevat een formule voor kromming t.g.v. temperatuur.

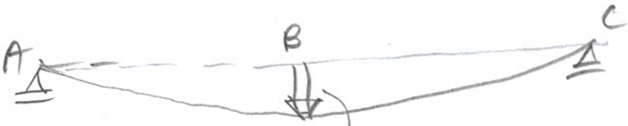
alternatief: B_v als onbekende



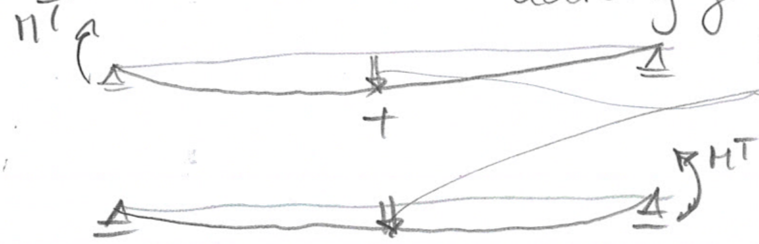
$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h} = \frac{10^{-5} \cdot 20}{0{,}5} = 4 \cdot 10^{-4}$$
$$= 0{,}0004 \ (\tfrac{1}{m})$$

Dit kun je opvatten als ligger met momenten aan uiteinden:

$$M^T = EI \cdot \kappa^T$$
$$= 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 4 \text{ kNm}$$

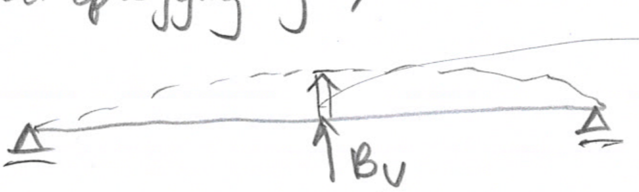


hierdoor zou in het midden een doorbuiging willen ontstaan van:



$$w_B^T = 2 \cdot \frac{1}{16} \frac{"Tl^2"}{EI} \rightarrow \text{let op } "l" = 2l$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{M^T (2l)^2}{EI}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{M^T l^2}{EI} \downarrow$$

Er zit oplegging bij B, dus:



$$w_B^{t.g.v. B_v} = \frac{1}{48} \frac{B_v \cdot (2l)^3}{EI} \uparrow$$

Vormveranderingsvoorwaarde: $w_B^{totaal} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{M^T l^2}{EI} - \frac{1}{48} \frac{B_v \cdot (2l)^3}{EI} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} M^T - \frac{1}{6} B_v l = 0$$

$$\Rightarrow B_v = \frac{3 M^T}{l} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ kN}$$

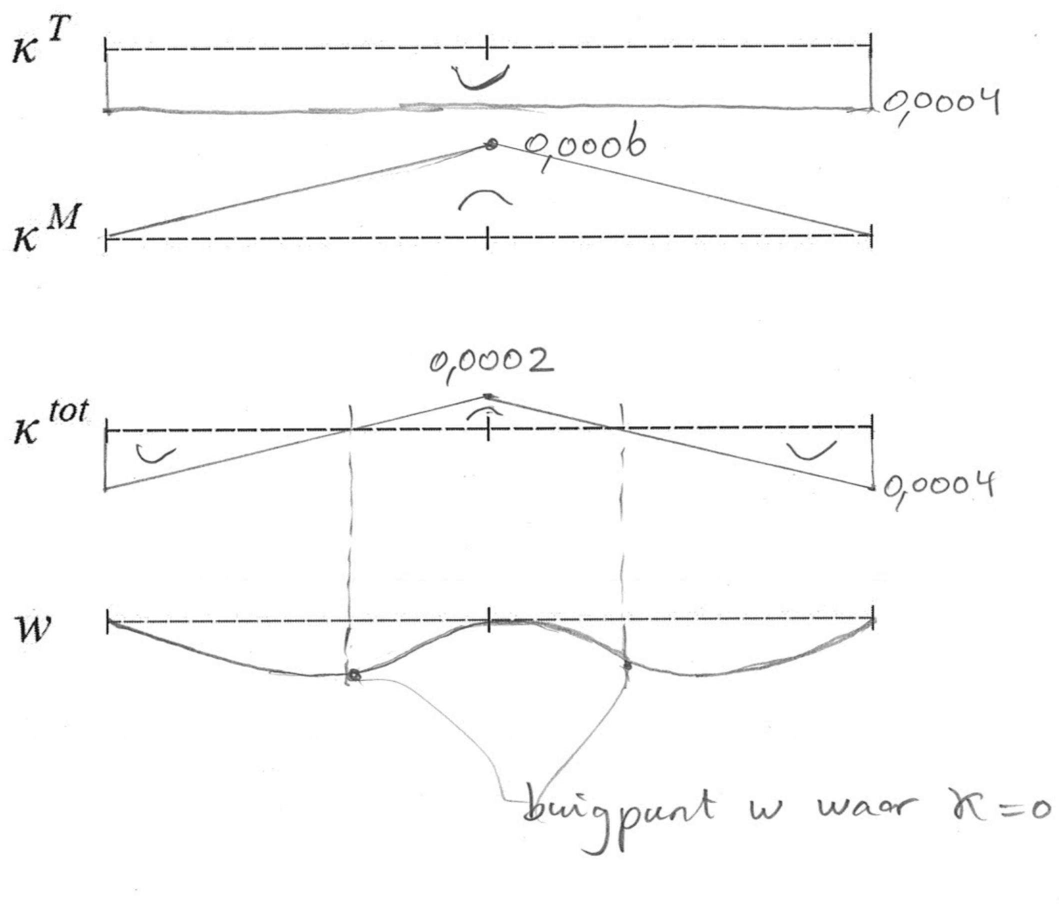
dus $M_B = \frac{1}{4} \cdot B_v \cdot 2l = \frac{1}{4} \cdot 2{,}4 \cdot 10 = 6 \text{ kNm}$

κ's: zie vorige

3b

STUDIENUMMER
NAAM

c. Schets onderstaand het krommingsverloop ten gevolge van temperatuur κ^T , het krommingsverloop ten gevolge van de buigende momenten κ^M , het verloop van de totale kromming κ^{tot} , en vervolgens het verloop van de doorbuiging w van de balk. Schrijf buigtekens en waarden van krommingen erbij.
Opmerking: mocht u bij vraag b) het spoor bijster zijn geraakt, dan kunt u deze vraag toch beantwoorden, in kwalitatieve zin.

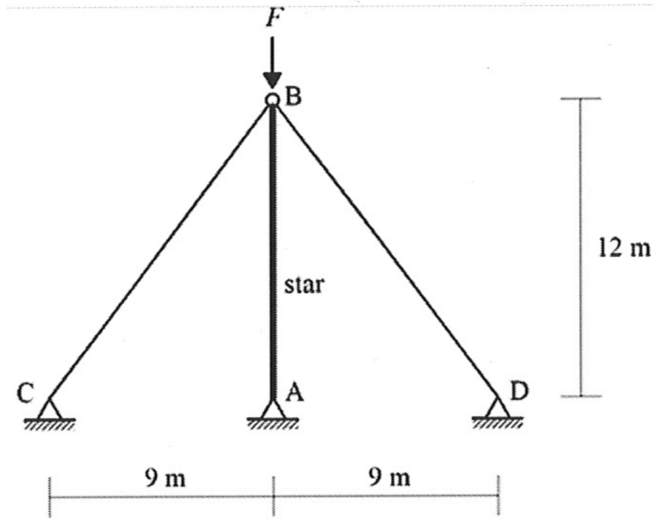


TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 3: Stabiliteit (ongeveer 25 minuten)

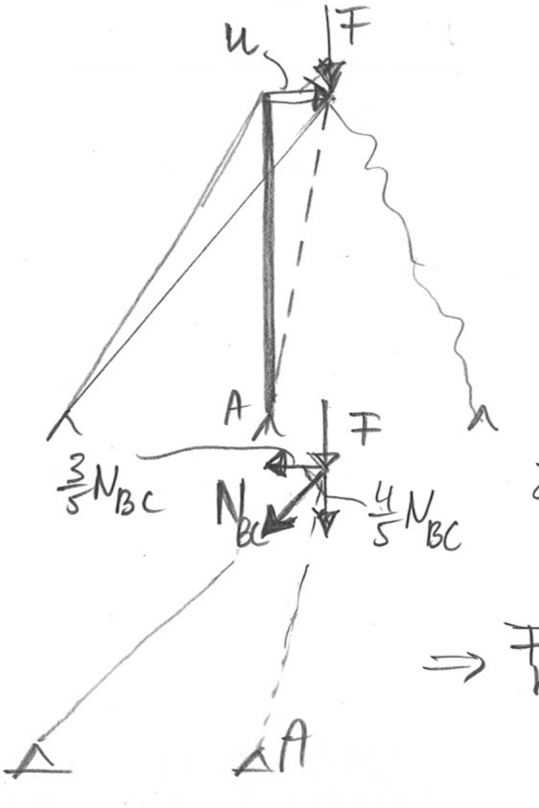
Gegeven: een oneindig buigstijve en oneindig rekstijve mast AB is afgetuid met twee draden, BC en BD. De draden hebben een rekstijfheid $EA = 2500$ kN. De mast heeft een hoogte $h = 12$ m. De draden hebben een lengte $l = 15$ m. In verticale stand van AB staan beide draden strak maar zijn verder spanningsloos. De invloed van eigen gewicht van mast en draden wordt buiten beschouwing gelaten. De constructie is onderstaand weergegeven.

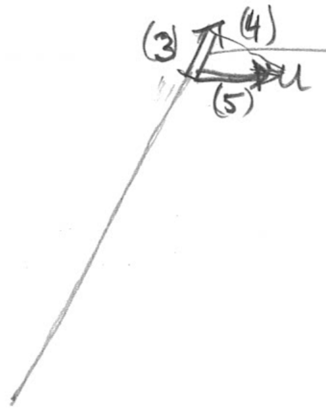


Gevraagd:

a. De knikkracht F_k. Aanwijzing: als u een verplaatsing aanbrengt, neem dan aan dat deze dermate klein is ten opzichte van de lengteafmetingen dat de richtingsverandering van de draad/draden mag worden verwaarloosd, d.w.z. normaalkracht en lengteverandering in de draad/draden werken in de 3:4 richting.

Beschouw evenwicht in de verplaatste stand:





$\Delta l_{BC} = \frac{3}{5}u$

$N_{BC} = \frac{EA_{BC}}{l_{BC}} \cdot \Delta l_{BC} = \frac{EA_{BC}}{l_{BC}} \cdot \frac{3}{5}u$

$\Sigma T|A = 0 \Rightarrow F \cdot u - \frac{3}{5} N_{BC} \cdot h_{AB} + \frac{4}{5} N_{BC} \cdot u = 0$

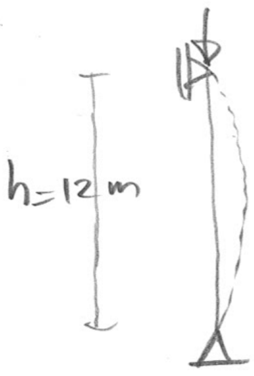
$\Rightarrow F \cdot u - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} u \cdot \frac{EA_{BC}}{l_{BC}} \cdot h + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cancel{u \cdot u} \cdot \frac{EA_{BC}}{l_{BC}} = 0$

verwaarlozen: $u^2 << u$

$\Rightarrow F_k = \frac{9}{25} \frac{EA_{BC}}{l_{BC}} \cdot h_{AB} = \frac{9}{25} \cdot \frac{2500}{15} \cdot 12 = \underline{720 \text{ kN}}$

b. Stel: de mast is niet meer oneindig buigstijf maar heeft nu een buigstijfheid $EI = 10000$ kNm^2. De rekstijfheid EA van de mast blijft oneindig. De draden hebben dezelfde rekstijfheid als bij vraag a.
Gevraagd: Bepaal opnieuw de knikkracht F_k. Maak uw aanpak duidelijk. Mocht u bij vraag a zijn vastgelopen, dan kunt u hier alsnog de aanpak omschrijven en een deelantwoord geven.

Naast globale knik (vraag a) nu ook partiële knik mogelijk.
Staaf AB kan uitknikken.
Is geschoorde (getuide), vrij opgelegde staaf.



$l_k = h = 12$ m

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10000}{12^2} \approx \underline{685{,}4 \text{ kN}}$$

deze is kleiner dan de 720 kN voor globale knik
dus is maatgevend:

$\underline{F_k = 685{,}4 \text{ kN}}$

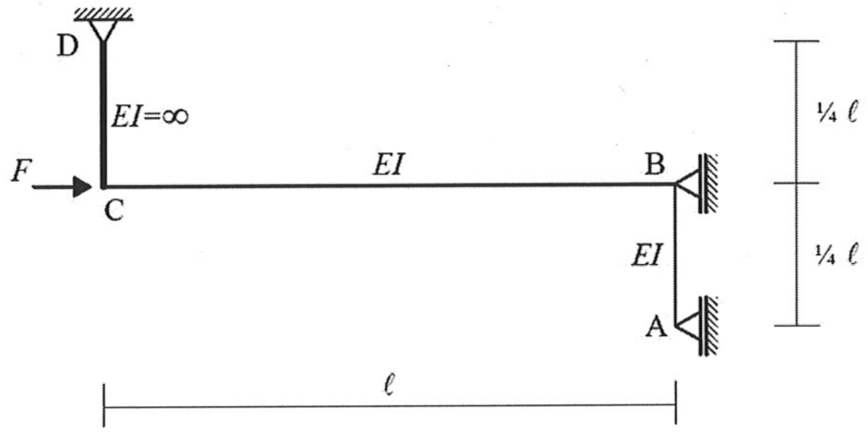
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM

Opgave 4: Stabiliteit (ongeveer 35 minuten)

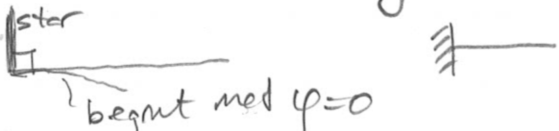
Gegeven: onderstaande constructie ABCD met opleggingen en puntlast als aangegeven. De buigstijfheid van deel CD is oneindig. De overige delen hebben buigstijfheid *EI*. De lengtematen zijn aangegeven en uitgedrukt in *l*. Normaalkrachtvervorming wordt verwaarloosd.



Gevraagd:

a) Bepaal de grenzen waarbinnen de kniklengte zal liggen, uitgedrukt in *EI* en *l*.

- Geen normaalkrachtvervorming in BC → C blijft op z'n plek
  → inklemming bij C want momentvaste verbinding
- Ongeschoord (rollen bij A en B)

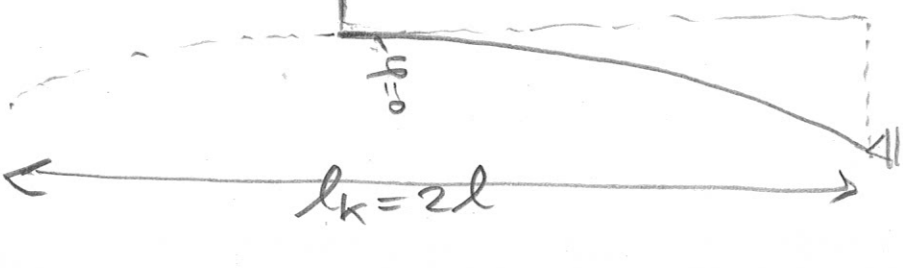


Stel: veer AB ∞ stijf:

$\ell_k = \ell$

Stel: veer AB heel slap:

dus $\ell < \ell_k < 2\ell$



$\ell_k = 2\ell$

b) Bepaal de grenzen waarbinnen de kniklast zal liggen, uitgedrukt in *EI* en *l*.

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

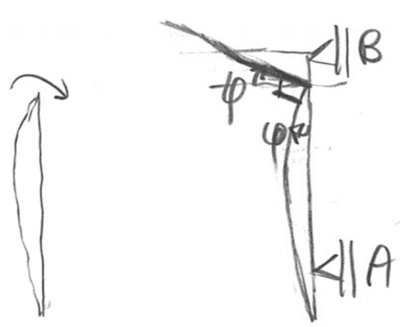
veer AB heel stijf $\Rightarrow l_k = l \Rightarrow F_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

veer AB heel slap $\Rightarrow l_k = 2l \Rightarrow F_k = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EI}{l^2}$

dus: $\frac{1}{4}\frac{\pi^2 EI}{l^2} < F_k < \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

c) Geef een schets van het model met rotatieveren waarmee de kniklast van deze constructie kan worden bepaald.

Ongeschoord



$$\varphi_B = \frac{1}{3}\frac{M_B \cdot l_{AB}}{EI_{AB}} = \frac{1}{3}\frac{M_B \cdot \frac{1}{4}l}{EI} = \frac{1}{12}\frac{M_B l}{EI}$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{12\,EI}{l} \cdot \varphi_B$$

$$k_{r2} = \frac{12\,EI}{l}$$

STUDIENUMMER

NAAM

d) Bepaal de kniklast F_k van deze constructie, uitgedrukt in EI en l.

Ongeschoord tweezijdig verend ingeklemd → η formule nodig

$$\rho_1 = \frac{k_{r1} \cdot l}{EI} = \infty \Rightarrow n_1 = 4 + \frac{10}{\infty} = 4$$

$$\rho_2 = \frac{k_{r2}\, l}{EI} = \frac{12EI}{l} \cdot \frac{l}{EI} = 12 \Rightarrow n_2 = 4 + \frac{10}{12} = 4{,}8333$$

$$F_k = \frac{(n_1 + n_2)^2}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{(4 + 4{,}8333)^2}{4 \cdot 4{,}8333 \cdot (4 + 4{,}8333 - 4)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$= \frac{78{,}027}{19{,}332 \cdot 4{,}8333} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} \approx 0{,}835 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

e) Bepaal de kniklengte l_k van deze constructie, uitgedrukt in EI en l.

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \Rightarrow l_k = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{F_k}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{\pi^2 EI}}{0{,}835 \cancel{\pi^2 EI}} \cdot l^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{0{,}835}} \cdot \sqrt{l^2}$$

$$\approx 1{,}094 \cdot l$$

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

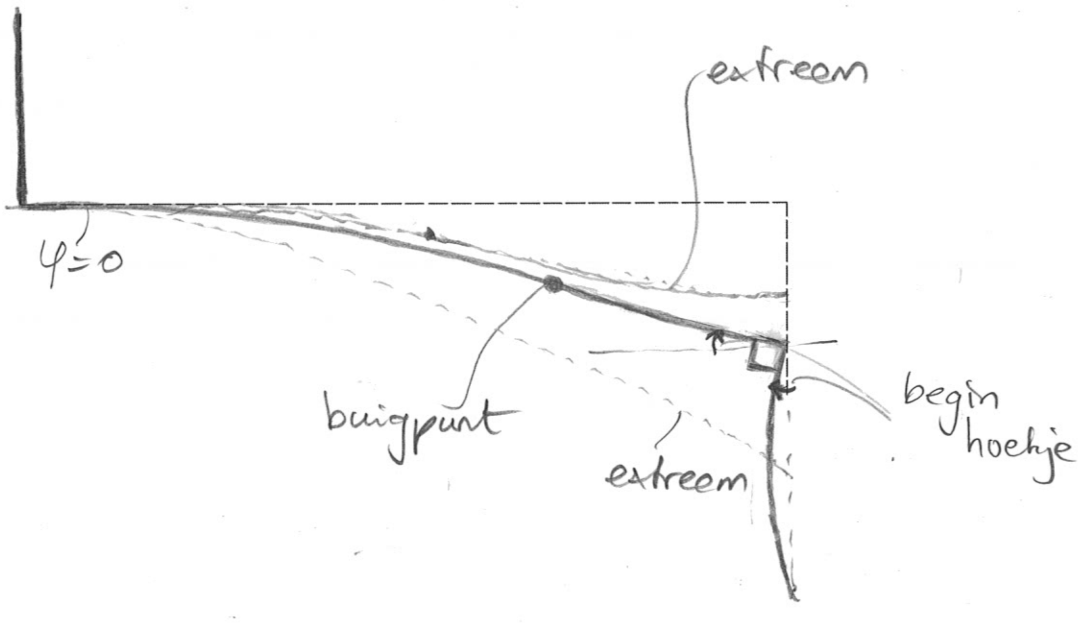
STUDIENUMMER
NAAM

f) Controleer of de kniklast en kniklengte inderdaad tussen de vooraf aangegeven grenzen liggen.

$$\ell < 1{,}094\,\ell < 2\ell$$

$$\frac{1}{4}\frac{\pi^2 EI}{\ell^2} < 0{,}835\frac{\pi^2 EI}{\ell^2} < \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

g) Schets onderstaand de knikvorm van deze constructie.

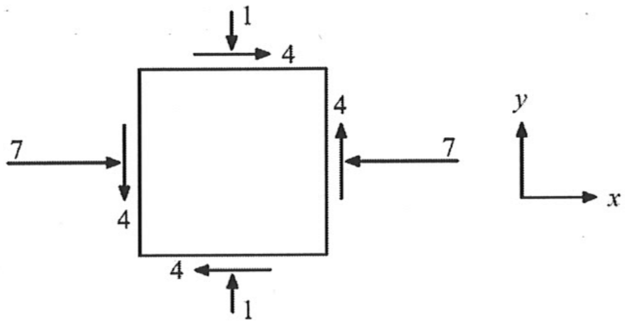


TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

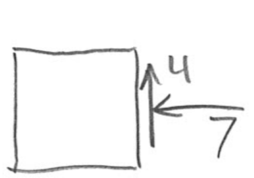
Opgave 5: Spanningsleer (ongeveer 45 minuten)

Gegeven: de homogene vlakke spanningstoestand volgens onderstaande figuur, met spanningen in N/mm^2.



Gevraagd:

a) Teken de cirkel van Mohr voor de spanningen en geef duidelijk het richtingencentrum en de hoofdrichtingen aan. Gebruik het ruitjespapier op de volgende bladzijde. Draai dat blad linksom.



$\sigma_{xx} = -7$ N/mm^2
$\sigma_{xy} = +4$ N/mm^2

A: (−7 ; +4)

$\sigma_{yy} = -1$ N/mm^2
$\sigma_{yx} = +4$ N/mm^2

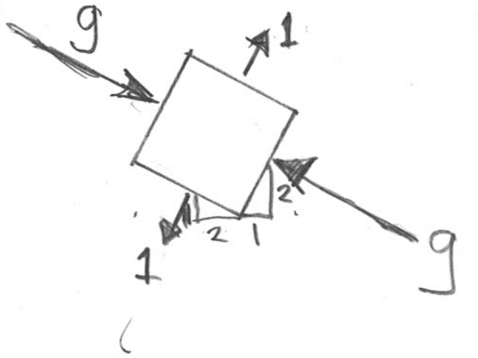
B: (−1 ; +4)

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
28 januari 2019 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM

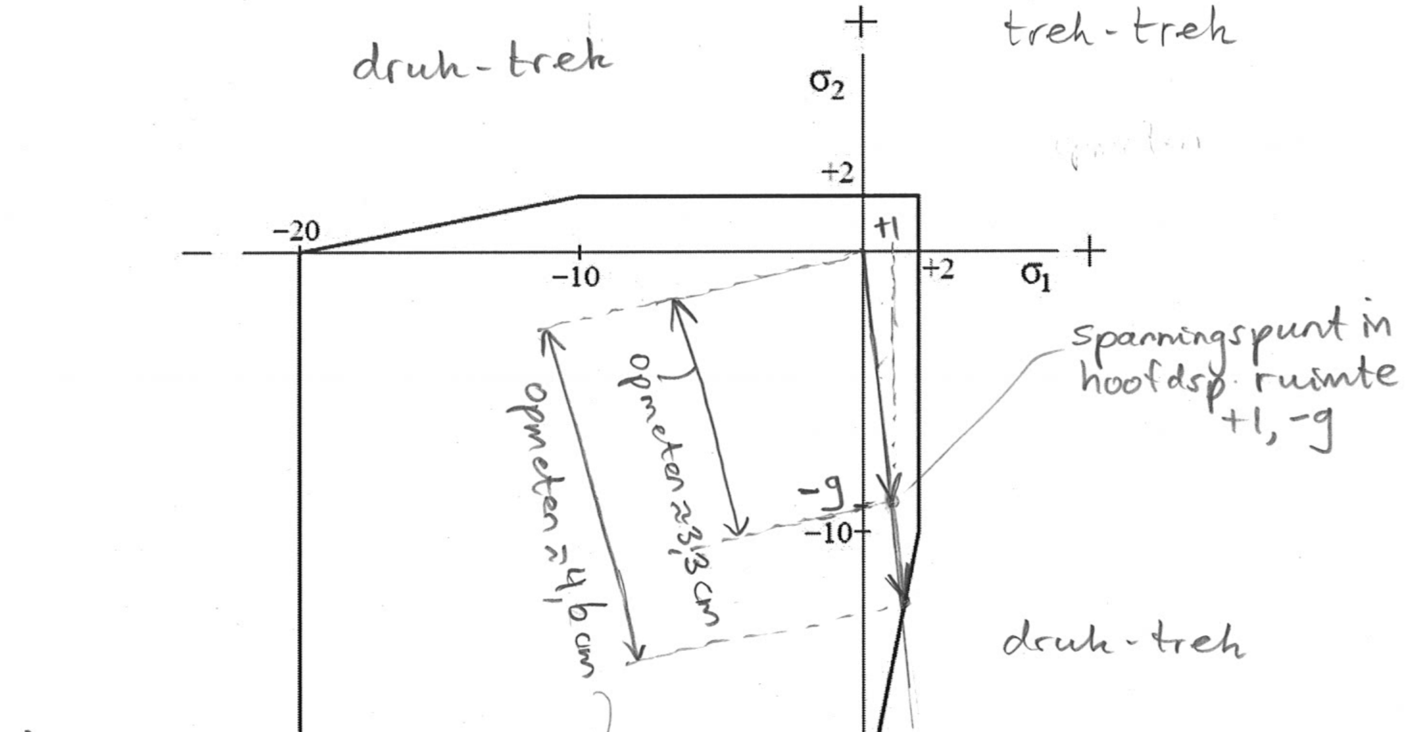
b) Bepaal uit de cirkel van Mohr de hoofdspanningen en geef deze onderstaand weer in een schets van een vierkant elementje met de juiste oriëntatie (elementje tekenen in de richting van de hoofdspanningen en hoofdspanningen aangeven op de zijden).



blokje onder 1 : 2

(geen schuifspanningen)

c) Stel: het materiaal is beton met een bezwijkcontour in de 2D hoofdspanningsruimte als onderstaand aangegeven.
Gevraagd: bepaal de marge van de spanningstoestand ten opzichte van bezwijken. Druk dit uit in een factor of percentage. Neem daarbij aan dat de spanningstoestand proportioneel toeneemt, d.w.z alle spanningen in het materiaalpunt nemen evenredig toe tot bezwijken.
U mag grafisch te werk gaan, een nauwkeurigheid van circa 5% is voldoende.

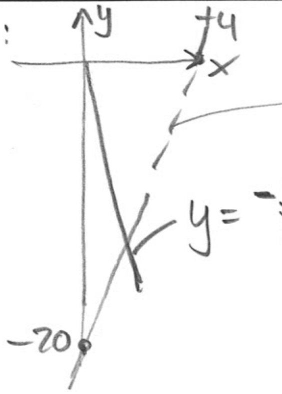


factor $\approx \frac{4,6}{3,3} \approx 1,39$

dus $\approx$ 39% marge tot bezwijkcontour

proportioneel vanuit de oorsprong

analytisch:



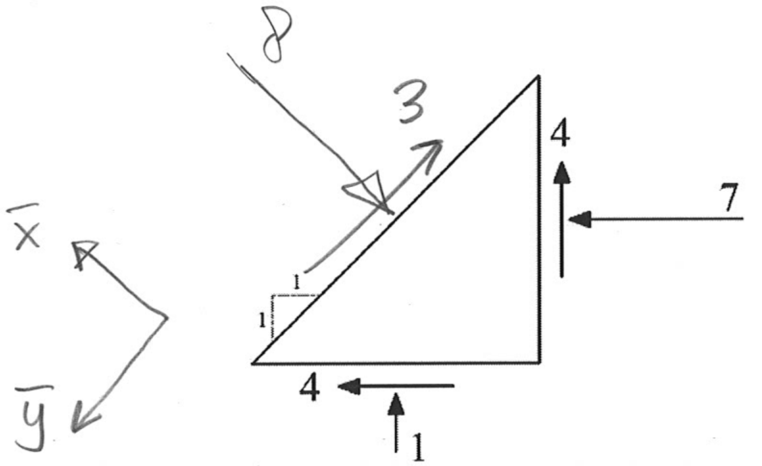
$y = +\frac{20}{4}\cdot x - 20 = 5x - 20$

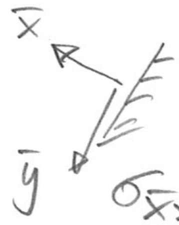
$y = \frac{-9}{1}\cdot x = -9x$

snijpunt: $-9x = 5x - 20$
$\Rightarrow -14x = -20$
$\Rightarrow x = \frac{20}{14} = 1{,}43$

t.o.v. $x = 1$ is dit 43 %
opmeten ≈ 39% → vrij onnauwkeurig maar ok.

d) Bepaal met behulp van de cirkel van Mohr de ontbrekende spanningen op onderstaand elementje, waarvan de schuine zijde onder 45° loopt. Teken deze spanningen, schrijf de waarden erbij.

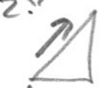




$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = -8 \,N/mm^2$

$\sigma_{\bar{x}\bar{y}} = -3 \,N/mm^2$

d.w.z.



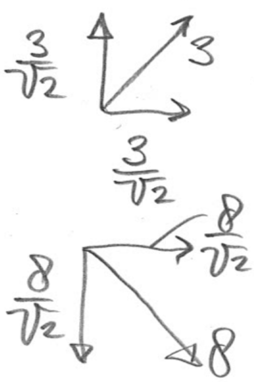
e) Controleer het krachtenevenwicht van het elementje uit de vorige deelvraag d.

vertical: ↑+ $1\cdot A + 4\cdot A + \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot A\sqrt{2} - \frac{8}{\sqrt{2}}\cdot A\sqrt{2} = 0$

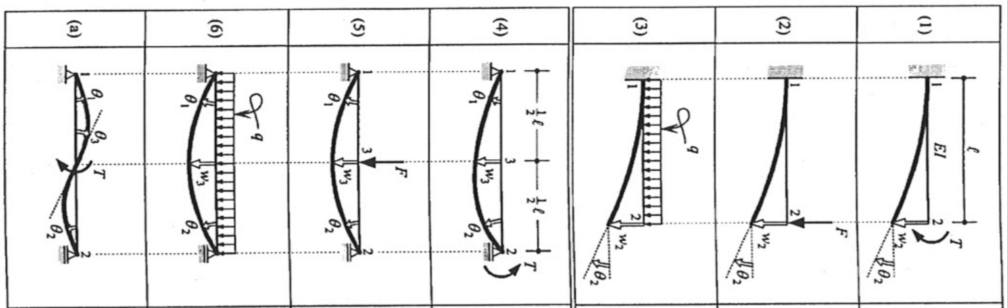
$\Rightarrow 5A + 3A - 8A = 0$ ✓

horizontaal: →+ $-4\cdot A - 7\cdot A + \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot A\sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{2}}\cdot A\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow -11A + 3A + 8A = 0$ ✓



FORMULEBLAD
(scheur dit deel los van het werk)



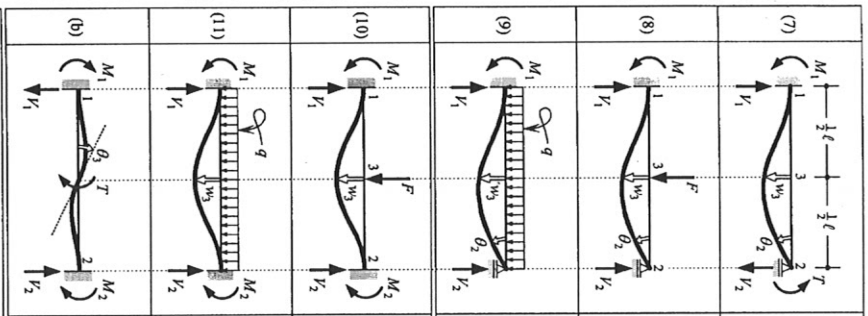
(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI};\ w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI};\ w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI};\ w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI};\ \theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI};\ w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI};\ w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI};\ w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI};\ \theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI};\ w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) — (4), (5), (6), (a)

vergeet-mij-nietjes — (1), (2), (3)

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) — (10), (11), (b)

statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd) — (7), (8), (9)



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI};\ w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{2}T;\ V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI};\ w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = \frac{3}{16}F\ell;\ V_1 = \frac{11}{16}F;\ V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI};\ w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2;\ V_1 = \frac{5}{8}q\ell;\ V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell;\ V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2;\ V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI};\ w_3 = 0$; $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T;\ V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

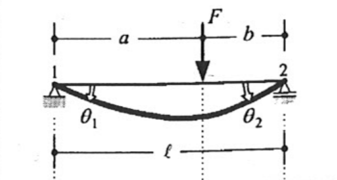
$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

von Mises : $\frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \le \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

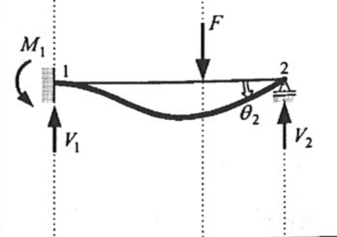
(c)



$$\theta_1 = \frac{Fab(\ell + b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fab(\ell + a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(d)



$$M_1 = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

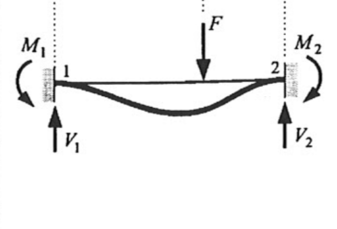
$$V_1 = \frac{Fb(3\ell^2 - b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3} = F\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI}\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

drie bij-de handjes

(e)



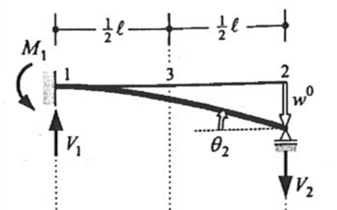
$$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_1 = \frac{Fb^2(\ell + 2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(\ell + 2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(f)



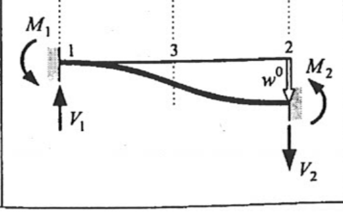
$$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_2 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$$

$$\theta_3 = \frac{9}{8}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16}w^0$$

zettingen

(g)



$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2}w^0$$

Tensortransformatie formules in *x*-*y* assenstelsel:

$$k_{\bar{x}\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) + \tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\cos 2\alpha + k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{y}\bar{y}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx} + k_{yy}) - \tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\cos 2\alpha - k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\bar{x}\bar{y}} = -\tfrac{1}{2}(k_{xx} - k_{yy})\sin 2\alpha + k_{xy}\cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx} - k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \tfrac{1}{2}\left(k_{xx} + k_{yy}\right) \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(k_{xx} - k_{yy}\right)\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \Rightarrow l_k = l\sqrt{4 + \frac{10}{\rho}} \quad \text{met:} \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha \cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x\right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met:} \quad \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1}; \ \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2}; \ \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

ρ-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met:} \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$