TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
31 januari 2024 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER

NAAM Jan Rots

Ruwe uitwerkingen

Antwoordformulier

CTB2210 Constructiemechanica 3

Maak alle opgaven op dit antwoordformulier. Lever dit formulier in.
Kladpapier wordt niet ingenomen.
Het nietje mag niet verwijderd worden.

Zet op alle bladen uw naam en studienummer.
Bladen zonder naam en studienummer worden niet geaccepteerd.

Relevante berekeningen vermelden.
Antwoorden zonder berekening/motivering worden niet gehonoreerd.
Gebruik zo nodig de onbedrukte zijden van het antwoordformulier. Tenzij anders vermeld, wordt het eigen gewicht van een constructie buiten beschouwing gelaten.

Aantal opgaven: 6.
De opgaven hebben verschillende weging. Een schatting van het gewicht is in tijd weergegeven.

Relevante **formulebladen** zijn bijgevoegd.

Toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Conventionele zakrekenmachientje, eenvoudige grafische rekenmachine (geen CAS of soortgelijke systemen, geen wifi en bluetooth), tekenmaterialen waaronder passer.

Niet toegestane hulpmiddelen en bronnen tijdens tentamen:
Boeken, dictaten, aantekeningen, andere formulebladen, oude tentamens, COZ- of andere uitwerkingen, woordenboeken, computer, mobiele telefoon, smart watch, smart phone of apparaten met vergelijkbare functies.

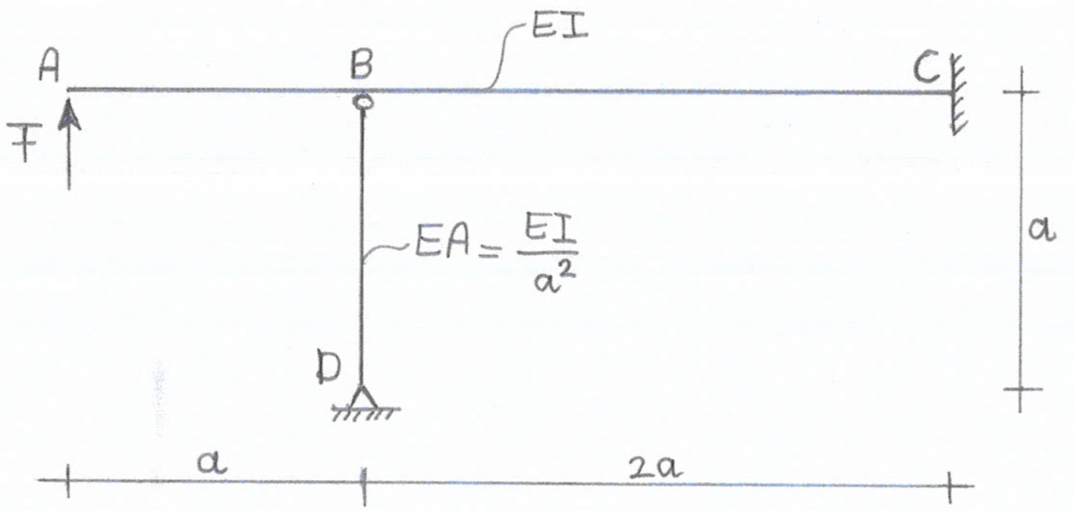
Mobiel UIT en opbergen in tas.
Elk vermoeden van fraude wordt gemeld bij de examencommissie.

STUDIENUMMER | | | | | | | |

NAAM

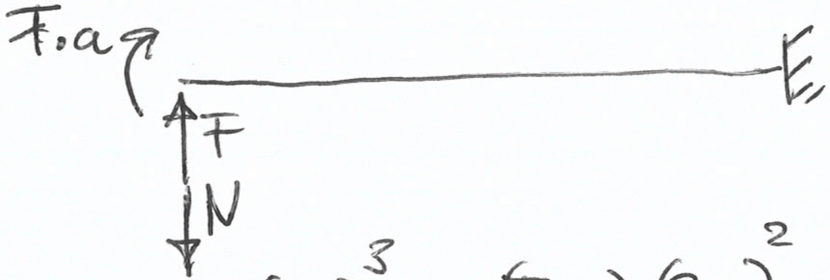
Opgave 1 (ongeveer 35 minuten)

Gegeven: doorgaande ligger ABC is ingeklemd bij C en ondersteund door een pendelstaaf DB bij B. De ligger wordt belast door een omhoog gerichte verticale puntlast *F* in A. De lengtematen zijn aangegeven en uitgedrukt in *a*. De buigstijfheid van ABC is *EI*. Er is normaalkrachtvervorming in staaf DB. De rekstijfheid *EA* van staaf DB is EI / a^2.
Deze opgave dient symbolisch te worden uitgewerkt. Let op: mocht u met de deelvragen a), b) en c) moeite hebben, dan kunt u toch, onafhankelijk, de deelvragen d), e) en f) beantwoorden.



Gevraagd:
a. Bepaal de normaalkracht *N* in pendelstaaf DB, uitgedrukt in *F* en *a.* Laat duidelijk alle stappen in uw uitwerking zien. Aanwijzing: *EI* en *EA* (uitgedrukt in *EI* en *a*) heb je nodig in de afleiding, maar ze komen niet voor in het antwoord.

Maak statisch bepaald, neem N_{BD} als onbekende.
F vervangen door kracht en moment t.p.v. B
aansluitvoorwaarde: $w_B = \frac{N \cdot l}{EA}$ → verlenging van BD



$$w_B = +\frac{1}{3}\cdot\frac{F\cdot(2a)^3}{EI} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(F\cdot a)\cdot(2a)^2}{EI} - \frac{1 N\cdot(2a)^3}{3EI}$$

…vervolg…

$$\Rightarrow w_B = \left(\frac{8}{3}+2\right)\frac{Fa^3}{EI} - \frac{8N\cdot a^3}{3EI} = \frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EI} - \frac{8}{3}\frac{Na^3}{EI}$$

$$\Delta l_{BD} = \frac{N l_{BD}}{EA_{BD}} = \frac{N\cdot a}{EI/a^2} = \frac{Na^3}{EI}$$

aansluitvw:

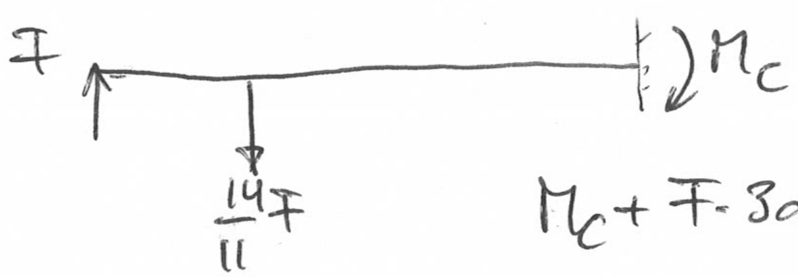
$$\frac{14}{3}\frac{Fa^3}{EI} - \frac{8}{3}\frac{Na^3}{EI} = \frac{Na^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{14}{3}F = \left(1+\frac{8}{3}\right)N$$

$$\Rightarrow F = \frac{3}{14}\cdot\frac{11}{3}N$$

$$\Rightarrow N = \frac{14}{11}F$$

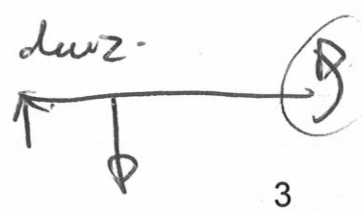
b. Bepaal het inklemmingsmoment in C, uitgedrukt in F en a.



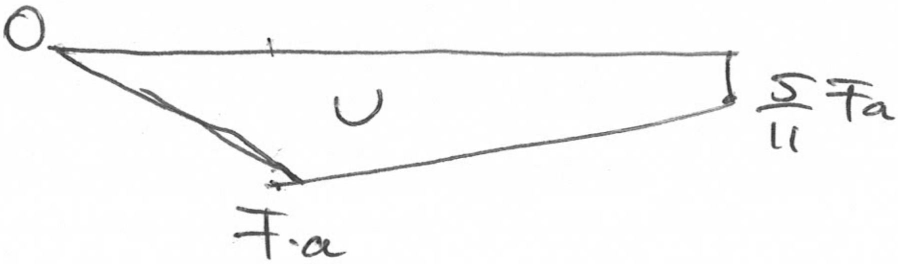
$$M_C + F\cdot 3a - \frac{14}{11}F\cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow M_C = \left(\frac{28}{11}-3\right)Fa$$

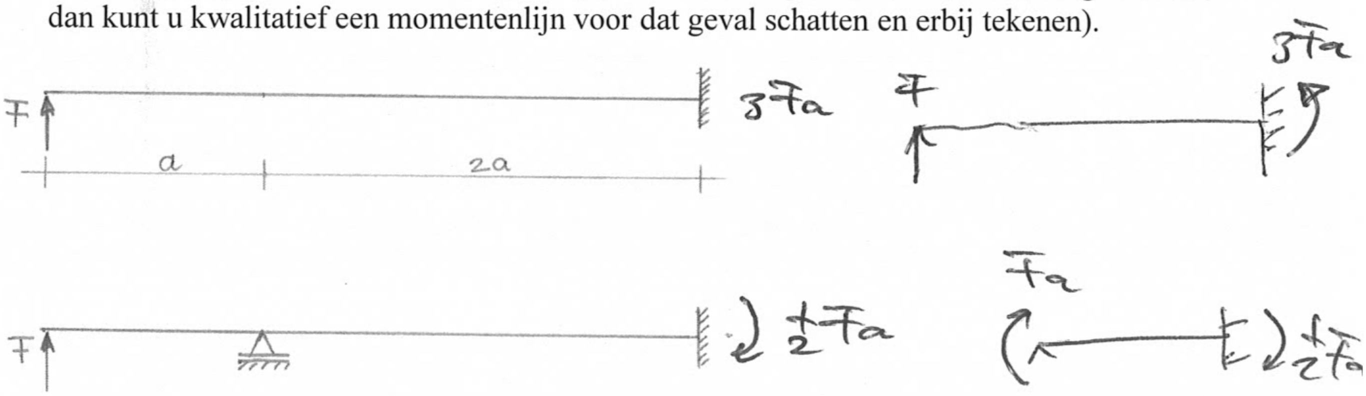
$$= -\frac{5}{11}Fa \quad \text{dwz.}$$

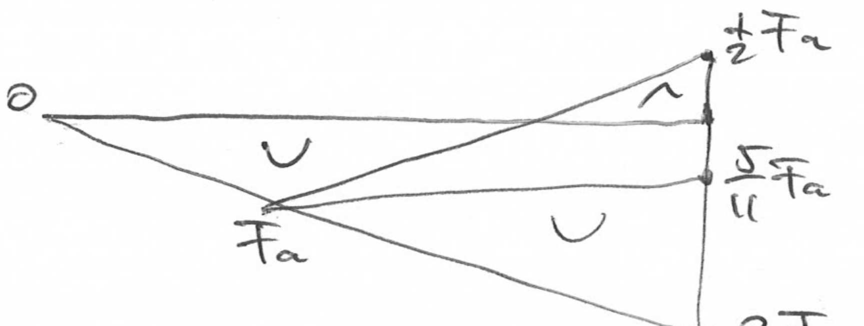


c. Schets onderstaand de momentenlijn voor ABC. Geef de buigtekens aan en de waarden in A, B en C, uitgedrukt in *F* en *a*.



d. Stel nu: we hebben twee alternatieve gevallen, één waarbij de pendelstaaf verwijderd is, en één waarbij de pendelstaaf vervangen is door een verticale roloplegging bij B, zoals onderstaand aangegeven. De verticale kracht in A en de inklemming bij C blijven hetzelfde. Bepaal en schets de momentenlijnen voor deze twee gevallen. Aanwijzing: een blad met allerlei vergeet-me-nietjes is toegevoegd aan dit antwoordformulier. Schets ook de bij deelvraag c) gevonden momentenlijn erbij (mocht u daar geen antwoord hebben gevonden, dan kunt u kwalitatief een momentenlijn voor dat geval schatten en erbij tekenen).





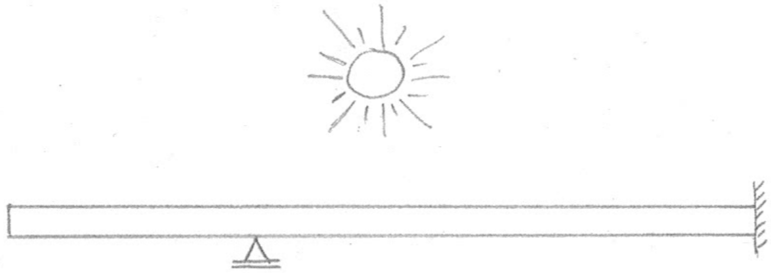
e. Welk kenmerkend aspect van statisch onbepaalde constructies wordt in deelvraag d) geillustreerd? Geef een korte beschouwing, in maximaal 5 regels tekst.

krachtswerking is afhankelijk van de stijfheden.

Staaf BD ∞ stijf
BD zeer slap
BD tussenin
→ heeft enorme invloed op de Momentenlijn

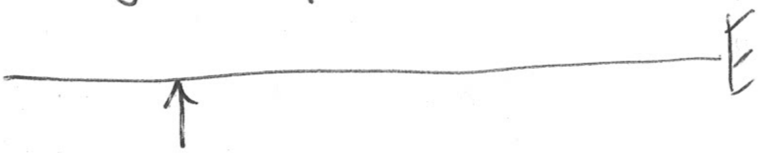
afh. van verhouding EA_{BD} tov EI krijg je grote verschillen.

f. Stel nu: we hebben de constructie met de verticale roloplegging bij B, en de constructie wordt belast door zonbestraling aan de bovenzijde. Gevraagd: schets onderstaand de momentenlijn, met buigteken(s) (geen waarden). Beredeneer hoe u tot deze momentenlijn komt, met één of enkele schetsjes en maximaal vijf regels tekst.

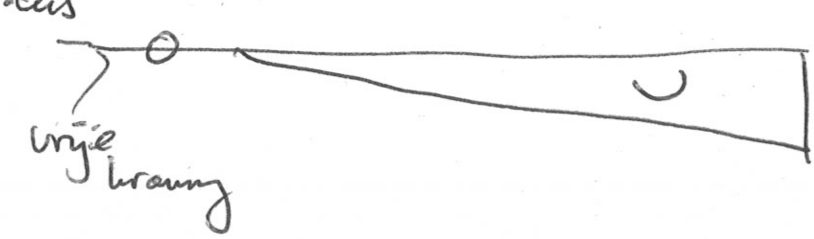


denk rol weg,
hij wil:

moet je compenseren door:



dus

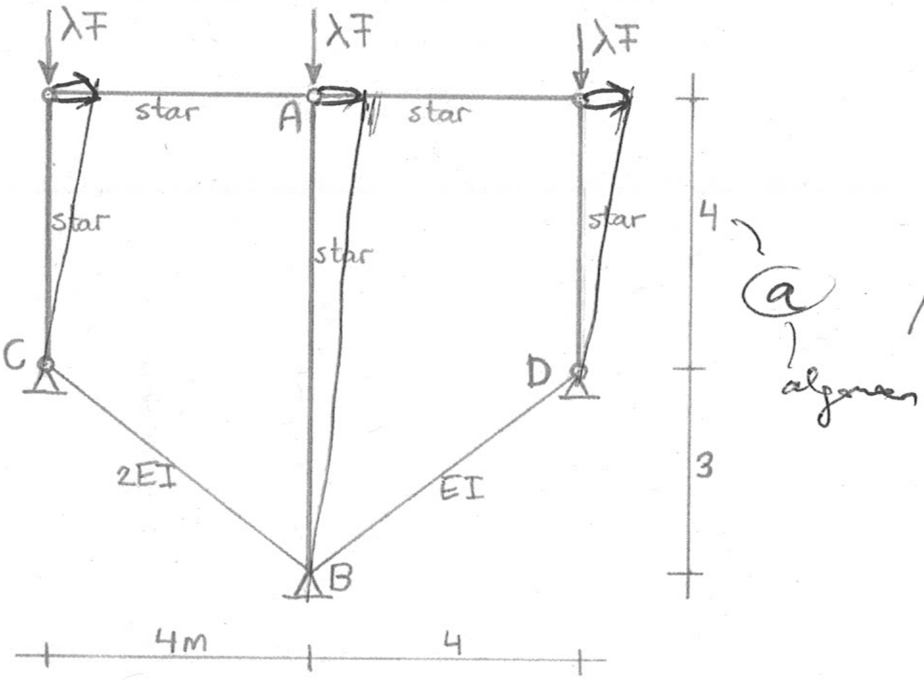


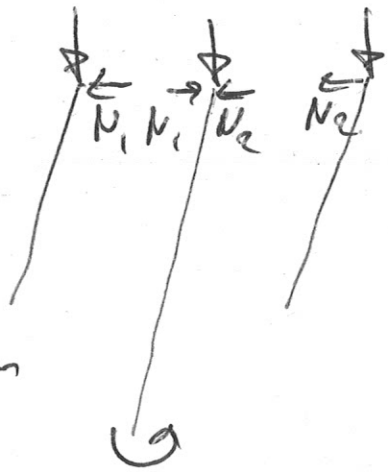
TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
31 januari 2024 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 3 (ongeveer 20 minuten)

Gegeven: onderstaande constructie. Van de buigzame staven BC en BD heeft BC een buigstijfheid $2EI$ en BD een buigstijfheid EI. Alle andere staven zijn oneindig stijf. AB is in B stijf (momentvast) verbonden met BC en BD. Alle andere verbindingen zijn scharnierend.
De lengtematen zijn aangegeven in m.
Houd voor de numeriek uitwerking aan: $F = 35$ kN, $EI = 18$ MNm^2. $= 18000 \text{ kNm}^2$





$M = k_r \cdot \varphi$
$= k_r \cdot \frac{u}{a+3}$

Gevraagd:
De waarde van de belastingcoefficiënt λ waarbij het evenwicht zijn stabiliteit verliest.
Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

kan. 2 methoden: rechtstreeks in verplaatste stand óf met aanpendelende belasting.

rechtstreeks: verpl-stand en evenwicht 3 poten

links $\lambda F \cdot u - N_1 \cdot a = 0$
rechts $\lambda F \cdot u - N_2 a = 0$
$\Rightarrow N_1 = N_2$

midden: $(N_1 + N_2)(a+3) + \lambda F \cdot u - k_r \cdot \frac{u}{(a+3)} = 0$

$\Rightarrow \lambda F = k_r \cdot \frac{a}{3a+6} \cdot \frac{1}{a+3}$

met $a = 4m \Rightarrow \lambda = \frac{9EI}{5F}\left(\frac{4}{12+6} \cdot \frac{1}{7}\right) = 29{,}388$

zie volgend blad: $k_r = \frac{9EI}{5}$

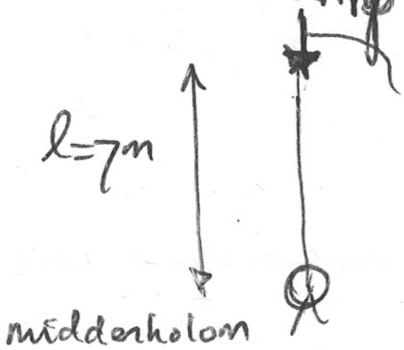
STUDIENUMMER

NAAM

…vervolg…

alternatief: (sneller)

aangrijpende belasting:



$$\lambda F + 2\cdot\left(\lambda F \cdot \frac{7}{4}\right) = \frac{9}{2}\lambda F$$

ℓ $\frac{1}{2}\ell$

$$k_r = 3\cdot\frac{2EI}{5} + \frac{3EI}{5} = \frac{9EI}{5}$$

$$\text{"}F_k\text{"} = \frac{k_r}{7} = \frac{9}{35}EI$$

"F_k" moet gelijk zijn aan $\frac{9}{2}\lambda F$

$$\rightarrow \frac{9}{35}EI = \frac{9}{2}\lambda F \Rightarrow \lambda = \frac{2}{35}\cdot\frac{EI}{F} = \frac{2}{35}\cdot\frac{18000}{35}$$

$$= 29{,}388$$

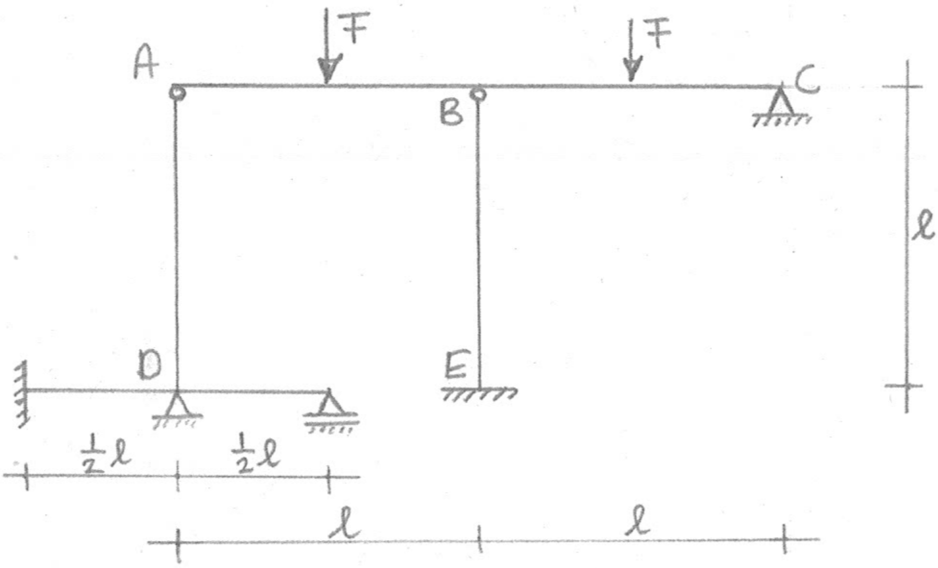
(alles in kN en m)

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
31 januari 2024 van 13.30-16.30 uur

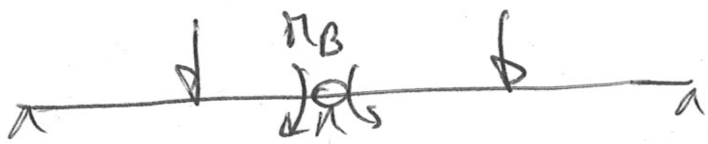
STUDIENUMMER
NAAM

Opgave 4 (ongeveer 30 minuten)

Gegeven: onderstaande doorgaande ligger ABC wordt belast door puntlasten F in de middens van de velden. De ligger is scharnierend opgelegd op de kolommen AD en BE en op een scharnier in C. De randvoorwaarden/opleggingen aan de onderzijde D van kolom AD en aan de onderzijde E van kolom BE zijn aangegeven.
Alle delen hebben dezelfde buigstijfheid EI. Lengtematen zijn aangegeven, uitgedrukt in l.
Houd voor de numerieke uitwerking in de deelvragen c) en d) aan: l = 6 m, EI = 1200 kNm^2



Gevraagd:
a. Bepaal het steunpuntsmoment M_B in de doorgaande ligger, uitgedrukt in F en l. Maak gebruik van hoekveranderingsvergelijkingen.



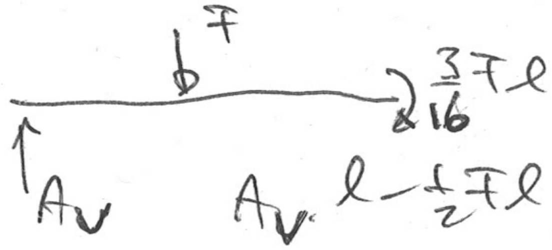
$$+\frac{1}{16}\frac{Fl^2}{EI} - \frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI} = -\frac{1}{16}\frac{Fl^3}{EI} + \frac{1}{3}\frac{M_B l}{EI}$$

$$\rightarrow M_B = \frac{3}{16}Fl$$

STUDIENUMMER

NAAM

b. Bepaal op basis van de vorige deelvraag en door gebruik te maken van evenwicht de normaalkracht in kolom AD, de normaalkracht in kolom BE, en de verticale oplegreactie bij C, uitgedrukt in F en l. Aanwijzing: u kunt een controle uitvoeren via vergeet-me-nietje (8) van het eerste formuleblad.



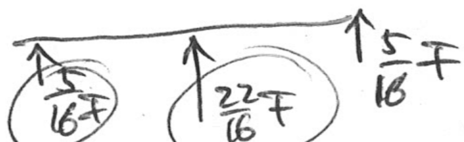
$A_v \cdot l - \frac{1}{2}Fl + \frac{3}{16}Fl = 0$

$\Rightarrow A_v = \frac{5}{16}F\cancel{l}$

$C_v = \frac{5}{16}Fl$

$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow B_v = 2F - 2 \cdot \frac{5}{16}F = \frac{11}{16}F$

en dat 2x

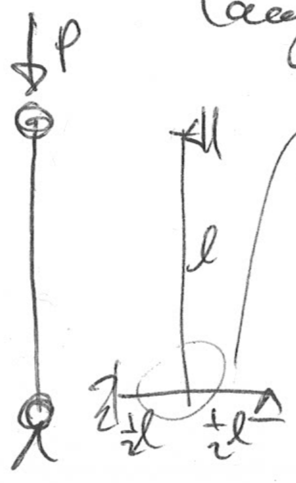


c. Bepaal de waarde van de puntlasten $F = F_k$ waarbij één van de beide kolommen (de meest kritische) bezwijkt door instabiliteit. Gebruik $l = 6$ m, $EI = 1200$ kNm^2. Laat duidelijk alle stappen in uw aanpak zien.

gesdoord
buitenpoot: geschoord → rho formule

~~[illegible]~~ middenpoot: 0,7l as de kniklengte

laagste maatgevend



$k_r = \frac{4EI}{\frac{1}{2}l} + \frac{3EI}{\frac{1}{2}l} = \frac{7EI}{\frac{1}{2}l} = \frac{14EI}{l}$

$\rho = \frac{k_r l}{EI} = \frac{14EI}{l} \cdot \frac{l}{EI} = 14$

$F_k = \frac{(5+2\cdot 14)}{5+14} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \cancel{[illegible]}\ 1{,}737\,\frac{\pi^2 EI}{l^2}$

$\frac{5}{16}F = 1{,}737\,\frac{\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow F = \frac{16}{5} \cdot \cdot \cdot = 5{,}56\,\frac{\pi^2 EI}{l^2}$

ingevulden:

$\frac{5{,}56 \cdot \pi^2 \cdot 1200}{6^2}$

$= 1829$ kN

…vervolg…

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}7\ell)^2} = 2{,}04\,\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$\frac{22}{16}F = 2{,}04 \cdot \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \Rightarrow F = \frac{16}{22} \cdot 2{,}04 \cdot \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$= 1{,}48\,\frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad \left(< 5{,}56\,\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\right)$$

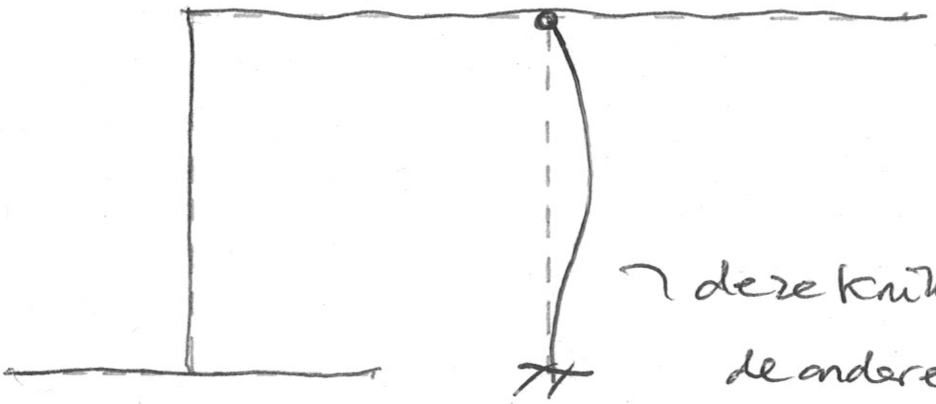
maatgevend.

in getallen:

$$F = 1{,}48 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 1200}{6^2} = 487 \text{ kN} \quad (< 1829 \text{ kN})$$

maatgevend.

d. Schets de bijbehorende knikvorm.



deze knikt uit,
de andere niet.

TU Delft
Faculteit CiTG
Tentamen CTB2210 Constructiemechanica 3
31 januari 2024 van 13.30-16.30 uur

STUDIENUMMER | | | | | | | |

NAAM

Opgave 5 (kort, gemengde theorie/inzicht, ongeveer 20 minuten)

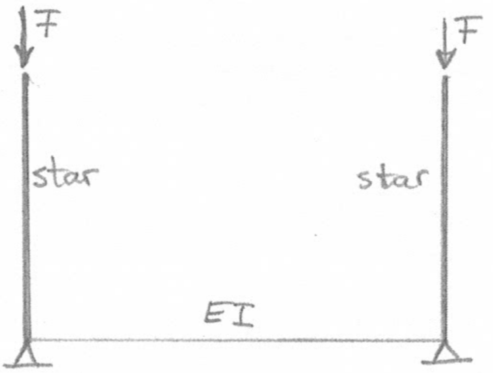
a) Omschrijf de essentie van het verschil tussen de krachtenmethode en de verplaatsingenmethode voor statisch onbepaalde constructies. Gebruik maximaal acht regels.

Krachtenmethode:
- Krachten/momenten als onbekenden.
- Maak statisch bepaald hoofdsysteem.
- Met vergeet-me-nietjes bijv. $\varphi = \pm \frac{Ml}{4EI}$, $w = \dots$
- Eind: aansluitvoorwaarde, compatibiliteit en daaruit los je de krachten/momenten op.

Verplaatsingsmethode:
- Verpl./rotaties als onbekenden.
- Druk M's of F's uit in die onbekenden, bijv. $M = \frac{4EI}{l}\varphi$, ...
- Eind: eis knoopevenwicht, en daaruit los je de φ's, w's op.

Dus: andere volgorde,
krachtenmethode aan eind compatibiliteit,
verpl. methode aan eind evenwicht.

b) Schets de knikvormen voor onderstaande constructie. Hoeveel basis-knikvormen zijn er? Welke is maatgevend, en leg in één regel tekst uit waarom?



twee basisknikvormen:

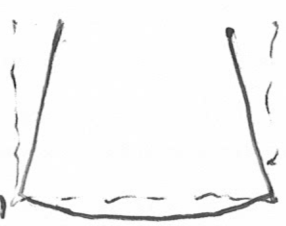
① $k_r = \frac{2EI}{l}$

en

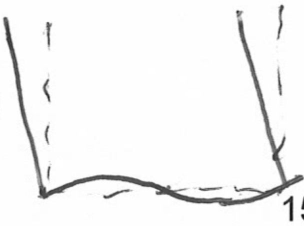
② $k_r = \frac{6EI}{l}$

voor ①: k_r lager dan bij ②
dus $F_k = \frac{k_r}{l}$ kleiner dan bij ②
Dus ① maatgevend.
"Kronkel kost meer moeite" bij ②

(Let op: knikvormen mag je ook "x −1" tekenen, →

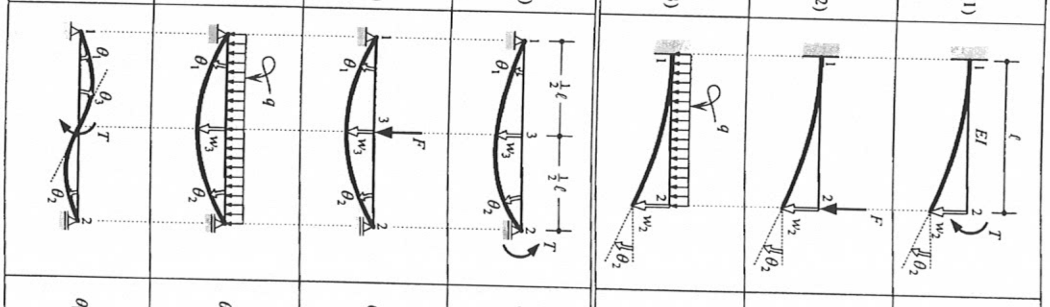


en



is 't zelfde,
dit zijn geen andere knikvormen)

FORMULEBLAD
(scheur dit deel los van het werk)

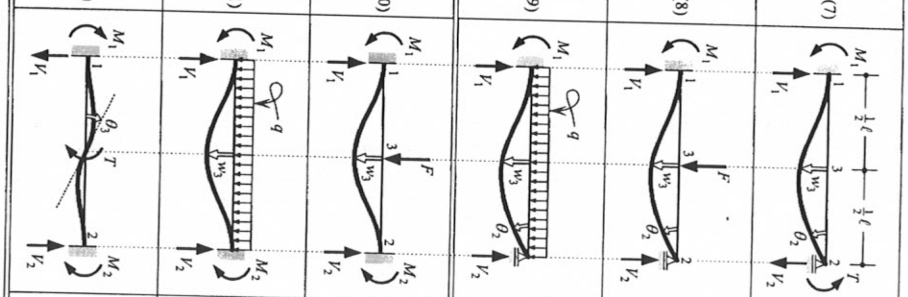


(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$

vergeet-mij-nietjes

(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald)



statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)

(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd)

(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.

Spanningen en rekken :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \end{cases} \text{ of } \begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \text{ met } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right) \quad \text{voor } i, j = x, y$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

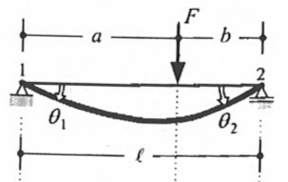
von Mises : $\frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \leq \frac{1}{3} f_y^2$

Tresca : straal van de maatgevende cirkel van Mohr is bepalend

FORMULEBLAD (vervolg)

drie bij-de handjes

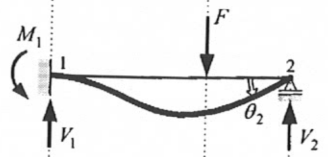
(c)



$$\theta_1 = \frac{Fab(\ell+b)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(2\frac{a}{\ell} - 3\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fab(\ell+a)}{6EI\ell} = \frac{F\ell^2}{6EI}\left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(d)



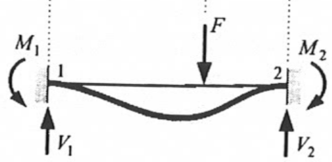
$$M_1 = \frac{Fb(\ell^2-b^2)}{2\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_1 = \frac{Fb(3\ell^2-b^2)}{2\ell^3} = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(3\ell-a)}{2\ell^3} = F\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$\theta_2 = \frac{Fa^2b}{4EI\ell} = \frac{F\ell^2}{4EI}\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

(e)



$$M_1 = \frac{Fab^2}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a}{\ell} - 2\frac{a^2}{\ell^2} + \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

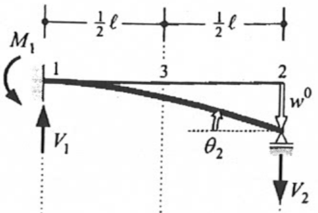
$$V_1 = \frac{Fb^2(\ell+2a)}{\ell^3} = F\left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} + 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$M_2 = \frac{Fa^2b}{\ell^2} = F\ell\left(\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

$$V_2 = \frac{Fa^2(\ell+2b)}{\ell^3} = F\ell\left(3\frac{a^2}{\ell^2} - 2\frac{a^3}{\ell^3}\right)$$

zettingen

(f)

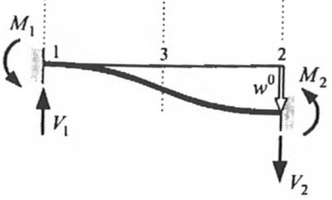


$$M_1 = \frac{3EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{3EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_2 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}$$

$$\theta_3 = \frac{9}{8}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{5}{16}w^0$$

(g)



$$M_1 = M_2 = \frac{6EI}{\ell^2}w^0; \quad V_1 = V_2 = \frac{12EI}{\ell^3}w^0$$

$$\theta_3 = \frac{3}{2}\frac{w^0}{\ell}; \quad w_3 = \frac{1}{2}w^0$$

Tensortransformatie formules in *x*-*y* assenstelsel:

$$k_{\overline{xx}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) + \tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\cos 2\alpha + k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\overline{yy}} = \tfrac{1}{2}(k_{xx}+k_{yy}) - \tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\cos 2\alpha - k_{xy}\sin 2\alpha$$

$$k_{\overline{xy}} = -\tfrac{1}{2}(k_{xx}-k_{yy})\sin 2\alpha + k_{xy}\cos 2\alpha$$

Hoofdwaarden en hoofdrichtingen:

$$\tan 2\alpha = \frac{2k_{xy}}{(k_{xx}-k_{yy})}; \quad k_1, k_2 = \tfrac{1}{2}\left(k_{xx}+k_{yy}\right) \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(k_{xx}-k_{yy}\right)\right]^2 + k_{xy}^2}$$

FORMULEBLAD (vervolg)

Eulerse knikvergelijking:

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Enkelzijdig verend ingeklemde knikstaaf:

$$\frac{1}{F_k} = \frac{1}{\frac{r}{l}} + \frac{1}{\frac{\pi^2 EI}{4l^2}} \quad \Rightarrow \quad l_k = l\sqrt{4 + \frac{10}{\rho}} \quad \text{met:} \rho = \frac{rl}{EI}$$

Mechanica relaties:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad M = EI\kappa$$

Differentiaalvergelijkingen:

$$w'' + \alpha^2 w = 0 \quad \text{met:} \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x$$

Of :

$$w'''' + \alpha^2 w'' = 0 \quad \text{met:} \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

en $S_z(x) = M' - Fw'$

algemene oplossing:

$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\alpha x + C_4 \sin\alpha x$$

dus:

$$\varphi(x) = -C_2 + C_3\alpha \sin\alpha x - C_4\alpha \cos\alpha x$$

$$M(x) = EI \times \left[C_3\alpha^2 \cos\alpha x + C_4\alpha^2 \sin\alpha x \right]$$

$$S_z(x) = -F \times C_2$$

η-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(\eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2 - 4)} \times \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{met :} \quad \begin{array}{l} \eta_1 = 4 + \frac{10}{\rho_1}\,;\ \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \\ \eta_2 = 4 + \frac{10}{\rho_2}\,;\ \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI} \end{array}$$

ρ-formule : twee zijden verend ingeklemde knikstaaf

$$F_k = \frac{(5 + 2\rho_1)(5 + 2\rho_2)}{(5 + \rho_1)(5 + \rho_2)} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$\text{met :} \quad \rho_1 = \frac{r_1 l}{EI} \quad \rho_2 = \frac{r_2 l}{EI}$$

Regel van Merchant:

$$\frac{F_c}{F_k} + \frac{H_c}{H_p} = 1$$

Kromming t.g.v temperatuursgradient:

"Vrije" kromming t.g.v lineair temperatuurs-verloop over de hoogte h van de doorsnede:

$$\kappa^T = \frac{\alpha\,\Delta T}{h}$$