

Metody Obliczeniowe

Zadanie 1.14

UNIwersytet Gdański, Informatyka III ROK

HALLMAN , GÓRSKI, RZEPPA

Wejście: przedział $[a,b]$, węzły siatkowe x_0, x_1, \dots, x_{n-1} oraz ich krotności a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , pewna funkcja $f(x)$

Zadanie:

- Pobrać wartości funkcji $f^{(n)}(x)$ w punktach węzłowych siatki. W węzłach x_k , $k = 0, \dots, n-1$ o krotności a_k konieczne podać $f^{(j)}(x_k)$, $j = 0, \dots, a_k$
- podać wielomian interpolacyjny Hermite
- Narysować wielomian $f(x)$ i wielomian interpolacyjny na jednym wykresie

Wielomian interpolacyjny Hermite'a funkcji f

Twierdzenie:

Niech dany będzie ciąg liczb $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$. Dla dowolnego ciągu liczb c_0, c_1, \dots, c_n , istnieje dokładnie jeden wielomian W stopnia co najwyżej n , taki że jeśli liczba u_k w ciągu u_0, \dots, u_n występuje r razy, a dokładniej, jeśli $u_k = \dots = u_{k+r-1}$ i z $k > 0$ wynika $u_{k-1} \neq u_k$ oraz z $k+r \leq n$ wynika $u_{k+r-1} \neq u_{k+r}$ (liczbę u_k nazywamy wtedy węzłem r -krotnym), który spełnia:

$$W(u_k) = c_k, W'(u_k) = c_{k+1}, \dots, W^{(r-1)}(u_k) = c_{k+r-1}$$

Definicja:

Wielomian W stopnia co najwyżej n , nazywamy wielomianem interpolacyjnym Hermite'a funkcji f , jeśli w każdym r -krotnym węźle u_k spełnia równania:

$$W(u_k) = f(u_k), W'(u_k) = f'(u_k), \dots, W^{(r-1)}(u_k) = f^{(r-1)}(u_k).$$

Z powyższej definicji widzimy, iż pojęcie wielomianu interpolacyjnego Hermite'a jest uogólnieniem pojęcia „zwykłego” wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a, który narzucał jedynie równość wartości wielomianu i funkcji w danych punktach. Przedstawione wcześniej twierdzenie gwarantuje, że wielomian taki wyznaczony jest w sposób jednoznaczny.

Wejście:

- Początek przedziału.
- Koniec przedziału.
- Kolejne węzły znajdujące się w podanym przedziale oraz ich krotności.

Wyjście:

Wielomian

Klasy: Derivative, Hermite, Interpolation

Derivative:

Klasa zajmująca się wyliczaniem wartości pochodnych w punkcie.

Hermite:

Klasa wczytująca dane i porządkująca je.

Interpolation:

Klasa zajmująca się obliczaniem ilorazów różnicowych oraz interpolowaniem metodą Hermite'a.

