

Струков Олег 504-404

Контрольная работа №3.

№15.

Найти ранг матрицы:

Очевидно, что столбец I

можно получить умножением

столбца II на 2; III — умножением на (-2);

IV — умножением на 3 \Rightarrow все столбцы матрицы
лз \Rightarrow её ранг = 1.

| I | II | III | IV |
|----|----|-----|----|
| 18 | 9 | -18 | 27 |
| 2 | 1 | -2 | 3 |
| 6 | 3 | -6 | 9 |
| 6 | 3 | -6 | 9 |
| 2 | 1 | -2 | 3 |

№7.

$$\begin{cases} x^* = x - 4y + 2 \\ y^* = -3x + 2y - 4 \end{cases}$$

Найти преобраз прямой $l^*: x - 2y + 2 = 0$.

Подставлю координаты: $x - 4y + 2 + 6x - 4y + 8 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7x - 8y + 12 = 0$$

Ответ: $l: 7x - 8y + 12 = 0$.

№8.

Найти инвариантное уравнение аффинного преобразования:

$$\begin{cases} x^* = -10x - 6y + 33 \\ y^* = 12x + 7y - 36 \end{cases}$$

$$\frac{Aa_{11} + Ba_{21}}{A} = \frac{Aa_{12} + Ba_{22}}{B} = \frac{Ab_1 + Bb_2 + C}{C} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-10A + 12B}{A} = \frac{-6A + 7B}{B} = \frac{33A - 36B + C}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 + 12\frac{B}{A} + 6\frac{A}{B} - 7 = 0 \Rightarrow 6A^2 - 17AB + 12B^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1,5B \\ A = \frac{4}{3}B \end{cases}$$

$$1) A = 1,5B \Rightarrow \frac{-9B + 7B}{B} = \frac{13,5B - 36B + C}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -4,5B \Rightarrow 1,5Bx + By - 4,5B = 0 \Rightarrow \underline{3x + 2y - 9 = 0}$$

$$2) \frac{-8B + 7B}{B} = \frac{44B - 36B + C}{C} \Rightarrow C = -4B \Rightarrow \underline{\frac{4}{3}Bx + By - 4B = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{4x + 3y - 12 = 0}$$

$$\text{Омблем: } 3x + 2y - 9 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 3y - 12 = 0.$$

$$\begin{cases} x^* = A_1x + B_1y + C_1 \\ y^* = A_2x + B_2y + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A_1 - 4B_1 + C_1 = -9 \\ 7A_1 - 5B_1 + C_1 = -8 \\ 4A_1 - 2B_1 + C_1 = 1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -14 + 20 + 4 - 16 - 10 + 28 = 12;$$

$$\Delta_{A_1} = \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -9 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & -4 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = 16 + 5 - 18 - 4 + 45 - 32 = 12;$$

$$\Delta_{B_1} = \begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 7 + 32 - 2 - 36 - 16 + 63 = 48;$$

$$\Delta_{C_1} = 2 \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = -10 - 32 + 28 + 18 \cdot 7 + 128 - 180 = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = 1; B_1 = 4; C_1 = 5.$$

$$\begin{cases} 2A_2 - 4B_2 + C_2 = 5 \\ 7A_2 - 5B_2 + C_2 = 1 \\ 4A_2 - 2B_2 + C_2 = 1. \end{cases} \quad \Delta = 12.$$

$$\Delta_{A_2} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -2 + 5 + 10 - 4 - 25 + 4 = -12$$

$$\Delta_{B_2} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 4 - 2 + 20 + 2 - 35 = -12$$

$$\Delta_{C_2} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 4 + 28 - 70 - 16 + 100 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = -1; B_2 = -1; C_2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Искомое преобразование: } \begin{cases} x^* = x + 4y + 5 \\ y^* = -x - y + 3. \end{cases}$$

$\sqrt{10}$

(symmetric linear transformation)

f - поворот относительно кар. коорг. на $\frac{\pi}{6}$; g - паралл. перенос на в-р $\parallel -4 \parallel$; h : Симметрич. отн. $X=0$

$\varphi: h \circ g \circ f$

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g \circ f: \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

матрица преобразования!

$$\varphi = h \circ g \circ f: \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N 11.

$-4x - 3y + 2 = 0$ и $x + y + 1 = 0$ переводятся в себя, а точка $M(1; -3) \rightarrow N(32; -35)$. Найти ф-лы преобразования.
 Допустим, они имеют вид: $\begin{cases} x^* = A_1x + B_1y + C_1 \\ y^* = A_2x + B_2y + C_2 \end{cases}$

Преобразование $M \rightarrow N$: $\begin{cases} 32 = A_1 - 3B_1 + C_1 \\ -35 = A_2 - 3B_2 + C_2. \end{cases}$

Поскольку прямые инвариантны, точка их пересечения $L(x_0; y_0)$ тоже инвариантна, т.е. $x_0 = x_0^*$; $y_0 = y_0^*$.

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ -4x_0 - 3y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 5; y_0 = -6 \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5A_1 - 6B_1 + C_1 \\ -6 = 5A_2 - 6B_2 + C_2 \end{cases}$$

$$x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^* + y^* + 1 = 0 \Rightarrow A_1x + B_1y + C_1 + A_2x + B_2y + C_2 + 1 = 0.$$

Данной прямой принадлежат точки с координатами $(0; -1)$ и $(-1; 0)$. Подставив их, получу ещё одну систему: $\begin{cases} -B_1 - B_2 + C_1 + C_2 + 1 = 0 \\ -A_1 - A_2 + C_1 + C_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 = B_1 + B_2.$

$$-4x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow -4x^* - 3y^* + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(A_1x + B_1y + C_1) - 3(A_2x + B_2y + C_2) + 2 = 0.$$

Данной прямой принадлежат точки с координатами $(0; \frac{2}{3})$ и $(\frac{1}{2}; 0)$. Подставлю: $\begin{cases} -\frac{8}{3}B_1 - 2B_2 - 4C_1 - 3C_2 + 2 = 0 \\ -2A_1 - \frac{3}{2}A_2 - 4C_1 - 3C_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} B_1 + 2 B_2 = 2 A_1 + \frac{3}{2} A_2 \Leftrightarrow 12 A_1 + 9 A_2 = 16 B_1 + 12 B_2.$$

Таким образом, получена СЛУ:

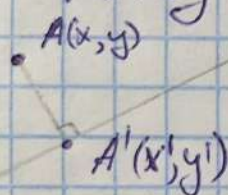
$$\begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ 12 A_1 + 9 A_2 = 16 B_1 + 12 B_2 \\ A_1 - 3 B_1 + C_1 = 32 \\ A_2 - 3 B_2 + C_2 = -35 \\ 5 A_1 - 6 B_1 + C_1 = 5 \\ 5 A_2 - 6 B_2 + C_2 = -6 \end{cases}$$

Решая её, получаю, что $A_1 = -18$; $B_1 = -15$; $C_1 = 5$;
 $A_2 = 20$; $B_2 = 17$; $C_2 = -4 \Rightarrow$ искомое аффинное
 преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x^* = -18x - 15y + 5 \\ y^* = 20x + 17y - 4. \end{cases}$$

№12.

Найти формулы ортогонального проектирования точек Oxy на $L: x+3y+1=0$ в ПДСК.



Допустим, A — некоторая точка (x, y) и-сти, $A'(x', y')$ — её проекция на $L \Rightarrow$

вектор $\overline{AA'}(x-x'; y-y')$ ~~является~~ перпендикулярен $L: \vec{n}(1; 3) \Rightarrow \begin{cases} x-x' = k \\ y-y' = 3k \end{cases}; k \in \mathbb{R}.$

$A' \in L \Rightarrow x' \text{ и } y'$ удовлетворяют ур-нию $L \Rightarrow$

$$\Rightarrow x-k+3(y-3k)+1=x+3y-10k+1=0 \Rightarrow k = \frac{x+3y+1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - \frac{x+3y+1}{10} = \frac{9x-3y-1}{10} \\ y' = y - 3 \frac{x+3y+1}{10} = \frac{y-3x-3}{10} \end{cases}$$

Данное преобразование является искомым.

По условию: $X \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ ✓ 13.

Очевидно, что X должна иметь размер 1×4 . Тогда, чтобы получить требуемый результат, необходимо, чтобы все элементы A , кроме 4-го строка, умножались на 0, а 4-й-й строка — на 1 \Rightarrow искомая матрица $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & -2 & 2 \\ -8 & 7 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

~

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

~

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

~

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

~

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

← Искаемая матрица

" N5.

$\begin{cases} x=2 \\ y=-2-2t \\ z=-1-t \end{cases}$ - вращение вокруг Oz. Очевидно, что $y=2z \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + (2z)^2 = 4 + 4z^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ -
 найденное уравнение эллиптического цилиндра.

N2.

напр. в пи-эти $z=0$: $2y^2 + 3yx + 3x^2 - 1 = 0$
 образующие: $y=t$; $x=-2t$; $z=-t$. Составим
 уравнение пов-эти. Напр. в-р $A(-2; 1; -1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{x-x_0}{-2} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{-1} = k$. Подставим $z=0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z_0=k \Rightarrow x=x_0-2z_0$; $y=y_0+z_0$. Подставим в уравнение:
 $2(y_0+z_0)^2 + 3(y_0+z_0)(x_0-2z_0) + 3(x_0-2z_0) - 1 = 2y_0^2 +$
 $+ 4y_0z_0 + 2z_0^2 + 3x_0y_0 - 6y_0z_0 + 3x_0z_0 - 6z_0^2 + 3x_0^2 -$
 $- 12x_0z_0 + 12z_0^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 3xy - 9xz -$
 $- 2yz - 1 = 0$ - искомое уравнение симметрич. пов-эти.

№3.

Составить ур-ие пов-сти вращения $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ вокруг

Oy \Rightarrow необходимо найти $f(x, y) = 0$.

Допустим, $\exists A_0(x_0, y_0) \Rightarrow \exists A(x, y, z): x_0 = \sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}; y) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ - искомое ур-ие.
(однополостный гиперболоид).