

Струков Олег БОЧ-404

к.р. по первому заданию

№1.

$$A: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \|y_1 y_2 y_3 y_4\| = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 & x_1 y_4 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 & x_2 y_4 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 & x_3 y_4 \\ x_4 y_1 & x_4 y_2 & x_4 y_3 & x_4 y_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_2 y_2}{x_2 y_3} = \frac{x_3 y_2}{x_3 y_3}, \text{ но в } A \frac{2}{10} \neq \frac{2}{13} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$ не удовлетворяет условию.

$$B: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \|y_1 y_2 y_3\| = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

Допустим, $y_1 = c \Rightarrow y_2 = 3c; y_3 = -3c; x_1 = -\frac{5}{c}; x_2 = -\frac{4}{c}; x_3 = \frac{5}{c}; c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нетрудно заметить, что все элементы B удовлетворяют полученному результату, т. е.

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{c} \\ -\frac{4}{c} \\ \frac{5}{c} \end{pmatrix} \cdot \|c \ 3c \ -3c\|; c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

№2.

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 14 & 5 \\ 1 & 5 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & -7 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & -7 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc|c} 0 & 12 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 1 & 26 & 11 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right| \Rightarrow \Phi = \begin{pmatrix} -1 & -26 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -26 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\left| \frac{\Phi}{I} \right| = \left| \begin{array}{cc|c} -10 & 4 & x_1 \\ 6 & -1 & x_2 \\ 2 & 1 & x_3 \\ -6 & 13 & x_4 \\ -2 & 3 & x_5 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|c} -4 & 6 & x_1+x_2 \\ 0 & 12 & x_2+x_4 \\ 0 & 4 & x_3+x_5 \\ -6 & 13 & x_4 \\ -2 & 3 & x_5 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x_1+x_2-2x_5 \\ 0 & 0 & x_2+x_4-3x_3-3x_5 \\ 0 & 4 & x_3+x_5 \\ 0 & 4 & x_4-3x_5 \\ -2 & 3 & x_5 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left| \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x_1+x_2-2x_5 \\ 0 & 0 & x_2+x_4-3x_3-3x_5 \\ 0 & 0 & x_3+x_5-x_4+3x_5 \\ 0 & 4 & x_4-3x_5 \\ -2 & 3 & x_5 \end{array} \right|$$

Искомая система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

(кол-во уравнений = $\text{Rg } A$ и удовлетворяет условию $\text{Rg } A + \text{Rg } \bar{\Phi} = n \Leftrightarrow 3 + 2 = 5$).

Ответ в матричной форме: $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right\|.$

№ 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Очевидно, что полученные столбцы ЛНЗ \rightarrow
 размерность = 2; базис: $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

№ 5.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -10 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \text{получена } \Phi$$

искленим СЛАУ.

$$\left| \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ -2 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|c} 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_4 \\ -2 & 0 & x_3 \\ 2 & 2 & 2x_4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 2x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_4 + x_1 \\ -2 & 0 & x_3 \\ 2 & 2 & 2x_4 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 2x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_4 + x_1 \\ -2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 2x_4 + x_3 + 2x_1 \end{array} \right| \Rightarrow$$

\Rightarrow Искомая СЛАУ: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right|$
(Условие $\text{Rg } A + \text{Rg } \Phi = n$ выполнено).

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \langle \bar{a}_1; \bar{a}_2; \bar{a}_3 \rangle; M_2 = \langle \bar{b}_1; \bar{b}_2; \bar{b}_3 \rangle.$$

Проверю векторы на ЛЗ:

$$\left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc} -3 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|; \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 9 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{array} \right| -$$

очевидно, что системы в-ров ЛЗ в своих подпр-вах.

Допустим, $\bar{v} \in (M_1 \cap M_2) \Rightarrow \bar{v} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 =$
 $= x_4 \bar{b}_1 + x_5 \bar{b}_2 + x_6 \bar{b}_3 \Rightarrow$ можно составить СЛАУ для нахождения базиса $(M_1 \cap M_2)$:

$$\left| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & -2 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \right| \sim$$

 $\sim \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 & 0 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{X} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -2 \\ -3 & -2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ Для нахождения
общего базиса возьмем $c_1 = c_2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}; \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$ Таким образом, $(M_1 \cap M_2) = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle;$
 $\dim(M_1 \cap M_2) = 2.$

✓ 4.

Буду записывать векторы как столбцы м-ц M_1 и M_2 .

$\varphi: M_1 \xrightarrow{B} M_2$, т.е. $M_2 = B M_1 \Rightarrow B = M_2 M_1^{-1}.$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } M_1 = 4 \Rightarrow$$

м-ца B \exists и единственна.

$$M_1 | E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= E | M_1. \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} - \text{искомая матрица линейного отображения,}$$

✓ 8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{получены два нулевых}$$

столбца, остальные ЛНЗ $\Rightarrow \dim(\ker \varphi) = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \text{прообраз}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \text{образ преобразования } \varphi.$$

1. Для нахождения $\ker \varphi$ найду такие \bar{x} , что $A\bar{x} = \bar{0}$,

$$\text{т. е. } \begin{cases} x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \ker \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Для нахождения $\text{Im } \varphi$ найду такие \bar{y} , при которых система $A\bar{x} = \bar{y}$ совместна $\forall \bar{x}$.

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\| \sim \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \\ 1 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\| \sim \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\| \Rightarrow$$

\Rightarrow для совместности необходимо и достаточно, чтобы $2y_1 + y_2 + y_3 = 0$ (оставшиеся строки ЛНЗ) \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{Im } \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{Ответ: } \ker \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \text{Im } \varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & y_2 - y_3 - 2y_1 \\ 0 & 0 & y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ + \sqrt{2} \end{array}$$

✓ 8.

Для нахождения $\text{Im } \varphi$ найду такие \bar{y} , что система $A\bar{x} = \bar{y}$ совместна $\forall \bar{x}$:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & y_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y_3 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 - 2y_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y_3 \end{array} \right\| \Rightarrow 2y_1 - y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Im } \varphi = \left\langle \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right\| \right\rangle \Rightarrow \dim(\text{Im } \varphi) = 2.$$

Более простой вариант: $\dim P = \dim(\ker \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi)$

Ранее было найдено $\dim(\ker \varphi) = 2$;

$$\dim P = 4 \text{ (кар-бо элементов } A) \Rightarrow \dim(\text{Im } \varphi) = 4 - 2 = 2.$$