

Струков Олег 504-404

Контрольная работа №3.

№15.

Найти ранг матрицы:

Очевидно, что столбец I

можно умножить умножением

I	II	III	IV
18	9	-18	27
2	1	-2	3
6	3	-6	9
6	3	-6	9
2	1	-2	3

столбца II на 2; III - умножением на (-2);

IV - умножением на 3 \Rightarrow все столбцы матрицы
13 \Rightarrow ее ранг = 1.

№7.

$\begin{cases} x^* = x - 4y + 2 \\ y^* = -3x + 2y - 4 \end{cases}$. Найти преобразующий Γ^* : $x - 2y + 2 = 0$

достаточно коефициентов: $x - 4y + 2 + 6x - 4y + 8 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 7x - 8y + 12 = 0$$

Ответ: $\Gamma^*: 7x - 8y + 12 = 0$.

№8.

Найти инвариантное прилипание однородного преобразования:

$$\begin{cases} x^* = -10x - 6y + 33 \\ y^* = 12x + 7y - 36 \end{cases} \quad \frac{Ax_{11} + Ba_{21}}{A} = \frac{Aa_{11} + Ba_{12}}{B} = \frac{Ab_1 + Bb_2 + C}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-10A + 12B}{A} = \frac{-6A + 7B}{B} = \frac{33A - 36B + C}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 + 12 \frac{B}{A} + 6 \frac{A}{B} - 7 = 0 \Rightarrow 6A^2 - 17AB + 12B^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1,5B \\ A = \frac{4}{3}B \end{cases} \quad 1) \quad A = 1,5B \Rightarrow \frac{-9B + 7B}{B} = \frac{13,5B - 36B + C}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -4,5B \Rightarrow 1,5BX + BY - 4,5B = 0 \Rightarrow \underline{3x + 2y - 9 = 0}$$

$$2) \frac{-8B + 7B}{B} = \frac{44B - 36B + C}{C} \Rightarrow C = -4B \Rightarrow \frac{4}{3}BX + BY - 4B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{4x + 3y - 12 = 0}$$

Онслем: $3x + 2y - 9 = 0$ и $4x + 3y - 12 = 0$.

$$\begin{cases} x^* = A_1 x + B_1 y + C_1 \\ y^* = A_2 x + B_2 y + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A_1 - 4B_1 + C_1 = -9 \\ 7A_1 - 5B_1 + C_1 = -8 \\ 4A_1 - 2B_1 + C_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -14 + 20 + 4 - 16 - 10 + 28 = 12;$$

$$\Delta_{A_1} = \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -9 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & -4 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = 16 + 5 - 18 - 4 + 45 - 32 = 12;$$

$$\Delta_{B_1} = \begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 7 + 32 - 2 - 36 - 16 + 63 = 48;$$

$$\Delta_{C_1} = 2 \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} = -10 - 32 + 28 + 18 \cdot 7 + 128 - 180 = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = 1; B_1 = 4; C_1 = 5.$$

$$\begin{cases} 2A_2 - 4B_2 + C_2 = 5 \\ 7A_2 - 5B_2 + C_2 = 1 \\ 4A_2 - 2B_2 + C_2 = 1 \end{cases} \quad \Delta = 12.$$

$$\Delta_{A_2} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -2 + 5 + 10 - 4 - 25 + 4 = -12$$

$$\Delta_{B_2} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 4 - 2 + 20 + 2 - 35 = -12$$

$$\Delta_{C_2} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 4 + 28 - 70 - 16 + 100 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = -1; B_2 = -1; C_2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{искомое преобразование: } \begin{cases} x^* = x + 4y + 5 \\ y^* = -x - y + 3 \end{cases}$$

№ 10.

f - поворот отрицательного вектора коорд. на $\frac{\pi}{6}$; g - паралл. перенос на b -р $\|(-4)\|$;

$\varphi: h \circ g \circ f$.

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g \circ f: \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

матрица преобразования!

$$\varphi = h \circ g \circ f: \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 11.

$-4x - 3y + 2 = 0$ и $x + y + 1 = 0$ переводятся в седло, а
множка $M(1; -3) \rightarrow N(32; -35)$. Найти оп-ки преобразования.
Допустим, они имеют вид: $\begin{cases} x^* = A_1 x + B_1 y + C_1 \\ y^* = A_2 x + B_2 y + C_2 \end{cases}$

преобразование $M \rightarrow N$: $\begin{cases} 32 = A_1 - 3B_1 + C_1 \\ -35 = A_2 - 3B_2 + C_2 \end{cases}$

Поскольку прямые инвариантны, множка их
пересечения $L(x_0; y_0)$ тоже инвариантна, т.е. $x_0 = x_0^*$, $y_0 = y_0^*$.

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ -4x_0 - 3y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 5; y_0 = -6 \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5A_1 - 6B_1 + C_1 \\ -6 = 5A_2 - 6B_2 + C_2 \end{cases}$$

$$x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^* + y^* + 1 = 0 \Rightarrow A_1 x + B_1 y + C_1 + A_2 x + B_2 y + C_2 + 1 = 0$$

Данной прямой принадлежат множк с координата-
ми $(0; -1)$ и $(-1; 0)$. Поставив их, получим еще
одну систему: $\begin{cases} -B_1 - B_2 + C_1 + C_2 + 1 = 0 \\ -A_1 - A_2 + C_1 + C_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 = B_1 + B_2$.

$$-4x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow -4x^* - 3y^* + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(A_1 x + B_1 y + C_1) - 3(A_2 x + B_2 y + C_2) + 2 = 0.$$

Данной прямой принадлежат множк с коорд-ми
 $(0; \frac{2}{3})$ и $(\frac{1}{2}; 0)$. Поставив: $\begin{cases} -\frac{8}{3}B_1 - 2B_2 - 4C_1 - 3C_2 + 2 = 0 \\ -2A_1 - \frac{3}{2}A_2 - 4C_1 - 3C_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}B_1 + 2B_2 = 2A_1 + \frac{3}{2}B_2 \Leftrightarrow 12A_1 + 9A_2 = 16B_1 + 12B_2.$$

Таким образом, получена СЛУ:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ 12A_1 + 9A_2 = 16B_1 + 12B_2 \\ A_1 - 3B_1 + C_1 = 32 \\ A_2 - 3B_2 + C_2 = -35 \\ 5A_1 - 6B_1 + C_1 = 5 \\ 5A_2 - 6B_2 + C_2 = -6 \end{cases}$$

Демои же, получим, что $A_1 = -18; B_1 = -15; C_1 = 5;$
 $A_2 = 20; B_2 = 17; C_2 = -4 \Rightarrow$ искомое преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x^* = -18x - 15y + 5 \\ y^* = 20x + 17y - 4. \end{cases}$$

№12.

найти формулу ортогонального проектирования точки Oxy на линию $L: x+3y+1=0$ в ПДСК.

• $A(x, y)$ $\overset{(x,y)}{l}$ Допустим, A - некоторая точка
• $A'(x', y')$ ил-сами, $A'(x', y')$ - её проекция на $L \Rightarrow$
Берем $\overline{AA'}(x-x'; y-y')$ нормальную
перпендикулярную к-ту $L: \bar{n}(1; 3) \Rightarrow \begin{cases} x-x' = k \\ y-y' = 3k \end{cases}; k \in \mathbb{R}$.

$A' \in L \Rightarrow x'y'$ удовлетворяет ур-нию $L \Rightarrow$

$$\Rightarrow x-k+3(y-3k)+1=x+3y-10k+1=0 \Rightarrow k=\frac{x+3y+1}{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x'=x-\frac{x+3y+1}{10}=\frac{9x-3y-1}{10} \\ y'=y-3\frac{x+3y+1}{10}=\frac{y-3x-3}{10} \end{cases}$$
 - Данное преобразование
- являемся исходном.

по условию: $X \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$

Очевидно, что X должна иметь размеров 1×4 . Тогда, чтобы получить требуемый результат, необходимо, чтобы все элементы A , кроме 4-го столбца, были равны нулю, а 4-й - отличаться от нуля на 1 \Rightarrow искомая матрица $X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача №6.

$$\left| \begin{array}{cccc} 5 & -5 & -2 & 2 \\ -8 & 7 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right|$$

№14.

$$\left| \begin{array}{cccc} 5 & 0 & -2 & 0 \\ -8 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

00

Чеканка
матрица

$$\sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right|$$

$$\sim \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

✓5.

$\begin{cases} x=2 \\ y=-2-2t \\ z=-1-t \end{cases}$ - вращение вокруг Oz . Очевидно, что $y=2z \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4 + (2z)^2 = 4 + 4z^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ —
 получено исходное ур-ние однополосного гиперболоида.

✓2.

Мнр. в пл-ти $Z=0$: $2y^2 + 3yx + 3x^2 - 1 = 0$
 Стартуем: $y=t$; $x=-2t$; $z=-t$. Лекция о том
 ур-ние поб-ти. Мнр. б-р $\alpha(-2; 1; -1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{x-x_0}{-2} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{-1} = k$. При $-$ ем $Z=0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z_0=k \Rightarrow x=x_0-2z_0; y=y_0+z_0$. Поставим в ур-ние:
 $2(y_0+z_0)^2 + 3(y_0+z_0)(x_0-2z_0) + 3(x_0-2z_0) - 1 = 2y_0^2 +$
 $+ 4y_0z_0 + 2z_0^2 + 3x_0y_0 - 6y_0z_0 + 3x_0z_0 - 6z_0^2 + 3x_0^2 -$
 $- 12x_0z_0 + 12z_0^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 3xy - 9xz -$
 $- 2yz - 1 = 0$ — исходное ур-ние цилиндрической поб-ти.

✓3.

Составим ур-ние неб-сти браузера $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ корыт

Од \Rightarrow необходимо найти $f(x, y) = 0$.

Допустим, $\exists A_0(x_0, y_0) \Rightarrow \exists A(x, y, z): x_0 = \sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}; y) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ — иск. ур-ние.
(Однозначность изучения).