

Лабораторная работа № 2.1.4
Определение теплоёмкости твёрдых тел

Струков О. И.
Б04-404

Цель работы: 1. прямое измерение кривых нагревания $T_{heat}(t)$ и охлаждения $T_{cool}(T)$ пустого калориметра и системы «калориметр + твёрдое тело»; 2. определение коэффициента теплоотдачи стенок калориметра; 3. определение теплоёмкости пустого калориметра и удельной теплоёмкости твёрдого тела

Оборудование: калориметр с нагревателем и термометром сопротивления; универсальный вольтметр В7-78/3 в режиме омметра ($\sigma_T = 0.05 K$), измеритель температуры - термопара К-типа совместно с универсальным вольтметром В7-78/2 ($\sigma_{T_{комн}} = 0.1 K$), источник питания GPS-72303, универсальные вольтметры В7-78/3 (в режиме амперметра) ($\sigma_I = 0.01 A$) и KEITHLEY (в режиме вольтметра) ($\sigma_U = 0.1 V$) для измерения мощности нагревателя, компьютерная программа АКИП для сопряжения персонального компьютера и универсальных вольтметров В7-78/2 и В7-78/3 ($\sigma_t = 0.01 s$).

Теоретическая часть

В данной работе теплоёмкость определяется по формуле

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad (1)$$

где ΔQ – количество тепла, подведенного к телу, и ΔT – изменение температуры тела, произошедшее в результате подвода тепла.

Температура внутри калориметра измеряется термометром сопротивления. В реальных условиях $\Delta Q \neq P\Delta t$, так как часть энергии уходит из калориметра благодаря теплопроводности его стенок. В результате количество тепла $\Delta Q = C\Delta T$, подведённое к системе "тело + калориметр" будет меньше на величину тепловых потерь:

$$C\Delta T = P\Delta t - \lambda(T - T_k)\Delta T \quad (2)$$

где λ - коэффициент теплоотдачи стенок калориметра, T - температура тела и калориметра, T_k - комнатная температура.

Уравнение (2) является основной расчетной формулой работы. В дифференциальной форме для процессов нагревания и охлаждения ($P = 0$) соответственно оно имеет следующий вид:

$$CdT = Pdt - \lambda [T_{heat}(t) - T_k(t)] dt \quad (3)$$

$$CdT = -\lambda [T_{cool}(t) - T_k(t)] dt \quad (4)$$

где P – мощность нагревателя, λ – коэффициент теплоотдачи стенок калориметра, t – время, измеряемое от момента включения нагревателя, $T_{heat}(t)$ – температура тела в момент времени t на кривой нагревания, $T_{cool}(t)$ – температура тела в момент времени t на кривой охлаждения, $T_k(t)$ – температура окружающего калориметр воздуха (комнатная) в момент времени t , dt – время, в течение которого температура тела изменилась на dT

Экспериментальная установка

Установка состоит из калориметра с пенопластовой изоляцией, помещенного в ящик из многослойной kleenой фанеры. Внутренние стенки калориметра выполнены из материала с высокой теплопроводностью. Надёжность теплового контакта между телом и стенками обеспечивается их формой: они имеют вид усеченных конусов и плотно прилегают друг к другу.

Экспериментально измеряемые данные:

1. $R_{heat}(t)$ – кривая зависимости термометра сопротивления от времени при нагревании калориметра с телом при $P=const$.
2. $R_{cool}(t)$ – кривая зависимости термометра сопротивления от времени при охлаждении калориметра с телом при $P = 0$ (нагреватель выключен!).
3. $T_k(t)$ – кривая зависимости комнатной температуры от времени

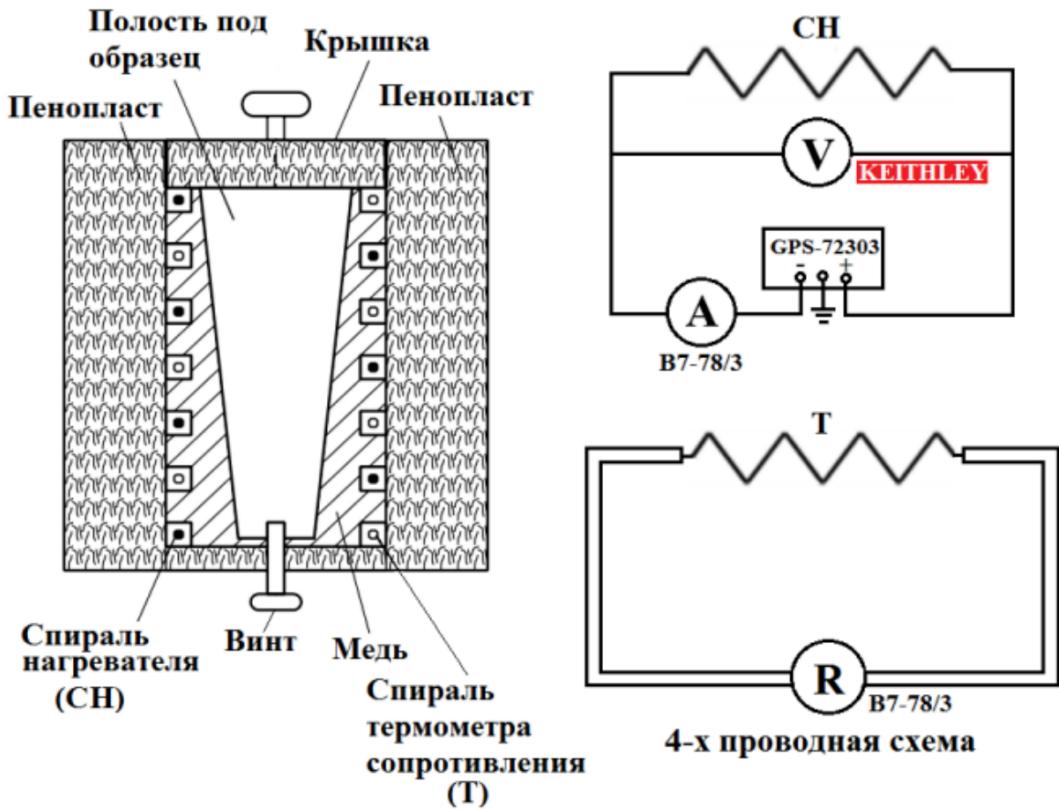


Рис. 1: Схема устройства калориметра

Методика эксперимента

Температура измеряется термометром сопротивления. Сопротивление проводника изменяется с температурой по закону

$$R_T = R_{273}(1 + \alpha(T - 273)), \quad (5)$$

где R_T – сопротивление термометра про $T^{\circ}C$, R_0 – его сопротивление при $0^{\circ}C$, α – температурный коэффициент сопротивления.

Выразим сопротивление R_{273} через измеренное значение R_k – сопротивление термометра при комнатной температуре. Согласно (5), имеем

$$R_{273} = \frac{R_k}{1 + \alpha(T_k - 273)}, \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), найдём:

$$T(R_T) = 273 + \frac{R_T}{\alpha R_k} [1 + \alpha(T_k - 273)] - \frac{1}{\alpha} \quad (7)$$

Формула (7) позволяет легко пересчитать кривые $R_{heat}(t)$, $R_{cool}(t)$ в кривые $T_{heat}(t)$, $T_{cool}(t)$. Входящий в формулу температурный коэффициент сопротивления меди равен $\alpha = 4.28 * 10^{-3} \text{град}^{-1}$.

Из уравнения (4) при $T_k(t) = T_k = const$:

$$CdT_{cool} = -\lambda [T_{cool} - T_k] dt \quad (8)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными T_{cool} и t :

$$\frac{CdT_{cool}}{-\lambda [T_{cool} - T_k]} = dt \quad (9)$$

После интегрирования в пределах от $t = 0$ ($T_{cool} = T$) до произвольного момента времени t :

$$\frac{-C}{\lambda} \ln \frac{T_{cool} - T_k}{T - T_k} = t \quad (10)$$

Отсюда находим явную зависимость от времени:

$$T_{cool}(t) = (T - T_k)e^{\frac{-\lambda}{C}t} + T_k \quad (11)$$

Уравнение (11) легко спрямляется в координатах $(\ln \frac{T_{cool} - T_k}{T - T_k}, t)$. Тангенс угла наклона данной прямой позволяет определить отношение искомых величин $\frac{\lambda}{C}$.

Из уравнения (3) при $T_k(t) = T_k = const$:

$$CdT_{heat} = Pdt - \lambda [T_{heat} - T_k] dt \quad (12)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными T_{heat} и t :

$$\frac{CdT_{heat}}{P - \lambda [T_{heat} - T_k]} = dt \quad (13)$$

После интегрирования в пределах от $t = 0$ ($T_{heat} = T_k$) до произвольного момента времени t :

$$\frac{-C}{\lambda} \ln \frac{P - \lambda(T_{heat} - T_k)}{P} = t \quad (14)$$

Отсюда находим явную зависимость от времени:

$$T_{heat}(t) = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{\frac{-\lambda}{C}t}) + T_k \quad (15)$$

Уравнение (15) позволяет по найденному ранее из кривой охлаждения отношению $\frac{\lambda}{C}$ определить λ , а зная λ и $\frac{\lambda}{C}$ легко найти искомую теплоёмкость C .

Метод измерений величин C и λ рассмотренный выше, даёт хорошие результаты при стабильной комнатной температуре во время проведения эксперимента и является по своей сути интегральным. C и λ определяются из уравнений (11) и (15), которые следуют из уравнений (3) и (4) после их интегрирования. При существенных колебаниях комнатной температуры ($\sim 2 - 3 {}^\circ C$) интегральные уравнения (11) и (15) могут привести к достаточно большой погрешности в определении величин C и λ . В этом случае следует использовать дифференциальные методы, основанные на измерении величин $(\frac{dT}{dt})_{heat}$ и $(\frac{dT}{dt})_{cool}$ в окрестностях каких-либо «удобных» точек. К таким «удобным» точкам относится точка на кривой нагревания, при которой температура калориметра совпадает с комнатной. Действительно, дифференцируя уравнение (3) по времени при $T_{heat}(t) = T_k(t)$, получим простую и удобную формулу для определения теплоёмкости C :

$$C = \frac{P}{(dT_{heat}/dt)_{T=T_k}} \quad (16)$$

Она даёт хорошие результаты, если её применение никак не связано с моментом включения нагревателя. Причина проста: сразу после включения нагревателя в калориметре происходят переходные процессы формирования тепловых потоков, которые не описываются уравнением (3) и соответственно уравнением (16). Чтобы обойти данную трудность, перед включением нагревателя необходимо охладить калориметр до температуры на $\sim 2 - 5 {}^\circ C$ ниже комнатной. В этом случае при подходе к точке $T_{heat}(t) = T_k(t)$ все переходные процессы уже закончатся и уравнение (16) будет корректным.

Другими «удобными» точками для определения C и λ являются точки при одной и той же температуре T на кривых нагревания $T_{heat}(t)$ и охлаждения $T_{cool}(t)$ соответственно. Действительно про-дифференцируем уравнения (3) и (4) по времени:

$$C \left(\frac{dT}{dt} \right)_{heat} = P - \lambda [T_{heat}(t) - T_k(t)] \quad (17)$$

$$C \left(\frac{dT}{dt} \right)_{cool} = -\lambda [T_{cool}(t) - T_k(t)] \quad (18)$$

Определим $A = \left(\frac{dT}{dt} \right)_{heat}$ и $B = \left(\frac{dT}{dt} \right)_{cool}$ при одной и той же температуре T на кривых $T_{heat}(t)$ и $T_{cool}(t)$ соответственно. Тогда с учетом введённых обозначений, решая систему уравнений (17) и (18), получим следующие выражения для C и λ :

$$\lambda = \frac{P}{(T - T_{k2})(1 - \frac{A}{B}) + T_{k2} - T_{k1}} \quad (19)$$

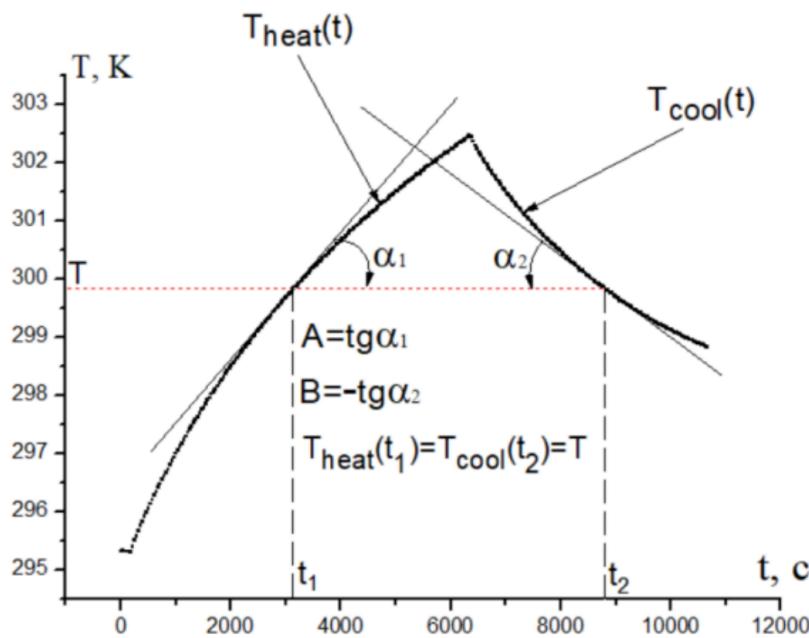
$$C = \frac{P}{A - B + A \frac{T_{k1} - T_{k2}}{T - T_{k1}}} \quad (20)$$

где T_{k1} и T_{k2} – комнатная температура в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$, когда $T_{heat}(t_1) = T_{cool}(t_2) = T$.

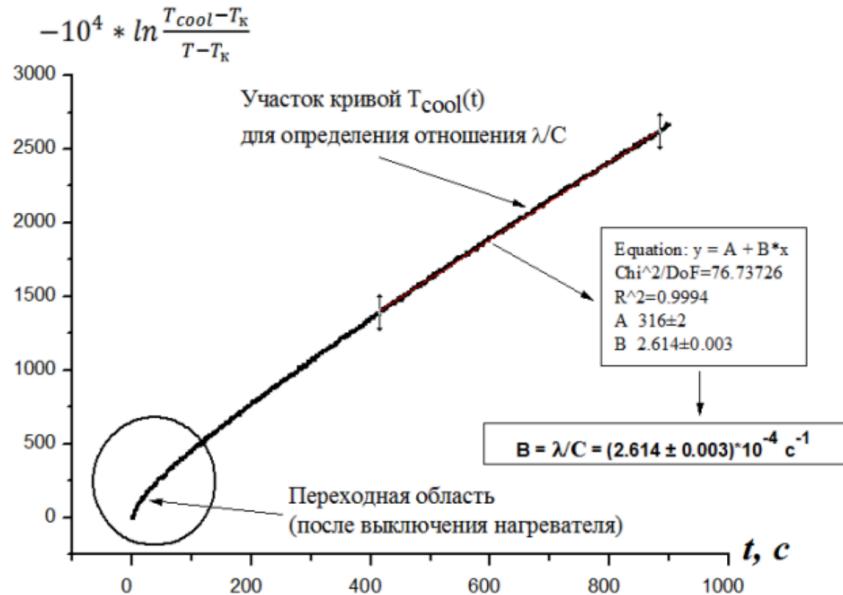
В случае равенства комнатных температур, когда $T_{k1} = T_{k2} = T_k$ формулы (19) и (20) упрощаются

$$\lambda = \frac{P}{(T - T_k)(1 - \frac{A}{B})} \quad (21)$$

$$C = \frac{P}{A - B} \quad (22)$$



Следует иметь в виду, что определение величины B на кривой охлаждения $T_{cool}(t)$ необходимо производить на участках кривой достаточно далеких от момента выключения нагревателя, после того как в калориметре закончатся переходные процессы «переполосовки» тепловых потоков. Корректный интервал времени для определения B можно определить экспериментально из кривой $T_{cool}(t)$, спрямляя её в координатах $(\ln \frac{T_{cool}-T_k}{T-T_k}, t)$, после чего исключить из рассмотрения начальный нелинейный участок:



Ход работы

- Было проведено ознакомление с установкой и изучение порядка действий в ходе эксперимента. В таблице приведены основные параметры установки и исследуемых предметов: сила тока I , напряжение U и мощность нагревательного элемента ($P = UI$), массы медного и алюминиевого стержней соответственно:

I , А	U , В	P , Ватт	m_m , г	m_{al} , г
0,225	27,09	6,10	$575,8 \pm 0,5$	$286,9 \pm 0,5$

- Полученные данные о зависимости сопротивления терморезистора от времени были переведены в температуру по формуле $T(R_T) = 14,58 \cdot R_T + 39,36$. На основе их и данных, полученных с термопары, были построены кривые зависимости температур от времени на одном графике.



Рис. 2: Графики зависимости $T_{ком}$ и $T_{кал}$ (К) от времени (с)

3. Построенный график сопоставлен с временными отметками, соответствующими последовательным этапам эксперимента:

Время от запуска, с	Этап измерений
0	Начало измерения
100 – 300	Охлаждение пустого калориметра латунным стержнем
670 – 2190	Нагрев пустого калориметра
2230 – 2720	Свободное остывание пустого калориметра
2760 – 3450	Охлаждение калориметра металлическими стержнями
3630 – 5360	Нагрев калориметра с медным стержнем внутри
5400 – 6430	Свободное остывание калориметра с медным стержнем внутри
6480 – 7030	Охлаждение калориметра металлическими стержнями
7050 – 8720	Нагрев калориметра с алюминиевым стержнем внутри
8800 – 9600	Свободное остывание калориметра с алюминиевым стержнем внутри

4. Для нахождения $\frac{\lambda}{C}$ был исследован участок кривой T_{cool} в координатах $(t, \ln \frac{T_{cool} - T_K}{T - T_K})$, где T_{cool} – начальная температура в процессе остывания, T_K – средняя комнатная температура, T – температура калориметра, зависящая от времени. С помощью МНК был найден угловой коэффициент наклона прямой k_1 , то есть из формулы (10) следует, что $\frac{\lambda}{C} = -k_1 = 3,645 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$.

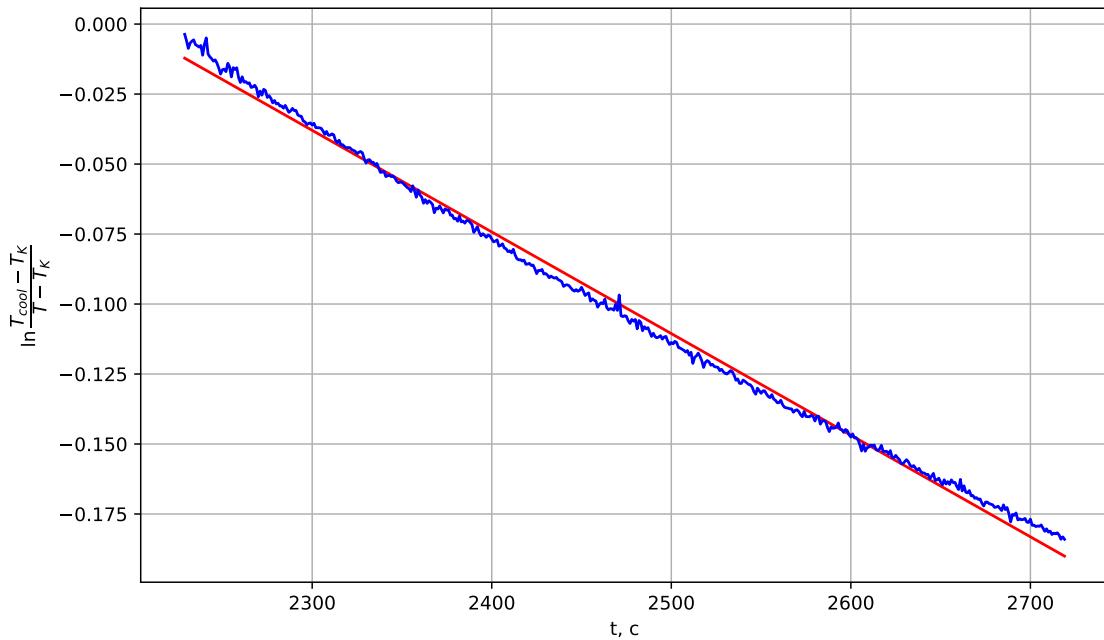


Рис. 3: График зависимости $\ln \frac{T_{cool} - T_K}{T - T_K}$ от времени для пустого калориметра

5. Коэффициент тепловых потерь калориметра λ можно найти зная угловой коэффициент наклона графика k_2 зависимости $T_{heat}(P(1 - e^{\frac{-\lambda}{C}t}))$: $\lambda = \frac{1}{k_2}$. Таким образом, $k_2 = 4,709 \frac{\text{К}\cdot\text{с}}{\text{Дж}}$, $\lambda = 0,212 \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{с}}$. Отсюда $C = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{C}} = 582,64 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – теплоёмкость калориметра.

6. Построен график зависимости $\ln \frac{T_{cool} - T_K}{T - T_K}$ от времени для калориметра с медным стержнем внутри. Можно заметить, что первые примерно 100 точек отклоняются от линейной зависимости, что вызвано перенаправлением потоков тепла в калориметре, поэтому они не были учтены в расчётах. Аналогично п. 4 из полученной зависимости определено $\frac{\lambda_M}{C + C_M} = 2,278 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, где C_M – теплоёмкость исследуемого медного образца.

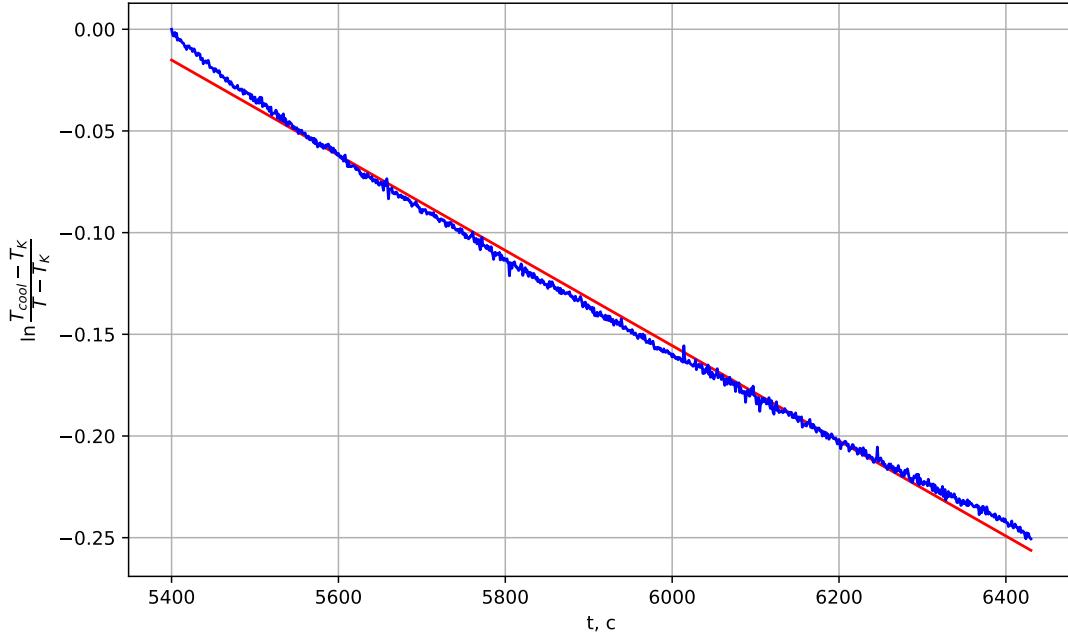


Рис. 4: График зависимости $\ln \frac{T_{cool} - T_K}{T - T_K}$ от времени для калориметра с медным образцом

7. Так же, как и в случае с пустым калориметром, из углового коэффициента наклона графика зависимости $T_{heat}(P(1-e^{\frac{-\lambda}{c}t}))$ для нагрева медного образца был найден $\lambda_M = 0,188 \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{с}}$. Отсюда $C_M = \frac{\lambda_M}{\frac{\lambda_M}{C+C_M}} = 242,59 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где C_M – теплоёмкость исследуемого медного образца.
8. Для алюминиевого образца также был построен график зависимости $\ln \frac{T_{cool} - T_K}{T - T_K}$ от времени и определены $\frac{\lambda_{Al}}{C + C_{Al}} = 1,777 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\lambda_{Al} = 0,151 \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{с}}$ и $C_{Al} = 265,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, где C_{Al} – теплоёмкость исследуемого алюминиевого образца.

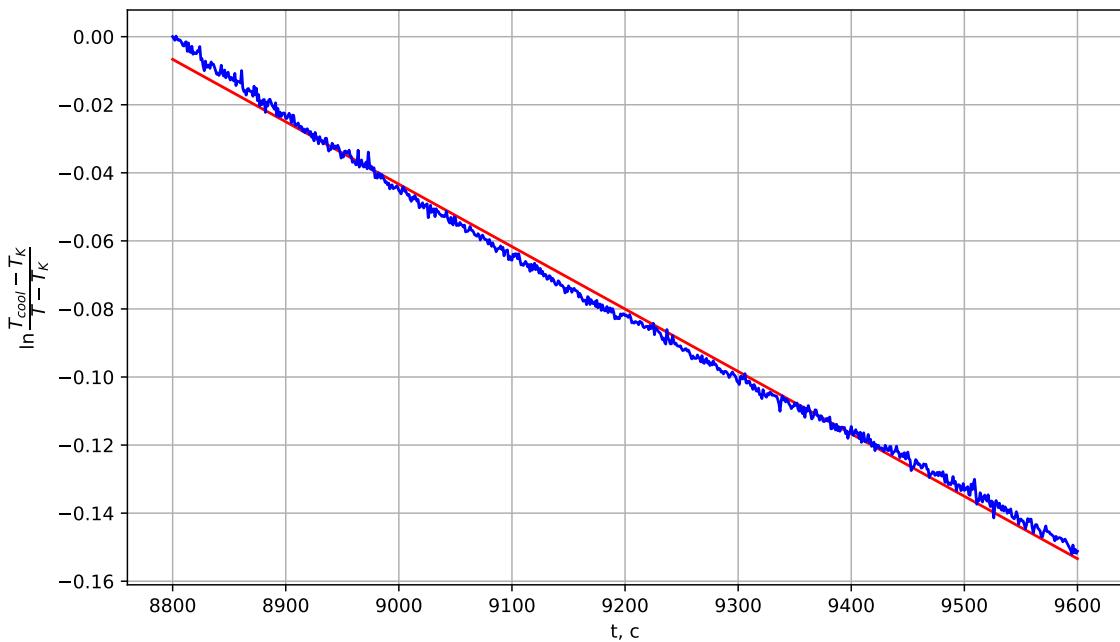


Рис. 5: График зависимости $\ln \frac{T_{cool} - T_K}{T - T_K}$ от времени для калориметра с алюминиевым образцом

9. Из найденных теплоёмкостей металлических стержней, зная их массу, можно найти удельную теплоёмкость металлов: $c = \frac{C}{m}$. Таким образом, для меди и алюминия получаем соответственно:
 $c_M = 421,3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $c_{\text{Ал}} = 924,7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$

Нахождение теплоёмкостей дифференциальным методом

Использую для нахождения теплоёмкостей формулы (16) и (20), для этого в первом случае найду производные $\left(\frac{dT_{heat}}{dt} \right)_{T=T_K}$ в окрестностях точек совпадения температур в комнате и калориметре при их различии не более чем на 0,1 - 0,15 K, а во втором - $\left(\frac{dT}{dt} \right)_{heat}$ и $\left(\frac{dT}{dt} \right)_{cool}$ при одинаковых температурах. Результаты представлены в таблице:

	$C_{\text{Калор.}}, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$C_M, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$C_{\text{Ал}}, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	$c_M, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$c_{\text{Ал}}, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$
Формула (16)	631,08	229,48	245,24	398,54	854,79
Формула (20)	662,67	273,13	284,16	474,35	990,45

Вывод

В результате выполнения работы двумя различными способами были найдены теплоёмкости исследуемых образцов и с их помощью определены удельные теплоёмкости меди и алюминия. Табличные значения составляют $c_M^{\text{табл}} = 381 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ и $c_{\text{Ал}}^{\text{табл}} = 902,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ соответственно. Можно заметить, что более точные результаты дал первый способ нахождения, но и с его помощью не удаётся найти достаточно близкие к табличным значения, так как для получения точных результатов необходимо

мо, чтобы температура окружающей среды была постоянной, чего добиться в условиях аудитории, наполненной людьми и нагреваемой самой исследуемой установкой, достаточно сложно.