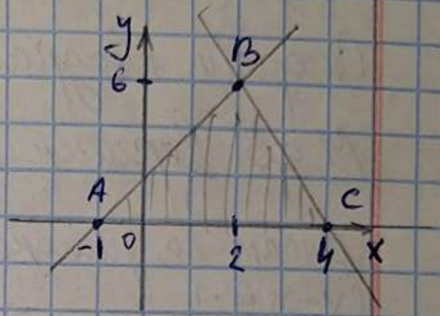
Струков Олег Б04-404

Контрольная работа по второму заданию.

№1.



$A(-1;0)\quad B(2;6)\quad C(4;0)$

$AB: \begin{cases} -A=D \\ 2A+6=D \end{cases} \Rightarrow y-2x=2$

$AC: \begin{cases} -A=D \\ 4A=D \end{cases} \Rightarrow y=0$

$BC: \begin{cases} 4A=D \\ 2A+6=D \end{cases} \Rightarrow 3x+y=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\begin{cases} y>0 \\ y<2x+2 \\ y<-3x+12 \end{cases}$

№2.

$l_1: 3x-11y=120;\ \overline{a_1}=\begin{Vmatrix} 11 \\ 3 \end{Vmatrix}\qquad l_2: x+5y=-38;\ \overline{a_2}=\begin{Vmatrix} -5 \\ 1 \end{Vmatrix}$

$l_3: Ax+By=D;\ \overline{a_3}=\begin{Vmatrix} -B \\ A \end{Vmatrix}$. Допустим, $B=1$.

l_1 симметрична l_3 относительно $l_2 \Rightarrow \cos\angle(l_1,l_2)=$
$=\cos\angle(l_2,l_3) \Rightarrow \dfrac{|(\overline{a_1},\overline{a_2})|}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}=\dfrac{|(\overline{a_3},\overline{a_2})|}{|\overline{a_3}|\cdot|\overline{a_2}|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{|-55+3|}{\sqrt{130\cdot 26}}=\dfrac{|5+A|}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{A^2+1}} \Rightarrow A_1=-\dfrac{3}{11}-l_1;\ A_2=\dfrac{7}{9}-l_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow l_3: 7x+9y=D.$

l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке $M(x_0,y_0)$

$\begin{cases} 3x_0-11y_0=120 \\ x_0+5y_0=-38 \end{cases} \Rightarrow M(7;-9). \Rightarrow D=49-81=-32.$

Таким образом, $l_3: 7x+9y=-32.$

№3.

$d_1: x+y=-19$; $d_2: x-y=-1$. $d_1 \cap d_2 = M(x_0, y_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0+y_0=-19 \\ x_0-y_0=-1 \end{cases} \Rightarrow M(-10; -9)$.

Сторона квадрата $a=\sqrt{144} \Rightarrow$ расстояние от точки M до вершин квадрата $= \frac{a}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$. Вершины лежат на диагоналях, ⇒ найду их координаты:

$\begin{cases} x-y=-1 \\ (x+10)^2+(y+9)^2=72 \end{cases} \Rightarrow A(-4; -3)$; $C(-16; -15)$

$\begin{cases} x+y=-19 \\ (x+10)^2+(y+9)^2=72 \end{cases} \Rightarrow B(-16; -3)$; $D(-4; -15)$.

Тогда очевидны ~~...~~ уравнения сторон квадрата:

$AB: y=-3$; $BC: x=-16$; $CD: y=-15$; $DA: x=-4$.

№5.

$\pi_1: 3x+4y+9z=-20$; $\pi_2: 9x+12y+13z=-32$;

$M_1(1; -3; -6)$. $l: \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$; $\bar{a}$ – напр. в-р l.

$\bar{a} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 12 & 13 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} \right) = (-56; 42; 0) \Leftrightarrow a' = (-4; 3; 0)$.

Найду две случайные точки $\in l$: $x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$; $z=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_2(0; -\frac{1}{2}; -2)$; $y=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$; $z=-2 \Rightarrow M_3(-\frac{2}{3}; 0; -2)$.

Тогда $l: \frac{x}{-4} = \frac{y+\frac{1}{2}}{3}$; $z=-2$.

Найду уравнение плоскости, проходящей ч-з M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+\frac{1}{2} & z+2 \\ -\frac{2}{3}-0 & 0+\frac{1}{2} & -2+2 \\ 1-0 & -3+\frac{1}{2} & -6+2 \end{vmatrix} = -2x - \frac{8}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right) + (z+2)\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right) =$$

$= -2x - \frac{8}{3}y - \frac{4}{3} + \frac{7}{6}z + \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow \alpha: 12x + 16y - 7z = 6.$

№6.

Найти пл-сть, проходящую ч-з $A(2;-1;0)$, $\perp$ прямой, проходящей ч-з $B(1;-3;1)$ и $C(4;-1;-2)$.

Найду ур-ние $\perp$ прямой: $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y+3}{-1+3} = \frac{z-1}{-2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-3}$. Её напр. вектор $(3;2;-3)$ является нормалью к искомой плоскости $\Rightarrow$ она задаётся ур-нием $3x + 2y - 3z = D$ (в ПДСК). Найду D, подставив $A(2;-1;0)$:

$6 - 2 = 4 = D \Rightarrow$ Ответ: $3x + 2y - 3z = 4$.

№7.

Найти пл-сть α, проходящую ч-з $l_1: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 3t \\ z = 1-t \end{cases}$ и $\parallel l_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 3+5t \\ z = -5+4t \end{cases}$. Направляющие в-ры: $\bar{a}(3;3;-1)$ и $\bar{b}(0;5;4)$. Возьму случ. точку на l_1: $y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1; z = 1$. Найду ур-ние для α:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-0 & 3 & 5 \\ z-1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (x-1)(12+5) - 12y + (z-1)\cdot 15 = 17x - 17 -$$

$$-12y + 15z = 0 \Rightarrow \alpha: 17x - 12y + 15z - 32 = 0.$$

№8.

$(-4x - 6y - 2)(9x - 4y - 2) = 9 \Leftrightarrow -36x^2 + 24y^2 - 38xy -$

$-10x + 20y - 5 = 0$. Поскольку коэффициенты

$\Delta = \begin{vmatrix} -36 & -19 \\ -19 & 24 \end{vmatrix} = -1225 < 0$ — перед x^2 и y^2 не равны нулю и имеют разные знаки, а также $\Delta<0$, кривая относится к гиперболическому типу. Так как присутствует свободный член, ур-ние не может задавать пару пересек. прямых $\Rightarrow$ данная кривая является гиперболой.

№9.

Найти канон. ур-ние: $18x^2-24xy+8y^2+94x-119y+226=0$.

$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$.

$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$. $\quad ctg\,2\varphi = \frac{A-C}{2B} = \frac{18-8}{-24} = \frac{-5}{12} = \frac{1-tg^2\varphi}{2tg\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\varphi = 1{,}5 \\ tg\varphi = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$. Возьму $tg\varphi = 1{,}5$. $\quad tg^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{2{,}25+1} = \frac{4}{13}$; $\sin^2\varphi = \frac{9}{13} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2x'}{\sqrt{13}} - \frac{3y'}{\sqrt{13}} \\ y = \frac{3x'}{\sqrt{13}} + \frac{2y'}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow \frac{18}{13}(2x'-3y')^2 - \frac{24}{13}(2x'-3y')(3x'+2y') +$

$+ \frac{8}{13}(3x'+2y')^2 + \frac{94}{\sqrt{13}}(2x'-3y') - \frac{119}{\sqrt{13}}(3x'+2y') + 226 = 0$.

$\frac{x'^2}{13}(18\cdot4 - 6\cdot24 + 8\cdot9) + \frac{y'^2}{13}(18\cdot9 + 24\cdot6 + 8\cdot4) + \frac{x'y'}{13}(-12\cdot18 -$

$-24\cdot(-5) + 8\cdot12) + \frac{x'}{\sqrt{13}}(94\cdot2 - 119\cdot3) + \frac{y'}{\sqrt{13}}(-3\cdot94 - 119\cdot2) + 226 = 0$

$26y'^2 - 13\sqrt{13}\,x' - 40\sqrt{13}\,y' + 226 = 0 \Leftrightarrow y'^2 - \frac{20}{\sqrt{13}}y' + \frac{113}{13} - \frac{\sqrt{13}}{2}x' = 0$.

$\left(y' - \frac{10}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{\sqrt{13}}{2}x' - 1 = \frac{\sqrt{13}}{2}\left(x' - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; $\quad \begin{cases} y' = y'' + \frac{10}{\sqrt{13}} \\ x' = x'' + \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y''^2 = \frac{\sqrt{13}}{2}x''$ — искомое канон. ур-ние параболы.

Выражу СК: $x = \frac{2(x''+\frac{2}{\sqrt{13}})}{\sqrt{13}} - \frac{3(y''+\frac{10}{\sqrt{13}})}{\sqrt{13}} = 2\frac{x''}{\sqrt{13}} + \frac{4}{13} - \frac{3y''}{\sqrt{13}} - \frac{30}{13} = 2\frac{x''}{\sqrt{13}} - 3\frac{y''}{\sqrt{13}} - 2.$

$y = \frac{3(x''+\frac{2}{\sqrt{13}})}{\sqrt{13}} + \frac{2(y''+\frac{10}{\sqrt{13}})}{\sqrt{13}} = \frac{3x''}{\sqrt{13}} + \frac{6}{13} + \frac{2y''}{\sqrt{13}} + \frac{20}{13} = \frac{3x''}{\sqrt{13}} + \frac{2y''}{\sqrt{13}} + 2.$

$e_1'' = \left\| \begin{matrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{matrix} \right\| \quad e_2'' = \left\| \begin{matrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{matrix} \right\| \quad O''(-2;2).$

№11.

На эллипсе $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ найти точки, в которых касательная $\perp$ $l: 3x - y = -1$. напр. в-р, перпендикулярный l: $\overline{a}(3;-1)$ => касательные должны быть $\parallel$ прямым вида $-x-3y=D$.

Общее ур-ние касательной: $\frac{x_0 x}{18} + \frac{y_0 y}{2} = 1$. Из соответствия коэффициентов => $\frac{-x_0}{18} = \frac{-y_0}{6}$ => $x_0 = 3y_0$.

Т.к. точки касания $\in$ эллипсу, подставлю координаты в ур-ние: $\frac{9y_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{2} = 1$ => $\begin{cases} y_{01} = 1 \\ x_{01} = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} y_{02} = -1 \\ x_{02} = -3 \end{cases}$.

Таким образом, точки $A(3;1)$ и $B(-3;-1)$ являются искомыми.

№12.

Найти касательную к гиперболе $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$, проходящую через т. $(4;-2)$. Подставлю координаты точки в ур-ние касательной и получу систему: $\begin{cases} \frac{x_0^2}{6} - \frac{y_0^2}{2} = 1 \\ \frac{4x_0}{6} + \frac{2y_0}{2} = 1 \end{cases}$ =>

=> её решениями являются две точки:

$(3;-1)$ и $(9;-5)$, обе находятся в IV четверти.

Получу уравнения двух искомых касательных:

$l_1: \frac{3x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow x+y=2$ и $l_2: \frac{9x}{6} + \frac{5y}{2} = 1 \Leftrightarrow 3x+5y=2$.

№13.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $M\left(2; \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{7}}\right)$; $y=-3x+12$ – касательная.

Составить ур-ние и найти точки ∩ с касательной.

Ур-ние касательной: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 3x+y=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x_0}{a^2} = \frac{1}{4}$; $\frac{y_0}{b^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{a^2}{4} \\ y_0 = \frac{b^2}{12} \end{cases}$. Подставлю x_0 и y_0 в ур-ние эл.:

$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{144} = 1$. Подставлю координаты M: $\frac{4}{a^2} + \frac{90}{7b^2} = 1$.

Решая данные ур-ния как систему получу два ответа:

$\begin{cases} a^2 = 14 \\ b^2 = 18 \end{cases}$ и $\begin{cases} a^2 = \frac{32}{7} \\ b^2 = \frac{720}{7} \end{cases} \Rightarrow$ получу два искомых ур-ния

эллипса: $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{18} = 1$ и $\frac{x^2}{32/7} + \frac{y^2}{720/7} = 1$.

Стоит уточнить, что оба варианта не относятся к канонической СК, т.к. $b^2 > a^2$.

Решая в качестве систем ур-ние касательной и каждое из полученных ур-ний эллипсов, получу точки касания $M_1(3,5; 1,5)$ и $M_2\left(\frac{8}{7}; \frac{60}{7}\right)$.

Ответ: 1). $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{18} = 1$; $M_1(3,5; 1,5)$.

2). $\frac{x^2}{32/7} + \frac{y^2}{720/7} = 1$; $M_2\left(\frac{8}{7}; \frac{60}{7}\right)$.