

Лабораторная работа №1.2.5
Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Струков О. И.
Б04-404

Введение

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, кривошипный маятник, штангенциркуль, линейка.

Теоретические сведения

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемому секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует поднять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

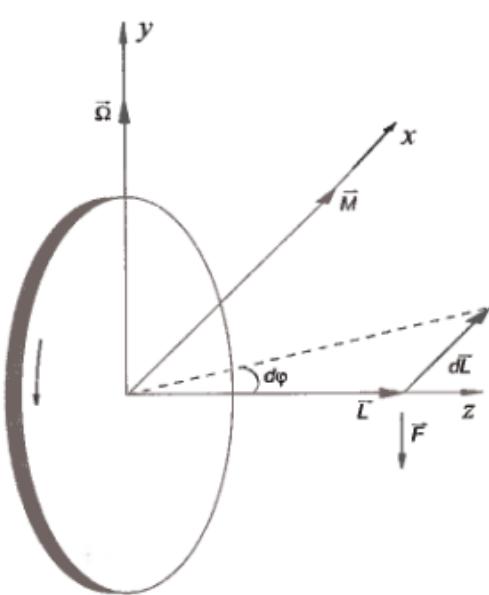


Рис. 1. Маховик

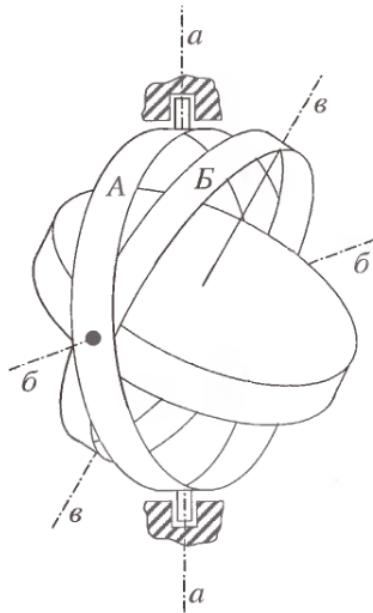


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (1)$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа, I_z – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения. ω_0 – частота его вращения относительно главной оси, Ω – частота прецессии.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на десткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}. \quad (2)$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (3)$$

Здесь $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

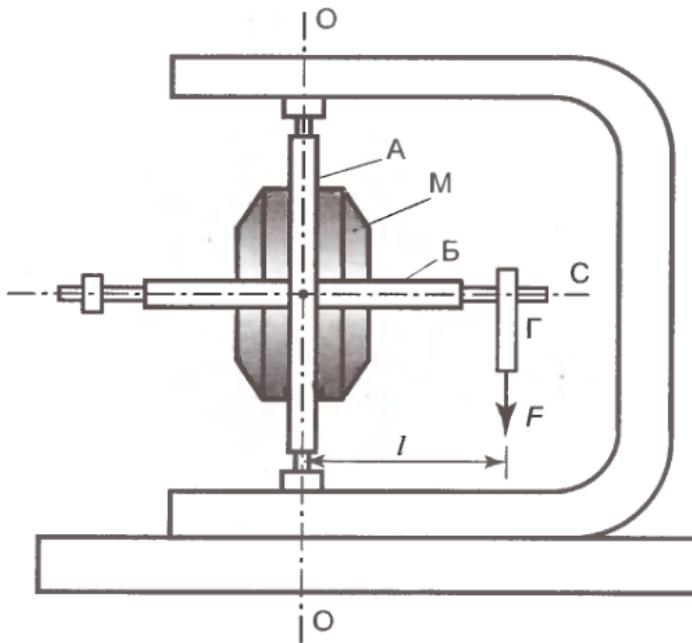


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку искользуют для раскрутки гироскопа, а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагнчен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

Ход работы

1. Ось гироскопа была установлена в горизонтальное положение на высоте $h_0 = 11,1$ см от поверхности стола. Известно, что центр оси вращения гироскопа находится на расстоянии $l = 11,9$ см от конца рычага.
2. Было включено питание гироскопа и выждано необходимое время, чтобы вращение ротора успело стабилизироваться.
3. Было установлено, что ротор вращается достаточно быстро: при лёгком постукивании по рычагу он не изменял своего положения в пространстве. При более сильном нажатии на рычаг гироскоп начинал медленно вращаться против часовой стрелки.
4. К рычагу гироскопа был подвешен груз. При этом началась его прецессия: из-за трения в оси рычаг начал медленно опускаться.
5. Была проделана серия экспериментов, в которой рычаг отклоняли на несколько градусов вверх (до высоты h_1), подвешивали к нему груз, а затем с помощью секундомера определяли период и угловую скорость регулярной прецессии $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Для каждого груза был определён момент силы $M = mgl$, создаваемый им. Измерения продолжались до тех пор, пока рычаг не опускался на несколько градусов ниже горизонтальной оси (до высоты h_2), сделав целое число оборотов вокруг вертикальной. Также была измерена скорость опускания рычага. Для каждого из семи грузов опыт был повторён два раза. Результаты измерений и вычислений занесены в таблицу. Зависимость Ω от M изображена на графике.

m , г	M , Н·м	Время, с	Об.	Период, с	$\Omega, \text{с}^{-1}$	h_1 , см	h_2 , см	$\Omega_f, \text{с}^{-1} \cdot 10^{-4}$	$M_{\text{тр}}$, Н·м· 10^{-3}
335	0,391	269	9	29,889	$0,210 \pm 0,004$	12,5	10,0	7,825	$1,456 \pm 0,03$
335	0,391	270	9	30,000	$0,209 \pm 0,003$	12,5	10,0	7,796	$1,456 \pm 0,03$
270	0,315	297	8	37,125	$0,169 \pm 0,002$	12,5	9,8	7,656	$1,426 \pm 0,03$
270	0,315	298	8	37,250	$0,169 \pm 0,002$	12,5	9,8	7,630	$1,426 \pm 0,03$
215	0,251	328	7	46,857	$0,134 \pm 0,001$	12,5	9,4	7,965	$1,491 \pm 0,03$
215	0,251	329	7	47,000	$0,134 \pm 0,001$	12,5	9,4	7,941	$1,491 \pm 0,03$
173	0,202	292	5	58,400	$0,108 \pm 0,001$	12,5	9,8	7,787	$1,462 \pm 0,03$
173	0,202	351	6	58,500	$0,107 \pm 0,001$	12,5	9,3	7,686	$1,445 \pm 0,03$
142	0,166	355	5	71,000	$0,088 \pm 0,0006$	12,5	9,2	7,839	$1,468 \pm 0,03$
142	0,166	356	5	71,200	$0,088 \pm 0,0006$	12,5	9,2	7,817	$1,468 \pm 0,03$
116	0,135	347	4	86,750	$0,072 \pm 0,0004$	12,5	9,2	8,019	$1,499 \pm 0,03$
116	0,135	347	4	86,750	$0,072 \pm 0,0004$	12,5	9,3	7,774	$1,453 \pm 0,03$
77	0,090	397	3	132,333	$0,047 \pm 0,0002$	12,5	8,8	7,870	$1,490 \pm 0,03$
77	0,090	395	3	131,667	$0,048 \pm 0,0002$	12,5	8,9	7,693	$1,449 \pm 0,03$

Вычислена угловая скорость опускания гироскопа Ω_f по приведённой ниже формуле, результаты добавлены в таблицу. Определено, что среднее значение составляет $\langle \Omega_f \rangle = 7,807 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$

$$\Omega_f = \frac{\arcsin((h_1 - h_0)/l) - \arcsin((h_2 - h_0)/l)}{t}$$

6. Был определён момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии I_0 . Для этого ротор, извлечённый из такого же гироскопа, был подвешен к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось симметрии гироскопа была вертикальна, и был измерен период крутильных колебаний получившегося маятника. Затем ротор был заменён цилиндром, у которого были измерены радиус $r_{\text{ц}}$ и масса $m_{\text{ц}}$ (с учётом погрешностей), и для него был определён период крутильных колебаний. Момент инерции цилиндра $I_{\text{ц}}$ можно найти по формуле $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}m_{\text{ц}}r_{\text{ц}}^2$. Момент инерции ротора был определён с помощью формулы (3).

$m_{\text{ц}}$, г	$r_{\text{ц}}$, мм	$\sigma_{m_{\text{ц}}}$, г	$\sigma_{r_{\text{ц}}}$, мм	$T_{\text{ц}}$, с	T_0 , с	σ_T , с	$I_{\text{ц}}$, $\text{кг}\cdot\text{м}^2 \cdot 10^{-3}$	I_0 , $\text{кг}\cdot\text{м}^2 \cdot 10^{-3}$
1616,2	39	0,1	0,05	4,03	3,20	0,025	1,229	0,775

7. Погрешность однократного измерения времени $\sigma_t \approx 0,25$ с (скорость реакции человека). Были оценены погрешности I_0 и Ω с помощью формул ниже. Так как измерение периода прецессии для каждого груза было проведено дважды, и в полученных значениях не было сильных отклонений, случайную погрешность Ω можно считать примерно равной нулю.

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{2 \left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_{T_{\text{ц}}}}{T_{\text{ц}}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m_{\text{ц}}}}{m_{\text{ц}}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_{r_{\text{ц}}}}{r_{\text{ц}}} \right)^2} \quad \sigma_{\Omega} = \Omega \cdot \frac{2\sigma_t}{t}$$

Таким образом, $\sigma_{I_0} = 1,1 \cdot 10^{-5}$ $\text{кг}\cdot\text{м}^2$. Данные о σ_{Ω} добавлены в таблицу с её значениями.

8. Частота вращения гироскопа ω_0 была определена с помощью углового коэффициента k построенного графика зависимости Ω от M : $\omega_0 = \frac{1}{kI_0}$. k и его погрешность σ_k определены с помощью МНК. Погрешность частоты вращения $\sigma_{\omega_0} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2}$.

$k, \frac{1}{Дж\cdotс}$	$\sigma_k, \frac{1}{Дж\cdotс}$	$\omega_0, \text{с}^{-1}$	$\sigma_{\omega_0}, \text{с}^{-1}$
0,538	0,002	2398	35

9. По скорости опускания рычага во время прецессии был определён момент сил трения M_{tp} и оценена его погрешность $\sigma_{M_{tp}}$. Данные добавлены в таблицу выше.

$$M_{tp} = I_0 \omega_0 \Omega_f \quad \sigma_{M_{tp}} = M_{tp} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega_0}}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Omega_f}}{\Omega_f}\right)^2}$$

10. Гироскоп был выключен, и с помощью осциллографа измерялось время, за которое он замедлялся до значения частоты вращения ν , равного 180 с^{-1} с шагом в 20 с^{-1} . Результаты измерений внесены в таблицу.

$t, \text{с}$	4,56	55,3	110	166	227	290	356	432	513	600	694
$\nu, \text{с}^{-1}$	380	360	340	320	300	280	260	240	220	200	180
$\frac{t}{I_0}, \frac{\text{с}}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}$	5884	71355	141935	214194	292903	374194	459355	557419	661935	774193	895484
$\ln\left(\frac{\nu_0}{\nu(t)}\right)$	0,0043	0,0584	0,1156	0,1762	0,2407	0,3100	0,3838	0,4639	0,5509	0,6462	0,7515

Момент замедляющих сил трения может быть выражен следующим образом:

$$M_{tp} = -k\omega_0 \implies -M_{tp} = I_0 \frac{d\omega}{dt} \implies -\frac{k}{I_0} dt = \frac{d\omega}{\omega} \implies \frac{kt}{I_0} = \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega(t)}\right) = \ln\left(\frac{2\pi\nu_0}{2\pi\nu(t)}\right) = \ln\left(\frac{\nu_0}{\nu(t)}\right)$$

Из пункта 8 известно, что циклическая частота вращения гироскопа $\omega_0 \approx 2398 \text{ с}^{-1}$, тогда обычная частота его вращения $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 381,65 \text{ с}^{-1}$.

Построен график зависимости $\ln\left(\frac{\nu_0}{\nu(t)}\right)$ от $\frac{t}{I_0}$. С помощью МНК определены коэффициент k и его погрешность σ_k . По формуле выше вычислен модуль момента замедляющих сил M_{tp} и оценена его погрешность $\sigma_{M_{tp}}$ по формуле $\sigma_{M_{tp}} = M_{tp} \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega_0}}{\omega_0}\right)^2}$. Результаты занесены в таблицу ниже.

$k, \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} \cdot 10^{-7}$	$\sigma_k, \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$	$M_{tp}, \text{Н}\cdot\text{м}\cdot 10^{-3}$	$\sigma_{M_{tp}}, \text{Н}\cdot\text{м}\cdot 10^{-3}$
8,39	0,03	2,01	0,03

Вывод

В результате работы были рассчитаны угловые скорости вращения и регулярной прецессии (в зависимости от действующих сил) гироскопа, определены момент инерции ротора гироскопа и моменты различных сил трения двумя разными способами - по скорости опускания рычага гироскопа и по скорости его замедления при выключении. Были оценены погрешности полученных значений.

График зависимости $\Omega(M)$

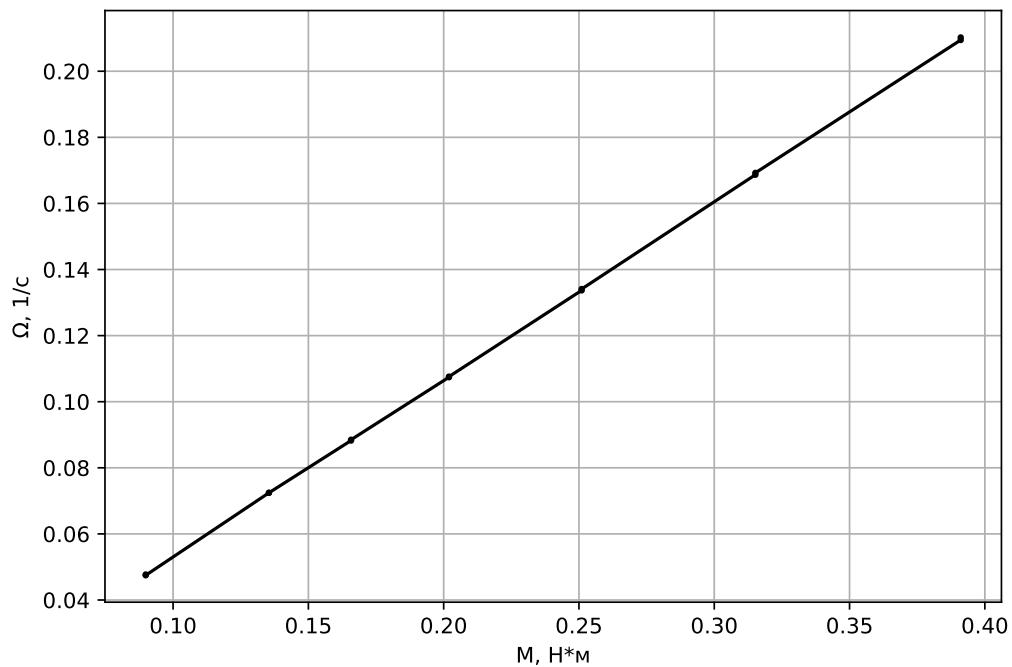


График зависимости $\ln\left(\frac{\nu_0}{\nu(t)}\right)$ от $\frac{t}{t_0}$

