

Работа 1.3.1

Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба

Струков Олег
Б04-404

Цель работы: экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба; по результатам измерений вычислить модуль Юнга.

В работе используется: прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная трубка со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка; во второй части - стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.

Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволоки (рис.1)

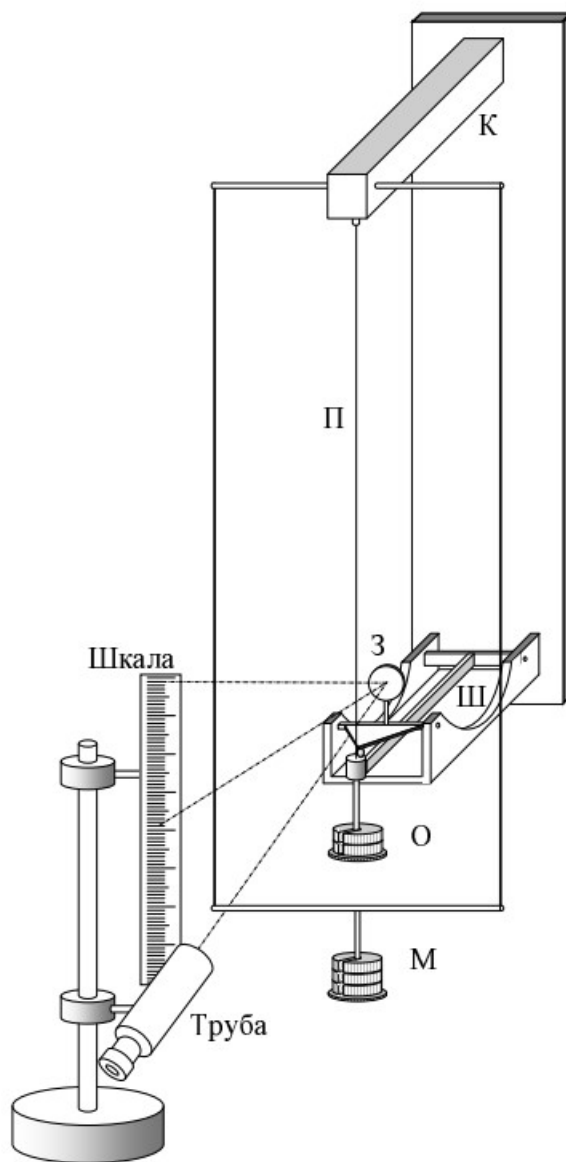


Рис. 1. Прибор Лермантова

1. Диаметр проволоки известен: $d = (0,51 \pm 0,01) \text{ мм}$.

Находим площадь поперечного сечения проволоки:

$$S = \frac{\pi(\bar{d})^2}{4} = 0,204 \text{ мм}^2$$

$$\sigma_S = S \sqrt{2 \left(\frac{\sigma_d}{d} \right)^2} = 0,006 \text{ мм}^2$$

$$S = (0,204 \pm 0,006) \text{ мм}^2$$

2. Измеряем длину проволоки $l_0 = (174 \pm 1) \text{ см}$

3. Направляем зрительную трубу на зеркальце так, чтобы чётко было видно шкалу, тогда свет от неё будет падать примерно перпендикулярно шкале на зеркало, поэтому удлинение проволоки можно выразить так:

$$\Delta l = \frac{nr}{2h}$$

$$\sigma_{\Delta l} = \Delta l \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

где $r = (20 \pm 0,1) \text{ см}$ - длина рычага, разница показаний шкалы - n , расстояние от шкалы до проволоки - $h = (141 \pm 1) \text{ см}$.

Значения всех найденных величин и погрешностей погрешностей указаны в таблице 1

4. Учитывая, что $\sigma_{\text{предел}} = 900 \text{ Н/мм}^2$ получаем, что предельный вес, который можно повесить, чтобы не выйти за пределы $P_{\text{предел}} = 0,3\sigma_{\text{предел}}S \approx 55,08 \text{ Н}$.

5. Снимем зависимость удлинения проволоки от массы грузов при увеличении и уменьшении нагрузки 2 раза (таблица 2).

6. По полученным результатам строим график зависимости $m(\Delta l)$. В недеформированном состоянии проволока, как правило, изогнута, и при малых нагрузках её "удлинение" определяется не растяжением, а выпрямлением, поэтому начальный участок графика при обработке следует исключить. Вычислим коэффициент наклона получившийся прямой для каждой серии измерений, начиная с четвёртой точки, с помощью МНК (таблица 3), после чего найдём его среднее значение и погрешность.

$$k = \frac{\langle m\Delta l \rangle - \langle m \rangle \langle \Delta l \rangle}{\langle \Delta l^2 \rangle - \langle \Delta l \rangle^2}$$

$$\sigma_k = k \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta m}}{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta l}}{\Delta l}\right)^2}$$

$$\sigma_k = 0,53 \text{ кг/м}$$

$$k = (15,09 \pm 0,53) \text{ кг/м}$$

Затем с помощью данного коэффициента определим модуль Юнга и его погрешность по формулам

$$E = k \frac{lg}{S}$$

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{l_0}}{l_0}\right)^2}$$

$$\sigma_E = 5,8 \text{ ГПа}$$

$$E = (126,2 \pm 5,8) \text{ ГПа}$$

7. Погрешность модуля Юнга вычислим по формуле

$$\sigma_E = E \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{l_0}}{l_0}\right)^2}$$

8. Сравнивая полученное значение модуля Юнга с табличными, определим металл, из которого изготовлена проволока. Модулем Юнга, равным 110-125 ГПа обладает медь, поэтому можно предположить, что используемая в эксперименте проволока была изготовлена из меди.

Таблица 1: Используемые величины и их погрешности

Величина	Значение	Погрешность
Диаметр проволоки	$d = 0,51$ мм	$\sigma_d = 0,01$ мм
Площадь поперечного сечения проволоки	$S = 0,204$ мм ²	$\sigma_S = 0,006$ мм ²
Длина проволоки	$l_0 = 174$ см	$\sigma_{l_0} = 1$ см
Длина рычага	$r = 20$ см	$\sigma_r = 0,1$ см
Масса груза	Δm	$\sigma_{\Delta m} = 0,1$ г
Разница показаний шкалы	Δn	$\sigma_{\Delta n} = 1$ мм
Расстояние от шкалы до проволоки	$h = 141$ см	$\sigma_h = 1$ см
Удлинение проволоки	Δl	$\sigma_{\Delta l} = 0,112$ см
Средний коэффициент зависимости $m(\Delta l)$	$k = 15,09$ кг/м	$\sigma_k = 0,53$ кг/м
Модуль Юнга	$E = 126,2$ ГПа	$\sigma_E = 5,8$ ГПа

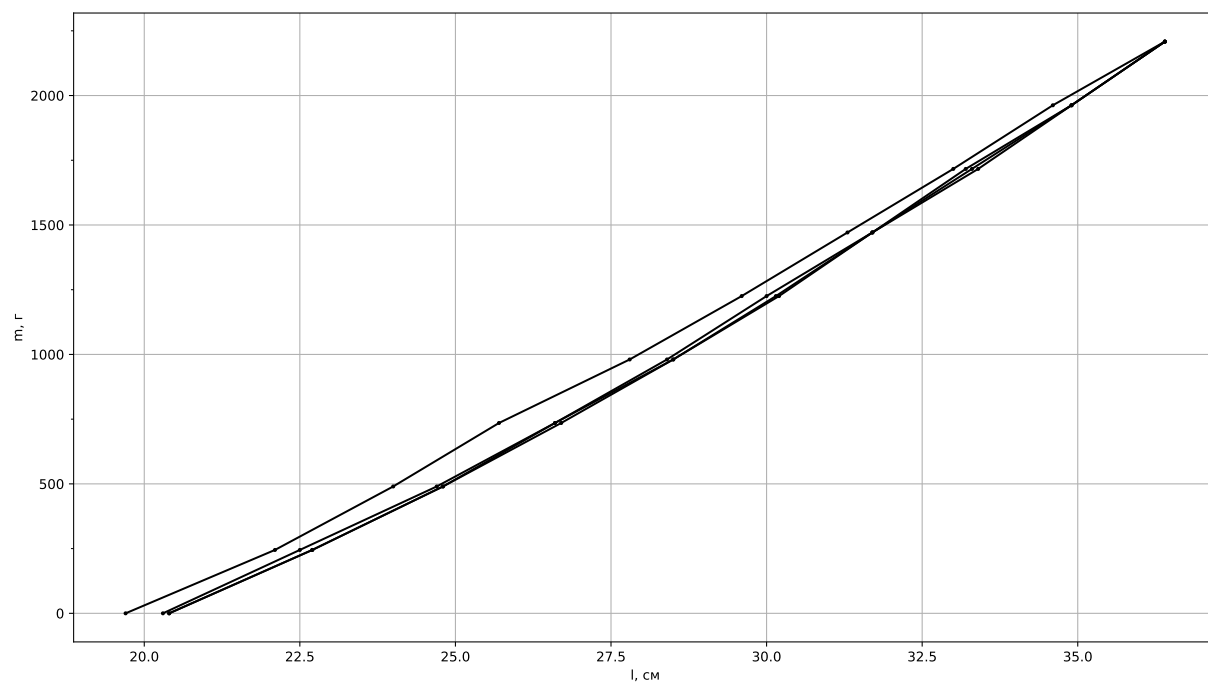
Таблица 2: Зависимость показаний шкалы от нагрузки

№ измерения	Δm , гр	P , Н	$n_1 \downarrow$, см	$n_1 \uparrow$, см	$n_2 \downarrow$, см	$n_2 \uparrow$, см	$\overline{\Delta n}$, см	$\overline{\Delta l}$, см
1	0	0	19,7	20,4	20,4	20,3	0	0
2	244,8	2,488	22,1	22,7	22,7	22,5	2,3	2,3
3	245,2	4,9	24	24,8	24,8	24,7	2,075	4,375
4	245,2	7,352	25,7	26,7	26,6	26,6	1,825	6,2
5	245,3	9,805	27,8	28,5	28,4	28,5	1,9	8,1
6	244,9	12,254	29,6	30,15	30	30,2	1,6875	9,7875
7	245,7	14,711	31,1	31,7	31,7	31,7	1,6125	11,4
8	245,5	17,166	33	33,4	33,2	33,3	1,625	13,025
9	245,8	19,624	34,6	34,9	34,9	34,9	1,6	14,625
10	245,9	22,083	36,4	36,4	36,4	36,4	1,575	16,2

Таблица 3: Коэффициент зависимости $m(\Delta l)$

Номер серии измерений	1	2	3	4
Значение k , кг/м	14,94	15,21	15,07	15,16
Погрешность σ_k , кг/м	1,63	0,17	0,13	0,21

График зависимости $m(\Delta l)$



Работа 1.3.2

Определение модуля кручения при помощи крутильных колебаний

Теоретическая часть

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с радиальных линий, на которых они были в начале, и все эти линии поворачиваются на один и тот же угол. Такое напряженное состояние называется чистым кручением.

При такой деформации любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию).

В системе можно возбудить крутильные колебания. Вращение стержня с закрепленными на нем грузиками вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента M . С учетом выражения для момента M получим, что это вращение описывается уравнением колебаний:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f \varphi = 0 \quad (1)$$

Следовательно период колебаний системы связан с расстоянием r от оси вращения до грузов и моментом инерции стержня I_0 следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{f}{I} \quad (2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}} \quad (3)$$

Эти зависимости были получены для незатухающих колебаний. Поэтому для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемой системе диссипативными силами можно пренебречь. Для этого стоит убедиться, что период колебаний не зависит от начальной амплитуды и что амплитуда уменьшается не более чем в 2 раза после около 10 колебаний.

Применяя Теорему Гюйгенса-Штейнера

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{I}{f} = (2\pi)^2 \frac{I_0}{f} + (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)r^2}{f}, \quad (4)$$

где $I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка, используемая в этой части работы, изображена на рис. 1 и состоит из длинной вертикально висящей проволоки П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный металлический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец проволоки зажать в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким способом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на

нем грузами Γ вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке.

Характеристики установки с учётом погрешностей приведены в таблице 4.

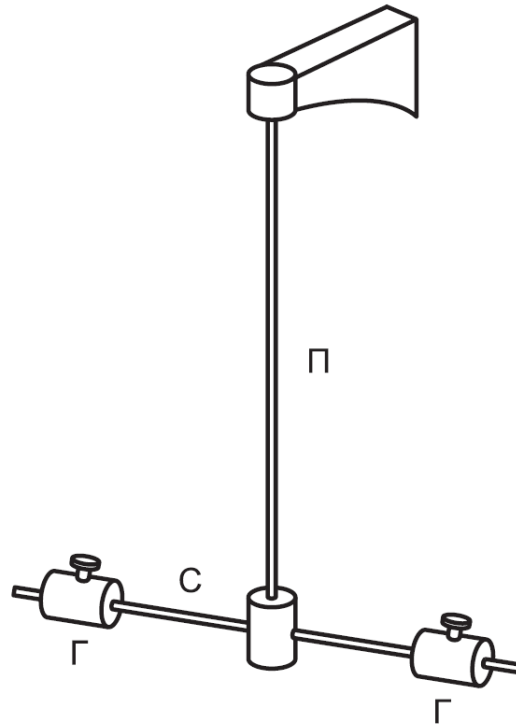


Рис. 1: Схема установки

Ход работы

1. Установим диапазон амплитуд, в котором применимы результаты, полученные для незатухающих колебаний. Для этого укрепим грузы на некотором расстоянии от проволоки и возбудим в системе крутильные колебания. Измерив время двадцати периодов колебаний, находим период $T_1 = 2,3785$ с. Уменьшив амплитуду тем же способом найдём соответствующий период $T_2 = 2,3765$ с. Поскольку $T_1 \approx T_2$, для проведения измерений можно выбрать любую амплитуду не больше первой.
2. Экспериментальным путём установлено, что после двадцати периодов колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем в два раза.
3. Установим грузы на стержне на одинаковом расстоянии l от оси системы (проволоки) до центра масс каждого груза и измерим период колебаний T . Проведём измерения для семи различных значений l . Результаты измерений указаны в таблице 5.
Построим график зависимости $T^2(l^2)$.
4. Период крутильных колебаний можно выразить с помощью следующей формулы:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I_0}{f} + 4\pi^2 \frac{2m}{f} l^2,$$

где I_0 - момент инерции стержня с грузами относительно оси вращения, l - расстояние от оси системы (проволоки) до центра масс каждого груза, f - модуль кручения, связанный с модулем сдвига G следующей формулой:

$$f = \frac{\pi R^4 G}{2l},$$

где R - радиус проволоки.

Таким образом, для нахождения модуля сдвига G сначала необходимо найти угол наклона k графика зависимости $T^2(l^2)$ с помощью МНК, а затем вычислить модуль кручения f

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$f = \frac{8\pi^2 m}{k}$$

После чего найдём модуль сдвига G по формуле

$$G = \frac{2l_0 f}{\pi R^4}$$

5. Перейдём к оценке погрешностей. Погрешности измеренных величин указаны в таблице 4, погрешность измерения периода $\sigma_T = 0,03$ с. Далее оценим погрешности рассчитанных величин:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2}, n = 7$$

$$\sigma_f = f \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2}$$

$$\sigma_G = G \sqrt{\left(\frac{\sigma_{l_0}}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{4\sigma_R}{R}\right)^2}$$

Таблица 4: Используемые величины и их погрешности

Величина	Значение	Погрешность
Масса грузов m , гр	373,0	0,1
Диаметр проволоки d , мм	1,98	0,02
Длина проволоки l_0 , мм	1750	2
Диаметр центрального цилиндра d_0 , мм	48	0,1
Длина одного груза l_1 , мм	37	0,1
Коэффициент k , $\frac{c^2}{m^2}$	801,2021	7,625
Модуль кручения f , $\frac{кг \cdot м^2}{с^2}$	$3,676 \cdot 10^{-2}$	$0,035 \cdot 10^{-2}$
Модуль сдвига G , $\frac{Н}{м^2}$	$4,26 \cdot 10^{10}$	$0,18 \cdot 10^{10}$

Таблица 5: Экспериментальные данные

Номер измерения	l , см	Период, T , с
1	5,15	1,9235
2	6,15	2,14535
3	7,15	2,3785
4	8,15	2,62575
5	9,15	2,876
6	10,15	3,137
7	11,15	3,397

График зависимости $T^2(l^2)$

