Работа 1.2.3
Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса

Струков Олег
Б04-404

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетми по теоретиеским формулам; проверка аддитивноски моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.
Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

2 Теоретические сведения

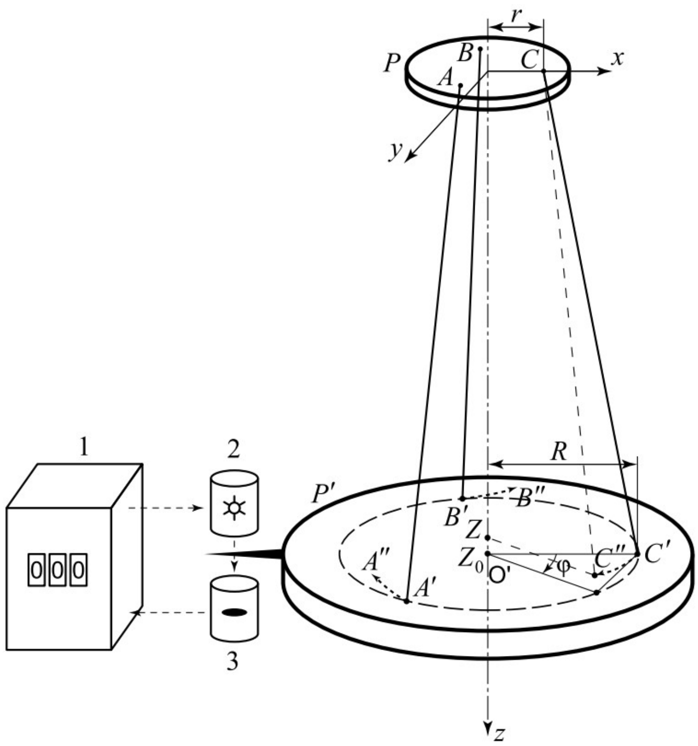


Рисунок 1: Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположеных нитях AA', BB' и CC', вращающейся платформы P'.

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P, вощникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m.

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при коебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \tag{2}$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ. Превый член в левой части уравнения – кинетическач энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z, связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C', находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(Rcos\varphi, Rsin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1-\cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляя z в уравнение (2), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi^2} + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \quad (3)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0 \quad (4)$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \quad (5)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период кртуильных полебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (6)$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2 \quad (7)$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки. При возбуждении крутильных колебаний маятникообразных движений платформы не наблюдается – устройство функционирует нормально.

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T \quad (8)$$

3 Ход работы

1. Без нагрузки нижней платфомы было установлена пригодность установки для измерений, устройство для возбуждения крутильных колебаний функционирует нормально, при этом не возникают нежелательные маятниковообразные движения платформы, счётчик числа колебаний работает исправно.

2. Проверю, достаточно хорошо ли выполняется условие $T \gg \tau$. Для этого посмотрю, насколько изменится амплитуда отклонения пустой платформы после тридцати колебаний. При отклонении на $30°$ она уменьшилась примерно на $5°$, при отклонении на $15°$ - менее чем на $3°$. Таким образом, можно сделать вывод, что рассматриваемое условие выполняется хорошо и потери в системе достаточно малы.

3. Найду рабочий диапазон амплитуд колебаний. Для этого сначала найду период колебаний пустой платформы при отклонении на $30°$, а затем на $15°$. В первом случае период колебаний составил 4,425 с, во втором - 4,432 с. Погрешность измерения периода с помощью таймера $\sigma_T = 0,03$с, поэтому можно считать, что в данном диапазоне период не зависит от угла отклонения, и использовать его в качестве рабочего диапазона амплитуд колебаний.

4. Измерю параметры установки, по ним вычислю константу k, необходимую для вычисления момента импульса I, и её погрешность σ_k. z_0 найду с помощью теоремы Пифагора, зная радиус диска и расстояние от места крепления проволок к потолку до края диска. Результаты укажу в таблице 1.

$$z_0 = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\sigma_{z_0} = z_0\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$$

$$\sigma_k = k\sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2}$$

5. Определю момент инерции ненагруженной платформы

$$I_0 = km_0T^2$$

$$\sigma_{I_0} = I_0\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{m_0}}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_T}{T}\right)^2}$$

6. Проверю аддитивность моментов инерции. Для этого сначала вычислю моменты инерции для тел № 1 и 2 по отдельности, а затем вместе. Внесу характеристики тел и результаты измерений и вычислений в таблицу 2. Момент инерции и его погрешность расчитаю по формулам:

$$I = k(m_0 + m)T^2 - I_0$$

$$\sigma_I = \sigma_{I_0} + \sigma_I$$

Как видно, все измеренные моменты инерции I_i не выходят за пределы погрешности σ_{I_i}.

Затем рассчитаю теоретические значения моментов инерции тел и добавлю их в ту же таблицу:

$$I_1 = \frac{1}{2}m\left(r_1^2 + r_2^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{D-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right)$$

$$m_1 = m\frac{V_1}{V} = m\frac{d^2H}{d^2H + D^2h}$$

$$m_2 = m\frac{V_2}{V} = m\frac{D^2h}{d^2H + D^2h}$$

$$I_2 = \frac{1}{8}m_1d^2 + \frac{1}{8}m_2D^2 = \frac{1}{8}m\frac{d^4H + D^4h}{d^2H + D^2h}$$

Измерю момент инерции тел 1 и 2 вместе, результаты добавлю в таблицу 2. Как видно из результатов, аддитивность моментов инерции соблюдается, значение лежит в пределе допустимой погрешности:

$$I_{1+2} = (6,87 \pm 0,42) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_1 + I_2 = (6,83 \pm 0,48) \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Таблица 1: Используемые величины и их погрешности

Величина	Значение	Погрешность
Расстояние от центра крепления до края диска	$a = 215,7$ см	$\sigma_a = 0,1$ см
Радиус диска системы	$b = 12,5$ см	$\sigma_b = 0.05$ см
Расстояние от центра крепления до центра диска	$z_0 = 2153,4$ мм	$\sigma_{z_0} = 8,7$ мм
Рассояние от оси до нижнего крепления нити	$R = 115,5$ мм	$\sigma_R = 0,5$ мм
Рассояние от оси до верхнего крепления нити	$r = 30,2$ мм	$\sigma_r = 0,3$ мм
Масса диска	$m_0 = 1026,4$ г	$\sigma_{m_0} = 0,5$ г
Постоянный коэффициент для установки	$k = 4,025 \cdot 10^{-4}$ м^2/с^2	$\sigma_k = 0,047 \cdot 10^{-4}$ м^2/с^2
Момент инерции ненагруженной платфомы	$I_0 = 8,07 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2	$\sigma_{I_0} = 0,14 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2
Суммарная масса половинок цилиндра	$m = 1526,9$ г	$\sigma_m = 0,1$ г

7. Помещу на платформу цилиндр, разрезанный по диаметру. Постепенно раздвигая половинки цилиндра так, чтобы их общий центр масс всё время оставался на оси вращения платформы, сниму зависимость момента инерции такой системы I от расстояния x каждой из половинок до оси вращения (центра платформы). Результаты внесу в таблицу № 3.

$$I = k(m + m_0)T^2 - I_0$$

Построю график зависимости $I(x^2)$. По нему необходимо определить массу и момент инерции цилиндра. По графику видно, что он представляет собой линейную зависимость $I = ax^2 + b$.

По формуле Гюйгенса-Штейнера:

$$I_x(x) = I + mx^2$$

Найду коэффициенты с помощью МНК:

$$I = b = (1,688 \pm 0,024) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$
$$m = a = (1,558 \pm 0,012) \text{ кг}$$

Как видно из эксперимента, формула Гюйгенса-Штейнера работает, а масса цилиндра, вычисленная с помощью МНК, близка к массе, определённой с помощью весов.

Таблица 2: Параметры и моменты инерции тел № 1 и 2

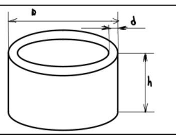
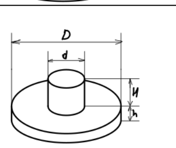
№	Схема	Параметры	T, с	$I + I_0, 10^{-3}$ кг · м^2	$I, 10^{-3}$ кг · м^2	$I_{\text{теор}}, 10^{-3}$ кг · м^2
1		$h = (55,4 \pm 0,1)$ мм $d = (4,4 \pm 0,1)$ мм $D = (159,0 \pm 0,1)$ мм $m = (771,7 \pm 0,1)$ г	4,204	12,79	$4,72 \pm 0,22$	4,74
2		$d = (10,2 \pm 0,1)$ мм $D = (170,6 \pm 0,1)$ мм $h = (3,6 \pm 0,1)$ мм $H = (25,2 \pm 0,1)$ мм $m = (589,5 \pm 0,1)$ г	3,964	10,22	$2,15 \pm 0,20$	2,09
1 + 2		$m = (1360,6 \pm 0,1)$ г	3,935	14,94	$6,87 \pm 0,42$	6,83

Таблица 3: Сдвиг половинок цилиндра

№	x, мм	T, с	$I, 10^{-3}$ кг $\cdot$ м^2	№	x, мм	T, с	$I, 10^{-3}$ кг $\cdot$ м^2
1	0	3,082	1,692	10	45	3,554	4,911
2	5	3,090	1,743	11	50	3,653	5,647
3	10	3,109	1,864	12	55	3,749	6,374
4	15	3,138	2,050	13	60	3,856	7,211
5	20	3,174	2,283	14	65	3,982	8,226
6	25	3,229	2,645	15	70	4,089	9,113
7	30	3,289	3,047	16	75	4,257	10,554
8	35	3,376	3,643	17	80	4,393	11,763
9	40	3,453	4,184				

График зависимости $I(x^2)$