Лабораторная работа № 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Струков О. И.
Б04-404

Теоретическая часть

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \tag{1}$$

Здесь $\dfrac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega_1 t)dt, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega_1 t)dt. \tag{3}$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой V_0, длительностью τ, частотой повторения $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0\frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0\cos(n\Omega_1 t)dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_1\frac{\tau}{2})}{n\Omega_1\frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{4}$$

   Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда T кратно τ).

   Назовём *шириной спектра* $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

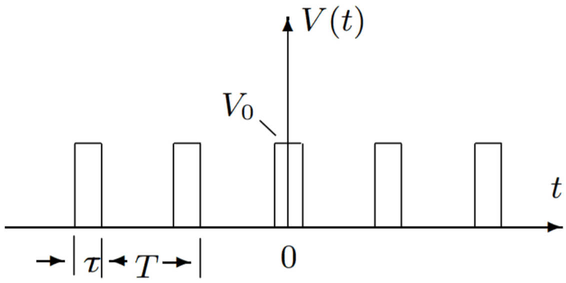

Рис. 1: Прямоугольные импульсы

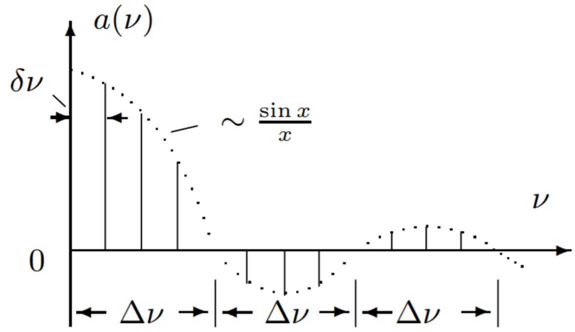

Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

или

$$\Delta\nu\Delta t \backsimeq 1 \tag{5}$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

   Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t)\cos(n\Omega_1 t)dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}}\right) \tag{6}$$

   Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0.

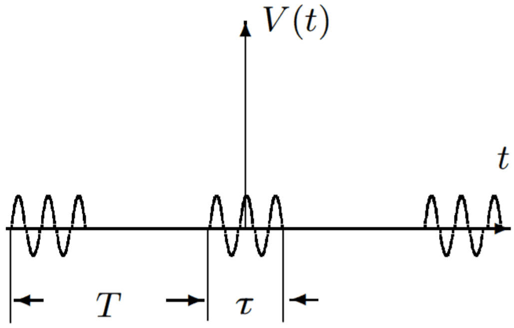

Рис. 3: Последовательность цугов

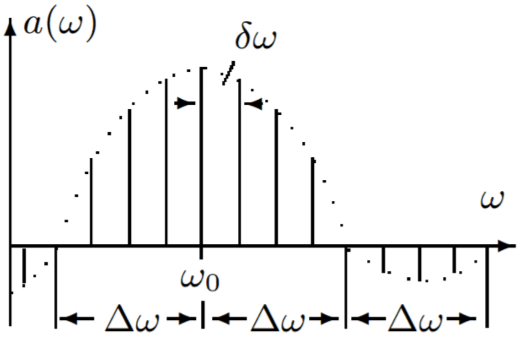

Рис. 4: Спектр последовательности цугов

3. **Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$)) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m\cos\Omega t]\cos\omega_0 t \tag{7}$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \tag{8}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \tag{9}$$

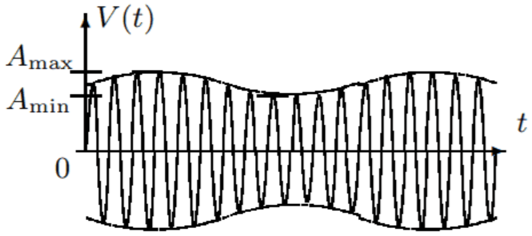

Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

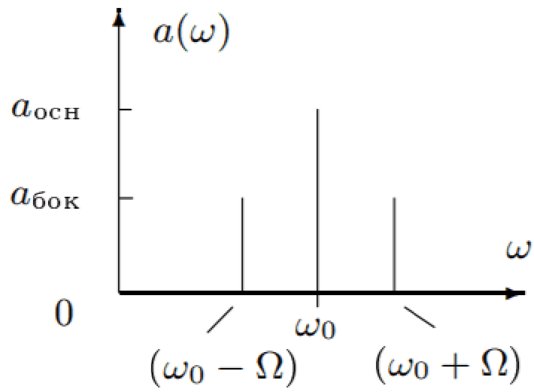

Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{осн} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $\frac{m}{2}$ от амплитуды немодулированного колебания: $a_{бок} = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

Экспериментальная установка

В работе изучаются спектры периодических электрических сигналов различной формы (последовательности прямоугольных импульсов и цугов, а также амплитудно- и фазомодулированных гармонических колебаний). Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью спектроанализатора, входящего в состав USB-осциллографа и сравниваются с рассчитанными теоретически. Схема установки изображена на рис. 7.

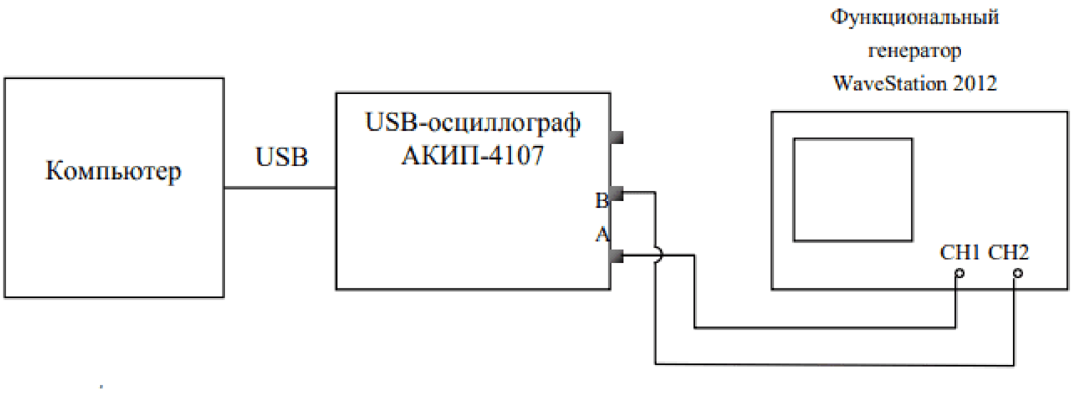

Рис. 7: Схема экспериментальной установки

Функциональный генератор позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – CH1 и CH2. Сигнал с канала CH1 подаётся на вход A, а сигнал с канала CH2 – на вход B USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов. При включении функционального генератора, на его экране отображается информация о параметрах электрического сигнала.

Ход работы

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

1. Изначально генератор был настроен на прямоугольные импульсы с частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = 50$ мкс. В результате был получен спектр сигнала (Преобразование Фурье) и исследованы его изменения при разных значениях $\nu_{\text{повт}}$ и τ. Из графиков, приведённых ниже, видно, что при увеличении частоты повторения сигнала увеличивается расстояние между компонентами спектра, а при уменьшении длительности сигнала увеличивается ширина спектра.

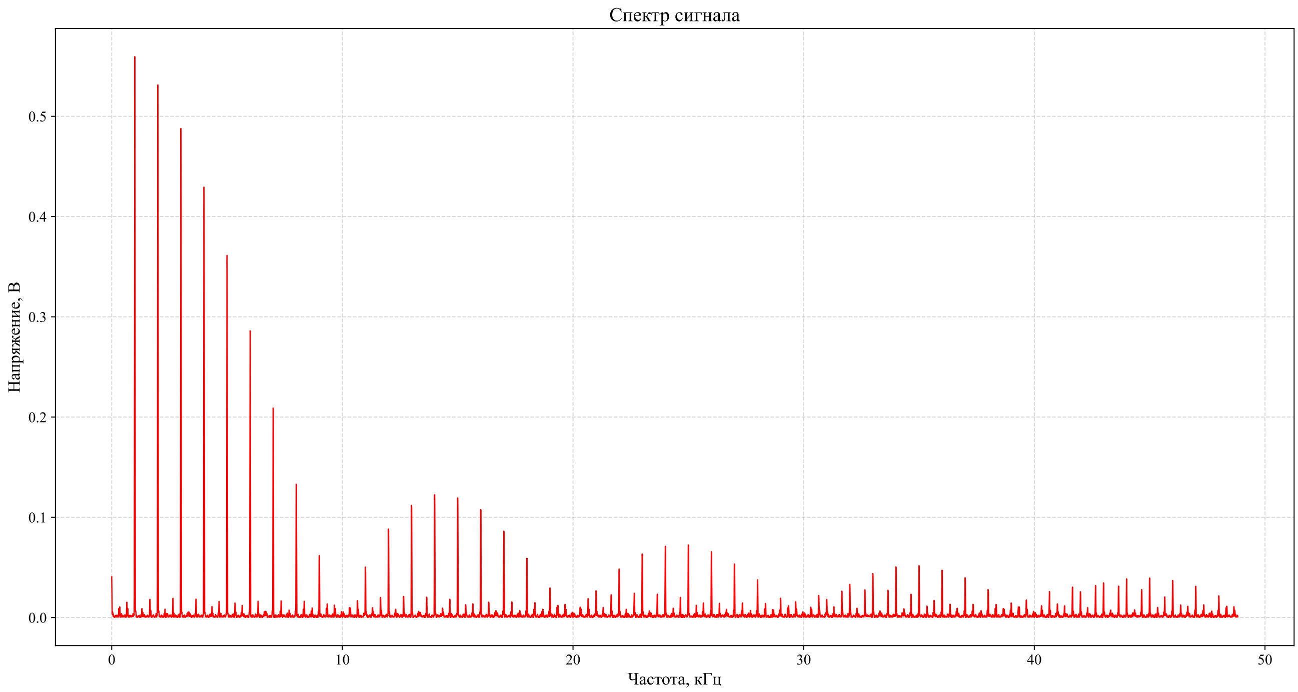

Рис. 8: Спектр при $\nu = 1$ кГц и $\tau = 100$ мкс

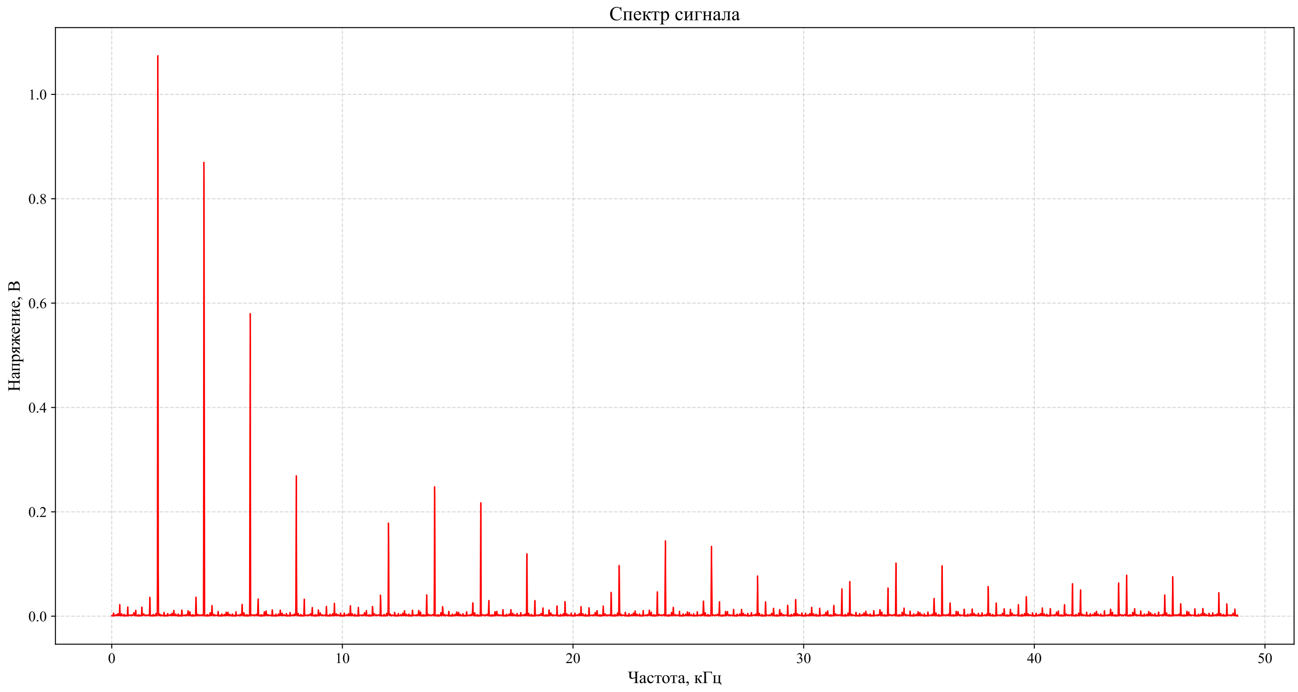

Рис. 9: Спектр при $\nu = 2$ кГц и $\tau = 100$ мкс

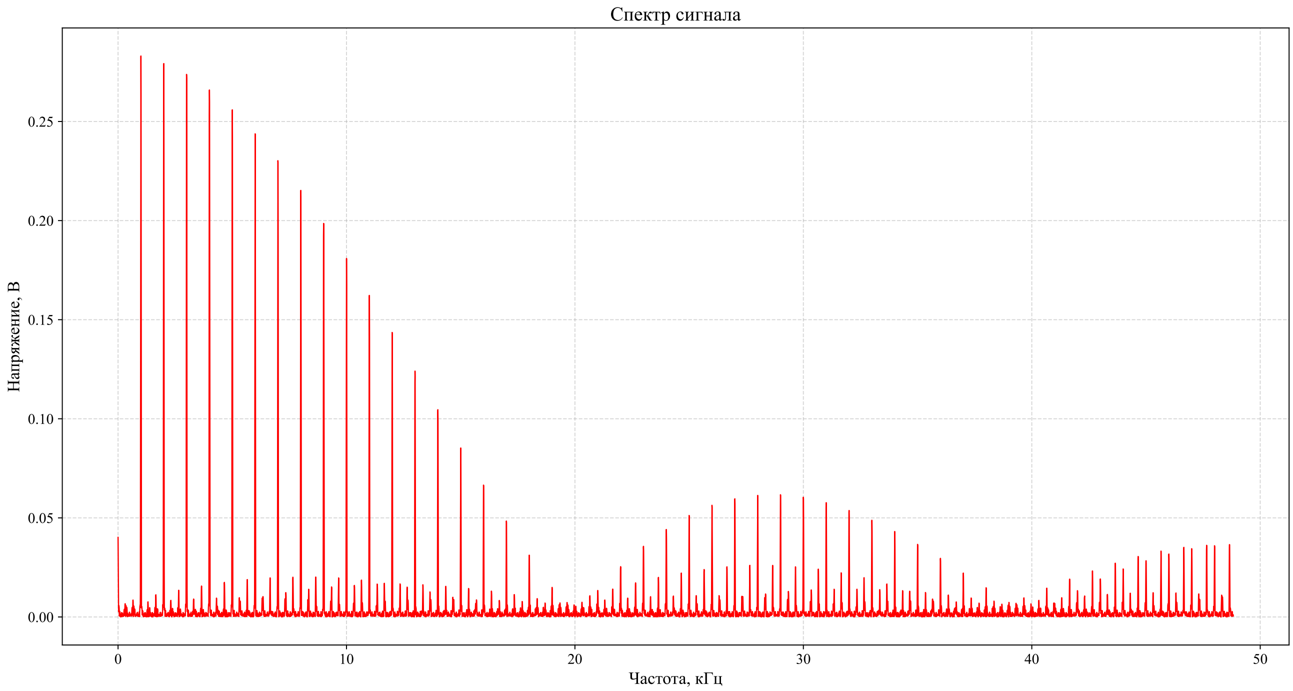

Рис. 10: Спектр при $\nu = 1$ кГц и $\tau = 50$ мкс

2. Далее были измерены амплитуды a_n и частоты ν_n спектральных гармоник при фиксированных $\nu_{\text{повт}}$ и τ $\left(\nu_n^{\text{теор}} = \dfrac{n}{T}, \qquad |a_n|_{\text{теор}} = \dfrac{|\sin\frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n}\right)$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$\nu_{\text{эксп}}$, кГц	2,01	4,026	6,042	7,983	12,01	14,03	16,05
$\nu_{\text{теор}}$, кГц	2	4	6	8	12	14	16
$\lvert a_n \rvert$, усл.ед.	988,3	862,4	574,6	266,6	176,7	248,7	214,9
$\lvert a_n/a_1 \rvert$	1	0,873	0,581	0,270	0,179	0,252	0,217
$\lvert a_n/a_1 \rvert$	1	0,988	0,968	0,940	0,905	0,863	0,762

3. Был зафиксирован период повторения прямоугольного сигнала $T = 1$ мс, $\nu_{\text{повт}} = 1$кГц. При изменении длительности импульса τ в диапазоне от $\tau = T/50$ до $\tau = T/5$ измерена полная ширина спектра сигнала $\Delta\nu$ — от центра спектра ($\nu = 0$) до гармоники с нулевой амплитудой $a_n \approx 0$.

τ, мкс	20	50	75	100	125	167	200
$1/\tau$, 1/мкс	0,050	0,020	0,013	0,010	0,008	0,006	0,005
$\Delta\nu$, кГц	49,54	19,98	12,97	10,03	8,037	5,993	4,985

4. Построен график зависимости $\Delta\nu\left(\frac{1}{\tau}\right)$. С помощью МНК определён коэффициент наклона прямой $k = 989 \pm 9 \approx 1000$ (кГц·мкс). Из этого следует, что $\Delta\nu\frac{1}{\tau} = 1$, что экспериментально подтверждает соотношение неопределённостей.

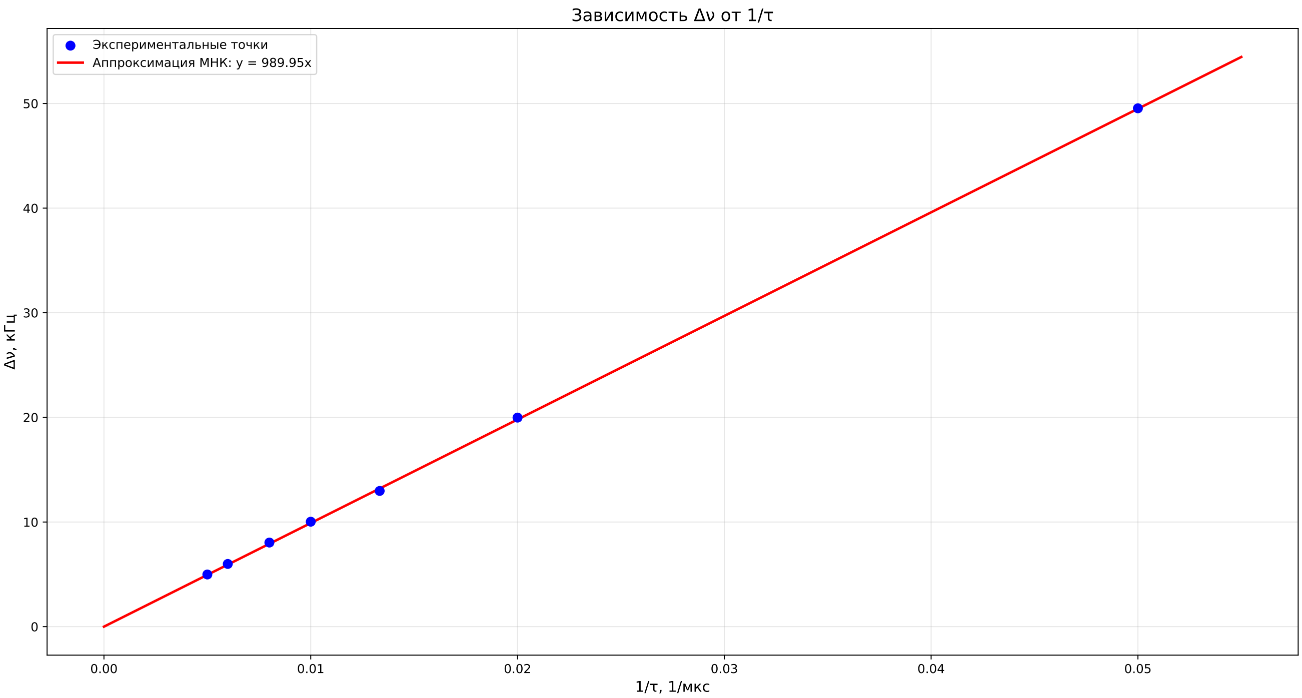

Рис. 11: График зависимости $\Delta\nu\left(\frac{1}{\tau}\right)$

5. Теперь была зафиксирована длительность импульса прямоугольного сигнала $\tau = 100$мкс. При изменении периода повторения T в диапазоне от 2τ до 50τ были измерены расстояния $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$ между соседними гармониками спектра.

T, мкс	200	500	750	1000	1500	2000	3000	4000	5000
1/T, 1/мкс	0,0050	0,0020	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002
$\delta\nu$, кГц	5,013	2,000	1,271	0,996	0,693	0,500	0,333	0,250	0,200

6. Построен график зависимости $\delta\nu\left(\frac{1}{T}\right)$. С помощью МНК получен коэффициент наклона прямой $k = 1002 \pm 12 \approx 1000$ (кГц·мкс), то есть $\delta\nu\frac{1}{T} = 1$, что также экспериментально подтверждает соотношение неопределённостей.

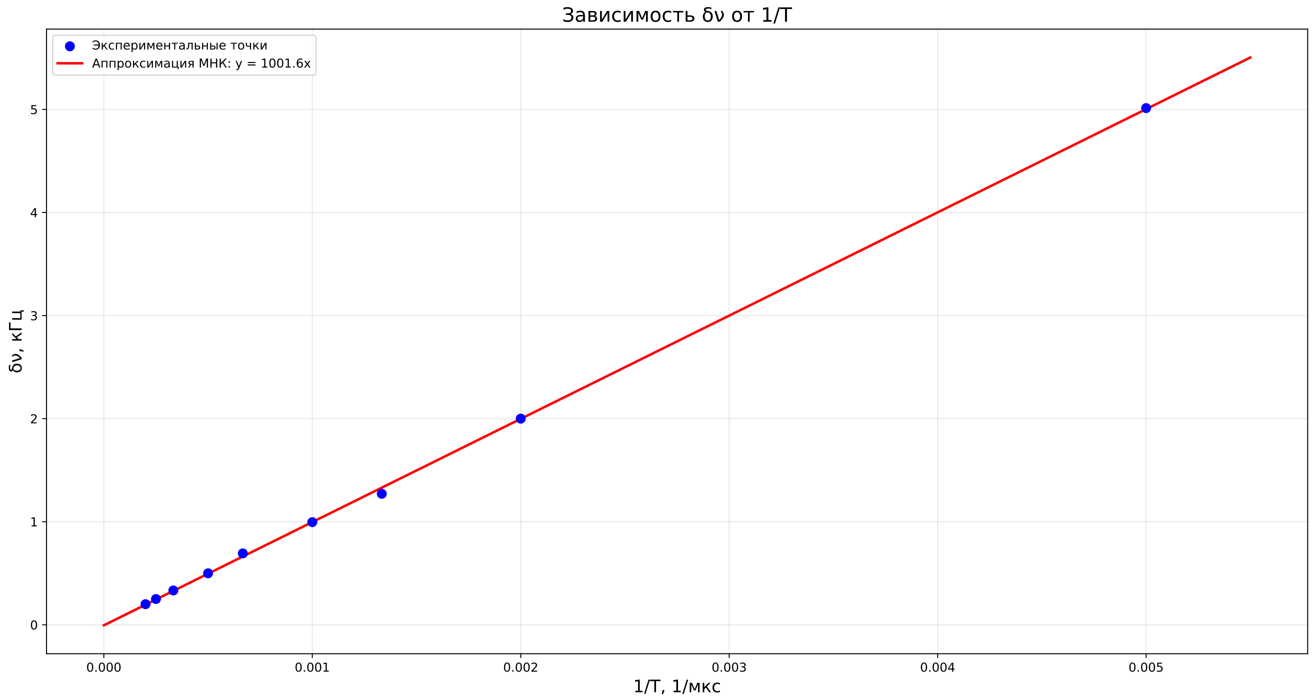

Рис. 12: График зависимости $\delta\nu\left(\frac{1}{T}\right)$

Б. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

1. На данном этапе выполнения работы генератор изначально был настроен на периодичные импульсы синусоидальной формы (цуги) с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$ (что соответствует длительности импульса $\tau = N/\nu_o = 100$ мкс). На осциллографе была получена устойчивая картина сигнала. Затем изменялись некоторые параметры спектра для наблюдения за его изменением.

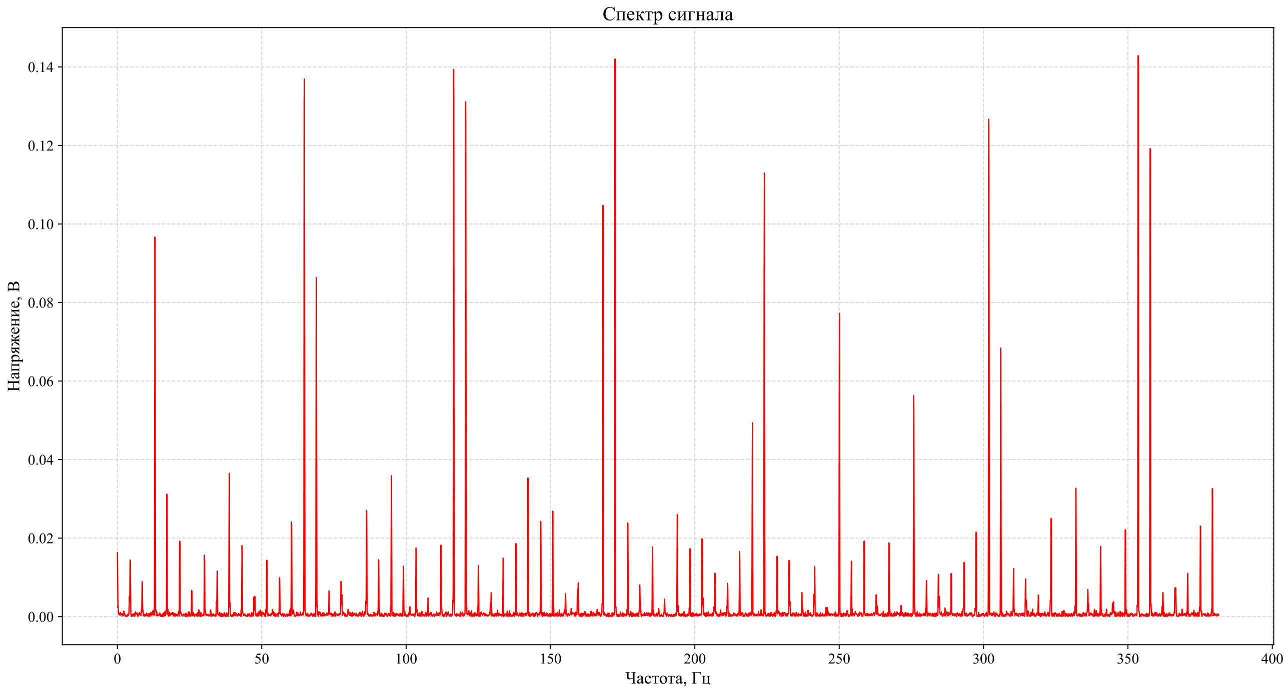

Рис. 13: Спектр при $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс и $N = 5$

2. При изменении ν_0 при фиксированных N и T видно, что в этом случае спектр несколько меняет свою форму и сжимается при увеличении частоты.

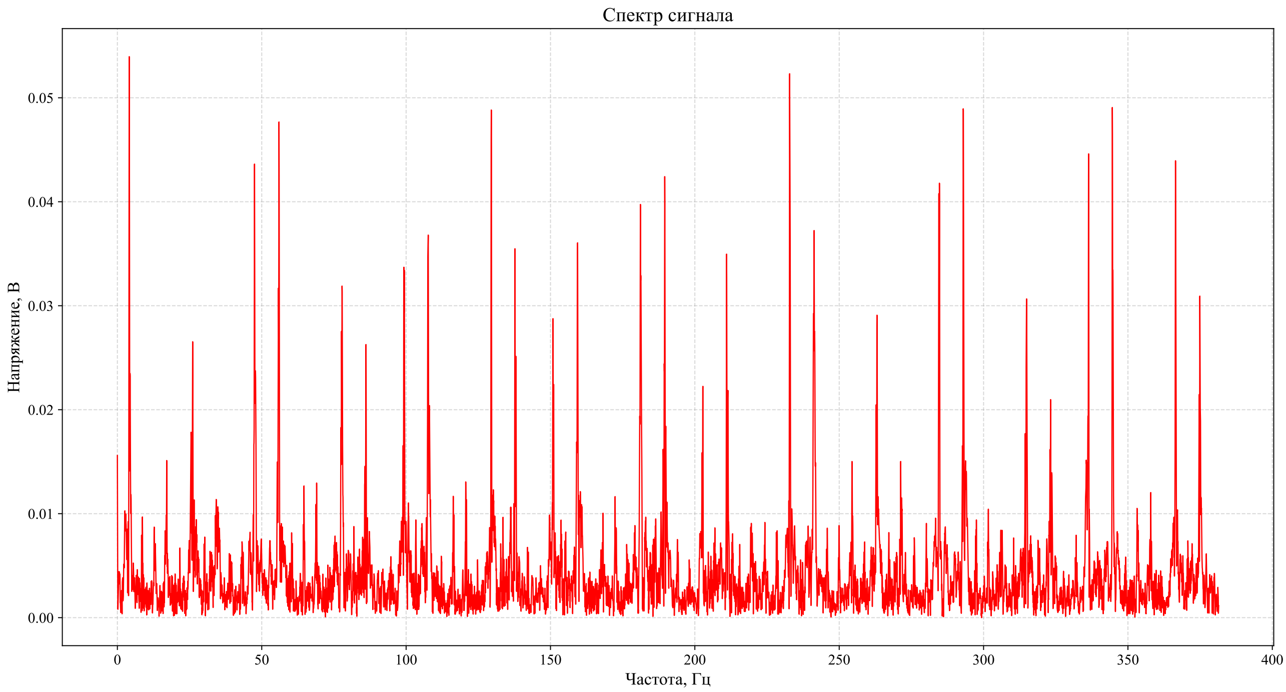

Рис. 14: Спектр при $\nu_0 = 100$ кГц, $T = 1$ мс и $N = 5$

3. При изменении T при фиксированных ν_0 и N видно, что форма спектра не меняется, однако он сильно сжимается при увеличении периода повторений.

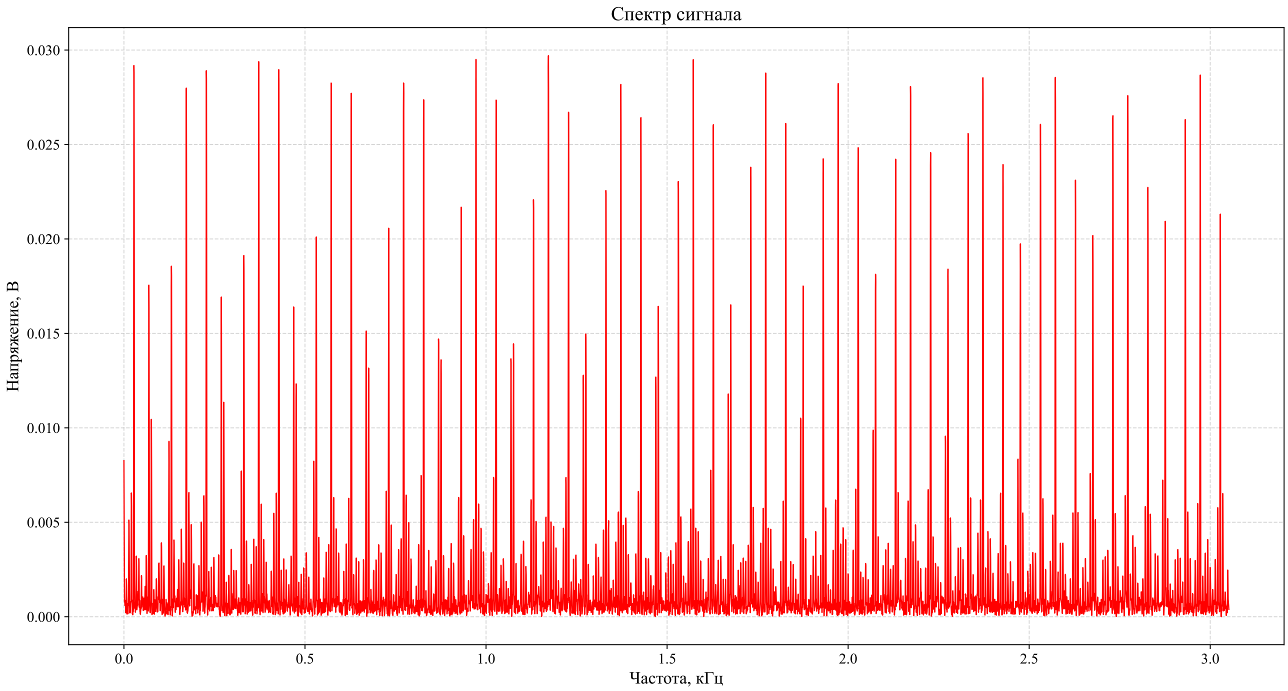

Рис. 15: Спектр при $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 5$ мс и $N = 5$

4. При изменении N при фиксированных ν_0 и T видно, что спектр существенно растягивается при увеличении N.

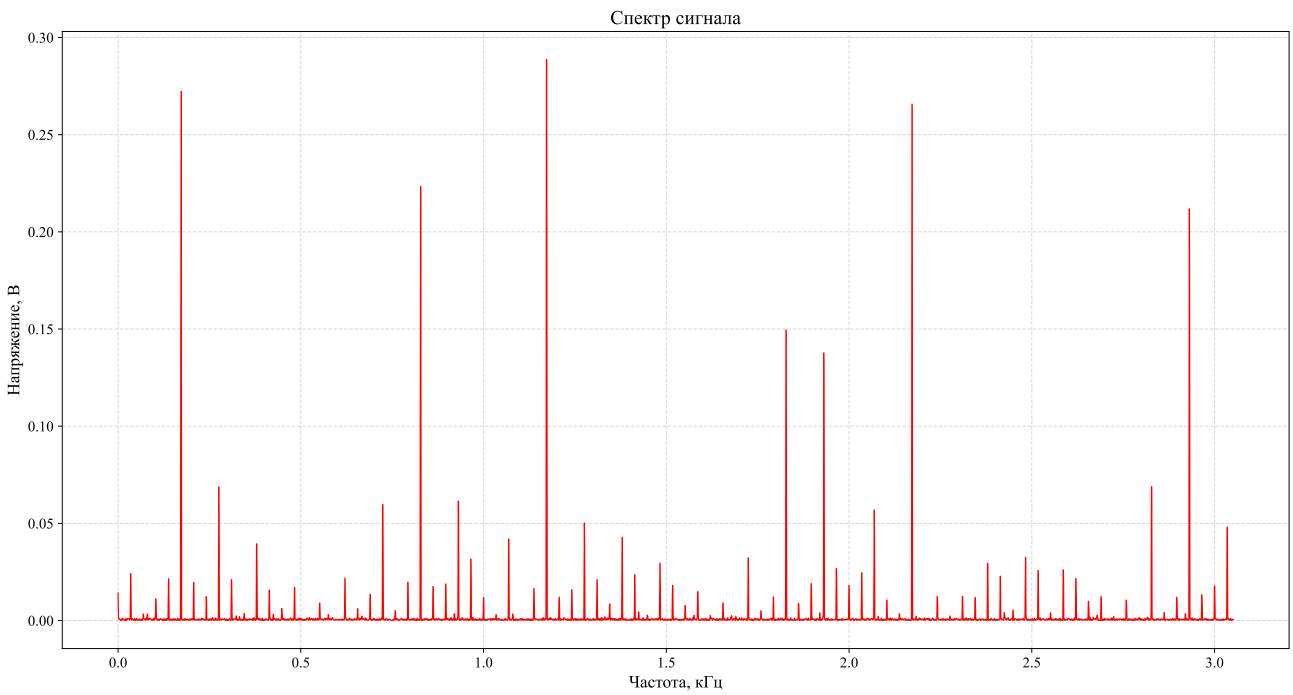

Рис. 16: Спектр при $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 5$ мс и $N = 10$

Г. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

1. На генераторе был установлен режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубина модуляции 50% ($m = 0{,}5$). На экране осциллографа получена устойчивая картина сигнала.

2. В режиме курсорных измерений были определены частоты центральной и боковой гармоник при различных значениях несущей частоты. Видно, что при увеличении несущей частоты происходит сдвиг положения спектральных линий влево

ν_0, кГц	Центральная гармоника, кГц	Боковая гармоника, кГц
50	1,172	0,827
100	0,707	0,345
200	1,415	0,587

3. С помощью осциллографа измерены $A_{max} = 1{,}295$В и $A_{min} = 449{,}6$мВ, что подтверждает справедливость следующего равенства:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{0{,}8454}{1{,}7446} \approx 0{,}485 \approx 0{,}5$$

4. При изменении на генераторе глубины модуляции m в диапазоне от 10 % до 100 %, измерены отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ и построен график зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m:

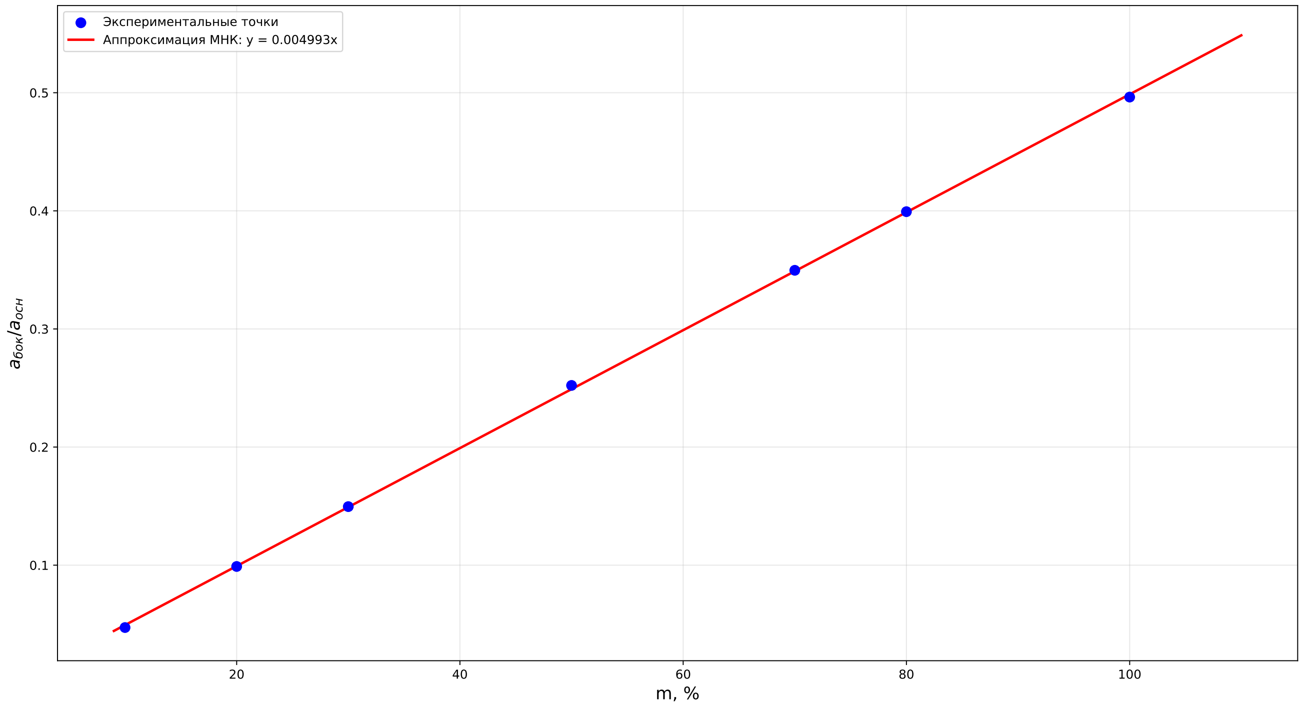

Рис. 17: Зависимость $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

5. С помощью МНК получено, что $k = 0{,}4993\ m$, что подтверждает равенство $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$, т.е. совпадает с теоретическим предположением.

E. Изучение фильтрации сигналов

1. В цепь была подключена RC цепочка с сопротивлением $R = 3$ кОм и ёмкостью $C = 1000$ пФ. Отсюда характерное время $\tau_{RC} = RC = 3$ мкс.

2. На вход RC-цепочки подана последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T = 3$ мкс и длительностью $\tau = 150$ нс. На экране получены формы и спектры сигналов при различных периодах повторения сигнала:

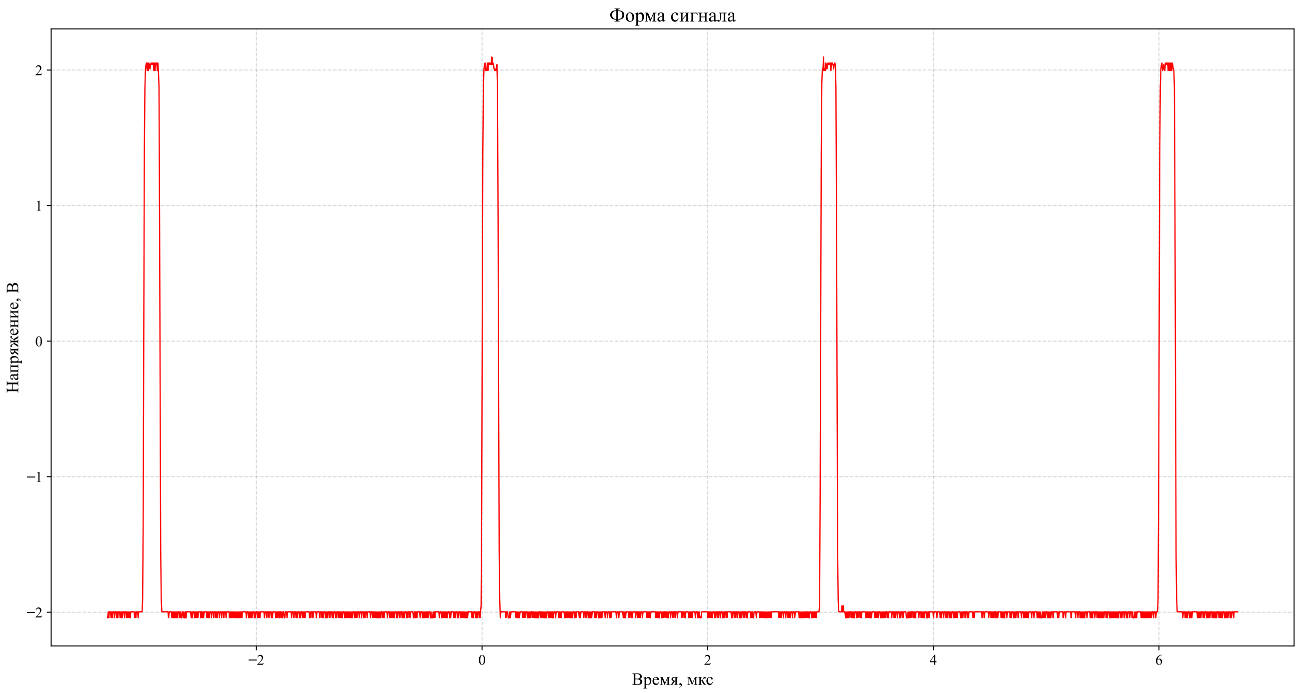

Рис. 18: Форма сигнала при $T = 3$ мкс

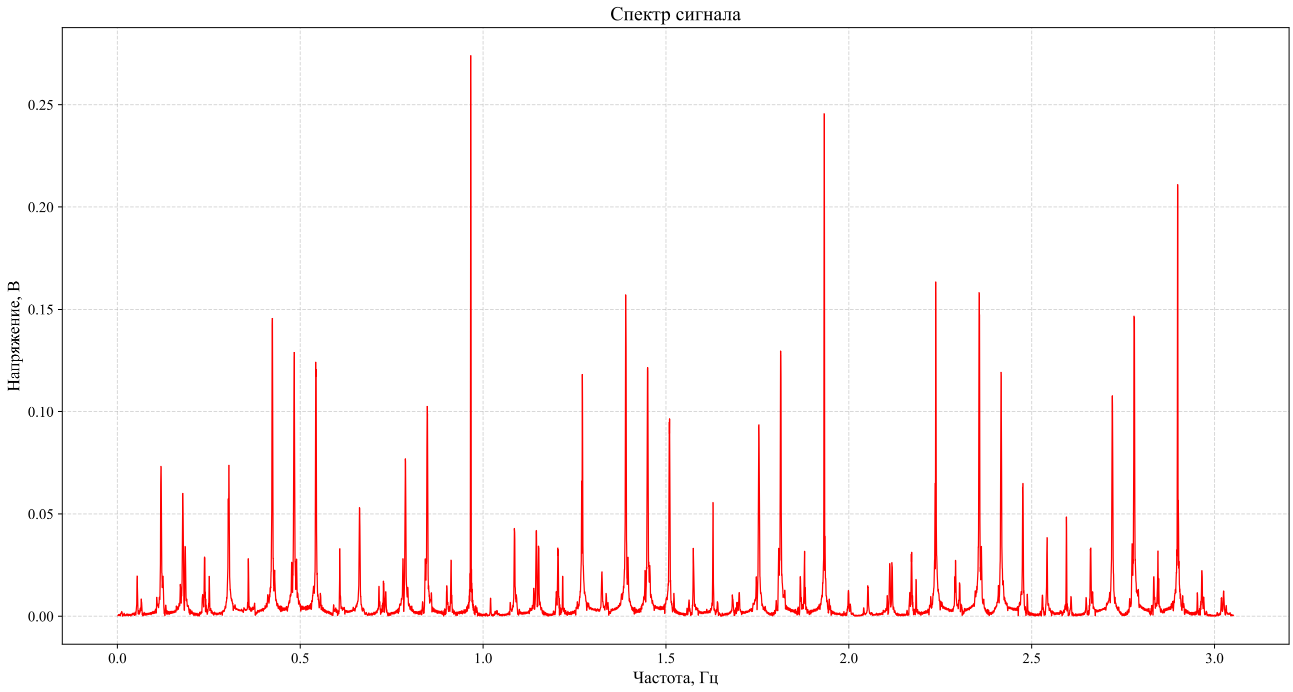

Рис. 19: Спектр при $T = 3$ мкс

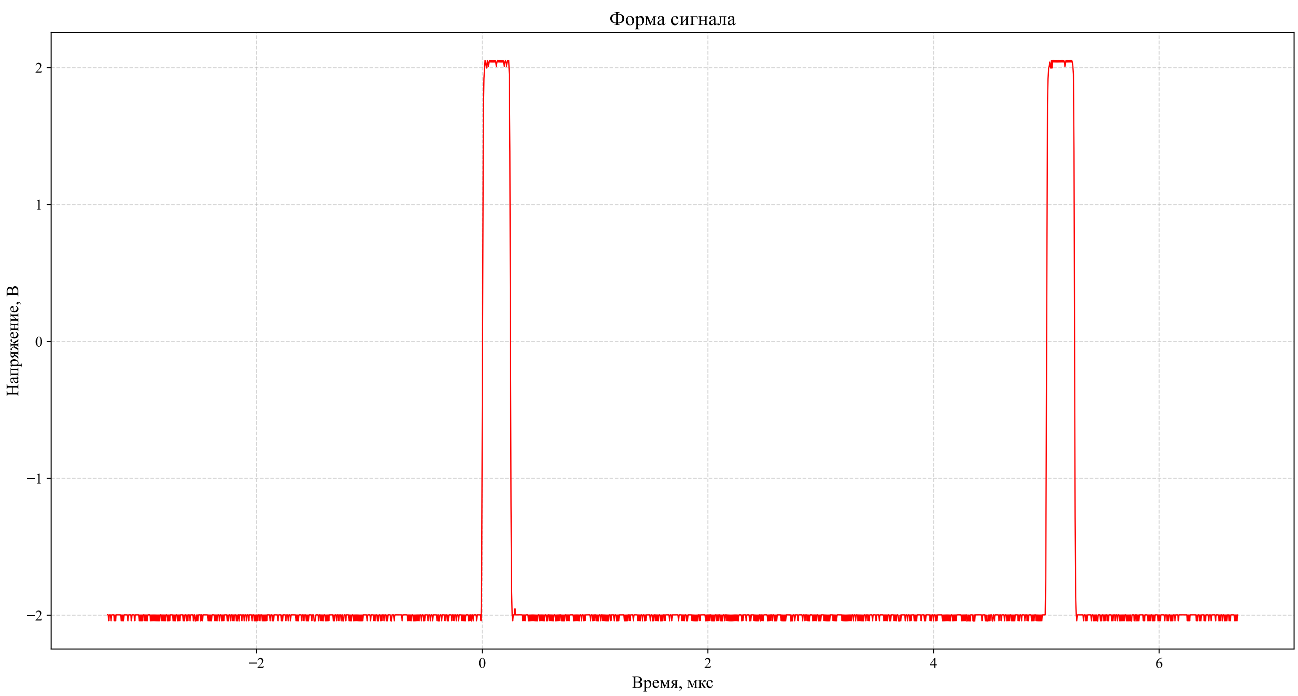

Рис. 20: Форма сигнала при $T = 5$ мкс

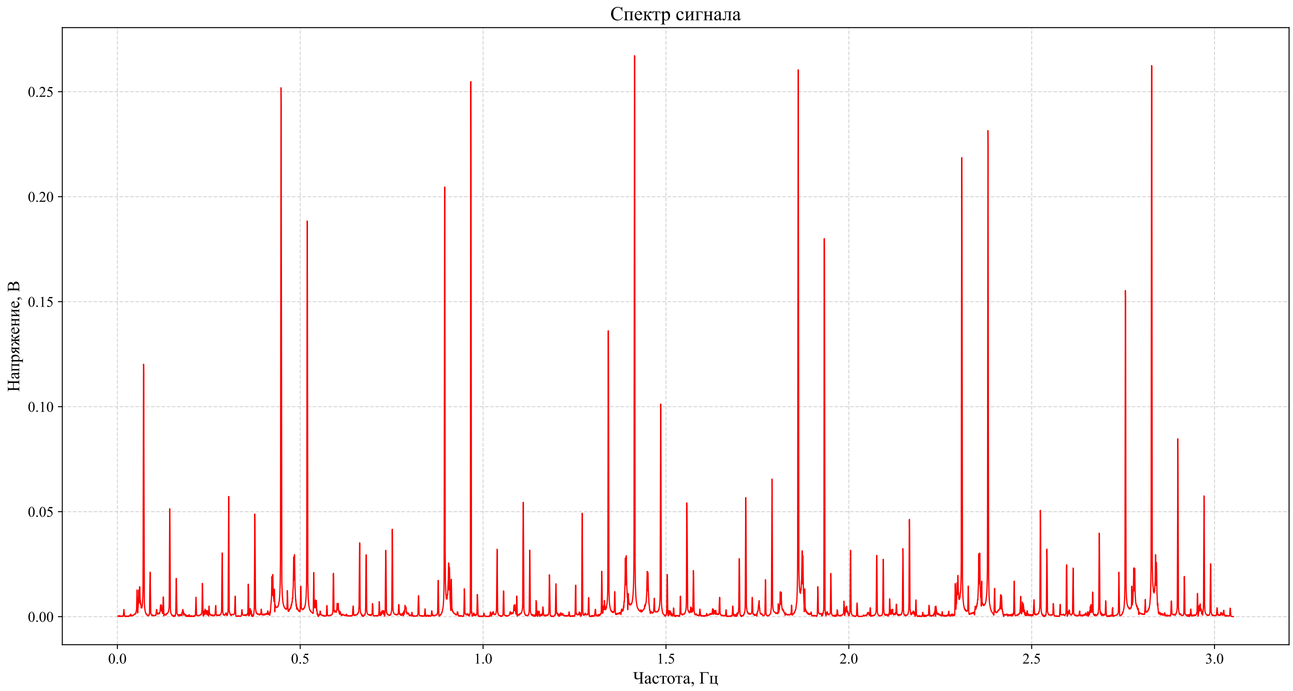

Рис. 21: Спектр при $T = 5$ мкс

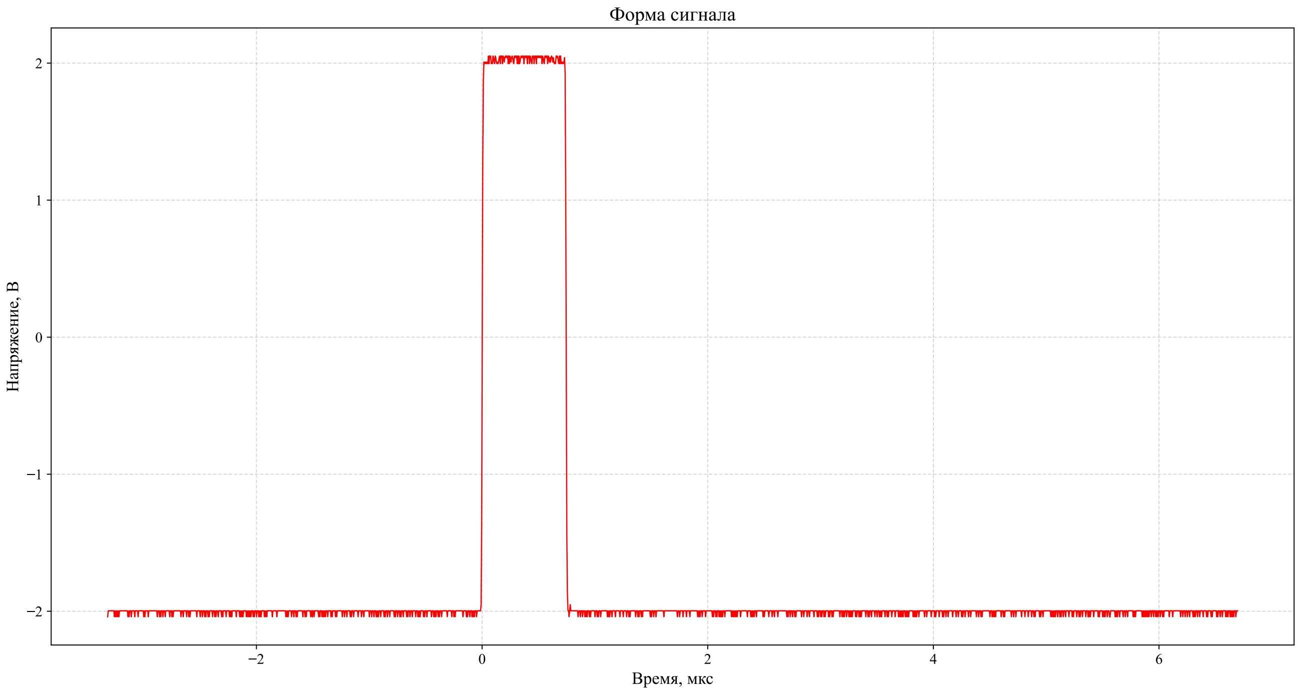

Рис. 22: Форма сигнала при $T = 15$ мкс

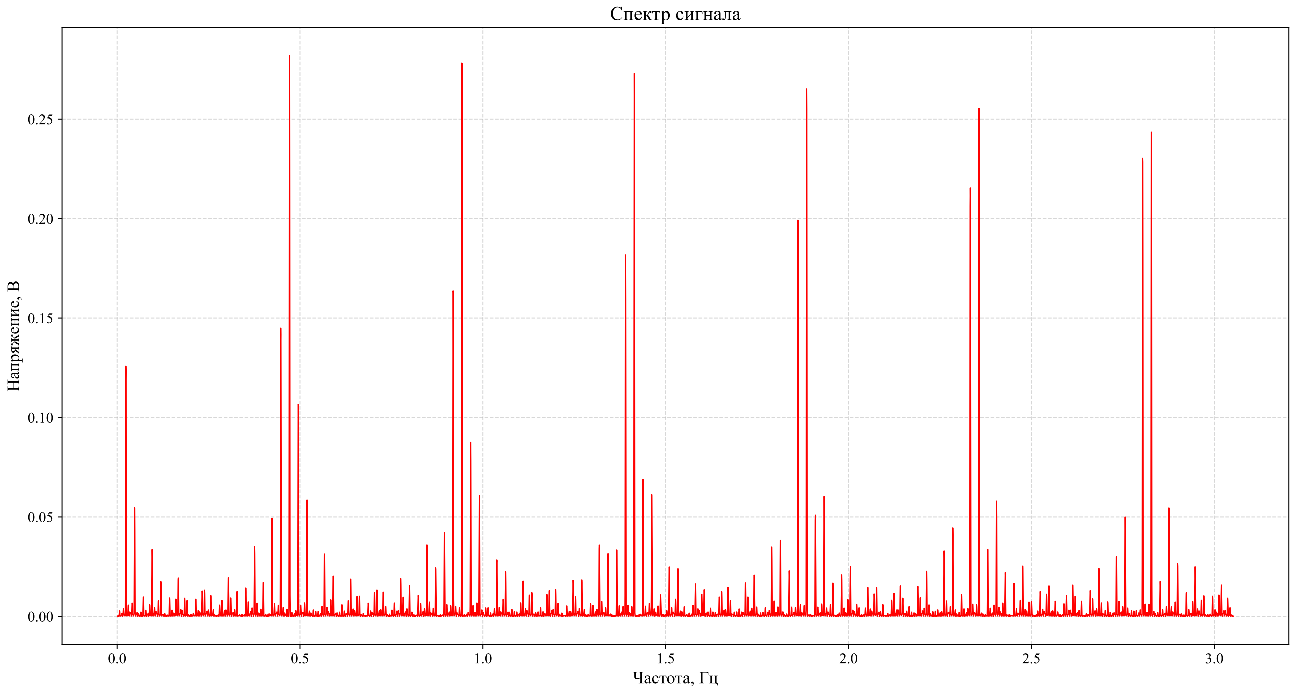

Рис. 23: Спектр при $T = 15$ мкс

3. При фиксированной частоте $\nu_0 = 200$ кГц проведены измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник фильтрованного и исходного сигналов: $K_n = |a_n^\Phi|/|a_n^0|$:

n	a_n^Φ	a_n	ν_n, кГц	a_n^Φ/a_n	$1/\nu_n$, мс
1	65	283	200	0,2297	0,0050
2	30	267	400	0,1124	0,0025
3	19	248	600	0,0766	0,0017
4	16	252	800	0,0635	0,0013
5	14	268	1000	0,0522	0,0010
6	9	250	1200	0,0360	0,0008
7	6	242	1400	0,0248	0,0007

4. Построены графики зависимости $K(\nu)$ и $K(1/\nu)$.

5. Зависимость $K(1/\nu)$ линейная:

$$K(1/\nu) = \frac{1}{2\pi\tau_{RC}}\left(\frac{1}{\nu}\right) \tag{10}$$

Таким образом, из коэффициента наклона прямой $\kappa = 45{,}98$ кГц можно определить $\tau_{RC} = 1/\kappa(2\pi) \approx 3{,}46$ мкс, что близко к рассчитанному изначально $\tau_{RC} = 3$ мкс.

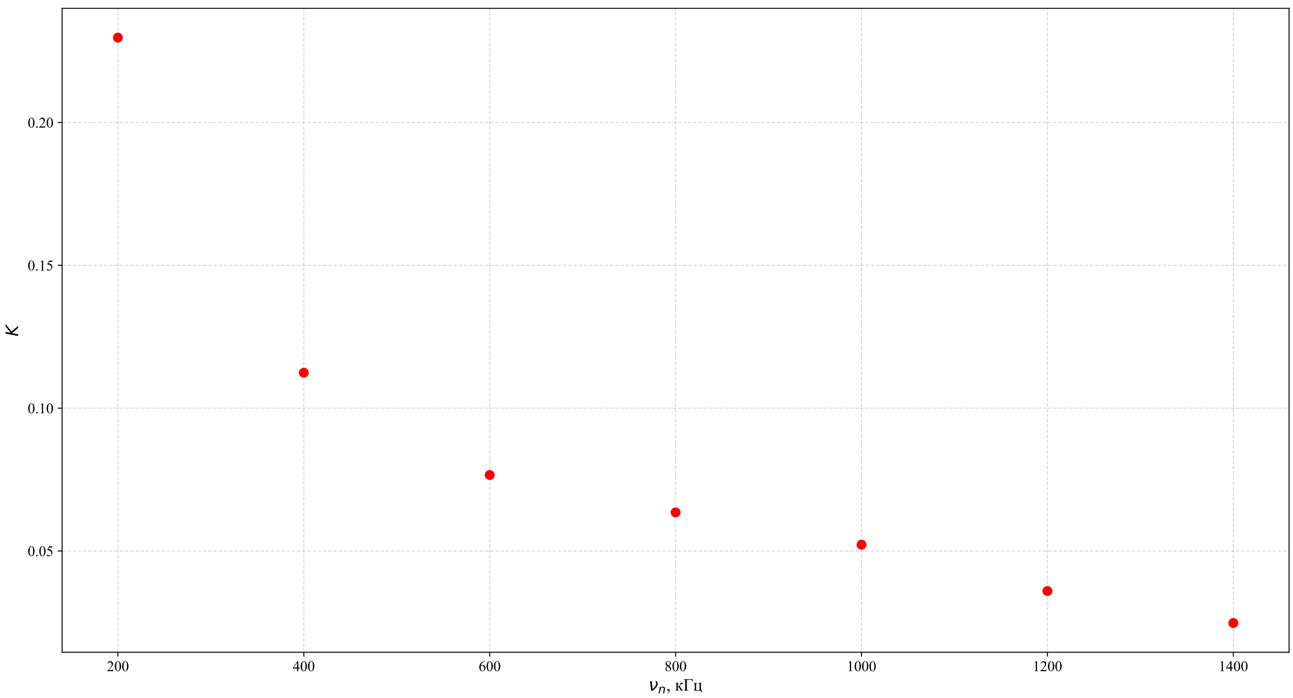

Рис. 24: График зависимости $K(\nu)$

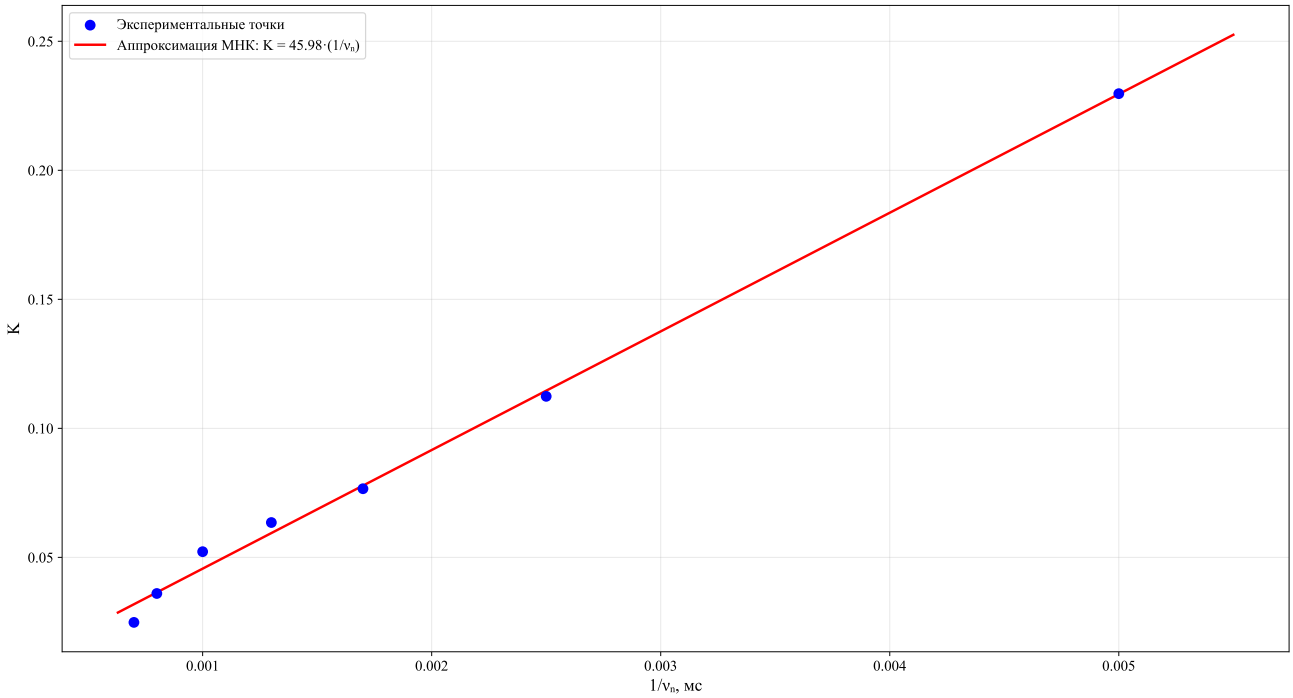

Рис. 25: График зависимости $K(1/\nu)$

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были экспериментально исследованы основы спектрального анализа и преобразований Фурье. На практике изучены спектральные характеристики различных периодических электрических сигналов: прямоугольных импульсов, цугов синусоидальных колебаний, амплитудно-модулированных сигналов, а также фильтрованных сигналов.

С помощью осциллографа были получены спектры сигналов, позволившие определить их частотный состав. Экспериментально подтверждено соотношение неопределённостей $\Delta\nu \cdot \Delta t \simeq 1$, связывающее временные и частотные характеристики сигнала.