Струков Олег БО4-404

Контрольная работа по аналитической геометрии №1.

Задача 1

$$\begin{cases} 5x + y - 4z = -11 \\ -2x + 3y + 5z = 18 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -11 \\ 18 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 8 + 15 + 60 + 36 + 50 - 16 = 153$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -4 \\ 18 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 18 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -72 + 5 - 132 + 12 - 110 + 144 = -153.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 & -4 \\ -2 & 18 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 18 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ -2 & 18 \end{vmatrix} = -165 + 216 - 25 + 8 + 360 - 88 = 306.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -11 \\ -2 & 3 & 18 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 18 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -11 \\ -2 & 18 \end{vmatrix} = 2 + 54 + 15 + 99 + 180 - 44 = 306 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-153}{153} = -1;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{306}{153} = 2;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{306}{153} = 2$$

Ответ: $x = -1;\ y = 2;\ z = 2.$

Задача 2.

В-ры $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не составляют базис на плоскости, когда они линейно зависимы, то есть коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bar{a} = k\bar{b} \Leftrightarrow m\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = k\bar{b}$. Найду такие m:

$$m\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 8 \\ -5 \end{Vmatrix} = k\begin{Vmatrix} -18 \\ -10 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 8 = -18k \\ 3m - 5 = -10k \end{cases} \Rightarrow m = 5;\ k = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не сост. базис на пл-сти, когда $m=5$.

Ответ: $m=5$.

Задача 3.

В базисе $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в-ры имеют координаты $\bar{l}(7; -11; 23)$; $\bar{m}(0; 2; -1)$; $\bar{n}(1; 1; 2)$. Если $\bar{l}, \bar{m}$ и $\bar{n}$ компланарны, то существуют такие α, β и γ, отличные от 0, что $\alpha\bar{l}+\beta\bar{m}+\gamma\bar{n}=\bar{0}$. Чтобы проверить это, запишу координаты в-ров в матрицу и найду её определитель:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -11 & 2 & 1 \\ 23 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 23 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -11 & 1 \end{vmatrix} = 28-46+7+11=0 \Rightarrow$$ в-ры

$\bar{l}, \bar{m}$ и $\bar{n}$ компланарны и имеют линейную зависимость. Найду её с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 7\alpha+\gamma=0 \\ -11\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 23\alpha-\beta+2\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \gamma=-7\alpha;\ -11\alpha+2\beta-7\alpha=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=9\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\bar{l}+9k\bar{m}-7k\bar{n}=\bar{0};\ k\in R.$$

Ответ: $\bar{l}, \bar{m}$ и $\bar{n}$ компланарны; $k\bar{l}+9k\bar{m}-7k\bar{n}=0$; $k\in R$.

Задача 4.

$$A' = S^{-1}\cdot A + S^{-1}\cdot 0. \quad A=\begin{Vmatrix} -7 \\ -14 \\ 10 \end{Vmatrix};\ 0=\begin{Vmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix};\ S=\begin{Vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{Vmatrix}.$$

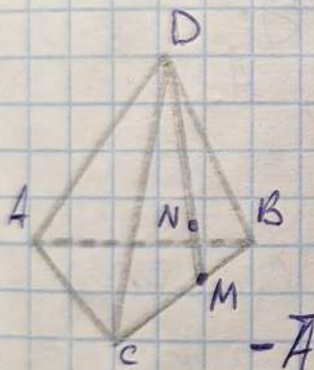
Найду S^{-1}: $\left\|\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -2 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{2} \end{array}\right\| =$

$= \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0,2 & \frac{4}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -0,2 & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -0,3 & -\frac{7}{30} \end{array}\right\| \Rightarrow S^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} & 0,2 & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & -0,2 & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -0,3 & -\frac{7}{30} \end{array}\right\|.$

Допустим, A имеет координаты ~~A~~ $(x';y';z')$ в новом базисе $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\|\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} & 0,2 & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & -0,2 & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -0,3 & -\frac{7}{30} \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{c} -7 \\ -14 \\ 10 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} & 0,2 & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{3} & -0,2 & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -0,3 & -\frac{7}{30} \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} \frac{88}{15} \\ \frac{17}{15} \\ -\frac{7}{15} \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{c} \frac{23}{15} \\ -\frac{13}{15} \\ -\frac{22}{15} \end{array}\right\| =$

$= \left\|\begin{array}{c} \frac{91}{15} \\ \frac{4}{15} \\ -\frac{29}{15} \end{array}\right\| \Rightarrow A'\left(\frac{91}{15}; \frac{4}{15}; -\frac{29}{15}\right).$



№5.

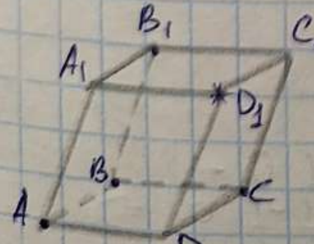
Дано: $\frac{BM}{MC} = \frac{2}{5}$; $\frac{DN}{NM} = \frac{5}{1}$; $\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\}$ - базис.

Найти разложение $\overrightarrow{AN}$ по базису

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN}$. $\overrightarrow{CM} = \frac{5}{7}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{7}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{MD} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$.

$\overrightarrow{MC} = \frac{5}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{42}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{42}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{25}{42}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{21}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$

Ответ: $\overrightarrow{AN}\left(\frac{25}{42}; \frac{5}{21}; \frac{1}{6}\right)$.



№6.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед, $A(-2;3;5)$; $B(-4;3;-3)$; $C(0;-2;0)$; $B_1(-4;0;-8)$.

Найти координаты D_1. Решение: Выражу вектор $\overrightarrow{AB_1}$ через другие, координаты которых

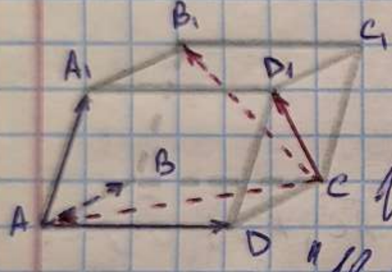
можно найти через координаты точек: $\overrightarrow{AD_1} =$
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$ (т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед и $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BB_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DD_1}$). Допустим, $D_1(x;y;z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD_1} = \left\| \begin{matrix} x+2 \\ y-3 \\ z+5 \end{matrix} \right\|; \quad \overrightarrow{BC} = \left\| \begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{matrix} \right\|; \quad \overrightarrow{BB_1} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{matrix} x+2 \\ y-3 \\ z+5 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2;\ y = -5;\ z = -7 \Rightarrow D_1(2;-5;-7)$.

Ответ: $D_1(2;-5;-7)$.

№7.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.

Исходная с.к.: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$; A.

"Новая" с.к.: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CD_1}$; C.

Выразить координаты $(x;y;z)$ в "старой" с.к. через её координаты $(x';y';z')$ в "новой" с.к.

Выражу координаты базисных векторов и ~~вершин~~ начала координат новой системы через старую:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(1;1;0)$. $\quad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = (-1;-1;0)$.

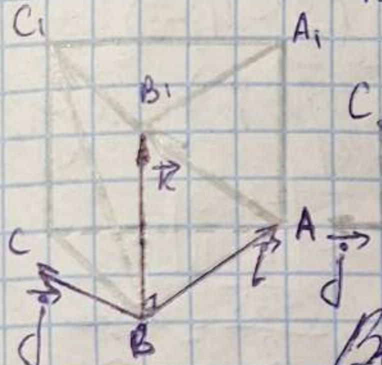
$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = (0;-1;1)$.

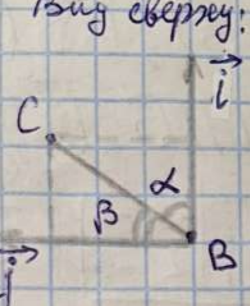
$\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = (-1;0;1)$.

Матрица перехода имеет вид: $S = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Ответ: $x = -x' - z' + 1$; $y = -x' - y' + 1$; $z = y' + z'$.





№8.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призма; $AB=2$; $AA_1=4$.
$\angle(\overrightarrow{AB_1}; \overrightarrow{BC_1}) = \varphi$ – ?

Введу прямоугольную СК с началом в т. B, где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – единичный ОНБ. Тогда в данной СК точки будут иметь след. координаты: $A(2;0;0)$; $B_1(0;0;4)$; $B(0;0;0)$. Длина проекции $\overrightarrow{BC}$ на в-р $\vec{i}$ составит $BC \cdot \cos\alpha$, где $\alpha = \angle ABC = 60°$, а на в-р j – $BC \cdot \cos\beta = BC \cdot \cos(90-\alpha) = BC \cdot \sin\alpha$.

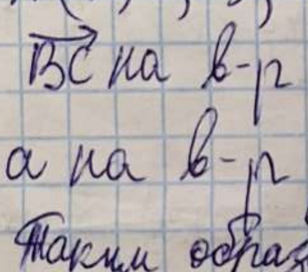
Таким образом, $pr_{\vec{i}} \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$; $pr_{\vec{j}} \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Значит, $C(1; \sqrt{3}; 4)$. $\overrightarrow{AB_1}(-2;0;4)$; $\overrightarrow{BC_1}(1;\sqrt{3};4)$

$(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}) = |\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}| \cdot \cos\varphi = -2+16 = 14$. $|\overrightarrow{AB_1}| = |\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{14}{20} = 0{,}7$

Ответ: $\varphi = \arccos 0{,}7$.

№9.



Дано: $\overrightarrow{CD}(4;-8;-2)$; $\overrightarrow{CA}(-1;-7;-2)$; $\overrightarrow{CB}(2;-4;1)$.

Найти площадь S гр. DAB.

S можно найти как половину площади параллелограмма, построенного на в-рах $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$ $\Rightarrow S = |[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}]| \cdot \frac{1}{2}$ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{BA}(-3;-3;-3);\ \overrightarrow{BD}(2;-4;-3)$.

Допустим, в-ры заданы в ОНБ $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Тогда

$$[\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BD}] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\bar i - 15\bar j + 18\bar k \Rightarrow S = \sqrt{3^2 + 15^2 + 18^2} : 2 = \frac{\sqrt{558}}{2} = \frac{3\sqrt{62}}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{3\sqrt{62}}{2}$.

№10.

Для $\bar a(-4;-3;4);\ \bar b(-4;-5;3);\ \bar c(3;3;5)$ в правом ОНБ найти координаты взаимной тройки. Обозначу её $\bar a^*, \bar b^*, \bar c^*$.

$$\bar a^* = \frac{[\bar b, \bar c]}{(\bar a, \bar b, \bar c)} \quad \bar b^* = \frac{[\bar c, \bar a]}{(\bar a, \bar b, \bar c)} \quad \bar c^* = \frac{[\bar a, \bar b]}{(\bar a, \bar b, \bar c)}.$$

$$(\bar a, \bar b, \bar c) = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 61. \quad [\bar b, \bar c] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \cancel{\bar i(-9+20) - \bar j(-12+16) + \bar k}$$

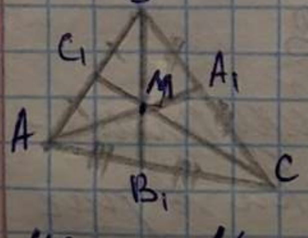
$$= \bar i(-25-9) - \bar j(-20-9) + \bar k(-12+15) = -34\bar i + 29\bar j + 3\bar k.$$

$$[\bar c, \bar a] = \bar i(12+15) - \bar j(20+12) + \bar k(12-9) = 27\bar i - 32\bar j + 3\bar k.$$

$$[\bar a, \bar b] = \bar i(-9+20) - \bar j(-12+16) + \bar k(20-12) = 11\bar i - 4\bar j + 8\bar k.$$

Таким образом, $\bar a^* = \left(-\frac{34}{61}; \frac{29}{61}; \frac{3}{61}\right)$; $\bar b^*\left(\frac{27}{61}; \frac{-32}{61}; \frac{3}{61}\right)$; $\bar c^*\left(\frac{11}{61}; \frac{-4}{61}; \frac{8}{61}\right)$.

№12.

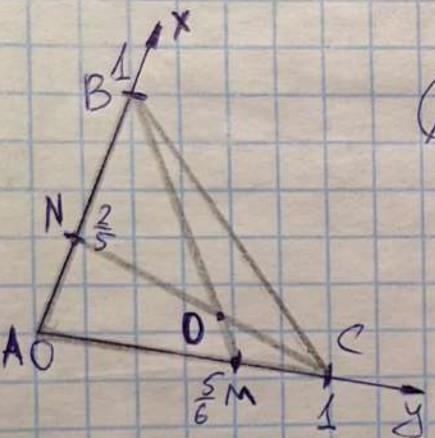


Дано: $A(5;1;-4);\ B(4;0;-7);\ C(0;2;-7)$.

M – т. пересечения медиан. Найти координаты M. Медианы в треуг-ке точкой пересечения делится в отношении 2:1, считая от вершины $\Rightarrow \vec{CM} = \frac{2}{3}\vec{CC_1} = \frac{2}{3}\left(\vec{CA} + \frac{\vec{AB}}{2}\right)$. Допустим, $M(x;y;z) \Rightarrow \begin{Vmatrix} x-0\\ y-2\\ z+7\end{Vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{Vmatrix}5\\-1\\3\end{Vmatrix} + \frac{1}{3}\begin{Vmatrix}-1\\-1\\-3\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}10/3\\-2/3\\2\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}-1/3\\-1/3\\-1\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}3\\-1\\1\end{Vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}3\\1\\-6\end{Vmatrix}$

Ответ: $M(3;1;-6)$.



№ 11

Дано: $\frac{AM}{MC} = \frac{5}{1}$; $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{3}$; O – пересеч. BM и CN

$\frac{CO}{ON}$ – ? $\quad \vec{CO} = \vec{CM} + \vec{MO}$

$\vec{ON} = \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{AN}$.

Введу СК с началом в точке A и осями, совпадающими с векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Найду в ней уравнение прямых, содержащих векторы $\vec{BM} = \vec{BA} + \frac{5}{6}\vec{AC}$ и $\vec{CN} = -\vec{AC} - \frac{2}{5}\vec{AB}$:

1) $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{5}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow y_{BM} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6}x_{BM}$

2) $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow y_{CN} = 1 - \frac{5}{2}x_{CN}$.

$\vec{BM}$ и $\vec{CN}$ пересекаются в точке O. Найду координаты O: $\frac{5}{6} - \frac{5}{6}x_0 = 1 - \frac{5}{2}x_0 \Rightarrow x_0 = 0{,}1$; $y_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow O\left(0{,}1; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \vec{AO} = 0{,}1\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MO} = \frac{5}{6}\vec{AC} + \vec{MO} \Rightarrow \vec{MO} = 0{,}1\vec{AB} - \frac{1}{12}\vec{AC}$.

Таким образом, $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + 0{,}1\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} = 0{,}1\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} - 0{,}1\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} = 0{,}3\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

$\frac{CO}{ON} = \frac{|\overrightarrow{CO}|}{|\overrightarrow{ON}|} = \frac{|0{,}1\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}|}{3|0{,}1\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{CO}{ON} = \frac{1}{3}$.