

Лабораторная работа №1.4.8  
Измерение модуля Юнга методом акустического  
резонанса

Струков О. И.  
Б04-404

# 1 Цель работы

1. Исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне.
2. Измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров.
3. Измерить модули Юнга различных материалов.

# 2 Оборудование

1. Генератор звуковых частот.
2. Частотомер.
3. Осциллограф.
4. Электромагнитные излучатель и приёмник колебаний.
5. Набор стержней из различных материалов.
6. Линейка, штангенциркуль, микрометр.
7. Весы.

# 3 Введение

Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины  $L$ , испытывает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел.

# 4 Уравнение волны в тонком стержне

Направим ось  $X$  вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Разобьём исходно недеформированный стержень на тонкие слои толщиной  $\Delta x$ . При продольной деформации среды границы слоёв сместятся в некоторые новые положения. Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке  $x$ , сместилась к моменту  $t$  на расстояние  $\xi(x, t)$ . Тогда слой, занимавший исходно отрезок  $[x; x + \Delta x]$ , изменил свой продольный размер на величину  $\Delta \xi = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)$ .

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1)$$

Далее, согласно закону Гука, имеем:

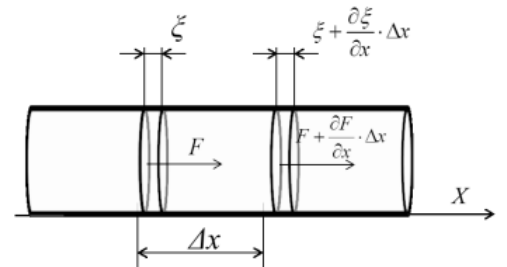


Рис. 1. Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2)$$

Здесь напряжение равно  $\sigma = \frac{F}{S}$ , где

$F$  — продольная сила, действующая на элементарный участок  $\Delta x$ ,

$S$  — площадь поперечного сечения стержня.

Напряжения, действующие на стенки рассматриваемого элемента в сечениях  $x$  и  $x + \Delta x$ , будут различными. Из-за этого возникнет результирующая возвращающая сила, стремящаяся вернуть элемент стержня в исходное (недеформированное и несмещённое) состояние:

$$\Delta F = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} S \Delta x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} E S \Delta x \quad (3)$$

Эта сила вызовет ускорение движение элемента стержня массой  $\Delta m = S\rho\Delta x$  вдоль оси  $X$ . Ускорение рассматриваемого элемента — это вторая производная по времени от смещения его границ:

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4)$$

Тогда, используя 2-й закон Ньютона:

$$\Delta m \cdot a = \Delta F \quad (5)$$

и соотношения (1) - (4), получим уравнение движения среды:

$$S\rho\Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} \quad (6)$$

Скорость  $u$  распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7)$$

Теперь, используя соотношения (6) - (7), мы можем записать волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} \quad (8)$$

Оно имеет универсальный характер и описывает волны самой разной природы: акустические волны в твёрдых телах, жидкостях и газа, волны на струне, электромагнитные волны и т.п. Величина  $u$  в уравнении (6) имеет смысл скорости распространения волны.

## 5 Собственные колебания стержня. Стоячие волны

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой  $f$  продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу гармонических волн:

$$\xi(x, t) = A_1(\sin \omega t - kx + \phi_1) + A_2(\sin \omega t - kx + \phi_2), \quad (9)$$

где  $\omega = 2\pi f$  — циклическая частота. Коэффициент  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  называют волновым числом или пространственной частотой волны.

Пусть концы стержня не закреплены. Тогда напряжения в них должны равняться нулю. Положим координаты торцов равными  $x = 0$  и  $x = L$ . Тогда, используя связь напряжения и деформации (2), запишем граничные условия для свободных (незакреплённых) концов стержня:

$$x = 0 : \sigma(0) = 0 \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$x = L : \sigma(L) = 0 \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что это соотношение будет выполняться при любом  $t$ , если только у «падающей» и «отражённой» волн одинаковы амплитуды

$$A_1 = A_2 \quad (12)$$

и фазы.

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (13)$$

Далее, перепишем исследуемую функцию (9), используя граничные условия (12) и (13) и формулу суммы синусов:

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t + \phi) \quad (14)$$

Колебания вида (14) называют гармоническими стоячими волнами.

Наконец, воспользуемся вторым граничным условием (9) применительно к функции (12). В результате придём к уравнению  $\sin(kL) = 0$ , решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел  $k$ :

$$k_n L = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

или, выражая (13) через длину волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , получим

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

Таким образом, для возбуждения стоячей волны на длине стержня должно укладываться целое число полуволн.

Допустимые значения частот:

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (17)$$

называют собственными частотами колебаний стержня длиной  $L$ . Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот  $f_n$  в стержне возникает акустический резонанс.

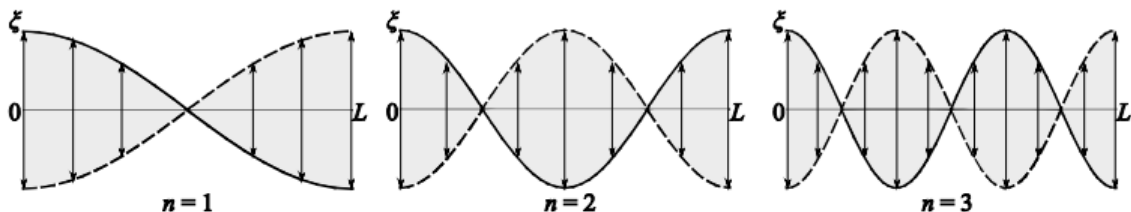


Рис. 2. Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами (для наглядности изображение дано не в масштабе, реальные смещения малы по сравнению с длиной стержня,  $\xi \ll L$ )

Зависимость амплитуды смещения от координаты для собственных колебаний стержня с незакреплёнными концами при  $n = 1, 2, 3$  представлена на рис. 2.

## 6 Схема

### Экспериментальная установка

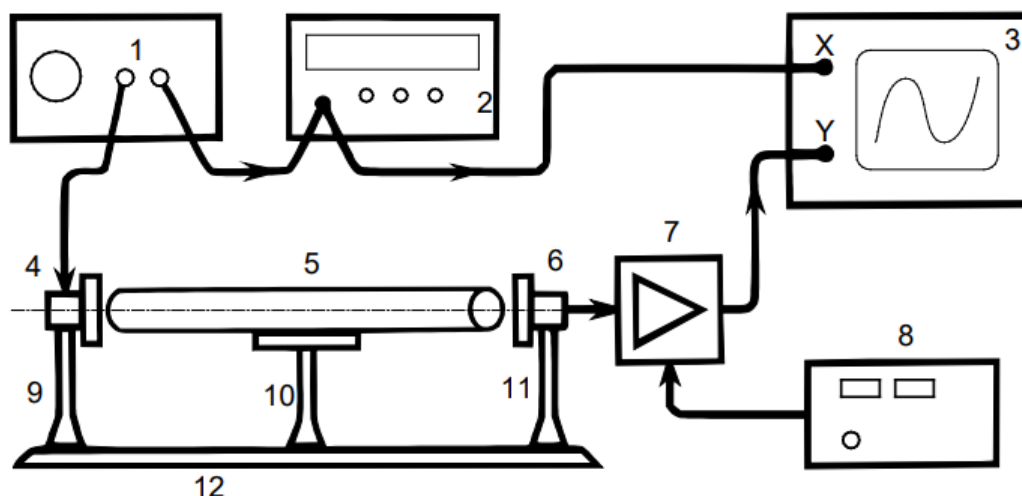


Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

## 7 Ход работы

1. Проведено ознакомление с основными органами управления электронного осциллографа. По техническому описанию к работе проведена предварительная настройка осциллографа и звукового генератора
2. На подставку 10 между датчиками был помещён медный стержень
3. Электромагниты размещены напротив торцов стержня так, чтобы торцы стержня совпали с центрами датчиков, а зазор между полюсами электромагнита и торцевой поверхностью стержней составлял 1–3 мм. Плоскость магнитов была расположена строго перпендикулярна оси стержня. Таким образом,  $f_1 \approx 3100$  Гц.
4. С помощью медленных перестраиваний звукового генератора вблизи рассчитанной частоты  $f_1 \approx 3100$  Гц и наблюдений за амплитудой колебаний на экране осциллографа был найден первый резонанс. При приближении к резонансу амплитуда сигнала с регистрирующего датчика (канал СН2) резко возрастала, а амплитуда опорного сигнала (канал СН1) не менялась. Для увеличения сигнала колебаний стержня датчики были осторожно придвинуты к торцам стержня.
5. Было определено точное значение первой резонансной частоты  $f_1 = 3250,6$  Гц
6. Были получены резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Для этого, плавно перестраивая генератор, добейтесь резонанса вблизи частот  $f_n \approx n f_1$ , где  $n = 2, 3, \dots, 7$ . Результаты представлены в таблице 1.

7. Для определения плотности стержня было проведено несколько измерений размеров и массы различных образцов, изготовленных из того же металла, что и стержень. Результаты представлены в таблице 2. Объём и плотность образцов, а также их погрешность можно определить с помощью следующих формул:

$$V = \frac{\pi d^2 l}{4}, \rho = \frac{m}{V}$$

$$\sigma_V = V \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + 4 \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2}$$

$$\sigma_m = 0,001 \text{ г}, \sigma_d = 0,01 \text{ мм}, \sigma_l = 0,1 \text{ мм}.$$

8. Было установлено, что стержень является тонким, поскольку  $\frac{R}{\lambda} \ll 1$ , где  $R$  - радиус стержня,  $\lambda$  - длина звуковой волны.
9. Пункты 2-9 были проведены с двумя другими стержнями из стали и дюралюминия с использованием двух разных генераторов колебаний.
10. Для каждого из исследованных стержней по результатам измерений п. 2-9 были построены графики зависимости частоты  $f(n)$  от номера гармоники  $n$  (Рис. 1) Каждая зависимость действительно является линейной и проходит через начало координат.
11. Были построены наилучшие прямые по экспериментальным точкам и определены соответствующие значения скорости звука  $u = 2L \frac{f_n}{n}$  с помощью МНК, а также оценена погрешность. Результаты занесены в таблицу 3.
12. Определены модули Юнга  $E$  исследуемых материалов и оценены погрешности результатов по следующим формулам:

$$E = \rho \cdot (2Lf)^2 = \rho u^2, \sigma_E = E \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}$$

Результаты добавлены в таблицу 3.

13. Для стержня из дюралюминия был проведён дополнительный опыт: перестраивая генератор, я добился возбуждения первой гармоники  $f_1$  резонансных колебаний в стержне при «половинной» частоте генератора  $f = f_1/2$ . На экране осциллографа (в режиме работы «X-Y») удалось получить фигуру Лиссажу, похожую на символ  $\infty$ .
14. Для стержня из дюралюминия вблизи его первого резонанса была измерена АЧХ для определения его добротности как колебательной системы. Результаты измерений занесены в таблицу 4. Значению  $A_{max}/\sqrt{2}$  соответствует  $8/\sqrt{2} \approx 5,8$  делений, тогда добротность  $Q = f_1/\Delta f = 4253,34/(4257,03 - 4252,28) \approx 895,44$

	Медь	Сталь	Дюралюминий
n	Частота $f_n$ , Гц		
1	3251	4127	4253
2	6483	8263	8513
3	9740	12391	12767
4	12972	16515	17021
5	16512	20644	21278
6	19669	24758	25491
7	22753	28887	29746

Таблица 1: Резонансы стержней на различных частотах

Медь			Сталь			Дюралюминий		
$d$ , мм	$l$ , мм	$m$ , г	$d$ , мм	$l$ , мм	$m$ , г	$d$ , мм	$l$ , мм	$m$ , г
11,64	29,8	29,114	11,98	29,5	26,030	11,47	30,0	8,994
11,70	30,0	29,457	11,95	29,8	26,159	12,09	30,0	9,491
11,90	30,3	30,117	11,69	31,2	28,115	11,71	30,1	9,195
11,82	39,7	39,392	11,99	39,5	34,950	11,46	30,8	9,265
12,24	40,0	40,997	11,98	39,8	35,153	11,66	40,1	12,181
11,48	40,3	38,722	11,98	40,0	35,197	12,57	41,2	13,238
11,91	40,4	40,356	12,34	40,8	36,931	11,49	42,3	12,456
11,88	41,4	41,346	12,14	41,2	37,096	11,50	42,5	12,487
Средняя плотность, $\rho_{\text{ср}} \pm \sigma_{\rho}$ , кг/м <sup>3</sup>								
9032 $\pm$ 29			7818 $\pm$ 25			2846 $\pm$ 9		

Таблица 2: Нахождение плотности стержней

	Медь	Сталь	Дюралюминий
$L$ , м	0,596	0,605	0,602
$\sigma_L$ , м	0,002	0,002	0,002
$u$ , м/с	3901	4992	5115
$\sigma_u$ , м/с	17	22	24
$E$ , Па	$137,4 \cdot 10^9$	$194,8 \cdot 10^9$	$74,5 \cdot 10^9$
$\sigma_E$ , Па	$1,3 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^9$	$0,7 \cdot 10^9$

Таблица 3: Длины стержней, скорость звука в них и их модули Юнга

U, кол-во делений	Частота при понижении, Гц	Частота при повышении, Гц
8	4253,12	4256,2
7,8	4253,06	4256,25
7,6	4253,01	4256,3
7,4	4252,96	4256,36
7,2	4252,87	4256,46
7	4252,81	4256,53
6,8	4252,72	4256,6
6,6	4252,66	4256,65
6,4	4252,54	4256,76
6,2	4252,46	4256,8
6	4252,39	4256,9
5,8	4252,28	4257,03
5,6	4252,14	4257,11
5,4	4252,07	4257,21
5,2	4251,93	4257,35
5	4251,83	4257,46

Таблица 4: АЧХ дюралюминиевого стержня

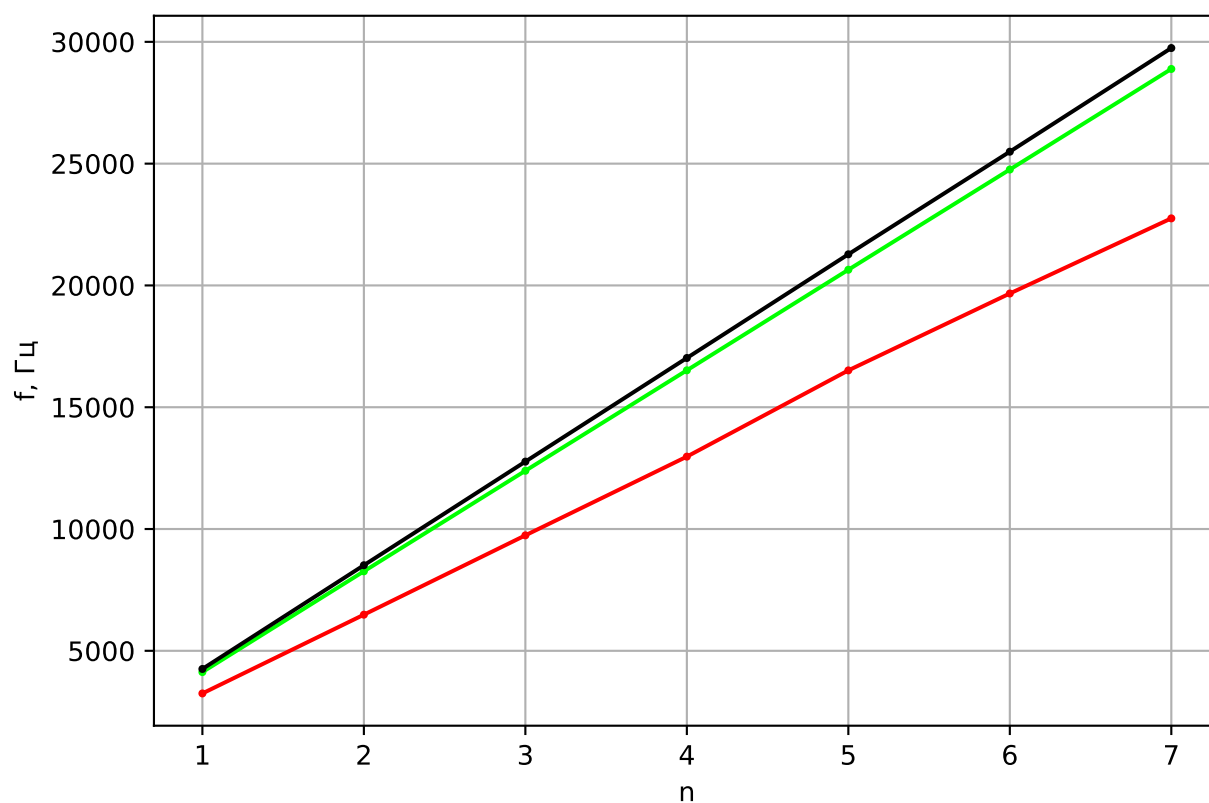


Рис. 1: График зависимости  $f_n(n)$