

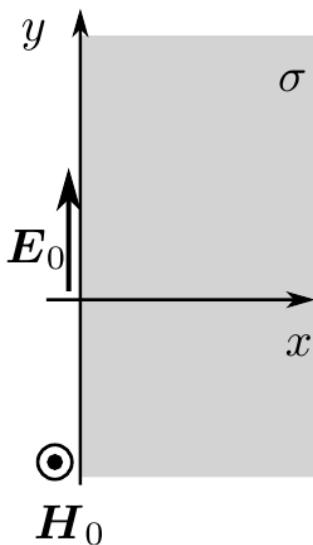
Лабораторная работа № 3.7.1
Скин-эффект

Струков О. И.
Б04-404

Цель работы: Исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр. **В работе используются:** генератор сигналов АКИП-3420, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас, медный экран в виде полого цилиндра, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, двухканальный осциллограф ГОС-620, RLC-метр.

Теоретическая часть

Скин-эффект для полупространства



Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор \mathbf{E} направлен всюду вдоль оси y и зависит только от координаты x , т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x, t)$. В квазистационарном приближении

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

Преобразуя это уравнение, можно получить уравнение, схожее с уравнением диффузии:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

Точно такое же уравнение имеет место и для вектора \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Подставляем в (2) наше электрическое поле $E_y = E_y(x, t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3)$$

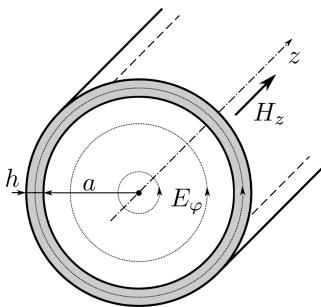
Если $E_y(0, t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (3) будет функция вида

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad (4)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu \mu_0}} \quad (5)$$

Скин-эффект в тонком полом цилиндре



Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображений симметрии и непрерывности соответствующих компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, \quad E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \text{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1 \quad (6)$$

В приближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (1) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_0 , которое колебается с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\text{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \text{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4} \quad (7)$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0 . При $\delta \ll h$ (высокочастотная область)

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (8)$$

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

$$\tg \psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi ah\sigma\mu_0 f \quad (9)$$

и кроме того

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2} \quad (10)$$

Влияние скин-эффекта на индуктивность катушки

Из-за скин эффекта индуктивность соленоида с медным цилиндрическим экраном внутри будет зависеть от частоты тока. На высоких частотах магнитное поле не проникает внутрь соленоида (за экран), поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий катушку, уменьшается, и, соответственно, уменьшается и индуктивность катушки. Можно показать, что индуктивность катушки зависит от частоты как:

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = (\pi ah\mu_0\sigma f)^2 \quad (11)$$

Лабораторная установка

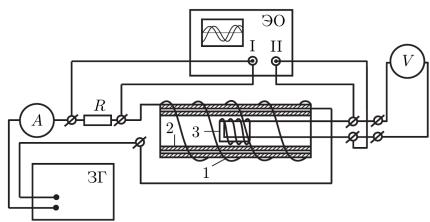


Рис. 1: Установка

Переменное магнитное поле создается соленоидом 1, на который подается переменный ток со звукового генератора ЗГ. Внутри соленоида расположен медный экран 2. Магнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорционально производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega\mu\mu_0 H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорциональна току через соленоид

$$H_0(t) \propto I(t)$$

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = c \cdot \frac{U}{fI} = \xi/\xi_0 \quad (12)$$

где константу ξ_0 можно определить из условия $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow 0$.

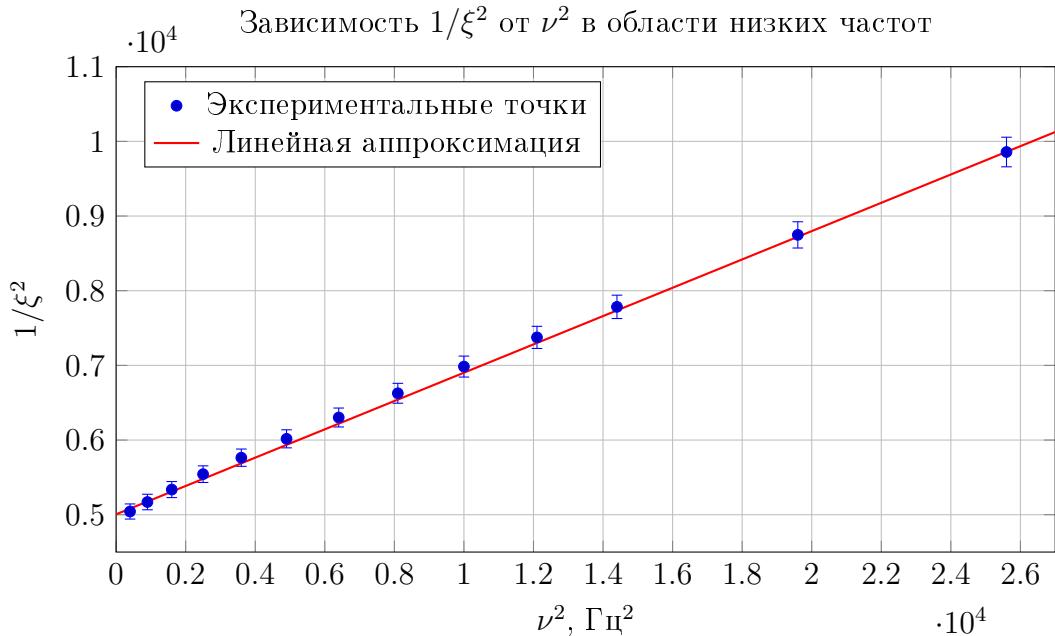
При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени, поэтому измеренная на осциллографе разность фаз φ будет на $\frac{\pi}{2}$ больше реальной ψ :

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

Ход работы

По параметрам установки $h = \delta = 1,5$ мм, приняв проводимость меди для оценки равной $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$ Сименс/м, а $\mu \approx 1$, из формулы (5) была найдена частота $\nu_h \approx 2250$ Гц, при которой толщина стенок экрана равна скиновой длине.

В области низких частот 20 – 160 Гц была получена зависимость отношения $\xi = U/(\nu I)$ от частоты ν и построен график зависимости $1/\xi^2 = f(\nu^2)$. Хорошо видно, что зависимость является линейной.



Определение ξ_0

Методом наименьших квадратов получена линейная зависимость:

$$\frac{1}{\xi^2} = (5005,93 \pm 15,76) + (0,1896 \pm 0,0013) \cdot \nu^2$$

Экстраполяцией её к точке $\nu = 0$ определено:

$$\frac{1}{\xi_0^2} = 5005,93 \pm 15,76 \Rightarrow \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{5005,93}} = 0,01414$$

С учётом погрешности $\xi_0 = 0,01414 \pm 0,00002$

Определение проводимости меди различными методами

Зависимость $1/\xi^2 = f(\nu^2)$ в области низких частот

Данный метод основан на использовании теоретической зависимости амплитуды магнитного поля внутри цилиндра от частоты в низкочастотной области ($\delta \gg h$). Согласно формуле (10), квадрат отношения амплитуд полей связан с частотой следующим образом:

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}$$

С учетом соотношения (12), связывающего измеряемую величину ξ с отношением амплитуд полей, получаем линейную зависимость $1/\xi^2$ от ν^2 , угловой коэффициент которой содержит информацию о проводимости материала.

Используя найденный угловой коэффициент линейной зависимости $k = 0,1896 \pm 0,0013$ и значение ξ_0 , проводимость меди рассчитывается по формуле:

$$\sigma = \frac{\xi_0}{\pi a h \mu_0} \sqrt{k}$$

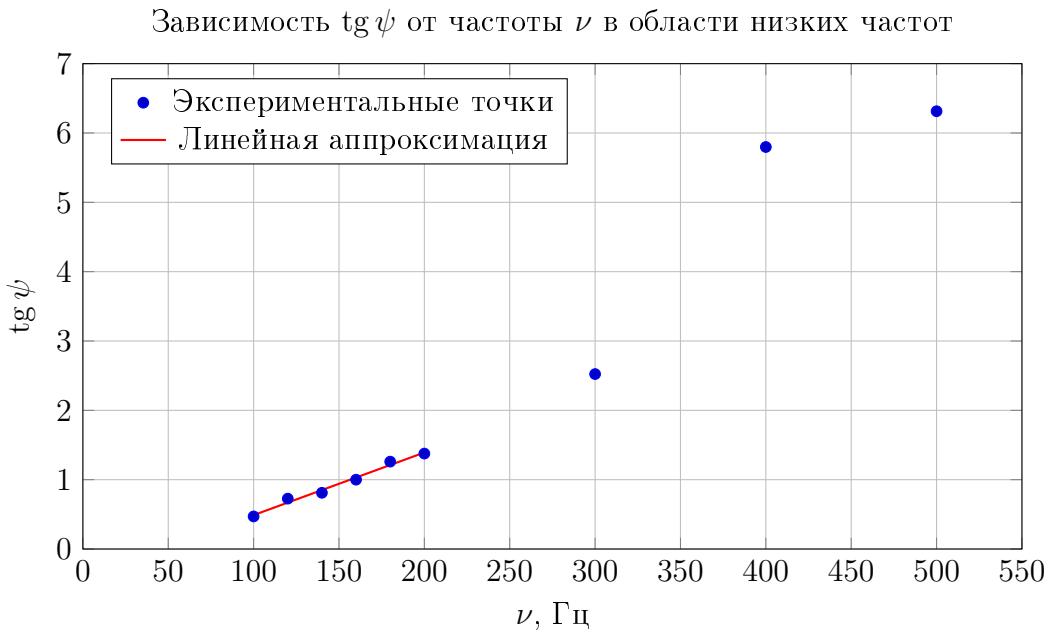
Подставляя геометрические параметры установки ($2a = 0,045$ м, $h = 0,0015$ м) и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, получаем:

$$\sigma = (4,62 \pm 0,06) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

Зависимость $\operatorname{tg} \psi = f(\nu)$ в области низких частот

Этот метод основан на измерении фазового сдвига между магнитными полями внутри и вне цилиндра в низкочастотной области. Согласно теории, при $\delta \gg h$ фазовый сдвиг определяется формулой (9):

$$\operatorname{tg} \psi \approx \pi a h \sigma \mu_0 f$$



Методом наименьших квадратов по точкам в диапазоне 100-200 Гц определён коэффициент наклона

$$k = 0,00903 \pm 0,00056 \text{ Гц}^{-1}$$

Проводимость меди рассчитывается по формуле:

$$\sigma = \frac{k}{\pi a h \mu_0}$$

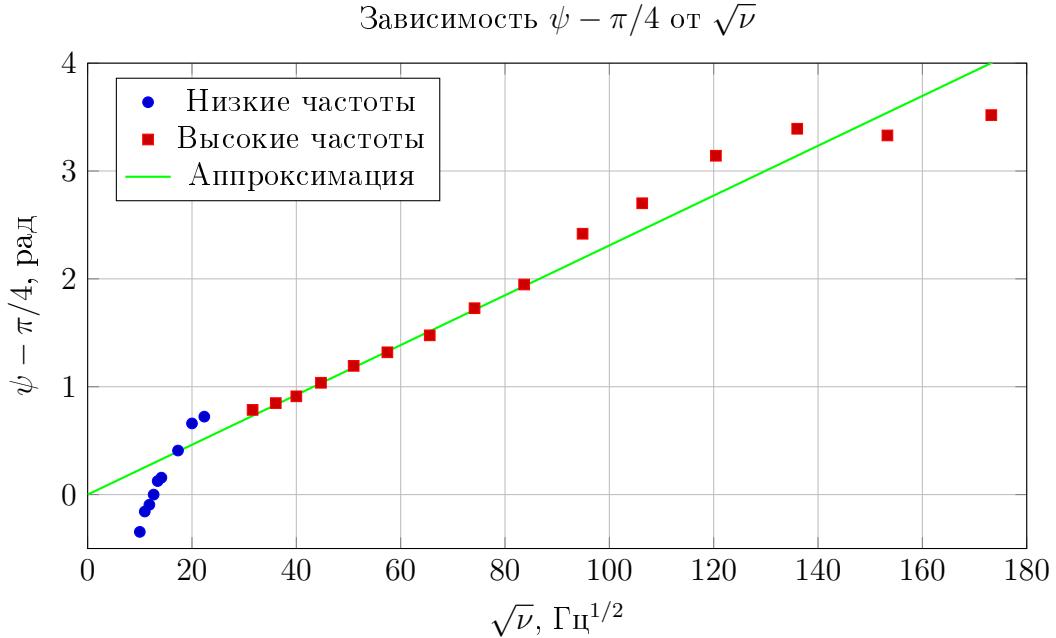
Подставляя значения параметров, получаем:

$$\sigma = (6,78 \pm 0,56) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

Зависимость $\psi - \pi/4 = f(\sqrt{\nu})$ в области высоких частот

Данный метод использует поведение фазового сдвига в высокочастотной области ($\delta \ll h$), описываемое формулой (8):

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + h \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}} = \frac{\pi}{4} + h \sqrt{\pi \sigma \mu_0} \cdot \sqrt{\nu}$$



Методом наименьших квадратов по точкам в диапазоне высоких частот ($\nu > 2000 \text{ Гц}$) получено

$$k = 0,02310 \pm 0,00067 \text{ рад/Гц}^{1/2}$$

Проводимость меди определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{k^2}{h^2 \pi \mu_0}$$

Результат расчета:

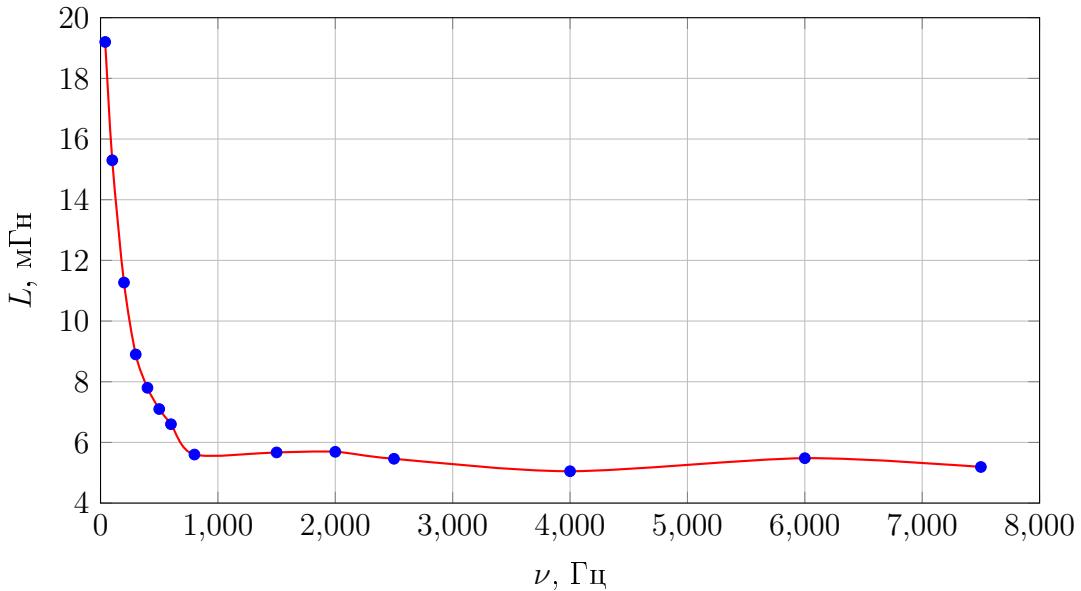
$$\sigma = (6.01 \pm 0.47) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

Зависимость индуктивности катушки от частоты

Данный метод основан на влиянии скин-эффекта на индуктивность соленоида с цилиндрическим экраном внутри. Согласно формуле (11), зависимость индуктивности от частоты описывается соотношением:

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma f)^2$$

Зависимость индуктивности катушки от частоты

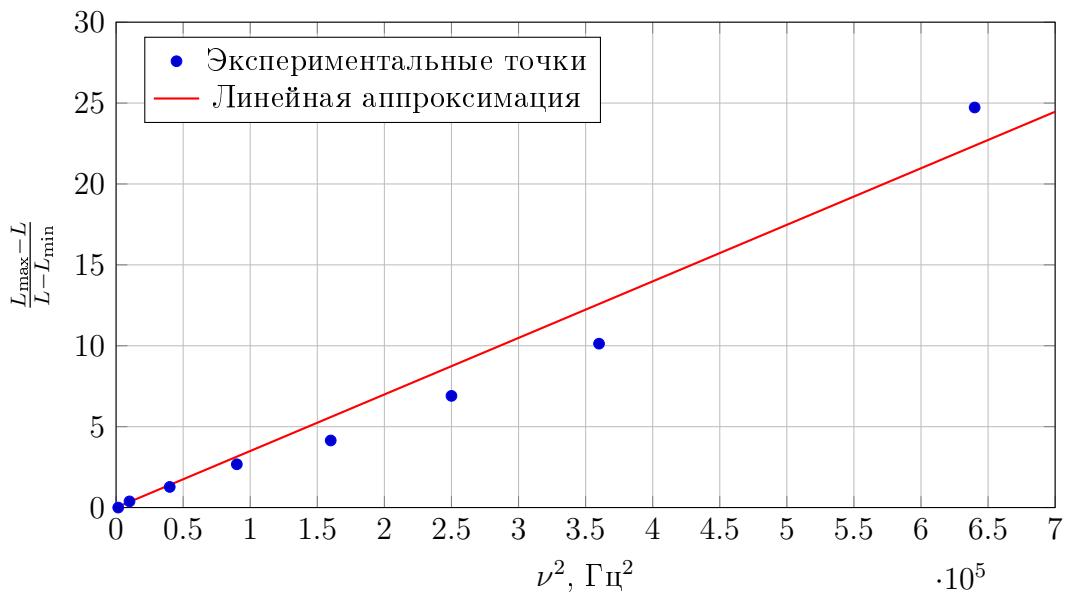


Максимальное значение индуктивности: $L_{\max} = 19,2$ мГн

Минимальное значение индуктивности: $L_{\min} = 5,05$ мГн

График зависимости $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}} = f(\nu^2)$

Зависимость $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}}$ от ν^2



Методом наименьших квадратов по первым 8 точкам, лежащим примерно на одной прямой, получен

$$k = (3,50 \pm 0,29) \cdot 10^{-5} \text{ Гц}^{-2}$$

Проводимость меди рассчитывается по формуле:

$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi a h \mu_0}$$

Результат:

$$\sigma = (4.44 \pm 0.27) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей коэффициента ослабления поля

Экспериментальные значения коэффициента ослабления поля были определены по формуле:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|_{\text{эксп}}} = \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{U/(\nu I)}{\xi_0}$$

где $\xi_0 = 0,01414$.

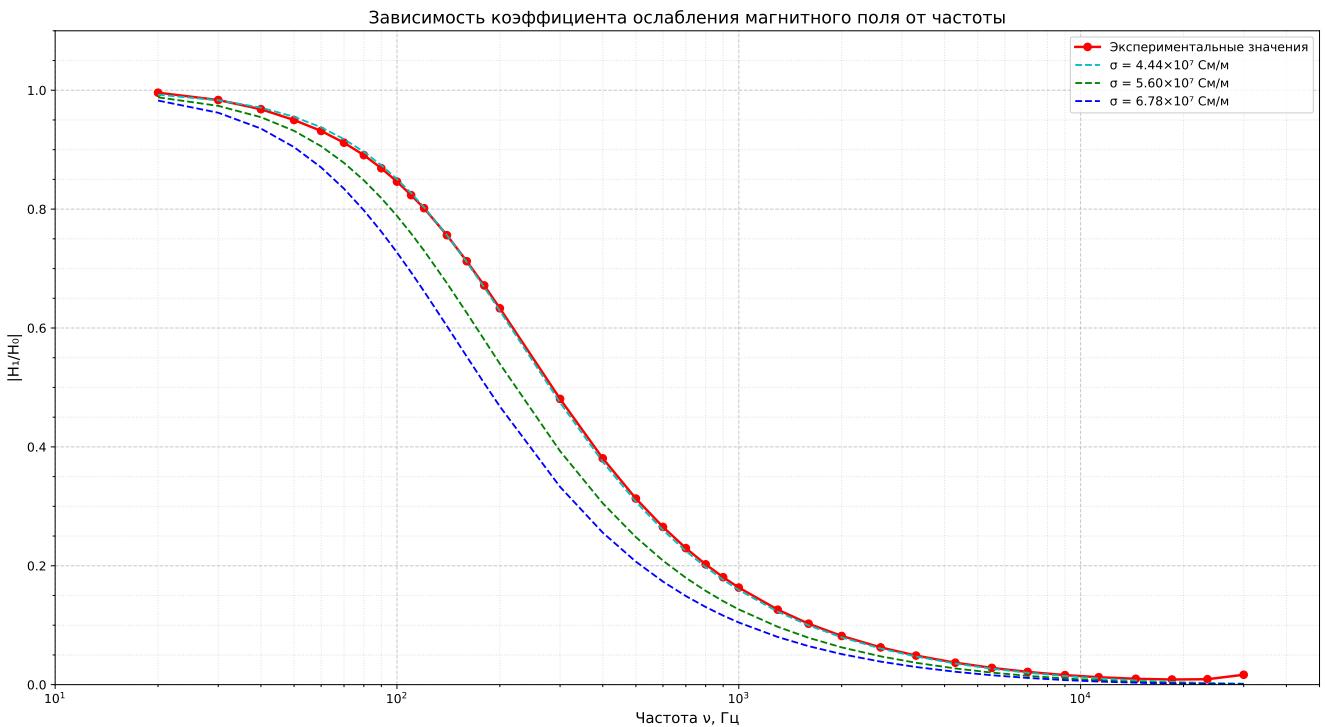
Для расчёта теоретической зависимости использовалась формула (7):

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)}, \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0},$$

В качестве значений проводимости σ были взяты минимальное, максимальное значения, полученные в работе, и табличное:

$$\sigma_{\min} = 4,44 \cdot 10^7 \text{ См/м}, \quad \sigma_{\max} = 6,78 \cdot 10^7 \text{ См/м}, \quad \sigma_{\text{табл}} = 5,60 \cdot 10^7 \text{ См/м}.$$

Результаты представлены на графике:



Наиболее близкое совпадение с экспериментальными данными демонстрирует теоретическая кривая, построенная для проводимости $\sigma = 4,44 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, определённой по зависимости индуктивности катушки от частоты. Это говорит о наиболее высокой точности данного метода определения проводимости.

Выводы

В ходе работы была исследована проводимость меди экрана с использованием четырёх различных методов, основанных на явлении скин-эффекта.

Метод	σ , См/м
По зависимости $1/\xi^2 = f(\nu^2)$	$(4,62 \pm 0,06) \cdot 10^7$
По зависимости $\operatorname{tg} \psi = f(\nu)$	$(6,78 \pm 0,56) \cdot 10^7$
По зависимости $\psi - \pi/4 = f(\sqrt{\nu})$	$(6,01 \pm 0,47) \cdot 10^7$
По зависимости $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}} = f(\nu^2)$	$(4,44 \pm 0,27) \cdot 10^7$
Табличное значение	$5,60 \cdot 10^7$

Значения проводимости, полученные разными методами, лежат в диапазоне от $4,44 \cdot 10^7$ до $6,78 \cdot 10^7$ См/м. Наиболее близкое к табличному значению ($5,6 \cdot 10^7$ См/м) дал метод, основанный на измерении фазового сдвига в высокочастотной области – отклонение составляет всего +4%. Однако судя по графику сравнения экспериментального и теоретического коэффициента ослабления магнитного поля от частоты, наиболее точным оказался метод определения проводимости по зависимости индуктивности катушки от частоты.

Наиболее неточные результаты дали методы, основанные на определении разности фаз, что вызвано неудобством и неточностью определения их разности на экране осциллографа.