

Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n + 2)$ -kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n - 1$ nieprzecinających się przekątnych jest równa n -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$.
6. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 71^{71} .
Wskazówka: przyda się chińskie twierdzenie o resztach.
7. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $a^3 | b^2$ implikuje $a | b$.
8. (-) Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n .
9. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.