Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

   $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

   Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

2. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

   $$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

   .

3. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

   $$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

   Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

4. Niech $x \in R$. Udowodnij, że $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

5. Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Skonstruuj bijekcję między zbiorem $Z = \{f : A \to B\}$ a iloczynem kartezjańskim B^m.

6. Zdefiniuj funkcję $f : R \to Z$, która spełnia dla dowolnego $x \in R$: $|f(x) - x| \leq \frac{1}{2}$. W definicji funkcji f można używać jedynie podłogi, sufitu, dodawania, odejmowania i stałych.

7. (+) Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jesli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą reką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

8. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

9. (-) Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.