# Lista nr 3 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego $n$ zachodzi:
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

2. Pokaż, że liczba przedstawień liczby naturalnej $n$ w postaci sumy $k$ liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi $\binom{n-1}{k-1}$, jeśli przedstawienia różniące się kolejnością składników uważamy za różne. Ile jest przedstawień liczby $n$ w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

3. (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

4. (+) Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

5. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

6. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie $i$ oraz $j$, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez $n$.

7. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n$ istnieje liczba podzielna przez $n$, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek. .

8. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

9. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

Z tej listy można oddać maksymalnie dwa zadania pisemnie.