Lista nr 1 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z m-elementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi $\frac{n!}{(n-m)!}$.

2. Czy wśród liczb $1, 2, \ldots, 10^{10}$ zapisanych w systemie dzisiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?

3. Ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru A o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?

4. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K, drugą nad wodospad W. Wycieczki te odbędą się w dwie różne soboty. Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach.

5. (-) Na ile sposobów można posadzić w rzędzie 3 kobiety i 3 mężczyzn? A jeśli mężczyźni i kobiety muszą siedzieć na przemian?

6. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b), taką że (i) liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz (ii) suma $a + b$ jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?

7. (-) Ile jest możliwych rejestracji samochodowych złożonych z 3 liter, po których następują 4 cyfry?

8. (-) Pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej n zachodzi $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

9. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną. *Podpowiedź:* Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa $\{x\}$.

10. Niech $x \in R, x \geq 0$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie:
    $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$?

11. Ile jest n-elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl?

12. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?

13. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu?

Zadań oznaczonych (-) nie można oddawać jako rozwiązania pisemne.

Katarzyna Paluch