Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2021

Iloczyn kartezjański

Ala chce kupić po jednej paczce: herbaty, kawy i ciastek. W sklepie, w którym robi zakupy jest 5 rodzajów herbaty, 10 rodzajów kawy i 5 typów ciastek. Na ile sposobów może skomponować swój zestaw?

Iloczyn kartezjański

Ala chce kupić po jednej paczce: herbaty, kawy i ciastek. W sklepie, w którym robi zakupy jest 5 rodzajów herbaty, 10 rodzajów kawy i 5 typów ciastek. Na ile sposobów może skomponować swój zestaw?

$5 \cdot 10 \cdot 5$

Iloczyn kartezjański

Niech $A_1, A_2, \ldots A_n$ będą skończonymi zbiorami. Wówczas $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$.

Wariacje

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów?

Wariacje

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów?

13^7

Liczba funkcji

Liczba wariacji z powtórzeniami

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m.
Innymi słowy: $|\{f : A \to B\}| = n^m$.

Liczba funkcji

Liczba wariacji z powtórzeniami

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m.
Innymi słowy: $|\{f : A \to B\}| = n^m$.

Dowód 1: przez indukcję.
Dowód 2: pokazujemy równoliczność zbiorów: (i) $\{f : A \to B\}$ oraz (ii) iloczynu kartezjańskiego $B \times B \times \ldots \times B$.

Wariacje cd

Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera sie na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje sie, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek do zaoferowania. Na ile sposobów profesor może wysłać widokówki?

Wariacje bez powtórzeń

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów, ale straganiarz wyprzedał prawie wszystkie widokówki i z każdego rodzaju została tylko jedna ?

Wariacje bez powtórzeń

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów, ale straganiarz wyprzedał prawie wszystkie widokówki i z każdego rodzaju została tylko jedna ?

$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 7$

Liczba funkcji różnowartościowych

Liczba wariacji bez powtórzeń

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji *różnowartościowych* ze zbioru A w B wynosi $n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Liczba podzbiorów

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach - $|A| = n$.
Ile podzbiorów ma A?
$|\{B : B \subseteq A\}| = ???$

Liczba podzbiorów

Liczba podzbiorów

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach. Wtedy $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$.

Dowód 1: przez indukcję.
Dowód 2:

Liczba podzbiorów

Liczba podzbiorów

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach. Wtedy $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$.

Dowód 1: przez indukcję.
Dowód 2: przez pokazanie równoliczności zbiorów: $\{B : B \subseteq A\}$ i $\{f : A \to \{0, 1\}\}$.

Para podzbiorów

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy wybrać dwa jego podzbiory A i B takie, że $A \subseteq B$?

$$|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = ???$$

Para podzbiorów

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy wybrać dwa jego podzbiory A i B takie, że $A \subseteq B$?

$$|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \to \{0, 1, 2\}| = 3^n$$

Permutacje

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy ustawić w rząd jego elementy?

Permutacje

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy ustawić w rząd jego elementy?

Na tyle, ile jest funkcji różnowartościowych $f : U \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

$|\{f : U \to \{1, 2, \ldots, n\}, 1-1\}| = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

Sufit i podłoga

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$ podłoga z x
$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \leq n$ sufit z x
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ część ułamkowa x

Sufit i podłoga - własności

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
$\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, bo
$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$

$\lceil x + n \rceil = n + \lceil x \rceil$

Sufit i podłoga - własności

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
Czy zachodzi: $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

Jak zamienić podłogę na sufit?

Sufit i podłoga - własności

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
Czy zachodzi: $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

Jak zamienić podłogę na sufit?
$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$