Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 3. 16. marca

Zadania

1. Czy prawdą jest, że 13. dzień miesiąca powiązany jest z piątkiem? (1 stycznia 1601 – 31 grudnia 2000)
   ZAŁOŻENIA: rok numer n jest jest przestępny jeżeli $n \equiv_4 0$, pod warunkiem, że $n \not\equiv_{100} 0$; dodatkowo – jeżeli $n \equiv_{400} 0$ (czyli rok 2000), to wcześniejszy warunek jest nieważny. Ile razy w 400-letnim cyklu 13-tym dniem miesiąca był poniedziałek, wtorek, …, niedziela?

   Mówimy, że zmienne X, Y są niezależne, wtedy gdy – w wypadku dyskretnym – spełniony jest warunek $P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$.
2. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$. Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.
3. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.
4. Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x}$ dla $x \in [0, 1]$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(x)$ tej zmiennej oraz gęstość zmiennej $Y = X^2$.

   Gęstość 2-wymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to $f(x, y) = 3xy$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0,\ y = x,\ y = 2 - x$.
5. Wyznaczyć gęstości brzegowe $f_1(x), f_2(y)$.
6. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość postaci $f(x, y) = 15\, x^2 y$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0$, $x = 0$, $y = 2 - 2x$. Wyznaczyć gęstość brzegową $f_1(x)$ oraz wartość oczekiwaną EX.
7. Czytelnie i starannie - bez korzystania z notatek - napisać wielkie i małe greckie litery: alfę α, betę β, (d)zetę ζ, etę η, lambdę λ, chi χ, ksi ξ, fi ϕ, rho ρ.
8. (a) Niech $X \sim U[-2, 2]$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = |X|$.
   (b) Dla $X \sim U[-1, 1]$ wyznaczyć rozkłady zmiennych $Y = X^3,\ Z = X^2$.
9. Niech X będzie zmienną o rozkładzie geometrycznym ($X \sim \mathrm{Geom}(p)$). Udowodnić, że $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
10. Dwuwymiarowa gęstość zmiennej (X, Y) to $f(x, y) = 6xy$, dla $0 < x < 2$, $0 < y < 1 - \frac{1}{2}x$. Znaleźć gęstości brzegowe $f_1(x), f_2(y)$ zmiennych X, Y.
11. Zbiory $A_1, \ldots, A_4$ mają moc – odpowiednio – 40, 32, 20, 50. Losowo wybieramy pewien element (z całości). Wartością zmiennej losowej X jest moc zbioru z którego pochodzi wybrany element. Następnie losowo wybieramy jeden ze zbiorów. Wartością zmiennej losowej Y jest moc wybranego zbioru. Obliczyć $\mathrm{E}(X)$ i $\mathrm{E}(Y)$.

    [Z12-Z13] Obowiązkowa wskazówka: $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2$
12. Niech $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Wykazać że $V(X) = \lambda$.
13. Niech $X \sim \mathrm{B}(n, p)$. Wykazać że $V(X) = np\,(1 - p)$.

Witold Karczewski