Двойственные задачи в линейном программировании (в каких целях применяются решения двойственных задач)

С.А. Бородич

Белорусский государственный университет, Минск

stepanborodic@gmail.com

Введение

Линейное программирование (ЛП) является фундаментальным инструментом в области оптимизации, широко применяемым в экономике, логистике, управлении производством и других сферах. Его основная цель — нахождение наилучшего решения (максимума или минимума) линейной целевой функции при наличии системы линейных ограничений.

Важным понятием в теории ЛП является двойственность. Каждой задаче линейного программирования (прямой задаче) соответствует другая задача — двойственная, которая отражает ту же проблему с другой точки зрения. Например, если прямая задача направлена на максимизацию прибыли при ограниченных ресурсах, то двойственная задача может быть интерпретирована как минимизация затрат на ресурсы при заданных требованиях к продукции. Таким образом, двойственная задача предоставляет альтернативный взгляд на исходную проблему, позволяя глубже понять ее структуру и возможные решения.

Теоремы двойственности, такие как теоремы слабой и сильной двойственности, устанавливают важные связи между прямой и двойственной задачами. В частности, они утверждают, что если одна из задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, и значения их целевых функций совпадают. Это позволяет использовать решения двойственной задачи для оценки и анализа решений прямой задачи.

Практическое значение двойственных задач проявляется в различных аспектах:

1. Экономическая интерпретация: Двойственные переменные могут быть интерпретированы как "теневые цены" ресурсов, отражающие их предельную ценность в контексте оптимизации.
2. Анализ чувствительности: Решения двойственной задачи позволяют оценить, как изменения в ограничениях или коэффициентах влияют на оптимальное решение прямой задачи.
3. Проверка оптимальности: Сравнение решений прямой и двойственной задач служит средством верификации полученных результатов.

Изучение двойственных задач в линейном программировании предоставляет практические инструменты для анализа и принятия решений в реальных экономических и управленческих задачах [1].

Основные понятия линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) — это метод оптимизации, направленный на нахождение наилучшего значения (максимума или минимума) линейной целевой функции при наличии системы линейных ограничений.

Стандартная формулировка задачи ЛП выглядит следующим образом:

найти максимум (или минимум) функции:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

при условиях:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \qquad (1)$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

и $x_i \ge 0$ для всех i.

Здесь:

x_i — переменные (например, количество производимых единиц продукции),

c_i — коэффициенты целевой функции (прибыль, стоимость и т.д.),

a_{ij} — коэффициенты ограничений,

b_j — ресурсы или ограничения по ресурсам.

Целевая функция описывает цель задачи — максимизировать прибыль или минимизировать издержки, а ограничения отражают реальные лимиты, например, доступность ресурсов или времени.

Допустимое множество решений — это множество всех значений переменных, которые удовлетворяют всем ограничениям.

Оптимальное решение — это такое допустимое решение, при котором целевая функция достигает экстремального значения.

Также важна геометрическая интерпретация задачи: при двух переменных решение можно визуализировать на плоскости, где ограничения задают многоугольник (область допустимых решений), а целевая функция — семейство параллельных прямых.

Двойственная задача

Прямая и двойственная задачи: связь между ними

Каждой задаче линейного программирования (называемой прямой) можно сопоставить двойственную задачу, которая отражает ту же проблему с другой точки зрения.

Если прямая задача — это, например, максимизация прибыли при заданных ресурсах, то двойственная — это минимизация стоимости этих ресурсов при обеспечении нужного объема продукции.

Доказано, что оптимальные значения обеих задач совпадают при выполнении теорем слабой и сильной двойственности [2].

Решение двойственной задачи позволяет:

1. получить дополнительную экономическую информацию (ценность ресурсов);
2. проверить оптимальность найденного решения;
3. оценить чувствительность модели к изменению параметров.

Для построения двойственной задачи из прямой необходимо:

1. Если прямая задача — максимизация, то двойственная будет минимизацией, и наоборот.
2. Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная в двойственной.
3. Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение в двойственной.
4. Знаки неравенств меняются на противоположные.
5. Матрица коэффициентов в двойственной — это транспонированная матрица коэффициентов из прямой задачи.

Как меняются переменные и ограничения:
Прямая задача:

- Максимизировать $c^{T}x$
- При $Ax \leq b$, $x \geq 0$
- Переменные x (n штук)

Двойственная задача:

- Минимизировать $b^{T}y$
- При $A^{T}y \geq c$, $y \geq 0$
- Переменные y (m штук — по числу ограничений)

Например:

Если в прямой задаче есть 3 ограничения и 5 переменных, то в двойственной будет 5 ограничений и 3 переменные.

Если прямая задача — максимизация прибыли, то двойственная — минимизация затрат. И наоборот, если цель прямой задачи — минимизация издержек, то двойственная стремится максимизировать возможный доход от ограничений [3].

Теоремы двойственности

В линейном программировании теоремы двойственности описывают связь между прямой и двойственной задачами.

Теорема слабой двойственности

Если x — допустимое решение прямой задачи, а y — допустимое решение двойственной задачи, то значение целевой функции прямой задачи не превышает значение двойственной:

$$c^T x \leq b^T x \tag{2}$$

Это означает: при любом допустимом решении двойственная задача всегда переоценивает максимум прямой задачи. Теорема полезна для проверки корректности решений.

Если в задаче максимизации получено значение z = 70, а в двойственной *w* = 72, значит одно из решений не оптимально [4].

Теорема сильной двойственности

Если хотя бы одна из задач (прямая или двойственная) имеет оптимальное решение, то имеет его и вторая, и значения целевых функций совпадают:

$$c^T x^* = b^T x^* \tag{3}$$

Таким образом, решив одну из задач, можно автоматически получить значение оптимума другой. Это также используется в практических приложениях — например, чтобы не решать обе задачи, а только одну.

Пример:

Если оптимум прямой задачи — x^*= (2,3), дающий z = 90, то двойственная задача тоже имеет оптимум y^*, дающий *w* = 90 [5].

Теорема комплементарности

Теорема комплементарности устанавливает необходимые и достаточные условия оптимальности:

$$x_j \cdot (A^T y - c)_j = 0, \text{ для всех j}, \tag{4}$$
$$y_i \cdot (Ax - b)_i = 0, \text{ для всех i}$$

Если $x_j > 0$, то соответствующее ограничение двойственной задачи выполняется как равенство. Если $y_i > 0$, то соответствующее ограничение прямой задачи выполняется как равенство.

Это условие используется для проверки, действительно ли найденное решение оптимально.

Если для переменной, то связанное с ней двойственное ограничение должно выполняться точно.

Теоремы двойственности: обеспечивают математическую основу связи между двумя задачами, позволяют решать сложные задачи через их двойственные аналоги [6].

Экономическая интерпретация двойственной задачи

Одним из достоинств двойственной задачи является её экономическая интерпретация. Решения двойственной задачи позволяют получить ценную информацию о стоимости ресурсов, ограничений и влиянии параметров на оптимальное решение.

Переменные двойственной задачи называют двойственными переменными или оценками ресурсов. Они показывают, насколько изменится целевая функция прямой задачи при изменении соответствующего ограничения (например, увеличении доступного ресурса на единицу).

Теневая цена (или сетевая стоимость, маржинальная ценность) — это значение двойственной переменной, соответствующее определённому ресурсу. Она отражает прирост (или убыль) целевой функции при увеличении объема ресурса на единицу.

Если теневая цена ресурса равна 5, это означает, что при увеличении объема ресурса на 1 единицу прибыль возрастёт на 5 единиц (при прочих равных условиях).

Ресурсные оценки

1. Теневая цена позволяет оценить:
2. Какие ресурсы ограничивают решение.
3. Стоит ли увеличивать объём ресурса (если его теневая цена положительна).
4. Какие ресурсы не используются полностью — их теневая цена будет равна 0.

Если ресурс полностью израсходован — его цена положительна.

Если он не используется — его цена равна 0, увеличение его объема не принесёт пользы.

В реальных задачах ЛП применяется:

1. в логистике — для определения стоимостей перевозок;
2. в сельском хозяйстве — для оценки рационального распределения удобрений;
3. в производстве — для оптимизации использования ограниченных мощностей;
4. в финансах — для управления бюджетами и оценок рисков.

Применение двойственных задач на практике

Двойственные задачи линейного программирования находят широкое применение в самых различных областях науки и практики — от экономики и управления до технических и логистических систем. Их ценность заключается не только в возможности найти оптимальное решение, но и в глубоком анализе структуры исходной задачи.

Экономика и финансы: в экономике двойственная задача позволяет оценить предельную ценность ресурсов. Каждая двойственная переменная интерпретируется как теневая цена, которая показывает, насколько увеличится (или уменьшится) значение целевой функции при увеличении соответствующего ресурса на единицу. Это особенно важно в ситуациях, когда необходимо принять решение о вложении средств в расширение производственных мощностей или закупку дополнительных ресурсов. Например, в инвестиционном анализе, двойственные переменные позволяют оценить, какие ограничения бюджета или ресурсов являются наиболее «узкими» местами и насколько их смягчение повлияет на прибыль.

Логистика и транспортные задачи: в задачах логистики и транспортных схем двойственные задачи используются для оценки стоимости перевозок и оптимизации маршрутов. Прямая задача, как правило, формулируется как задача минимизации затрат на доставку, тогда как двойственная позволяет определить стоимость ресурса доставки из различных пунктов. Таким образом, двойственный анализ помогает понять, какие маршруты являются экономически целесообразными, а какие требуют пересмотра. Кроме того, в задачах маршрутизации двойственные оценки помогают выявить неиспользуемые ресурсы или избыточные мощности, что позволяет более эффективно планировать использование транспорта.

Производственное планирование: в производстве двойственные задачи применяются для определения ценности ограничений (например, лимитов по сырью, рабочему времени, мощностям станков и т. д.). Если предприятие производит несколько видов продукции, ограниченное ресурсами, то с помощью двойственной задачи можно определить, какие ресурсы более критичны, а какие можно перераспределить без потерь.

Также, двойственный подход используется в оптимизации ассортимента продукции — через оценку влияния изменения доступных ресурсов на итоговую прибыль. Это позволяет проводить экономическую диагностику производственного процесса.

Анализ чувствительности и устойчивость решений: двойственная задача играет ключевую роль в анализе чувствительности. Она позволяет определить, как изменение коэффициентов целевой функции или правой части ограничений влияет на оптимальное решение. Если, например, стоимость сырья изменилась, двойственные переменные покажут, сохранится ли оптимальное решение или оно потребует пересмотра. Двойственный анализ даёт возможность проверить устойчивость найденного решения и подготовиться к изменениям условий задачи.

Проверка оптимальности решений: согласно теоремам двойственности, если решения прямой и двойственной задачи совпадают по значению целевой функции, то эти решения являются оптимальными. Таким образом, решение двойственной задачи может использоваться как инструмент верификации — особенно в ситуациях, когда решение прямой задачи получено приближённо или вручную.

Обратные задачи: интересным и полезным направлением является задача обратного анализа — когда по заданной двойственной модели восстанавливают прямую. Такая ситуация встречается, например, при экономическом анализе деятельности предприятия, когда известны оценки ресурсов (теневые цены), а нужно понять, какая структура задачи могла привести к таким оценкам.

Заключение

Двойственные задачи — важная составляющая линейного программирования, позволяющая глубже понять структуру исходной задачи, её ограничения и целевую функцию. Они открывают альтернативный взгляд на проблему и дают возможность использовать математические результаты для практического анализа.

Теоремы двойственности, такие как слабая, сильная и теорема комплементарности, формируют основу для проверки оптимальности решений и анализа устойчивости модели. Эти принципы усиливают связь между прямой и двойственной задачами и позволяют использовать решения одной задачи для оценки другой.

В прикладных задачах двойственные переменные отражают ценность ресурсов и ограничений, что делает их особенно полезными в экономике, производстве и логистике. Значения этих переменных помогают определить, какие ресурсы являются критичными и как их изменение повлияет на общий результат.

Таким образом, двойственные задачи представляют собой не только теоретический инструмент, но и эффективный способ поддержки принятия решений в условиях ограниченных ресурсов.

Список использованных источников

1. Двойственная задача линейного программирования [Электронный ресурс] // Wikipedia. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Двойственная_задача_линейного_программирования. – Дата доступа: 31.05.2025.

2. Линейное программирование: основы, двойственность, примеры [Электронный ресурс] // Studfile.net. – Режим доступа: https://studfile.net/preview/3822192/. – Дата доступа: 31.05.2025.

3. Теоремы двойственности в линейном программировании [Электронный ресурс] // LMS2.SSEU.ru. – Режим доступа: https://lms2.sseu.ru/courses/eresmat/course2/prakt2/razdpr2_2/teo2_2_5.htm. – Дата доступа: 31.05.2025.

4. Лекция: двойственная задача. Свойства, таблицы, симплекс-метод [Электронный ресурс] // Math.semestr.ru. – Режим доступа: https://math.semestr.ru/simplex/lec_dvoistven.php. – Дата доступа: 31.05.2025.

5. Симплекс-метод и двойственные задачи линейного программирования [Электронный ресурс] // Habr.com. – Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/565742/. – Дата доступа: 31.05.2025.

6. Методы решения двойственных задач [Электронный ресурс] // Studfile.net. – Режим доступа: https://studfile.net/preview/9523606/page:3/. – Дата доступа: 31.05.2025.