

# РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по теме

«Интеграл функции одной переменной»

по дисциплине

«Математика»

Вариант № 8

***Выполнили:***

Хороших Дмитрий - Р3117 1.5

Рамеев Тимур - Р3118 1.5

***Преподаватель:***

Правдин Константин

# Содержание

<b>1</b>	<b>1-е Задание</b>	<b>3</b>
1.1	Интегральная сумма . . . . .	3
1.2	Последовательность интегральных сумм . . . . .	6
<b>2</b>	<b>2-е Задание</b>	<b>8</b>
2.1	Решение . . . . .	9
2.2	Приближение другими фигурами . . . . .	12
<b>3</b>	<b>3-е Задание</b>	<b>13</b>
3.1	Решение . . . . .	13
3.2	Приближение другими телами . . . . .	15
<b>4</b>	<b>4-е Задание</b>	<b>17</b>
4.1	Решение . . . . .	17
<b>5</b>	<b>5-е Задание</b>	<b>20</b>
5.1	Решение . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Оценочный лист</b>	<b>22</b>

# 1. 1-е Задание

**Условие.** Исследуйте интегральную сумму функции  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на отрезке  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ .

## 1.1. Интегральная сумма

Начнём исследование интегральной суммы функции со сравнения площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на отрезке  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ , с площадью ступенчатой фигуры (изображающей интегральную сумму на плоскости). На рисунках 1 - 4 светлым цветом выделена криволинейная трапеция, а тёмным - ступени фигуры.

Рассмотрим рисунок 1, на котором ступенчатая фигура построена на 5-и элементарных отрезках, а  $c_i$ , определяющее высоту ступени по значению  $f(c_i)$ , установлено в середину каждого элементарного отрезка. Можно заметить, что площадь ступенчатой фигуры слабо совпадает с площадью трапеции - некоторые участки трапеции не покрыты фигурой, а некоторые участки фигуры выходят за пределы трапеции. Очевидно, что такое приближение не очень точно.

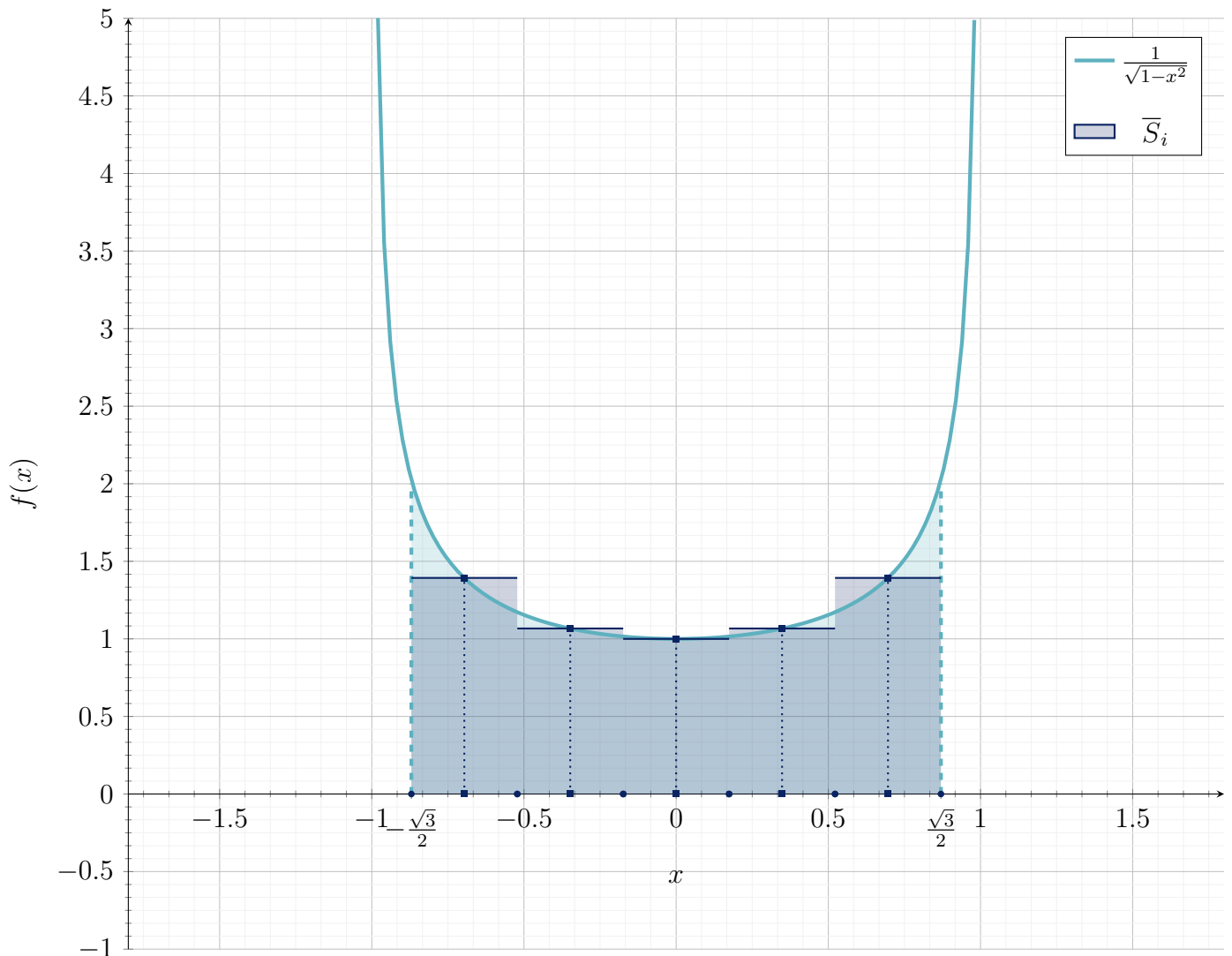


Рис. 1:  $f(x)$  со ступенчатой фигурой:  $n = 5$ ,  $c_i$  - середина отрезка

Изменим положение точки  $c_i$  и посмотрим, как при этом изменяется фигура.

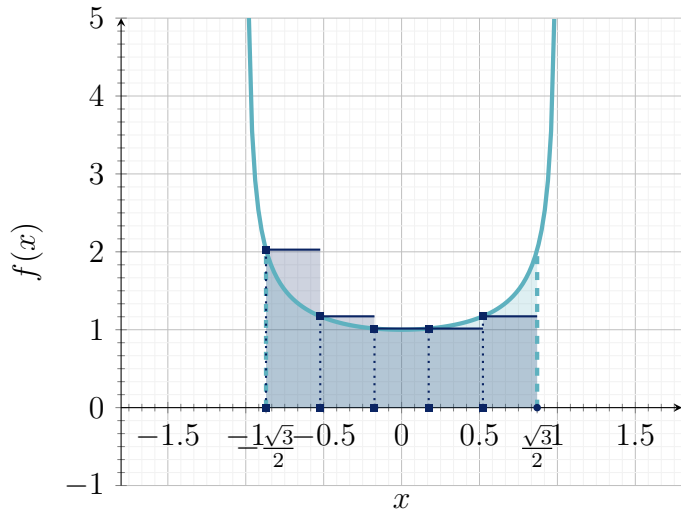


Рис. 2:  $f(x)$  со ступенчатой фигурой:  
 $n = 5$ ,  $c_i$  - крайнее левое положение

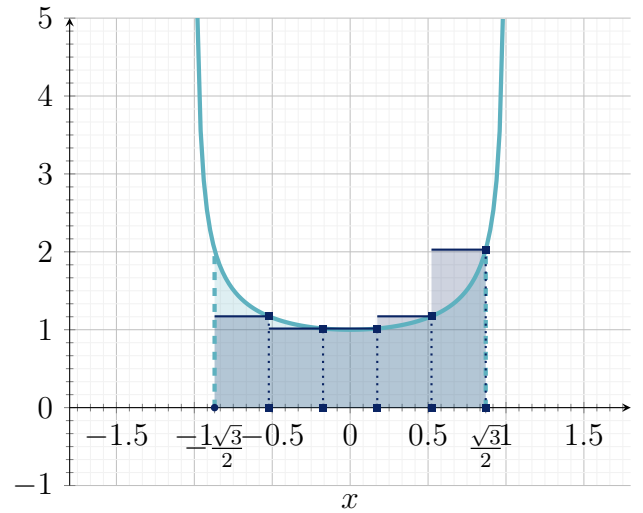


Рис. 3:  $f(x)$  со ступенчатой фигурой:  
 $n = 5$ ,  $c_i$  - крайнее правое положение

На рисунке 2 ступенчатая фигура построена на 5-и элементарных отрезках, а точка  $c_i$  установлена в крайнее **левое** положение каждого из отрезков. Легко видеть, что на участке  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right]$ , на котором  $f(x)$  убывает, ступенчатая фигура **переоценивает** криволинейную трапецию и выходит за её границу, а на участке  $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  наоборот - **недооценивает**.

Для ступенчатой фигуры с 5-ю элементарными отрезками и точкой  $c_i$ , установленной в крайнее **правое** положение каждого из отрезков, возникает противоположенная ситуация: на участке  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right]$  ступенчатая фигура **недооценивает** криволинейную трапецию, а на участке  $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  - **переоценивает**.

В сравнении со ступенчатой фигурой, изображённой на рисунке 1, фигуры на рисунках 2 и 3 оценивает криволинейную трапецию менее точно. Таким образом, можно заключить, что оптимальное положение  $c_i$  для оценки трапеции при малом числе ступеней - середина элементарного отрезка.

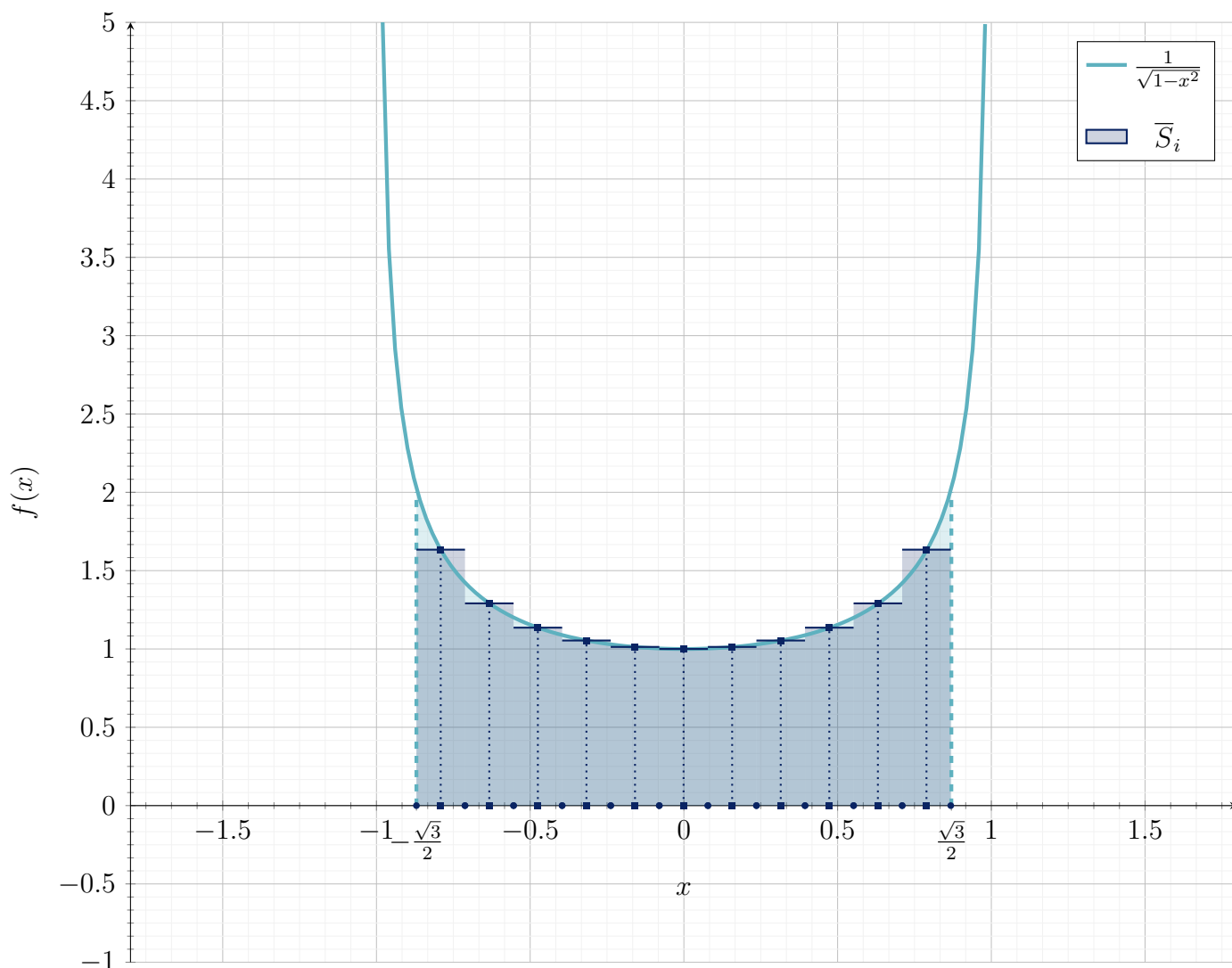


Рис. 4:  $f(x)$  со ступенчатой фигурой:  $n = 11$ ,  $c_i$  - середина отрезка

Далее рассмотрим, как меняется ступенчатая фигура от изменения числа ступеней. На рисунке 4 изображена ступенчатая фигура на 11-и элементарных отрезках с точкой  $c_i$ , установленной в положение середины элементарного отрезка. Заметим, что в сравнении с фигурой на рисунке 1 данная фигура заметно лучше оценивает криволинейную трапецию под функцией.

При рассмотрении фигуры с числом ступеней - 7 (*больше чем число ступеней фигуры с рисунка 1, но меньше чем у фигуры с рисунка 4*) удостоверяемся, что она оценивает трапецию лучше, чем фигура на рисунке 1, имеющая 5 ступеней, но хуже, чем фигура на рисунке 4, имеющая 11 ступеней. В связи с этим, можно сделать очевидный вывод, что, **чем больше ступеней имеет ступенчатая фигура, тем более точно она оценивает криволинейную трапецию.**

Заметим также, что положение точки  $c_i$  влияет на фигуру с 7-ю и 11-ю ступенями так же, как и на фигуры с 5-ю ступенями.

**Заключение.** На точность оценивания криволинейной трапеции под графиком функции ступенчатой фигурой влияет:

1. **Положение точки  $c_i$ ,** определяющей высоту ступени.
2. **Число ступеней.** При этом фигуры с большим числом ступеней более точно оценивают трапецию.

## 1.2. Последовательность интегральных сумм

Построим интегральную суммы функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на отрезке  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ :

1. Разобьём криволинейную трапецию на  $n$  слоёв с равными элементарными отрезками длиной:

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{n} = \frac{\sqrt{3}}{n}$$

Условимся, что  $i$ -й элементарный отрезок  $= [x_{i-1}; x_i] \forall i \in 1 \dots n$

При этом концы отрезков равны:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_1 &= x_0 + \Delta x_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{n} \\ x_2 &= x_0 + 2 * \Delta x_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 * \frac{\sqrt{3}}{n} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_0 + (n-1) * \Delta x_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + (n-1) * \frac{\sqrt{3}}{n} \\ x_n &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Также введём величину  $\lambda = \max_{i=1 \dots n} \Delta x_i$  - *мелкость разбиения*

2. Приближим площадь участка трапеции к площади прямоугольного слоя:

$$\Delta S_i \approx \overline{\Delta S_i} = \Delta x_i * f(c_i)$$

где  $\overline{\Delta S_i}$  - площадь  $i$ -го слоя,  $\Delta S_i$  - площадь  $f(x)$  на  $i$ -м элементарном отрезке,  $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$  - точка на элементарном отрезке.

Пусть точка  $c_i = x_{i-1} + \alpha * \Delta x$ , где  $\alpha \in [0; 1]$  (в частности при  $\alpha = 0.5$   $c_i$  - середина элементарного отрезка). Тогда, учитывая также, что  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  и  $\Delta x_i = \frac{\sqrt{3}}{n}$ :

$$\Delta S_i \approx \overline{\Delta S_i} = \frac{\sqrt{3}}{n} * \frac{1}{\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + (i-1 + \alpha) * \frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{n^2 - 3 \left(i - 1 + \alpha - \frac{n}{2}\right)^2}}$$

3. Запишем интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \overline{\Delta S_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{3}{n^2 - 3 \left(i - 1 + \alpha - \frac{n}{2}\right)^2}} \quad (1)$$

, где  $\alpha \in [0; 1]$  и показывает положение точки  $c_i$  на элементарном отрезке.

Исследуем значение  $S_n$  при различных  $n$  и положениях точки  $c_i$  на элементарном отрезке (то есть различных значениях  $\alpha$ ):

<b>n</b>	<b>Левый край (<math>\alpha = 0</math>)</b>	<b>Середина (<math>\alpha = 0.5</math>)</b>	<b>Правый край (<math>\alpha = 1</math>)</b>
3	2.361	1.992	2.361
6	2.176	2.058	2.176
10	2.126	2.079	2.126
50	2.096	2.094	2.096
100	2.095	2.094	2.095

Можно заметить, что с ростом  $n$  разность между значениями  $S_n$  при различных положениях точки  $c_i$  уменьшается, что говорит об увеличивающейся точности приближения интегральной суммы.

Вычислим значение предела интегральных сумм, то есть вычислим интеграл от данной функции по отрезку:

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

По теореме Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

, где  $\Phi(x)$  - первообразная  $f(x)$ .

По определению неопределённого интеграла:

$$\Phi(x) + C = \int f(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Следовательно:

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2.094$$

Сравним значения интегральных сумм при различных  $n$  с точным значением интеграла:

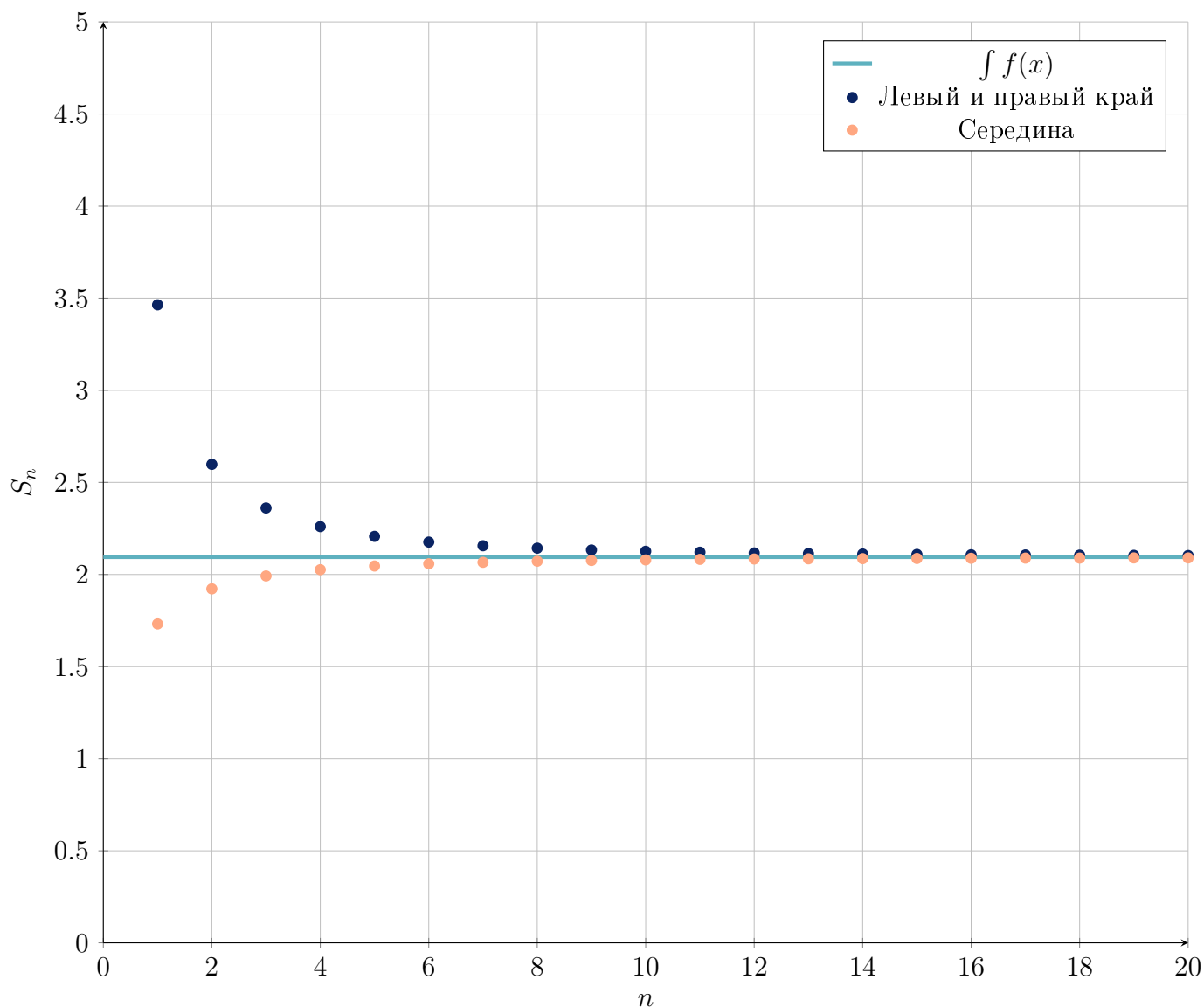


Рис. 5: Сравнение интегральных сумм с точным значением интеграла

Анализируя рисунок 5 можно заметить, что, во-первых, интегральные суммы для  $c_i$  на левом и правом краю элементарного отрезка совпадают (что связано с симметричностью рассматриваемого отрезка и функции), а во-вторых - все последовательности сходятся к точному значению интеграла с ростом  $n$ .

**Заключение.** По окончании исследования последовательности интегральных сумм можно заключить:

1. **Последовательности интегральных сумм сходятся к точному значению интеграла с ростом  $n$  вне зависимости от выбора точки  $c_i$ .**
2. **Выбор точки  $c_i$  существенно меняет значение интегральной суммы только при малых  $n$ .**

## 2. 2-е Задание

**Условие.** Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной петлёй кривой  $x = \frac{t^2}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$ .



## 2.1. Решение

Рассмотрим искомую фигуру на рисунке 13:

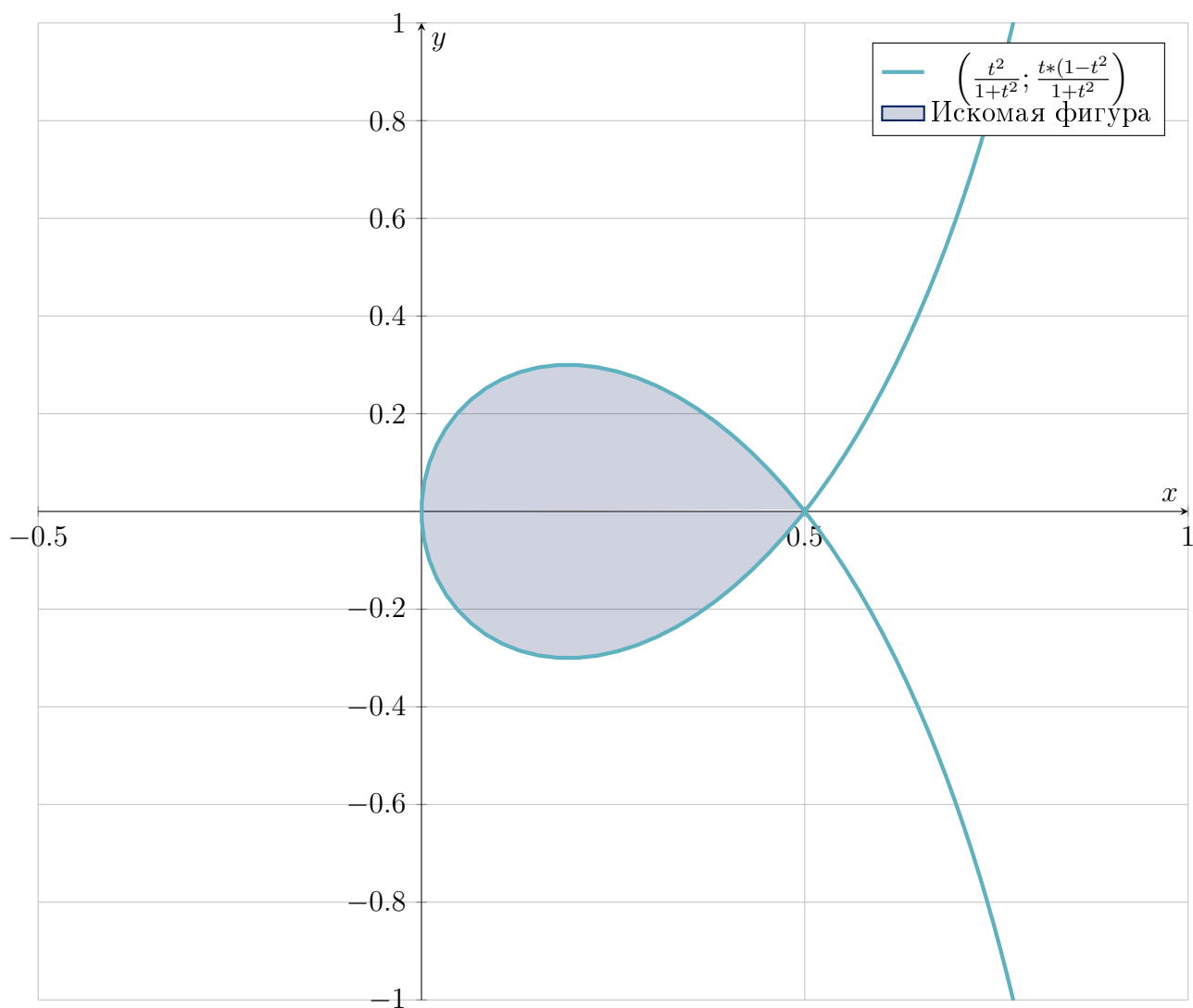


Рис. 6: Петля  $f(x)$  с закрашенной искомой фигурой

Так как определённый интеграл Римана фактически равен площади под графиком функции, воспользуемся им для подсчёта площади данной фигуры.

Сначала определим промежуток параметра  $t$  на котором расположена петля кривой. На графике видно, что петля смыкается при  $y = 0$ , следовательно:

$$y = \frac{t * (1 - t^2)}{1 + t^2} = 0$$

$$t = 0, t = \pm 1$$

$$x(0) = 0, x(-1) = x(1) = 0.5$$

Кривая дважды проходит через точку  $(0.5, 0)$  при  $t = \pm 1$ . При этом нижняя часть петли (ниже оси  $Ox$ ) соответствует промежутку  $t \in (-1, 0)$ , а верхняя -  $t \in (0, 1)$  (выше оси  $Ox$ ). К тому же:

$$y(-t) = -\frac{1 * (1 - t^2)}{1 + t^2} = -y(t)$$

, то есть  $y(t)$  - нечётная функция, а значит - на симметричных промежутках  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  она принимает одинаковые по модулю, но разные по знаку значения. Значит, площадь фигуры

под верхней веткой кривой равна площади над нижней веткой. Следовательно, площадь всей искомой фигуры можно посчитать как:

$$S_{\Phi} = 2 * S_{+}$$

, где  $S_{+}$  - площадь под верхней частью петли.

Площадь под графиком функции  $y(x)$  на отрезке  $[a; b]$  равна:

$$S = \int_a^b y(x) dx$$

При этом, если  $y$  и  $x$  выражены через параметр  $t$ , то:

$$\int_a^b y(x) dx = \int_{t_1}^{t^2} y(t) dx(t) = \int_{t_1}^{t^2} y(t) x'(t) dt$$

Петля расположена выше оси ОХ при  $t \in [0; 1]$ , следовательно:

$$\begin{aligned} S_{+} &= \int_0^1 y(t) x'(t) dt \\ x'(t) &= \left( \frac{t^2}{1+t^2} \right)' = |\text{По св. произв. частн.}| = \frac{2 * t * t^2 - 2 * t * (1+t^2)}{(1+t^2)^2} = \\ &= \frac{2 * t}{(1+t^2)^2}, \\ S_{+} &= \int_0^1 \frac{t * (1-t^2)}{1+t^2} * \frac{2 * t}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{2 * (t^2 - t^4)}{(1+t^2)^3} dt = |\text{По св. линейности соб. инт.}| = \\ &= 2 * \left( \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt - \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^3} dt \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из суммируемых интегралов по отдельности:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt &= \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^3} dt = |\text{По св. лин. инт}| = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3} dt \\ \int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^3} dt &= \int_0^1 \frac{t^4 + 2t^2 + 1 - 2t^2 - 1}{(1+t^2)^3} dt = |\text{По св. лин. инт}| \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{1+2t^2}{(1+t^2)^3} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{2}{(1+t^2)^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3} dt \end{aligned}$$

Следовательно:

$$S_{+} = 2 * \left( - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)} dt + \int_0^1 \frac{3}{(1+t^2)^2} dt - \int_0^1 \frac{2}{(1+t^2)^3} dt \right)$$

Решим каждый из интегралов, участвующих в сумме по отдельности:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)} dt = |\text{Табл. инт}| = \arctan t \Big|_0^1$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3}{(1+t^2)^2} dt &= 3 * \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = |t = \tan w, w = \arctan t| = \\
&= 3 * \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{(\tan w^2 + 1)^2} * \frac{1}{\cos w^2} dw = \\
&= 3 * \int_{w_1}^{w_2} \cos^4 w * \frac{1}{\cos^2 w} dw = |\text{По форм. пониж. степ.}| = \\
&= 3 * \int_{w_1}^{w_2} \frac{1 + \cos 2w}{2} dw = |\text{Внес. под дифф.}| = \\
&= \frac{3}{4} * \int_{w_1}^{w_2} 1 + \cos 2w dw = \frac{3}{4} (2w + \sin 2w) \Big|_{w_1}^{w_2} = \\
&= \left( \frac{3}{2} \arctan t + \frac{3}{4} \sin 2 \arctan t \right) \Big|_0^1 = \\
&= |\sin x = \sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}}, \cos x = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}}, \sin 2x = 2 * \sin x * \cos x| = \\
&= \left( \frac{3}{2} \arctan t + \frac{3}{4} * 2 * \sqrt{\frac{\tan^2 \arctan t}{1 + \tan^2 \arctan t}} * \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \arctan t}} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \left( \frac{3}{2} \arctan t + \frac{3}{2} * \frac{t}{1 + t^2} \right) \Big|_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2}{(1+t^2)^3} dt &= 2 * \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^3} dt = |t = \tan w, w = \arctan t| = \\
&= 2 * \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{(\tan w^2 + 1)^3} * \frac{1}{\cos w^2} dw = \\
&= 2 * \int_{w_1}^{w_2} \cos^6 w * \frac{1}{\cos^2 w} dw = |\text{По форм. пониж. степ.}| = \\
&= 2 * \int_{w_1}^{w_2} \left( \frac{1 + \cos 2w}{2} \right)^2 dw = \\
&= \frac{1}{2} * \int_{w_1}^{w_2} 1 + 2 \cos 2w + \cos^2 2w dw = \\
&= |\text{По св. лин. и методу внес. под дифф.}| = \\
&= \frac{1}{2} \left( w \Big|_{w_1}^{w_2} + \int_{w_1}^{w_2} \cos 2w dw + \frac{1}{8} \int_{w_1}^{w_2} 1 + \cos 4w dw \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( w + \sin 2w + \frac{1}{8} * 4w + \frac{1}{8} * \sin 4w \right) \Big|_{w_1}^{w_2} = \\
&= \left( \frac{1}{2} * \arctan t + \frac{t}{1 + t^2} + \frac{1}{4} * \arctan t + \frac{1}{4} * \frac{t}{(1 + t^2)^2} - \frac{1}{4} * \frac{t^3}{(1 + t^2)^2} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{4} * \left( \frac{t * (3t^2 + 5)}{(t^2 + 1)^2} + 3 * \arctan t \right) \Big|_0^1
\end{aligned}$$

Возвращаемся к изначальной сумме:

$$S_+ = 2 * \left( -\arctan t + \frac{3}{2} \arctan t + \frac{3}{2} * \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{4} * \left( \frac{t * (3t^2 + 5)}{(t^2 + 1)^2} + 3 * \arctan t \right) \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} * \left( \frac{3t^3 + t}{(t^2 + 1)^2} - \arctan t \right) \Big|_0^1$$

Тогда площадь фигуры равна:

$$S_{\Phi} = 2 * S_+ = \left( \frac{3t^3 + t}{(t^2 + 1)^2} - \arctan t \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{4} - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{4 - \pi}{4} \approx 0.215 \quad (2)$$

## 2.2. Приближение другими фигурами

Приближённо найдём площадь данной фигуры при помощи треугольников:

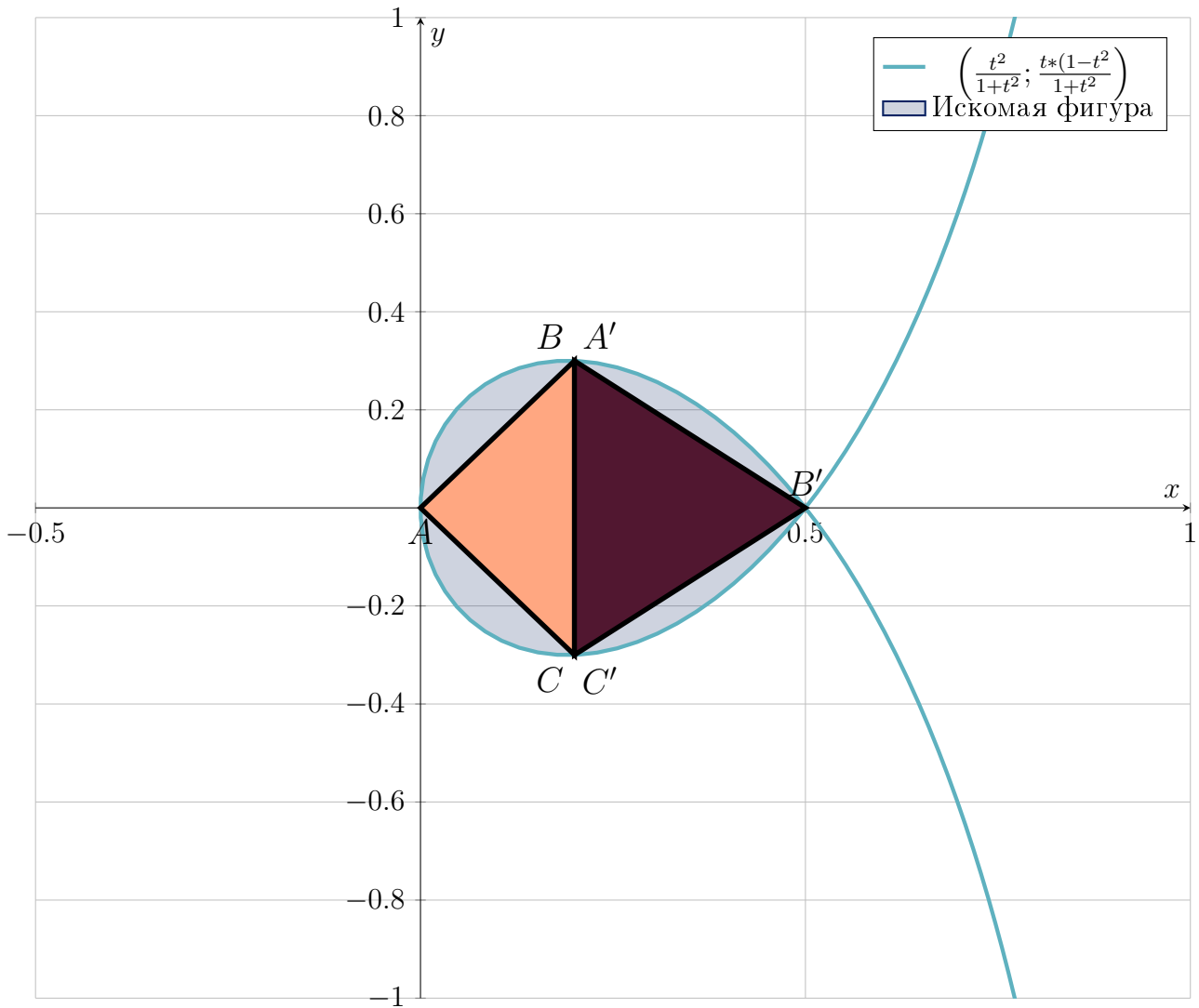


Рис. 7: Приближение площади треугольниками

Координаты вершин треугольника (подобраны исходя из графика):

$$A = (0, 0), \quad B = (0.2, 0.3), C = (0.2, -0.3)$$

$$A' = (0.2, 0.3), \quad B' = (0.5, 0), C' = (0.2, -0.3) \quad (3)$$

Приближенная площадь:

$$S_{\Phi} \approx S_{ABC} + S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} * (0.2 * 0.6 + 0.3 * 0.6) = 0.15$$

Приближенная площадь отличается от точной на:  $\delta S = 0.215 - 0.15 = 0.065 \approx 30\% * S$ . Следовательно, хоть предложенное приближение и не очень точно, оно всё равно помогает оценить правдоподобность площади, вычисленной точно, (грубой прикидкой на рисунке 10 можно оценить, что от площади всей фигуры не покрытой осталось около 20 – 30%, что сходится с полученными результатами).

### 3. 3-е Задание

**Условие.** Найдите объём тела  $T$ , полученного вращением фигуры  $\Phi$  вокруг оси  $Oy$ . Фигура  $\Phi$  ограничена следующими кривыми:

$$x = \sqrt{1 - y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x, y = 0$$

#### 3.1. Решение

Изобразим на графике фигуру  $\Phi$ :

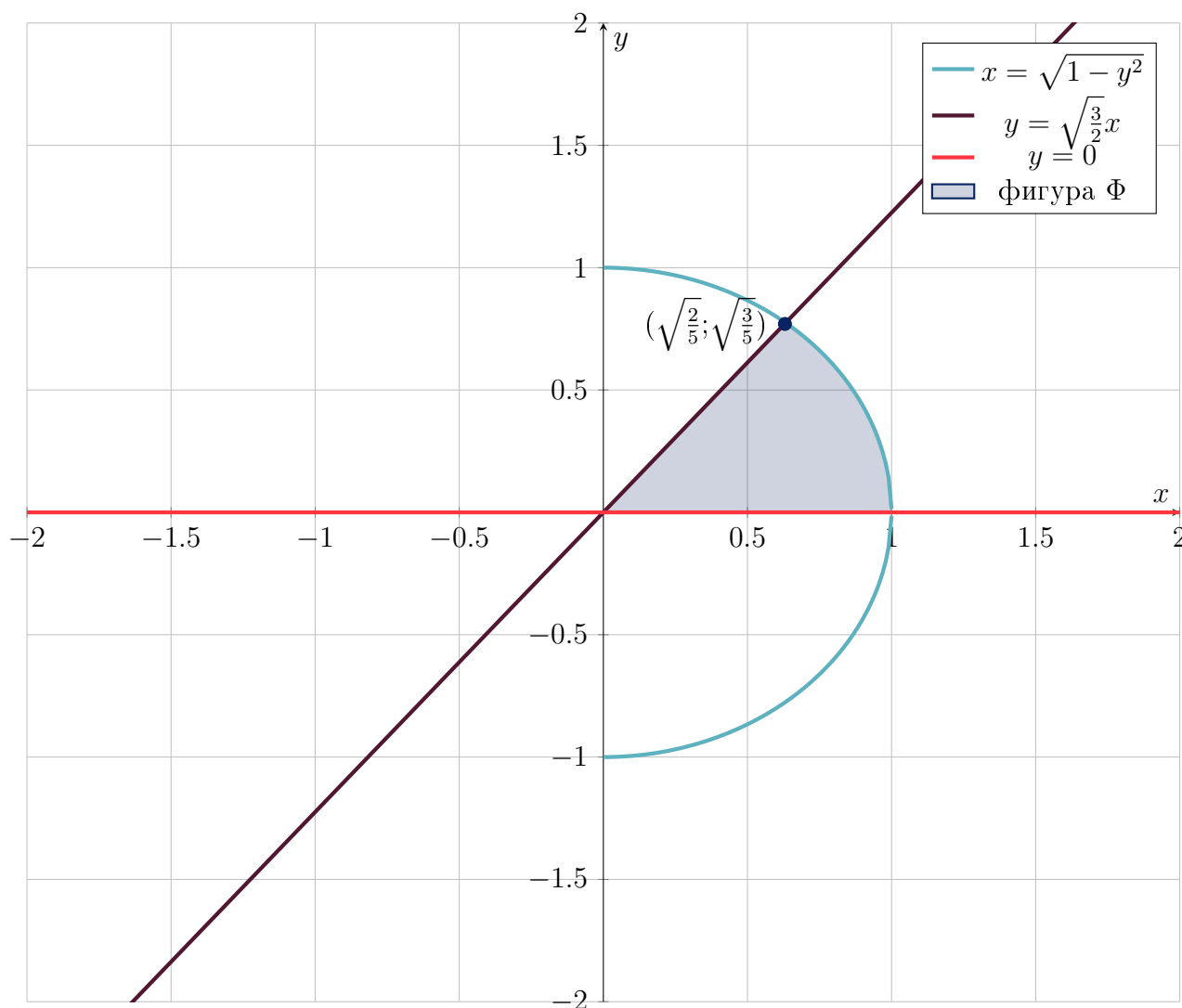


Рис. 8: Кривые и ограничиваемая ими фигура  $\Phi$

Изобразим тело вращения  $T$  (вращая фигуру  $\Phi$  вокруг оси  $Oy$ ):

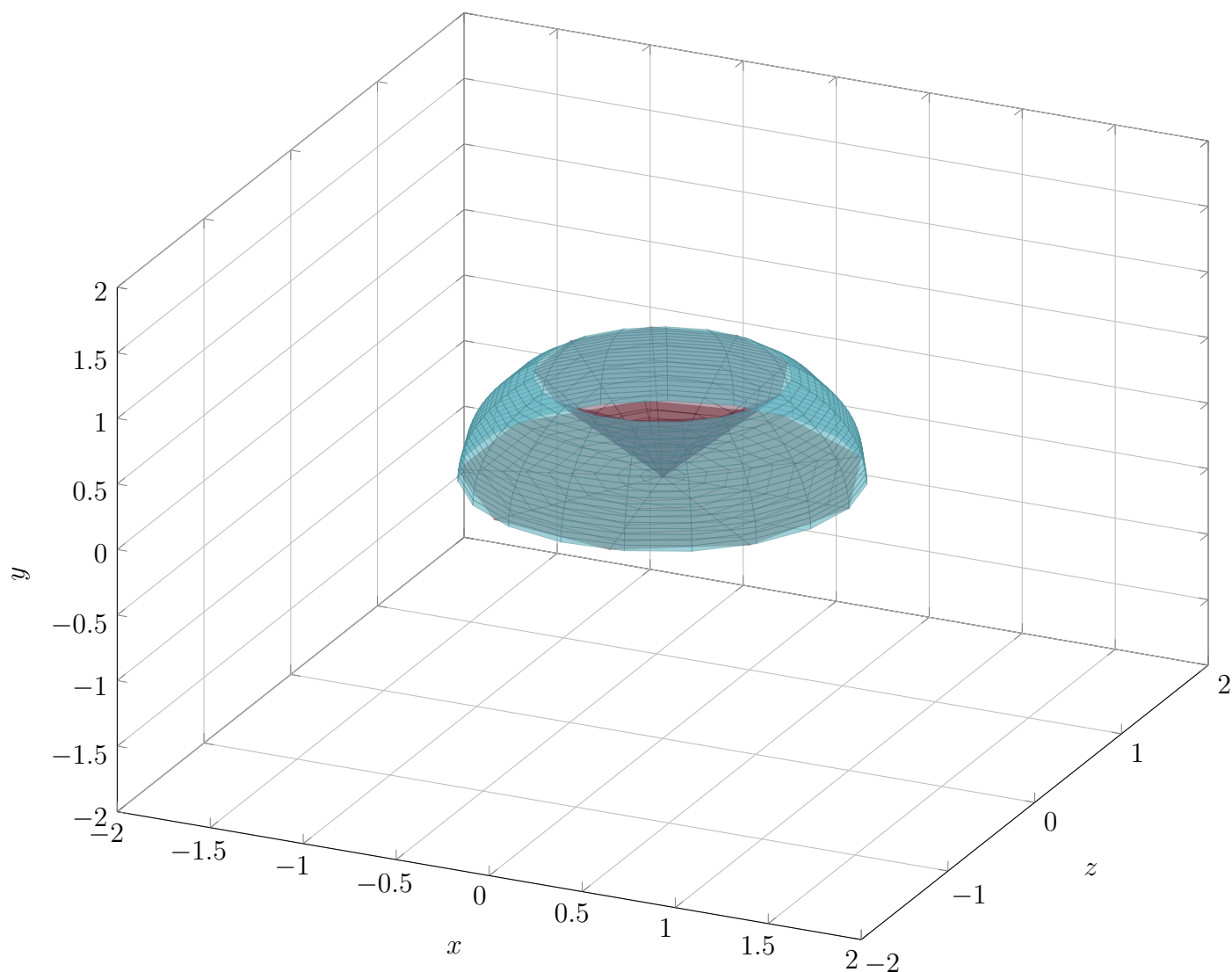


Рис. 9: Тело вращения  $T$

Объём тела вращения, образованного вращением фигуры, равен:

$$V = \int_a^b S(x)dx = |\text{По св-ву инт.}| = \int_a^b S(y)dy$$

На рисунке 8 можно увидеть, что для тела  $T$  функцию  $S(y)$  можно задать как функцию для площади кольца ( $S_{\text{кольцо}} = \pi * (R_{\text{внешний}}^2 - R_{\text{внутренний}}^2)$ ) в которой от свободной переменной  $y$  зависят радиусы:

$$\begin{aligned} S(y) &= (f(y)_{\text{Внешний радиус}}^2 - f(y)_{\text{Внутренний радиус}}^2) * \pi = \\ &= \left( (\sqrt{1-y^2})^2 - \left( \sqrt{\frac{2}{3}}y \right)^2 \right) * \pi = \\ &= \left( 1 - \frac{5}{3}y^2 \right) * \pi \end{aligned}$$

, где  $f(y)_{\text{Внутренний радиус}}$  получена из прямой  $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ , ограничивающей фигуру.

Для определения пределов интегрирования найдём точку пересечения ограничивающих кривых:  $x = \sqrt{1 - y^2}$  и  $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ :

$$x = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}y$$

$$2.5y^2 = 1.5$$

$$y^2 = \frac{3}{5}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Учитывая, что у искомой точки  $x, y > 0$ :

$$y = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Вычислим объём тела:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \left(1 - \frac{5}{3}y^2\right) * \pi dy \\ &= \pi * \left(y - \frac{5}{3} * \frac{y^3}{3}\right) \Big|_0^{\sqrt{\frac{3}{5}}} \\ &= \pi * \left(\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{5}{3} * \frac{3}{5} * \sqrt{\frac{3}{5}} * \frac{1}{3}\right) - 0 = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} * \pi \approx 1.622 \end{aligned}$$

### 3.2. Приближение другими телами

Аппроксимируем объём тела вращения  $T$  кольцами:

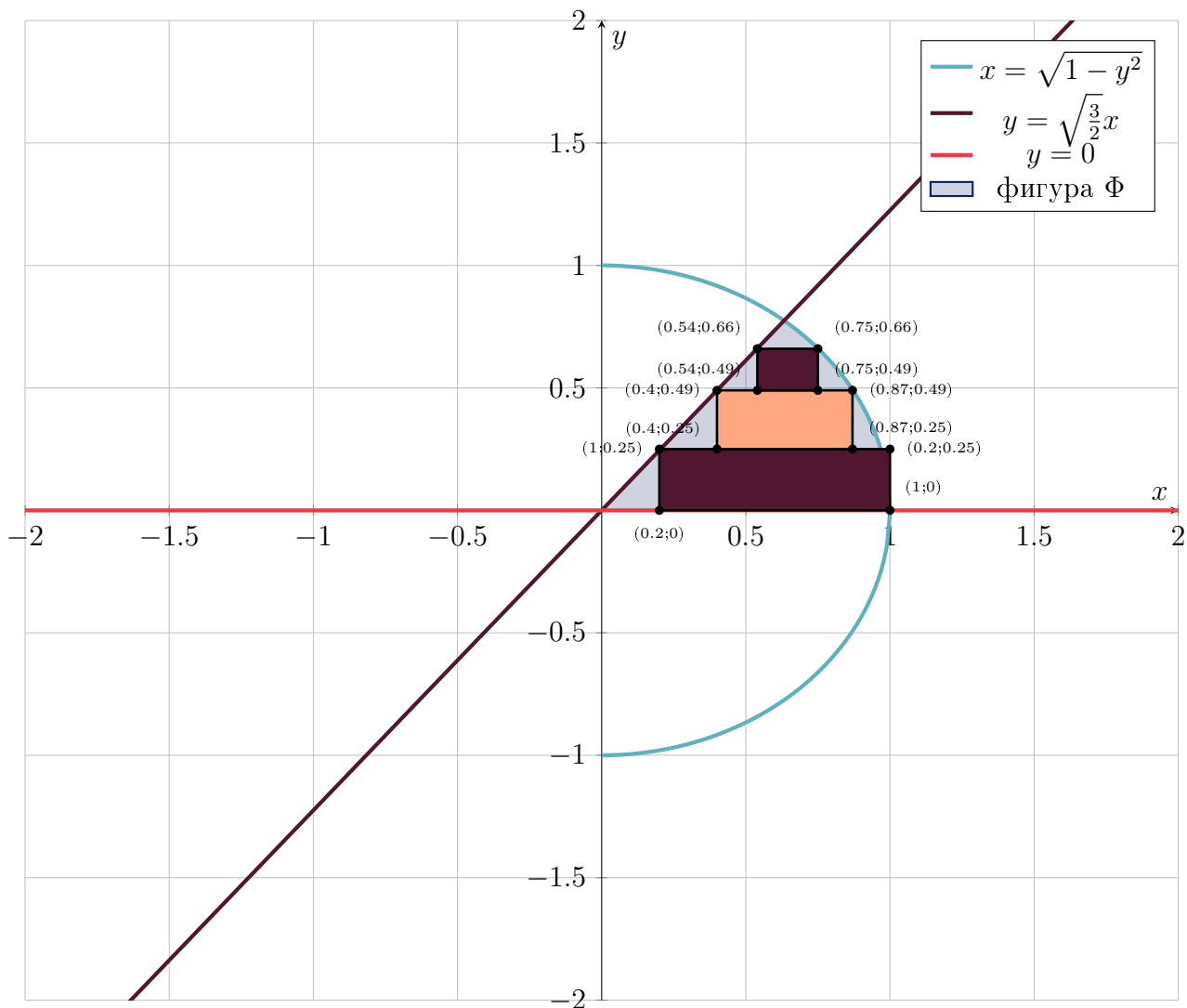


Рис. 10: Приближение фигуры  $T$  кольцами - сечения.

Для каждого кольца определим  $R_{\text{внутренний}}$ ,  $R_{\text{внешний}}$  и высоту  $H$ :

$$R_{i1} = 0.2, \quad R_{o1} = 1, H_1 = 0.25$$

$$R_{i2} = 0.4, \quad R_{o2} = 0.87, H_2 = 0.24$$

$$R_{i3} = 0.54, \quad R_{o3} = 0.75, H_3 = 0.17$$

, где  $R_i$  - внутренний радиус,  $R_o$  - внешний радиус,  $H$  - высота кольца.

Для вычисления объёма кольца воспользуемся формулой:

$$V_{\text{кольцо}} = \pi * (R_o^2 - R_i^2) * H$$

Найдём объём каждого из колец:

$$V_1 = \pi * (1^2 - 0.2^2) * 0.25 = 0.24\pi$$

$$V_2 = \pi * (0.87^2 - 0.4^2) * 0.24 = 0.14\pi$$

$$V_3 = \pi * (0.75^2 - 0.54^2) * 0.17 = 0.08\pi$$

, таким образом общий приближенный объём составляет:

$$V_T \approx V_1 + V_2 + V_3 = 0.46\pi \approx 1.445$$

Приближенный объём отличается от точного на:  $\delta V = 0.1622 - 1.445 = 0.117 \approx 11\% * V$ . Следовательно, найденная аппроксимация свидетельствует о правдоподобности точного объёма тела  $T$ , найденного с использованием интеграла.



## 4. 4-е Задание

**Условие.** Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра  $a$ .

$$x = \int_0^1 \frac{dx}{x^a \arctan x}$$

### 4.1. Решение

Чтобы найти особые точки несобственного интеграла, необходимо посмотреть, где у подынтегрального выражения существует бесконечный разрыв. Для выражения  $\int_0^1 \frac{dx}{x^a \arctan x}$  такие точки соответствуют  $x$ , при которых знаменатель  $x^a \arctan x$  равен 0.

- $\arctan x = 0$  при  $x = 0$
- $x^a = 0$  при  $x = 0$

Единственной особой точкой является  $x = 0$ . Данный несобственный интеграл является интегралом от неограниченной функции (2-го рода) Подынтегральная функция является неотрицательной на промежутке на промежутке интегрирования от 0 до 1, так как  $x^a$  при любых значениях  $a$  будет положительным, также как и  $\arctan x$ .

Предлагаю рассмотреть 3 значения  $a$ , при которых график функции  $y = \frac{dx}{x \arctan x}$  ведет себя по-разному:

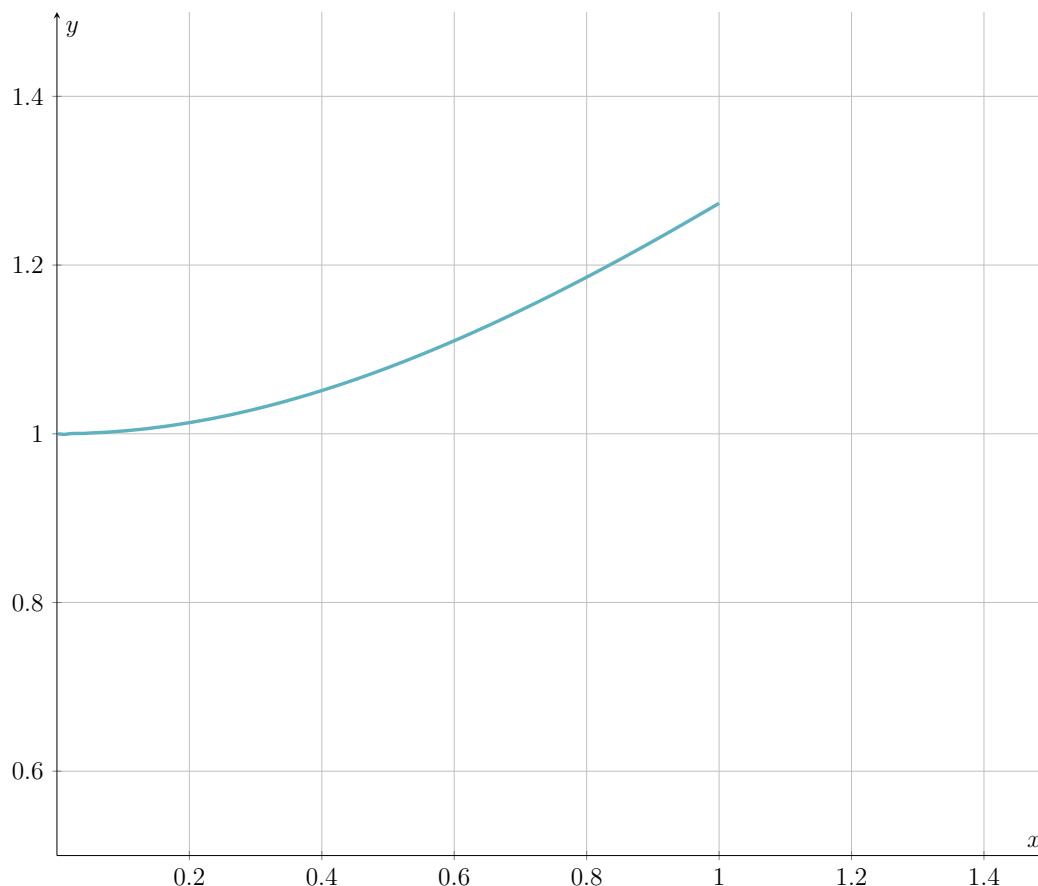


Рис. 11: график функции  $y = \frac{x}{\arctan x}$  ( $a = -1$ )

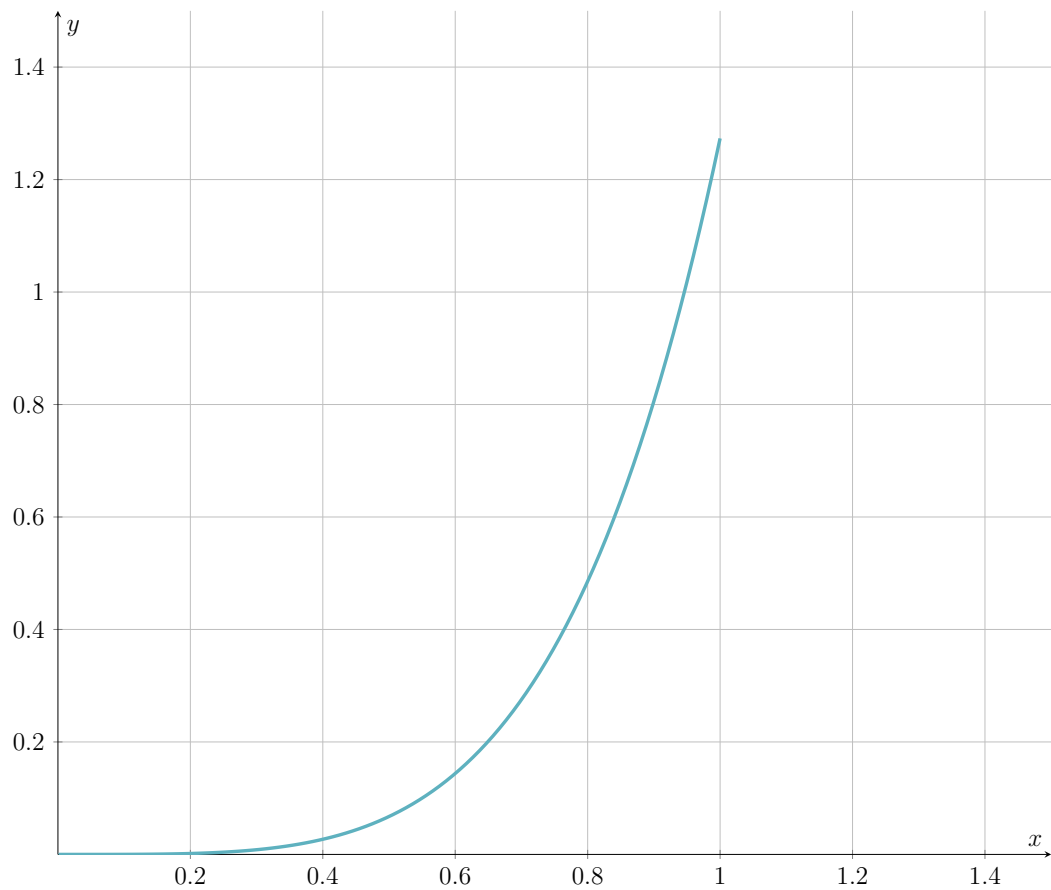


Рис. 12: график функции  $y = \frac{x^5}{\arctan x}$  ( $a < -1$ )

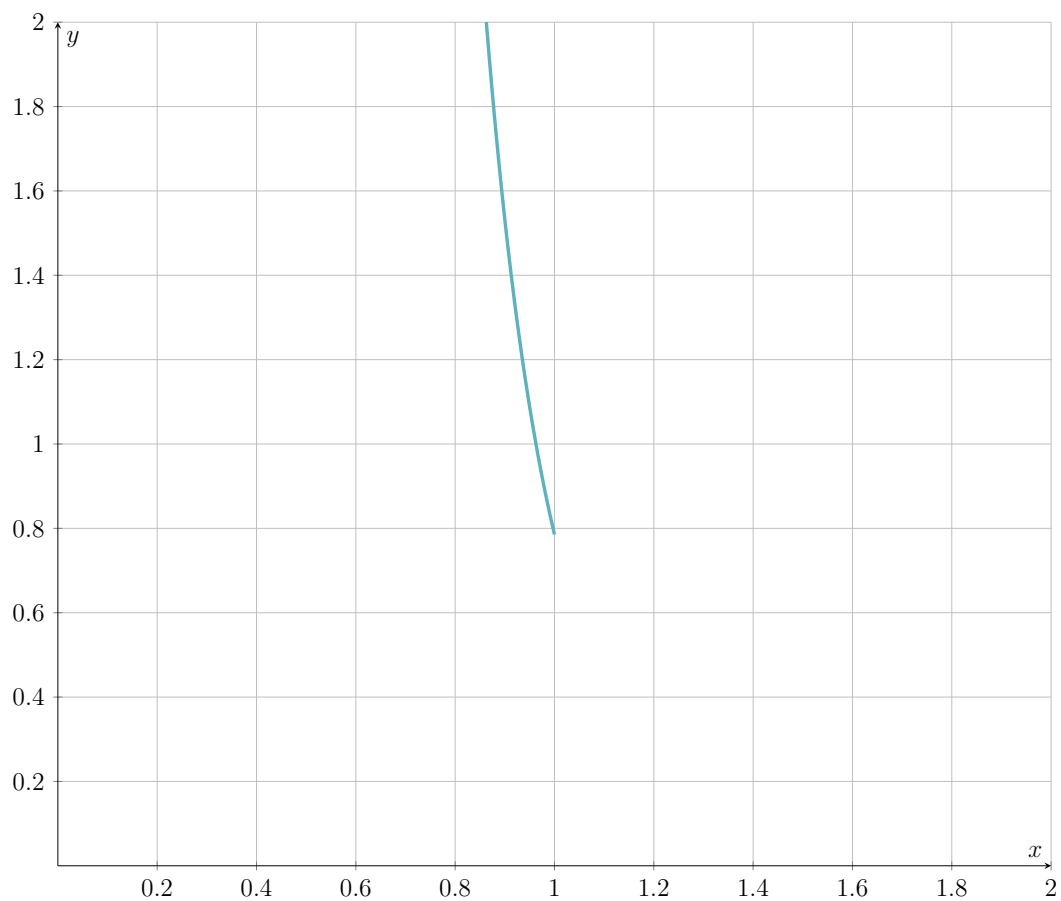


Рис. 13: график функции  $y = \frac{1}{x^7 \arctan x}$  ( $a > -1$ )

К моему сожалению, значений параметра  $a$ , при котором легко найти первообразную подынтегральной функции, нет.

Существует 3 признака для определения сходимости несобственных интегралов. Давайте сформулируем их (для 2 рода и промежутка  $(0; 1]$ ):

- **признак сравнения с неравенствами** Если на промежутке  $(0; 1]$  функции непрерывны, то
  - 1) из сходимости интеграла с большей подынтегральной функцией следует сходимость интеграла с меньшей подынтегральной функцией.
  - 2) из расходимости интеграла с меньшей подынтегральной функцией следует расходимость интеграла с большей подынтегральной функцией.
- **предельный признак сравнения** Пусть на промежутке  $(0; 1]$  функции непрерывны и терпят разрыв в точке  $x = 0$ . Тогда если предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$  существует и  $0 < k < \infty$ , интегралы от данных функций ведут себя одинаково.
- **абсолютный признак** Если интеграл от непрерывной функции на промежутке  $(0; 1]$  по модулю сходится, то и интеграл от этой же функции без модуля также будет сходиться.

Давайте исследуем на сходимость эталонный интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx$  Для этого рассмотрим 2 случая, когда  $\beta = 1$  и когда  $\beta \neq 1$ :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx = \begin{cases} -\frac{1}{\beta-1} * \frac{1}{x^{\beta-1}} \Big|_0^1, \beta \neq 1 \\ \ln |x| \Big|_0^1, \beta = 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty, \beta = 1, PX \\ \infty, \beta > 1, PX \\ -\frac{1}{\beta-1} * \frac{1}{1^{\beta-1}}, \beta < 1, CX \end{cases}$$

Трансцендентная функция  $y = \arctan x$  на промежутке  $(0, 1]$  ограничена областью значений  $(0, \frac{\pi}{4}]$

Так как в нашей подынтегральной функции присутствует трансцендентная функция, сравнить исходный интеграл по Первому признаку (с неравенством) будет трудно, поэтому воспользуемся Вторым признаком сравнения (через предел отношения):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^a \arctan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a \arctan x}{x^\beta} = |\arctan x \sim x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{a+1}}{x^\beta}$$

Для того, чтобы мы могли делать выводы по сходимости нашего интеграла по сходимости эталонного интеграла, предел их отношения не должен равняться  $\infty$  или  $0$ , поэтому перейдем к равенству  $\beta = a + 1$ .

При таких  $\beta$  мы можем определить сходимость нашего исходного интеграла по сходимости эталонного.

Так как эталонный интеграл для нашего исходного интеграла мы не нашли, воспользуемся общим эталонным интегралом для определения сходимости исходного интеграла при разных  $a$ .

$$\begin{cases} \beta = a + 1 \\ \beta = 1, PX \\ \beta < 1, CX \\ \beta > 1, PX \end{cases} = \begin{cases} a = 0, PX \\ a > 0, PX \\ a < 0, CX \end{cases}$$

## 5. 5-е Задание

**Условие.** Решите задачу.

Вычислите работу, необходимую для выкачивания масла из котла, имеющего форму полусферы радиуса 2 м. Удельный вес масла равен 0,9 (Указание: величина работы, затрачиваемой на поднятие веса, равна произведению веса на высоту подъема).

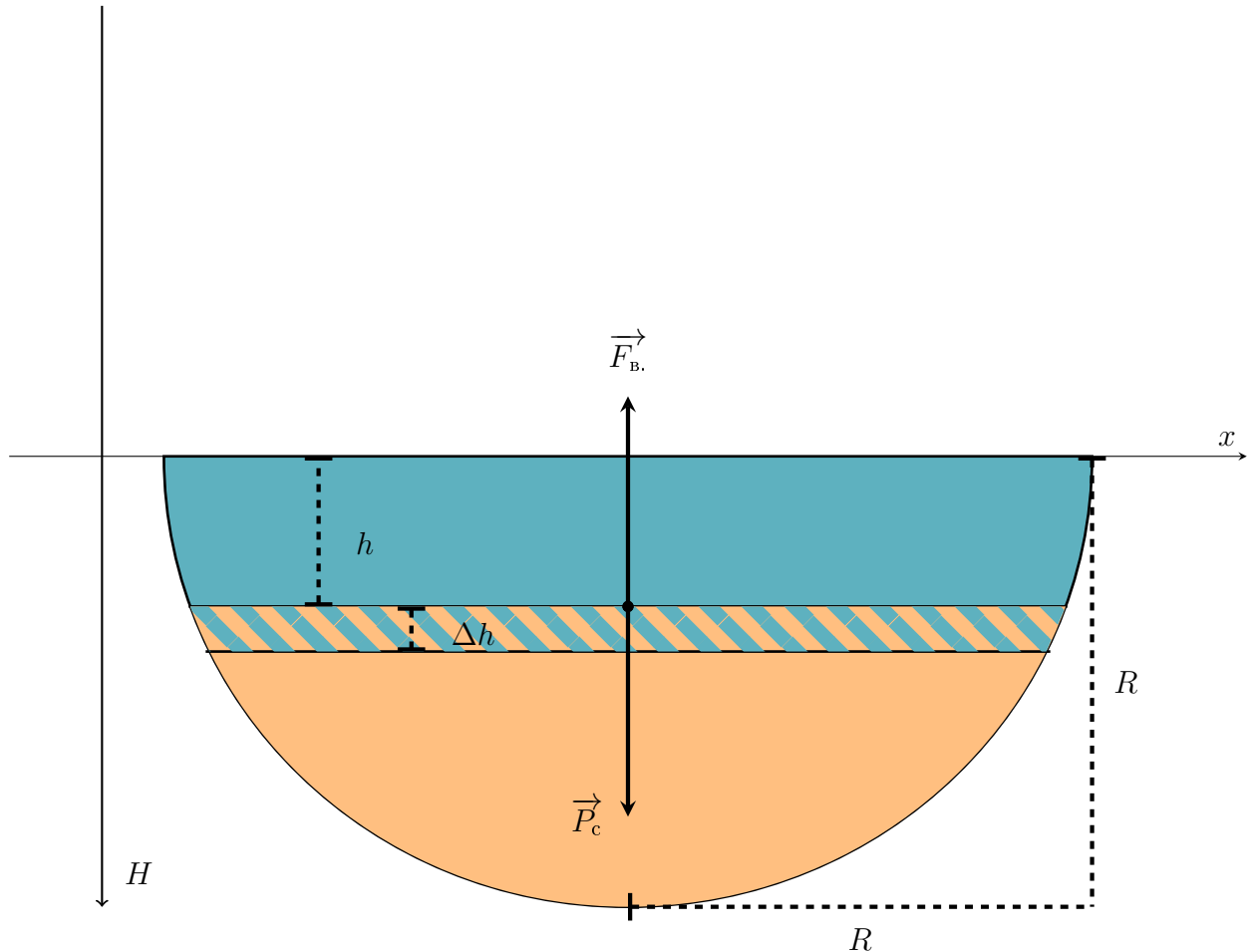


Рис. 14: К условию задачи - котёл с маслом.

### 5.1. Решение

**УСЛОВИЕ:**

$R = 2$  м - радиус котла

$h$  м - расстояние, на которое необходимо поднять текущий слой масла

$\rho = 0,9 \text{ г/см}^3 = 900 \text{ кг/м}^3$  - плотность

$F_b$ , Н - сила, необходимая для поднятия текущего слоя масла

$A$  Дж - работа, искомая величина

$d(h)$  - толщина одного слоя

$\Delta A$  - элементарная работа, необходимая для поднятия одного слоя масла

### Ход решения:

$$\Delta A(h) \approx d(A) = F_{\text{в.}} \cdot h = mgh = \rho Vgh = \rho\pi(R^2 - h^2)d(h)gh$$

Запишем интегральную сумму:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \rho\pi(R^2 - h_i^2)d(h)gh_i$$

Переходим к определенному интегралу:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \rho\pi(R^2 - h^2)hgd(h) = |\text{По т. Н.-Л.}| \\ &= \pi\rho g \left( \frac{R^2 h^2}{2} - \frac{h^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\ &= \pi\rho g \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{\pi\rho g R^4}{4} = \frac{3.14 * 900 * 10 * 16}{4} = 113040 \text{ Дж} = 113,04 \text{ кДж} \end{aligned}$$

Следовательно, работа, необходимая для выкачивания масла из котла, равна 113,04 кДж

## 6. Выводы

При выполнении расчётно-графической работы мы провели исследование интеграла функции от одной переменной. Наша команда проанализировала интеграл Римана и интегральную сумму с точки зрения их смысла как площади фигуры, ограниченной графиком функции, рассмотрела практические приложения интегралов в качестве методов для расчёта площади и объёмов фигур и тел, ограниченных кривыми. Мы также провели исследования несобственного интеграла, в том числе на сходимость, и воспользовались методом интегрирования при решении физической задачи.

## 7. Оценочный лист

Хороших	Дмитрий	Р3117	1.5	100%
Рамеев	Тимур	Р3118	1.5	100%