Национальный исследовательский университет ИТМО (Университет ИТМО)
Факультет программной инженерии и компьютерной техники (ФПИиКТ)

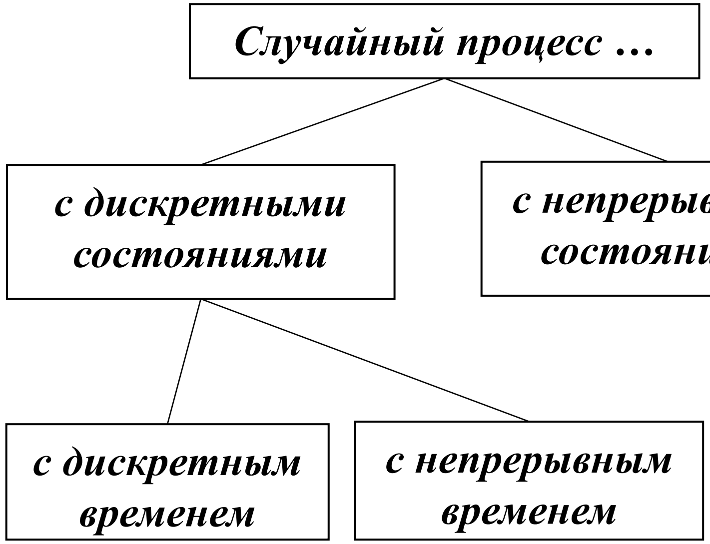
МОДЕЛИ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ (Численное моделирование)

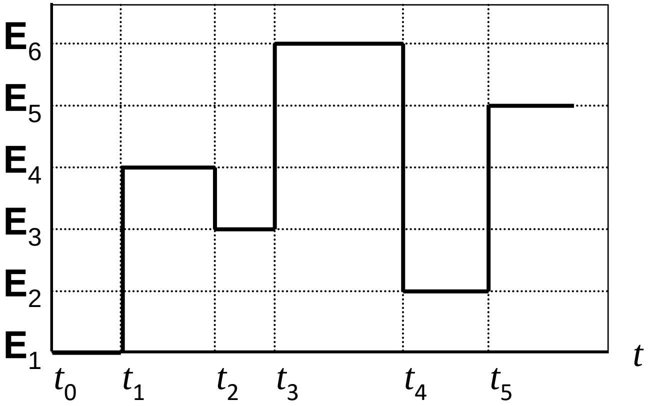
1. Подробное описание в учебном пособии «Основы моделирования дискретных систем», раздел 5

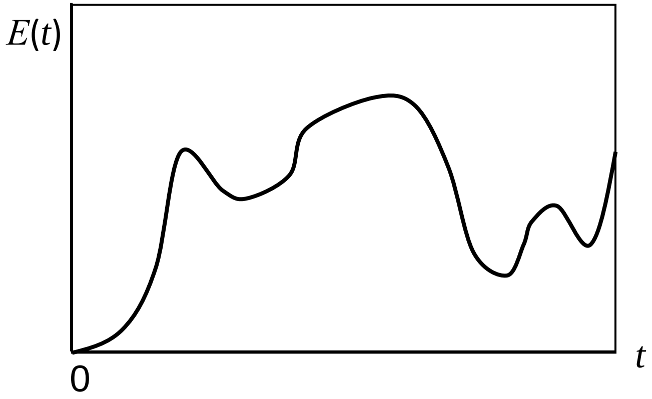
<u>Понятие случайного процесса</u>

Состояние, *событие*, *переход*.

Случайный процесс переходит из одного состояния в другое *заранее не известное состояние*.







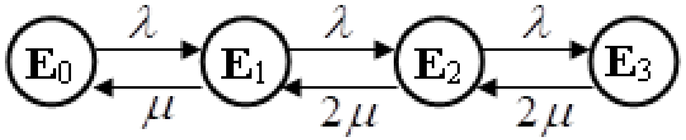
<u>Марковский случайный процесс</u> – для *исследования систем массового обслуживания* ***с накопителями ограниченной ёмкости***.

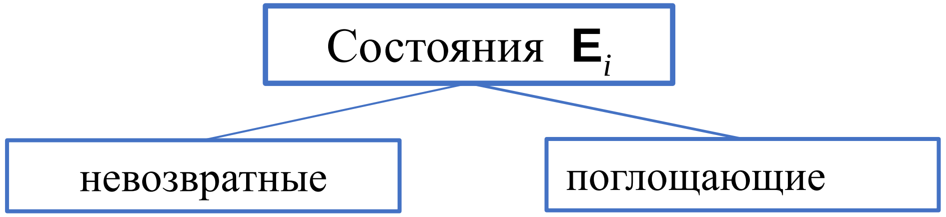
<u>Математическое описание марковских процессов</u> - система *дифференциальных* (в случае нестационарного режима) или *алгебраических* (для стационарного режима) уравнений, для решения которых применяются *численные методы*.

<u>Случайные процессы с дискретными состояниями</u>

<u>Граф переходов</u> (состояний)

<u>Размеченный</u> <u>граф переходов</u> – *вероятности переходов* (для процессов с дискретным временем) или *интенсивности переходов* (для процессов с непрерывным временем).





Транзитивный случайный процесс.

<u>Понятие марковского случайного процесса</u>

Марковский случайный процесс - вероятность любого состояния в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом процес оказался в этом состоянии.

Случайный процесс *с непрерывным временем* - ***марковский***, если интервалы времени между соседними переходами:

$$F_{ij}(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ij}\tau}.$$

<u>Замечательное **свойство экспоненциального распределения** (отсутствие последействия):</u> если время нахождения случайного процесса в некотором состоянии $\mathbf{E}_i$ до его перехода в другое состояние $\mathbf{E}_j$ распределено по экспоненциальному закону с параметром α_{ij} , то *интервал времени от любого случайного момента времени до момента перехода* в состояние **E** имеет *такое же экспоненциальное распределение с тем же параметром* α_{ij} .

Параметры марковского случайного процесса

1. Перечень состояний: $E_1,\ldots,E_n$

2. Матрица переходов, описывающая переходы случайного процесса между состояниями в виде:

- *матрицы вероятностей переходов* **Q** для процессов *с дискретным временем*;
- *матрицы интенсивностей переходов* **G** для процессов *с непрерывным временем*.

3. Начальные вероятности: $p_1(0),\ldots,\, p_n(0)$

1. Перечень состояний случайного процесса – этап *кодирования состояний*.

2. Матрица переходов:

1) ***матрицы вероятностей переходов*** (***стохастическая***) для процессов с дискретным временем:

$$\boxed{\mathbf{Q}=[q_{ij}\mid i,j=\overline{1,n}],} \qquad \boxed{0\le q_{ij}\le 1;\quad \sum_{j=1}^{n} q_{ij}=1 \qquad (i,j=\overline{1,n})}$$

2) ***Матрица интенсивностей переходов*** (***дифференциальная***) для процессов с непрерывным временем:

$$\boxed{\mathbf{G}=[g_{ij}\mid i,j=\overline{1,n}]} \quad \text{причем:} \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} g_{ij}=0 \quad (i=\overline{1,n}),} \quad \text{откуда} \quad g_{ii}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} g_{ij} \quad (i,j=\overline{1,n}).$$

g_{ij} - ***интенсивность перехода*** из состояния $\mathbf{E}_i$ в состояние $\mathbf{E}_j$:

$$\boxed{g_{ij}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{P_{ij}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \qquad (i,j=\overline{1,n};\ i\ne j).}$$

Вероятность перехода за время $\Delta\tau$ равна: $g_{ij}\Delta\tau \quad (i\ne j)$,

а вероятность двух и более переходов за это время имеет порядок $(\Delta\tau)^2$ и выше.

Марковский процесс

однородный (интенсивности не зависят от времени)	неоднородный (интенсивности изменяются со временем

В случае экспоненциального закона распределения времени нахождения случайного процесса в некотором состоянии вероятность: $P_{ij}(\Delta\tau) = \alpha_{ij}\Delta\tau$

Отсюда следует, что *интенсивность перехода представляет собой* ***параметр*** *экспоненциального распределения*:

$$g_{ij} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{P_{ij}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \alpha_{ij}$$

3. Начальные вероятности $p_1(0),\ldots, p_n(0)$ – вероятность того, что в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$

Начальные вероятности необходимы при изучении переходных процессов.

Основная характеристика марковского случайного процесса:

вероятность того, что в момент времени *t* система находится в состоянии $\mathbf{E}_i$: $p_i(t) = \Pr\{Z(t) = E_i\}$ $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$

вектор вероятностей состояний системы: $P(t) = \{p_1(t),\ldots,p_n(t)\},$ причем

$$0 \le p_i(t) \le 1; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$$

Методы расчета марковских моделей

Эргодическое свойство случайных процессов: $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = P(\infty) = \mathbf{P}$ → **установившийся (стационарный) режим**

$\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ ***- стационарные вероятности***

Случайный процесс *с дискретным временем* обладает *эргодическим свойством*, если матрица вероятностей переходов $\mathbf{Q} = [q_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}]$, **не является** *разложимой* или *периодической*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Транзитивный случайный процесс с *непрерывным временем* и *конечным* числом состояний, среди которых **нет невозвратных и поглощающих состояний**, всегда обладает эргодическим свойством:

$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i \qquad (i = \overline{1, n})$$

Марковские процессы с дискретным временем

Дано: $\mathbf{Q} = [q_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}], \quad p_1(0), \ldots, p_n(0)$

$$\begin{cases} p_1(1) = p_1(0)q_{11} + p_2(0)q_{21} + \ldots + p_n(0)q_{n1}; \\ p_2(1) = p_1(0)q_{12} + p_2(0)q_{22} + \ldots + p_n(0)q_{n2}; \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_n(1) = p_1(0)q_{1n} + p_2(0)q_{2n} + \ldots + p_n(0)q_{nn}, \end{cases}$$

$$p_j(1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0) q_{ij} \qquad (j = \overline{1, n})$$

$$p_j(2) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1) q_{ij} \qquad (j = \overline{1, n})$$

$$\ldots$$

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1)\, q_{ij} \qquad (j = \overline{1, n};\ k = 1, 2, \ldots).$$

$$k \to \infty$$

$$\boxed{p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{ij} \qquad (j = \overline{1, n}) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.}$$

Пример. Система состоит из двух устройств У$_1$ и У$_2$, каждое из которых может находиться состоянии выключено (**0**) и включено (**1**). В определённые моменты времени устройства могут включаться или выключаться.

Возможные состояния системы:

E_i	E_0	E_1	E_2	E_3
$У_1$	0	1	0	1
$У_2$	0	0	1	1

Матрица вероятностей переходов:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ \hline \mathbf{E}_0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ \mathbf{E}_1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ \mathbf{E}_2 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \mathbf{E}_3 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{array}$$

Начальные вероятности:

$$p_0(0) = 0{,}8;\quad p_1(0) = 0{,}2;\quad p_2(0) = 0;\quad p_3(0) = 0$$

Определить вероятности нахождения системы в том или ином состоянии на различные моменты времени и стационарные вероятности.

$$\begin{cases} p_0(1) = p_0(0)q_{00} + p_1(0)q_{10} + p_2(0)q_{20} + p_3(0)q_{30} = 0{,}1 \\ p_1(1) = p_0(0)q_{01} + p_1(0)q_{11} + p_2(0)q_{21} + p_3(0)q_{31} = 0{,}16 \\ p_2(1) = p_0(0)q_{02} + p_1(0)q_{12} + p_2(0)q_{22} + p_3(0)q_{32} = 0{,}42 \\ p_3(1) = p_0(0)q_{03} + p_1(0)q_{13} + p_2(0)q_{23} + p_3(0)q_{33} = 0{,}32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0(2) = p_0(1)q_{00} + p_1(1)q_{10} + p_2(1)q_{20} + p_3(1)q_{30} = 0{,}29 \\ p_1(2) = p_0(1)q_{01} + p_1(1)q_{11} + p_2(1)q_{21} + p_3(1)q_{31} = 0{,}148 \\ p_2(2) = p_0(1)q_{02} + p_1(1)q_{12} + p_2(1)q_{22} + p_3(1)q_{32} = 0{,}258 \\ p_3(2) = p_0(1)q_{03} + p_1(1)q_{13} + p_2(1)q_{23} + p_3(1)q_{33} = 0{,}304 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 = p_0q_{00} + p_1q_{10} + p_2q_{20} + p_3q_{30} = 0{,}5p_1 + 0{,}5p_2; \\ p_1 = p_0q_{01} + p_1q_{11} + p_2q_{21} + p_3q_{31} = 0{,}2p_0 + 0{,}4p_3; \\ p_2 = p_0q_{02} + p_1q_{12} + p_2q_{22} + p_3q_{32} = 0{,}5p_0 + 0{,}1p_1 + 0{,}6p_3; \\ p_3 = p_0q_{03} + p_1q_{13} + p_2q_{23} + p_3q_{33} = 0{,}3p_0 + 0{,}4p_1 + 0{,}5p_2; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = \frac{13}{55} \approx 0{,}236 \\ p_1 = \frac{9}{55} \approx 0{,}164 \\ p_2 = \frac{17}{55} \approx 0{,}309 \\ p_3 = \frac{16}{55} \approx 0{,}291 \end{cases}$$

Среднее число устройств, находящихся одновременно во включённом состоянии:

$$M = p_1 + p_2 + 2p_3 = 1{,}055$$

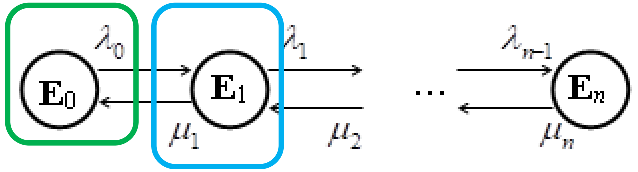
Марковские процессы с непрерывным временем

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, g_{ij} \quad (j=\overline{1,n};\ t>0) \qquad p_1(0),\ldots,\, p_n(0)$$

$$t \to \infty$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g_{ij} = 0 \quad (j=\overline{1,n}), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad \text{(СЛАУ)}$$

Пример. Марковский процесс с непрерывным временем - модель «гибели и размножения».



Правила составления уравнений для стационарных вероятностей состояний марковского процесса с непрерывным временем:

- по графу переходов;
- по матрице интенсивностей переходов.

$\mathbf{G} =$

$\mathbf{E}_i$	0	1	2	…	$n-1$	n
0	$-\lambda_0$	λ_0	0	…	0	0
1	μ_1	$-(\lambda_1+\mu_1)$	λ_1	…	0	0
2	0	μ_2	$-(\lambda_2+\mu_2)$	…	0	0
…	…	…	…	…	…	…
$n-1$	0	0	0	…	$-(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1})$	λ_{n-1}
n	0	0	0	…	μ_n	$-\mu_n$

$$\begin{cases} \boxed{\lambda_0 p_0} = \boxed{\mu_1 p_1} \\ (\lambda_1+\mu_1)p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \\ \ldots \\ (\lambda_k+\mu_k)p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} \\ \ldots \\ \mu_n p_n = \lambda_{n-1}p_{n-1} \\ p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1} = 0 \\ -(\lambda_1+\mu_1)p_1 + \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = 0 \\ \ldots \\ -(\lambda_k+\mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} = 0 \\ \ldots \\ -\mu_n p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} = 0 \\ p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1 \end{cases}$$

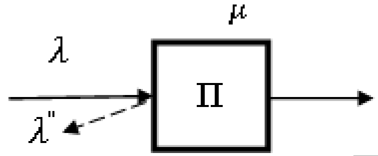
Среднее число особей в популяции: $M = \sum_{k=1}^{n} k p_k$

Марковские модели систем массового обслуживания

Этапы разработки марковской модели исследуемой системы:

1) *кодирование состояний* случайного процесса;
2) построение *размеченного графа переходов*;
3) формирование *матрицы интенсивностей переходов*;
4) составление *системы линейных алгебраических уравнений* для расчёта стационарных вероятностей состояний марковского процесса;
5) формирование математических зависимостей для расчета основных характеристик исследуемой системы на основе полученных значений стационарных вероятностей состояний марковского процесса.

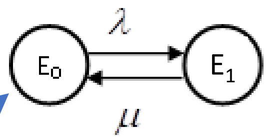
1. Одноканальная СМО без накопителя (M/M/1/0)



1) Описание системы
2) Предположения и допущения:
   - поток – простейший с интенсивностью λ ;
   - длительность обслуживания – эксп. с инт. $\mu = 1/b$;
   - ДБ – с отказами;
   - ДО – ОПП (FIFO)
3) Кодирование состояний случайного процесса

   $\mathbf{E_0}$ (k=0) и $\mathbf{E_1}$ (k=1)

4) Размеченный граф переходов случайного процесса
5) Матрица интенсивностей переходов
6) Система уравнений

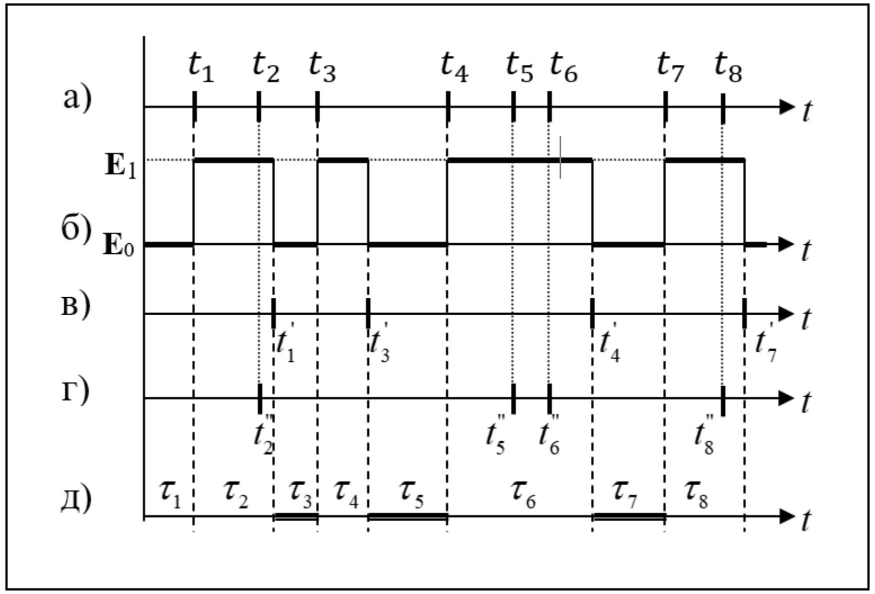


$$\mathbf{G} = \begin{array}{c|cc} \mathbf{E}_i & 0 & 1 \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & \mu & -\mu \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

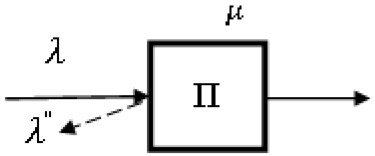
$$\boxed{p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{1+y}; \qquad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{y}{1+y}}$$

Диаграммы функционирования системы



1. <u>Одноканальная СМО без накопителя (M/M/1/0)</u>

(продолжение)



Расчет характеристик СМО и анализ свойств системы

1) нагрузка: $y = \lambda / \mu = \lambda b$

2) загрузка – *вероятность работы прибора*: $\rho = p_1$ $(\rho < y)$

3) коэффициент простоя системы: $\eta = p_0 = 1 - \rho$

4) среднее число заявок в системе: $m = p_1 = \rho$

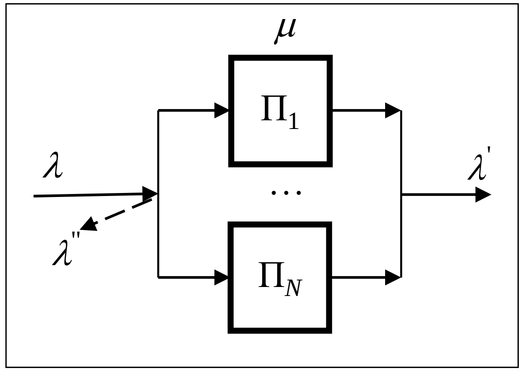
5) вероятность потери заявок: $\pi = p_1$

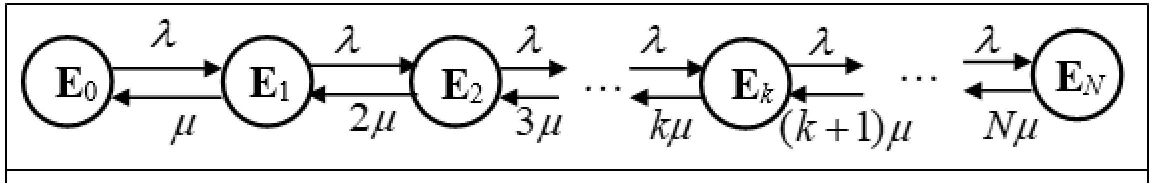
6) производительность системы: $\lambda' = (1 - \pi)\lambda$

7) интенсивность потока заявок, получивших отказ: $\lambda'' = \pi \lambda$

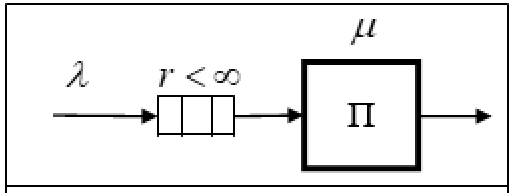
8) среднее время пребывания заявок в системе: $u = m / \lambda' = b$

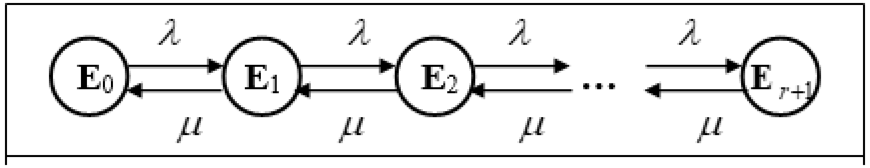
2. Многоканальная СМО без накопителя (M/M/N/0)



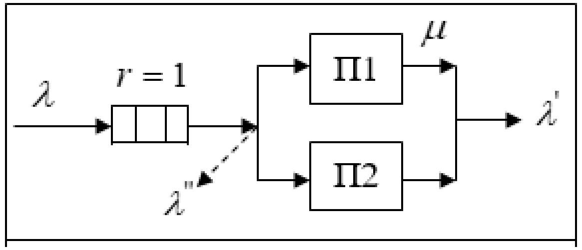


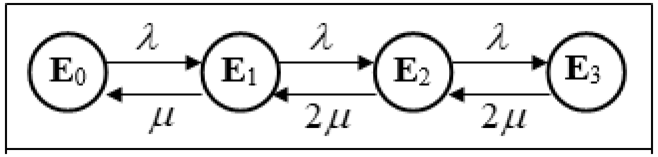
3. Одноканальная СМО с накопителем ограниченной емкости (M/M/1/r)





4. Многоканальная СМО накопителем ограниченной ёмкости (M/M/2/1)

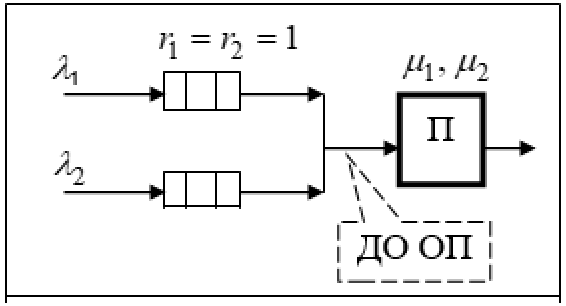




5. Одноканальная СМО с накопителем ограниченной емкости и с обслуживанием по закону Эрланга ($M/E_2/1/r$)

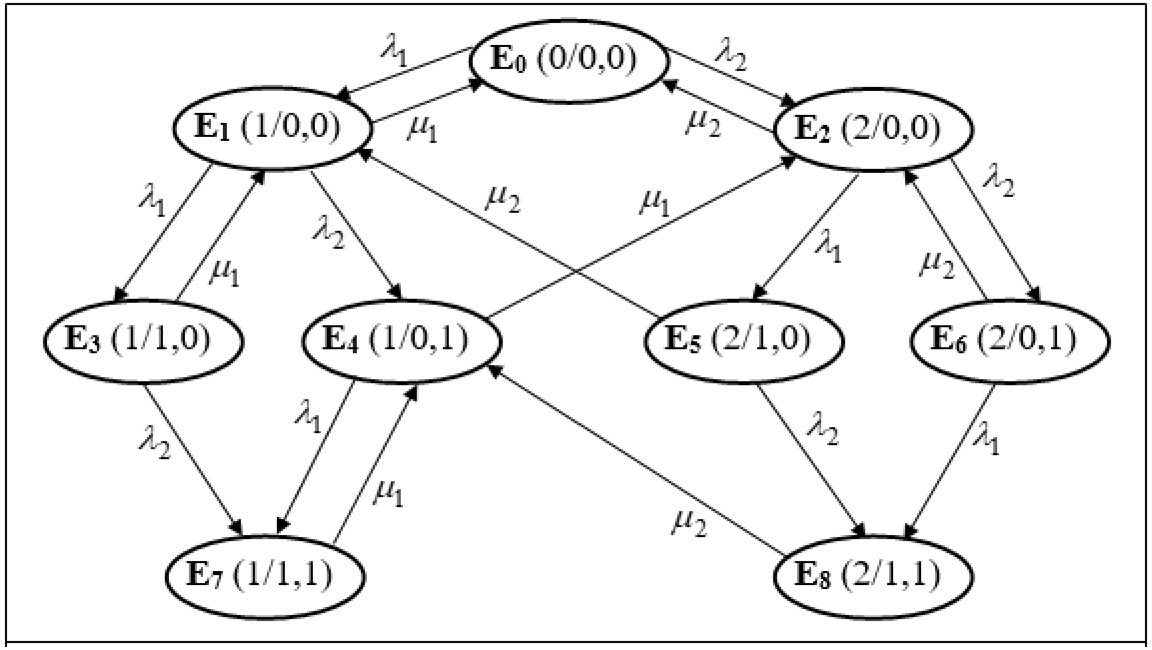
6. Одноканальная СМО с накопителем ограниченной емкости и с обслуживанием по гиперэкспоненциальному закону ($M/H_2/1/r$)

7. Одноканальная СМО с неоднородным потоком заявок и относительными приоритетами



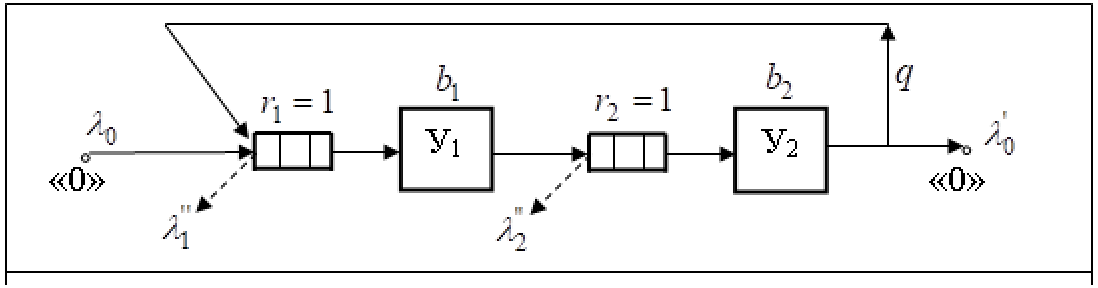
Кодирование состояний:

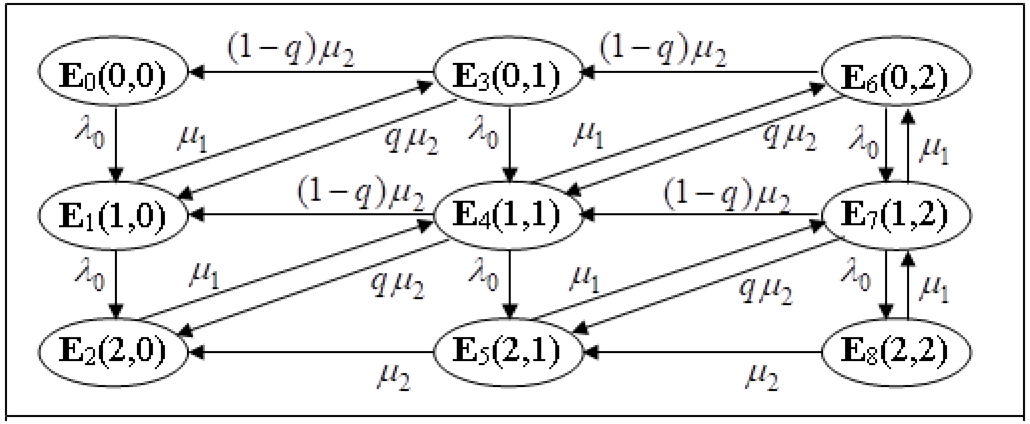
E_0: (0/0,0) – нет заявок;
E_1: (1/0,0) – на обслуживании заявка класса 1;
E_2: (2/0,0) – на обслуживании заявка класса 2;
E_3: (1/1,0) – на обслуживании заявка класса 1 и одна заявка класса 1 в первом накопителе;
E_4: (1/0,1) – на обслуживании заявка класса 1 и одна заявка класса 2 во втором накопителе;
E_5: (2/1,0) – на обслуживании заявка класса 2 и одна заявка класса 1 в первом накопителе;
E_6: (2/0,1) – на обслуживании заявка класса 2 и одна заявка класса 2 втором накопителе;
E_7: (1/1,1) – на обслуживании заявка класса 1 и по одной заявке каждого класса накопителях;
E_8: (2/1,1) – на обслуживании заявка класса 2, и по одной заявке каждого класса накопителях.



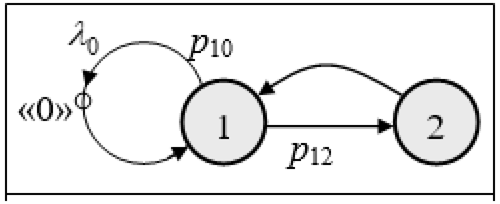
Марковские модели сетей массового обслуживания

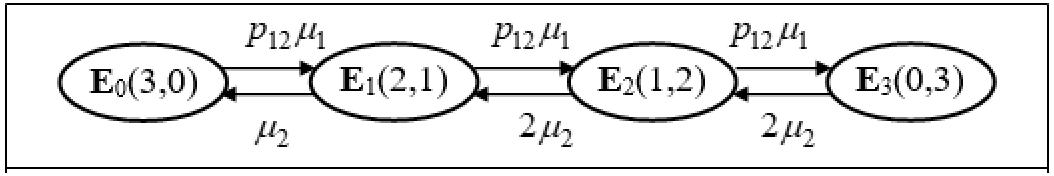
1. Разомкнутая экспоненциальная СеМО с накопителями ограниченной емкости



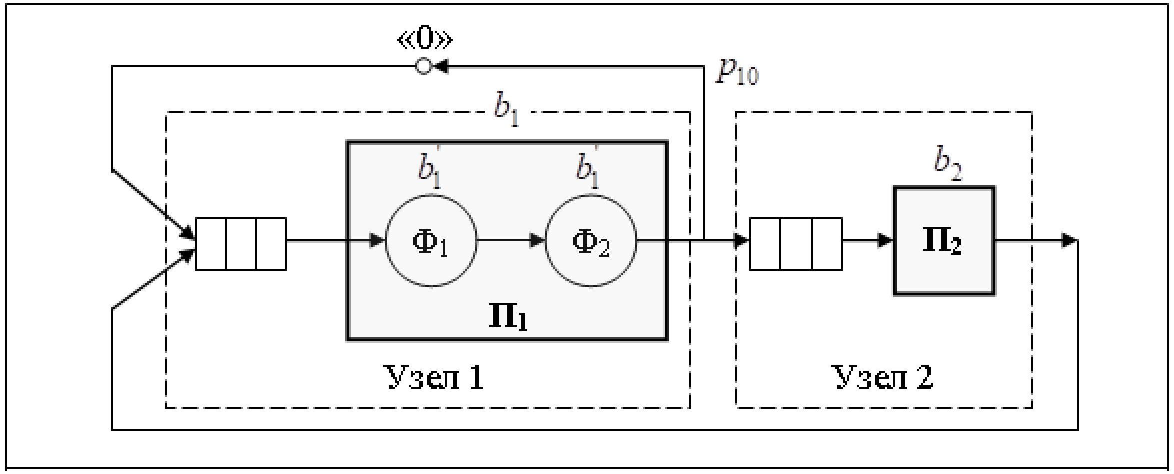


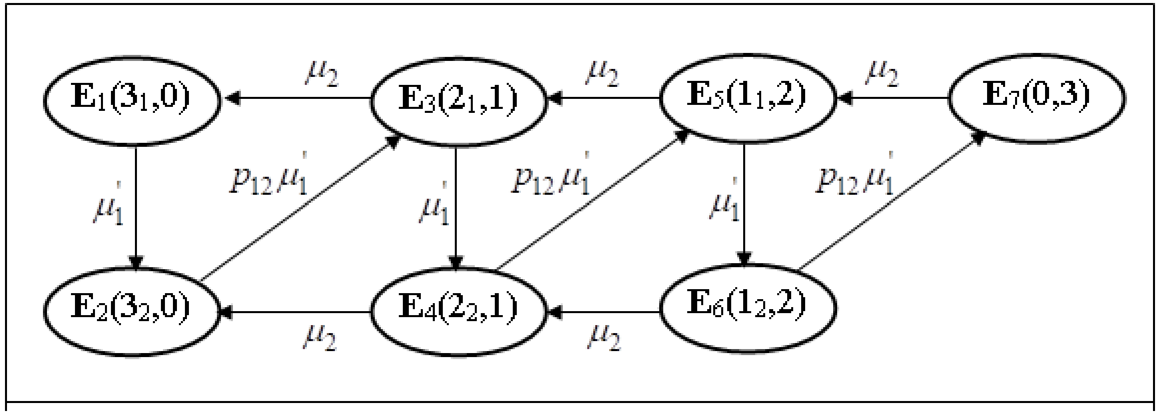
2. Замкнутая экспоненциальная СеМО





3. Замкнутая СеМО с эрланговским обслуживанием





4. Замкнутая СеМО с гиперэкспоненциальным обслуживанием