# Вариационный ряд

0.02, 0.02, 0.021, 0.021, 0.022, 0.022, 0.023, 0.023, 0.023, 0.025, 0.025, 0.025, 0.025, 0.026, 0.026, 0.026, 0.026, 0.027, 0.027, 0.027, 0.029, 0.029, 0.029, 0.029, 0.03, 0.03, 0.03, 0.03, 0.031, 0.031, 0.031, 0.031, 0.033, 0.033, 0.033, 0.033, 0.034, 0.034, 0.034, 0.034, 0.035, 0.035, 0.035, 0.035, 0.035, 0.037, 0.037, 0.037, 0.037, 0.037, 0.038, 0.038, 0.038, 0.038, 0.038, 0.039, 0.039, 0.039, 0.039, 0.039, 0.039, 0.041, 0.041, 0.041, 0.041, 0.042, 0.042, 0.042, 0.042, 0.043, 0.043, 0.043, 0.045, 0.045, 0.045, 0.046, 0.046, 0.046, 0.046, 0.047, 0.047, 0.047, 0.049, 0.049, 0.049, 0.049, 0.05, 0.05, 0.05, 0.051, 0.051, 0.051, 0.053, 0.053, 0.054, 0.054, 0.055, 0.055, 0.056, 0.056

# Размах варьирования и разделение на интервалы

## *Размах*:

$$x_{max} - x_{min} = 0.036$$

## *Величина интервала (по Стерджсу)*:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + log_2 n} = \frac{0.056 - 0.02}{1 + log_2 100} = 0.0047$$

## *Интервальные промежутки с частотами*

(0.0176 0.0224) : 6 (0.0224 0.0271) : 14 (0.0271 0.0318) : 12

(0.0318 0.0365) : 13 (0.0365 0.0412) : 20 (0.0412 0.0459) : 10

(0.0459 0.0506) : 14 (0.0506 0.0553) : 9 (0.0553 0.06) : 2

## *Выборочное среднее*

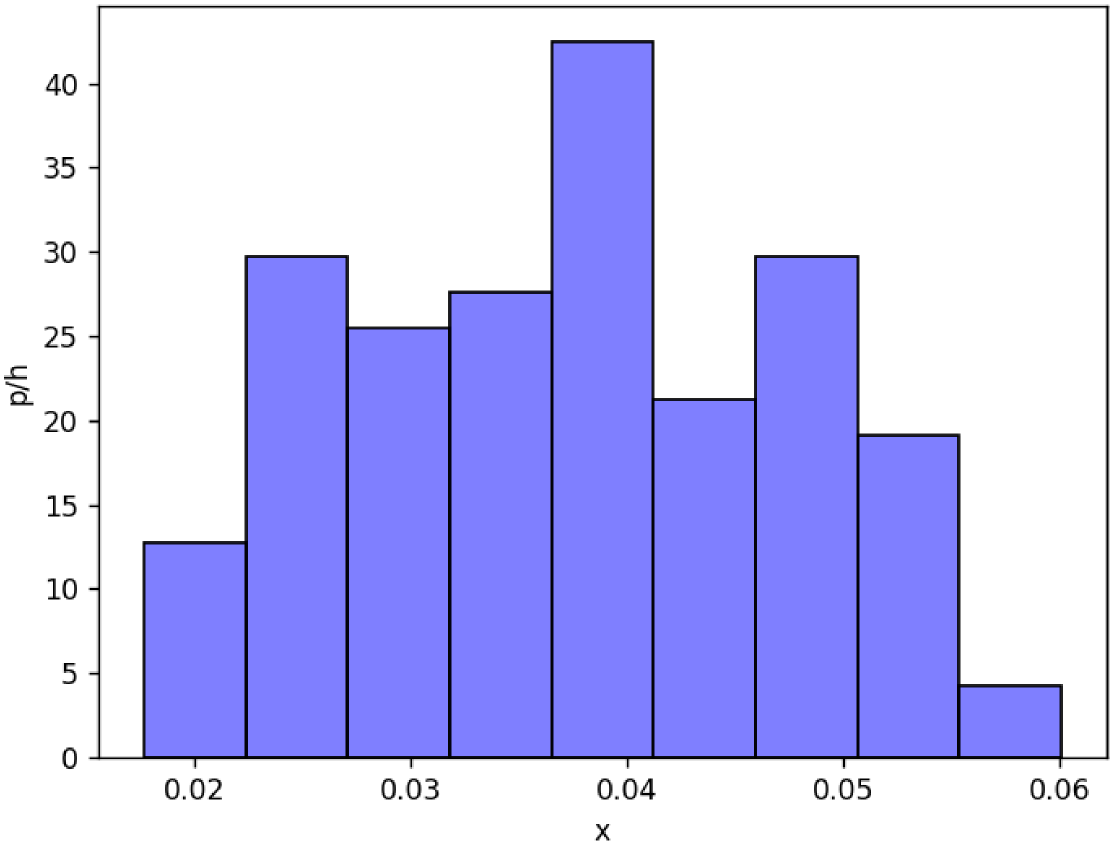
$$x_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = 0.03748$$

## *Выборочная дисперсия и среднеквадратичное*

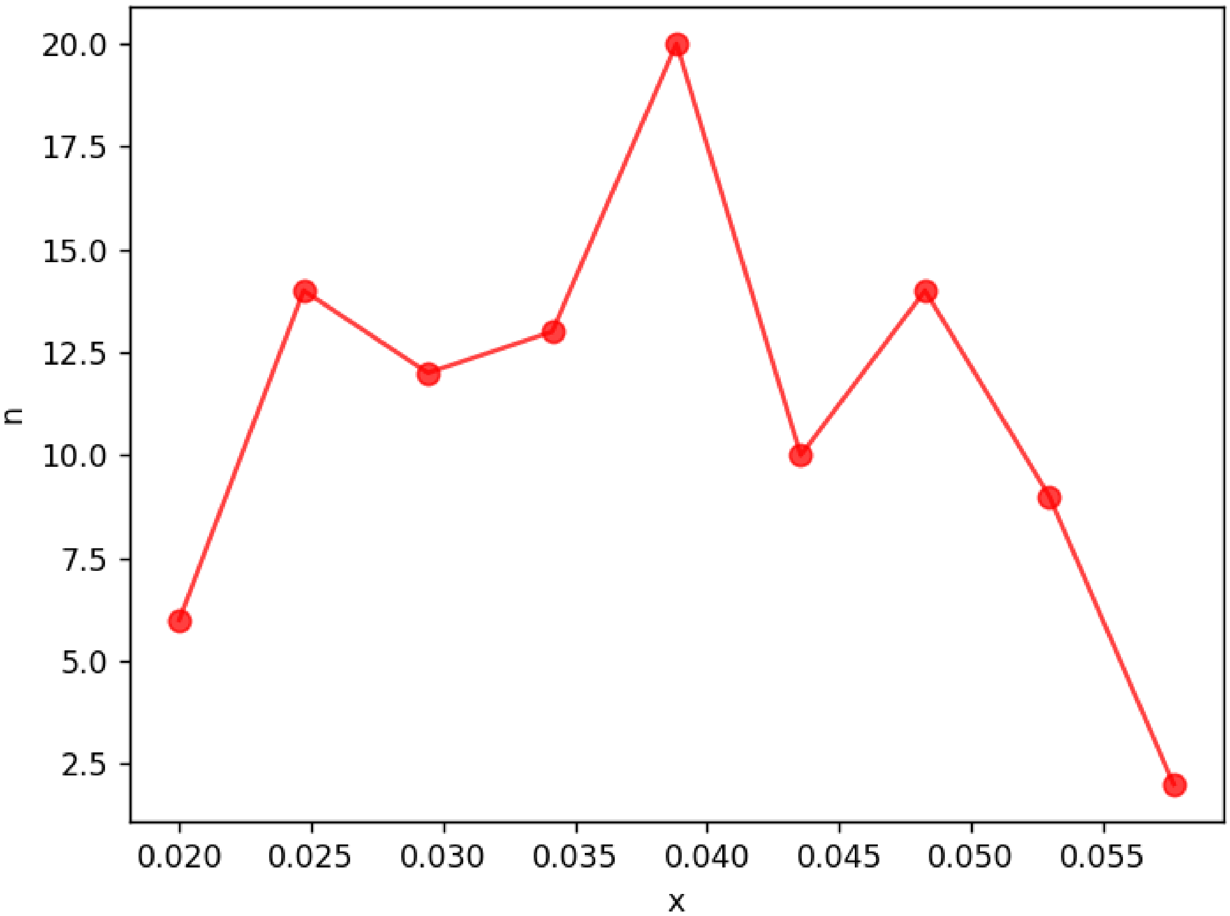
$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - x_в^2 = 0.0000942896 \qquad \widetilde{D}_в = \frac{n}{n-1} D_в = 0.0000952420$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = 0{,}0097102832 \qquad \tilde{\sigma}_в = \sqrt{\widetilde{D}_в} = 0{,}00975920078$$

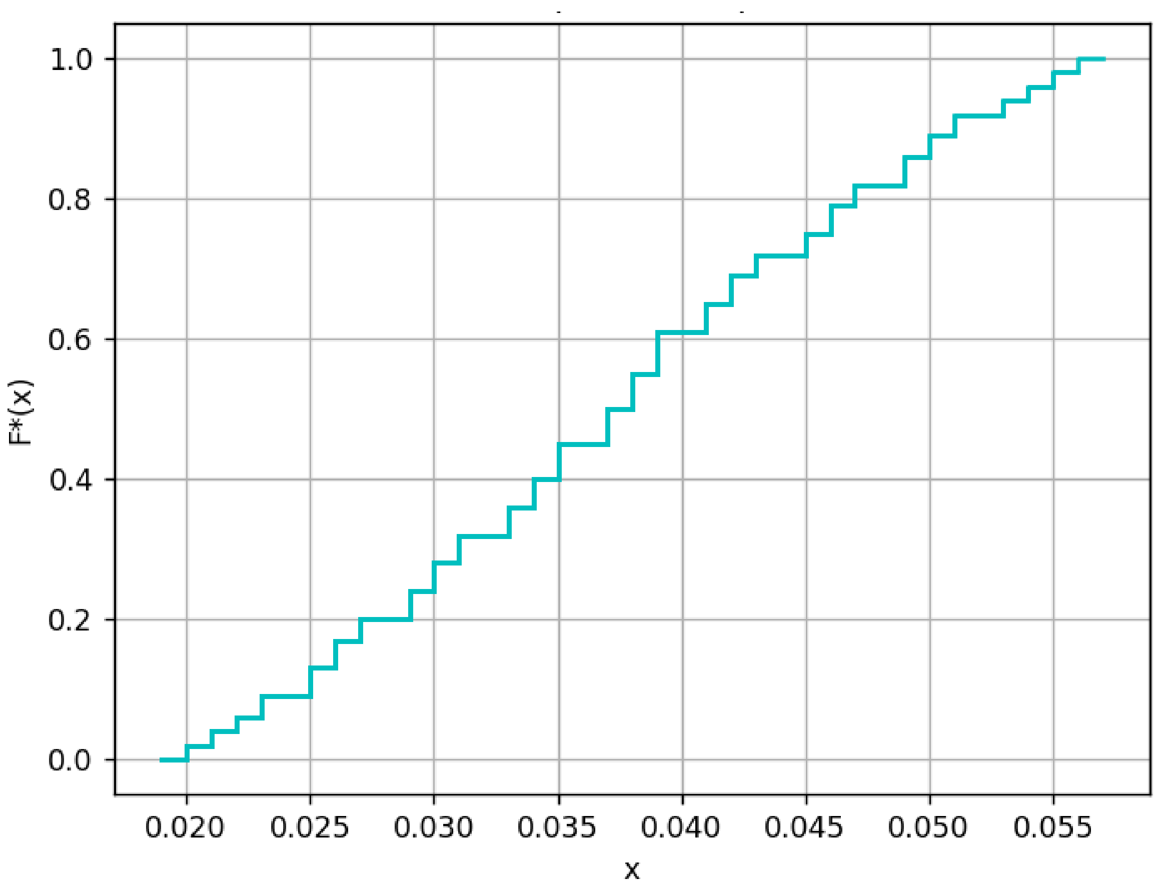
# Гистограмма относительных частот




# Полигон частот



# Эмпирическая функция




# Проверка гипотезы (критерий Пирсона)

Заметим, что частота последнего промежутка $n_9$ меньше 5, поэтому объединим 8-й и 9-й промежутки

| i | Границы интервала $x_i;\ x_{i+1}$ | | $x_i - x_в$ | $x_{i+1} - x_в$ | Границы интервала $z_i;\ z_{i+1}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_i$ | $x_{i+1}$ | | | $z_i = \dfrac{(x_i - x_в)}{\sigma_в}$ | $z_{i+1} = \dfrac{(x_{i+1} - x_в)}{\sigma_в}$ |
| 1 | 0.0176 | 0.0224 | −0.01988 | −0.01507 | −∞ | −1.55 |
| 2 | 0.0224 | 0.0271 | −0.01507 | −0.01038 | -1.55 | −1.07 |
| 3 | 0.0271 | 0.0318 | −0.01038 | −0.00568 | −1.07 | −0.58 |
| 4 | 0.0318 | 0.0365 | −0.00568 | −0.00098 | −0.58 | −0.1 |
| 5 | 0.0365 | 0.0412 | −0.00098 | 0.00372 | −0.1 | 0.38 |
| 6 | 0.0412 | 0.0459 | 0.00372 | 0.00842 | 0.38 | 0.87 |
| 7 | 0.0459 | 0.0506 | 0.00842 | 0.01312 | 0.87 | 1.35 |
| 8 | 0.0506 | 0.06 | 0.01312 | 0.02252 | 1.35 | ∞ |

Находим теоретические вероятности $P_i$ и теоретические частоты: $n'_i = nP_i = 100P_i$. Составляем расчетную таблицу

| i | Границы интервала $z_i;\ z_{i+1}$ | | $\Phi(z_i)$ | $\Phi(z_{i+1})$ | $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ | $n'_i = 100P_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $z_i$ | $z_{i+1}$ | | | | |
| 1 | $-\infty$ | $-1.55$ | $-0.5$ | $-0.4394$ | 0,0606 | 6.06 |
| 2 | -1.55 | $-1.07$ | $-0.4394$ | $-0.3577$ | 0,0817 | 8.17 |
| 3 | $-1.07$ | $-0.58$ | $-0.3577$ | $-0.2190$ | 0,1387 | 13.87 |
| 4 | $-0.58$ | $-0.1$ | $-0.2190$ | $-0.0398$ | 0,1792 | 17.92 |
| 5 | $-0.1$ | 0.38 | $-0.0398$ | 0.1480 | 0,1878 | 18.78 |
| 6 | 0.38 | 0.87 | 0.1480 | 0.3079 | 0,1599 | 15.99 |
| 7 | 0.87 | 1.35 | 0.3079 | 0.4115 | 0,1036 | 10.36 |
| 8 | 1.35 | $\infty$ | 0.4115 | 0.5 | 0,0885 | 8.85 |
| $\sum i$ | – | – | – | – | 1 | 100 |

Вычислим наблюдаемое значение **критерия Пирсона**. Для этого составим расчетную таблицу. Последние два столбца служат для контроля вычислений по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n$$

| i | $n_i$ | $n'_i$ | $n_i - n'_i$ | $(n_i - n'_i)^2$ | $\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ | $n_i^2$ | $\frac{n_i^2}{n'_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 6.06 | $-0.06$ | 0.0036 | 0.00059 | 36 | 5.94 |
| 2 | 14 | 8.17 | 5.83 | 33.9889 | 4.16 | 196 | 23.99 |
| 53 | 12 | 13.87 | $-1.87$ | 3.4969 | 0.252 | 144 | 10.38 |
| 4 | 13 | 17.92 | $-4.92$ | 24.2064 | 1.351 | 169 | 9.43 |
| 5 | 20 | 18.78 | 1.22 | 1.4884 | 0.079 | 400 | 21.30 |
| 6 | 10 | 15.99 | $-5.99$ | 35.8801 | 2.244 | 100 | 6.25 |
| 7 | 14 | 10.36 | 3.64 | 13.2496 | 1.279 | 196 | 18.92 |
| 8 | 11 | 8.85 | 2.15 | 4.6225 | 0.522 | 121 | 13.67 |
| $\sum i$ | 100 | 100 | – | – | 9.888 | – | 109.888 |

Контроль: $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n = 109.888 - 100 = 9.888$

### *Находим критическую точку*

$k = 8 - 2 - 1 = 5$

$\alpha = 0.025$ – уровень значимости ( вероятность ошибки первого рода, а именно отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна)

$\chi^2_{k,\alpha} = 12.8$

### *Сравнение*

<u>Так как</u> $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{k,\alpha}$ <u>оснований отвергать гипотезу нет</u>

# Доверительные интервалы

- Математическое ожидание покрывается доверительным интервалом:

  $$(x_{\text{в}} - \frac{\widetilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma; x_{\text{в}} + \frac{\widetilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma)$$

  Так как $\gamma = 0.9$ – доверительная вероятность и n = 100, то $t_\gamma = 1.65$ – критерий Стьюдента

  $t_\gamma$ рассчитывал по формуле $\Phi(t_\gamma) = \frac{1+\gamma}{2}$

  Тогда доверительный интервал примет вид:

  $(\mathbf{0.03587; 0.039090})$

- Доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения находится по формуле:

  $(\widetilde{\sigma_{\text{в}}}(1 - q);\ \widetilde{\sigma}_{\text{в}}(1 + q))$

  Для $\gamma = 0.9$ то $q = 0.143$

  Тогда доверительный интервал для среднеквадратичного пример вид:

  **(0.00836; 0.01115)**

$\gamma -$ вероятность попадания случайной величины в доверительный интервал

# Решение

| | ***j*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***i*** | ***X\Y*** | ***16*** | ***18*** | ***20*** | ***22*** | ***24*** | ***26*** | ***28*** | ***30*** | $m_x$ | $m_x x_i$ | $\sum m_{ij} y_i$ | $x_i^2 m_{ij}$ | $x_j \sum m_{ij} x_j$ |
| ***1*** | ***2,3*** | *3* | *2* | *4* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *9* | *20,7* | *164* | *47,61* | *377,2* |
| ***2*** | ***2,7*** | *0* | *5* | *6* | *1* | *0* | *0* | *0* | *0* | *12* | *32,4* | *232* | *87,48* | *626,4* |
| ***3*** | ***3,1*** | *0* | *0* | *6* | *9* | *4* | *0* | *0* | *0* | *19* | *58,9* | *414* | *182,59* | *1283,4* |
| ***4*** | ***3,5*** | *0* | *0* | *0* | *8* | *16* | *7* | *0* | *0* | *31* | *108,5* | *742* | *379,75* | *2597* |
| ***5*** | ***d*** | *0* | *0* | *0* | *0* | *8* | *6* | *5* | *0* | *19* | *74,1* | *488* | *288,99* | *1903,2* |
| ***6*** | ***4,3*** | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *4* | *5* | *1* | *10* | *43* | *274* | *184,9* | *1178,2* |
| | $m_y$ | *3* | *7* | *16* | *18* | *28* | *17* | *10* | *1* | *100* | *337,6* | *2314* | *1171,32* | *7965,4* |
| | $m_y y_i$ | *48* | *126* | *320* | *396* | *672* | *442* | *280* | *30* | *2314* | | | | |
| | $\sum m_{ij} x_i$ | *6,9* | *18,1* | *44* | *58,6* | *99,6* | *65,1* | *41* | *4,3* | *337,6* | | | | |
| | $y_j^2 m_{ij}$ | *768* | *2268* | *6400* | *8712* | *16128* | *11492* | *7840* | *900* | *54508* | | | | |
| | $y_j \sum m_{ij} x_i$ | *110,4* | *325,8* | *880* | *1289,2* | *2390,4* | *1692,6* | *1148* | *129* | *7965,4* | | | | |

*Вычисляем выборочные средние*

$$x_{\text{в}} = \frac{\sum\sum m_{ij}x_i}{n} = \frac{337.6}{100} = 3.376$$

$$y_{\text{в}} = \frac{\sum\sum m_{ij}y_i}{n} = \frac{2314}{100} = 23.14$$

*Вычисляем выборочные дисперсии*

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum m_{xi}x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum m_{xi}x_i\right)^2\right) = \frac{1}{99}\left(1171{,}32 - \frac{1}{100}337.6^2\right) = 0.32$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum m_{yj}y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum m_{yj}y_j\right)^2\right) = \frac{1}{99}\left(54508 - \frac{1}{100}2314^2\right) = 9.72$$

*Вычисляем корреляционный момент*

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum\sum m_{ij}x_i y_j - \frac{1}{n}\left(\sum m_{xi}x_i\right)\left(\sum m_{yj}y_j\right)\right) = \frac{1}{99}\left(7965{,}4 - \frac{1}{100}(337.6 \cdot 2314)\right) = 1.5488$$

Оценкой теоретической линии регрессии является эмпирическая линия регрессии, уравнение которой имеет вид:

$$\mathrm{y} = y_{\text{в}} + r_{xy}\frac{S_y}{S_x}(x - x_{\text{в}}) = y_{\text{в}} + \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2}\sqrt{S_y^2}} \cdot \frac{\sqrt{S_y^2}}{\sqrt{S_x^2}}(x - x_{\text{в}}) = 23.14 + \frac{1.5488}{0.32} \cdot (x - 3.376)$$

$$\mathbf{y = 4.84x + 6.8}$$

*Строим график:*