ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия и определения

Базовыми понятиями в теории вероятностей являются «*событие»*, «*вероятность*», *случайная величина»*.

1.1. Событие, вероятность

Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Вероятность события A может быть вычислена по формуле:

$\boxed{\mathrm{P}(A) = m / n}$,

где n – общее число взаимно исключающих друг друга опытов; m – число опытов, которые приводят к наступлению события A.

Вероятность может принимать значения от 0 до 1.

Событие, вероятность которого равна 0, называется ***невозможным***, а событие, вероятность которого равна 1, называется ***достоверным***.

Несколько событий образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта должно непременно появиться хотя бы одно из них.

Несколько событий называются ***несовместными*** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий называются ***равновозможными*** в данном опыте, если ни одно из этих событий не является объективно более возможным, чем другое.

События называются ***независимыми***, если появление одного из них не зависит от того, произошли ли другие события.

1.2. Случайная величина

Случайной величиной называется величина, которая может принимать то или иное значение, *неизвестное заранее*.

Случайные величины могут быть двух типов:

- **дискретные**, принимающие только отделённые друг от друга значения, которые можно пронумеровать;
- **непрерывные**, которые могут принимать любое значение из некоторого промежутка.

Примеры дискретных случайных величин: количество задач, выполняемых вычислительной системой (ВС) за день; количество обращений к внешней памяти в процессе решения одной задачи; количество пакетов, поступивших в маршрутизатор за секунду, и т.д.

Примеры непрерывных случайных величин: интервалы времени между моментами поступления в ВС запросов на решение задач или между моментами поступления пакетов в маршрутизатор; время выполнения задач в ВС и т.д.

Случайные величины обычно обозначают большими буквами, а их возможные значения – соответствующими малыми буквами. Например, случайная величина X – число обращений к накопителю на магнитном диске в процессе решения задачи в вычислительной системе – может принимать значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, ...

2. Законы распределений случайных величин

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчинена данному закону распределения.

2.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины X (дискретный закон распределения), принимающей значения $x_1, x_2, ..., x_n$, может быть задан одним из следующих способов:

- ***аналитически*** в виде *математического выражения*, отражающего зависимость вероятности от значения случайной величины:

$$p_i = f(x_i) \quad (i = \overline{1,n});$$

- ***таблично*** в виде *ряда распределения*:

Значения случайной величины X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Вероятности P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- ***графически*** в виде *многоугольника распределения* (рис.1).

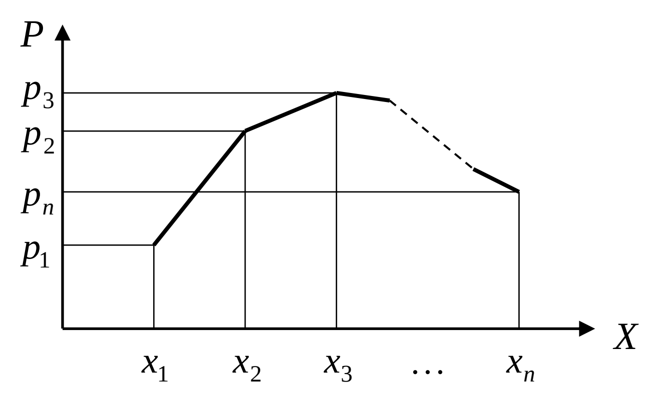


Рис.1. Многоугольник распределения

2.2. Закон распределения непрерывной случайной величины

Для непрерывной случайной величины невозможно задать закон распределения в том виде, в каком он задается для дискретной величины, поскольку непрерывная случайная величина имеет *бесконечное множест-*

во возможных значений, сплошь заполняющих некоторый промежуток, и вероятность появления любого конкретного значения *равна нулю*.

В связи с этим, для описания непрерывных случайных величин используется другой способ установления соответствия между значениями случайной величины и вероятностями их появления в виде функции распределения вероятностей.

Функция распределения вероятностей (или просто функция распределения) $F(x)$ случайной величины X представляет собой *вероятность* того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем некоторое заданное значение x:

$$\boxed{F(x) = \mathrm{P}(X < x)}. \qquad (1)$$

Функция распределения непрерывной случайной величины X может быть представлена:

- ***аналитически*** в виде *математического выражения* (1);
- ***графически*** в виде непрерывной функции (рис.2,а), отображающей зависимость (1), или в виде *гистограммы функции распределения* (рис.2,б), полученной экспериментально, например в процессе имитационного моделирования, и представляющей собой дискретный график, в котором по оси абсцисс откладываются частотные интервалы, охватывающие все возможные значения случайной величины, а по оси ординат – накопленная частота попадания случайной величины в эти частотные интервалы.

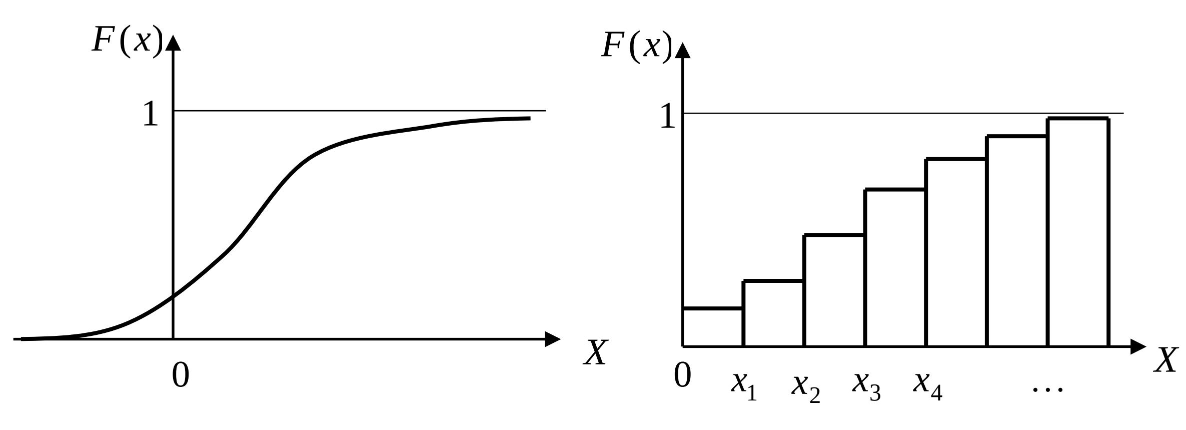


Рис.2. График (а) и гистограмма (б) функции распределения

Накопленная частота попадания в i-й частотный интервал определяется отношением количества случайных величин, значения которых находятся в интервале $(-\infty;\ x_i)$, к общему количеству случайных величин, полученных в процессе экспериментов.

Свойства функции распределения:

- функция распределения $F(x)$ есть *неубывающая* функция своего аргумента, то есть если $x_j > x_i$, то $F(x_j) \ge F(x_i)$;
- $F(-\infty) = 0$;
- $F(+\infty) = 1$.

Если случайная величина определена только в области положительных значений, ее функция распределения равна нулю на всем промежутке от минус бесконечности до нуля.

Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого интервала (a, b), определяется через функцию распределения как

$$\mathrm{P}(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

Функция распределения $F(x)$ является *универсальной* характеристикой случайной величины и существует как для *непрерывных*, так и для *дискретных* величин. Функция распределения дискретной случайной величины X, принимающей значения x_1, x_2, ..., x_i, ..., определяется как

$$F(x_m) = \mathrm{P}(X < x_m) = \sum_{i=1}^{m-1} p_i,$$

где p_i - вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i.

На практике вместо функции распределения чаще используют другой способ представления закона распределения непрерывной случайной величины в виде *плотности распределения вероятностей*, которая в отличие от функции распределения обладает большей наглядностью и позволяет получить представление о близости того или иного распределения к одному из известных теоретических распределений, имеющих аналитическое выражение.

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ определяется как *производная* от функции распределения $F(x)$ по x:

$$\boxed{f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}}.$$

Размерность плотности распределения $f(x)$ *обратна* размерности случайной величины, в то время как функция распределения $F(x)$, как всякая вероятность, есть величина *безразмерная*.

Плотность распределения непрерывной случайной величины X, как и функция распределения, может быть представлена:

- ***аналитически*** в виде *математического выражения* $y = f(x)$;
- ***графически*** в виде непрерывной функции (графика), отображающей зависимость $y = f(x)$ (рис.3,а), или в виде *гистограммы плотности распределения*, в которой в отличие от гистограммы функции распределения по оси ординат откладывается частота (или число) попаданий случайной величины в каждый из частотных интервалов (рис.3,б).

Свойства плотности распределения:

- плотность распределения есть функция *неотрицательная*: $f(x) \geq 0$;
- интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен *единице*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

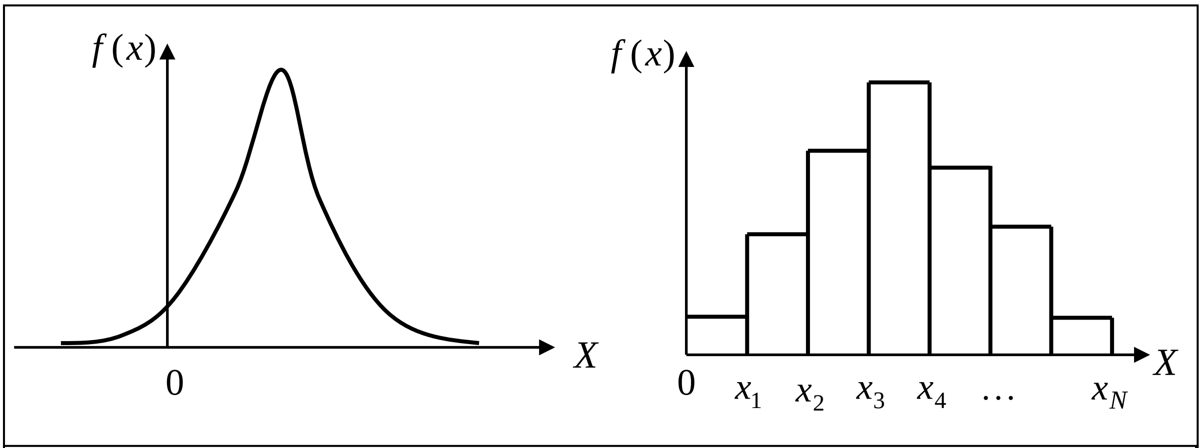


Рис.3. График (а) и гистограмма (б) плотности распределения

Функция и плотность распределения случайной величины однозначно связаны между собой. В частности, функция распределения определяется через плотность распределения следующим образом:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.} \qquad (2)$$

Тогда вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого интервала (a, b), может быть определена через плотность распределения как

$$\mathrm{P}(a < x < b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \;.$$

Таким образом, закон распределения непрерывной случайной величины (непрерывный закон распределения) может быть задан в виде:

- ***функции распределения*** $F(x)$ случайной величины X, называемой также ***интегральным законом распределения***;
- ***плотности распределения*** $f(x)$ случайной величины X, называемой также ***дифференциальным законом распределения.***

3. Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики позволяют выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины, например:

- среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины;
- степень разбросанности этих значений;
- асимметрию (или «скошенность») плотности распределения;
- «крутость», то есть островершинность или плосковершинность плотности распределения и так далее.

В теории вероятностей используются различные числовые характеристики, имеющие разное назначение и разные области применения. На практике наиболее часто применяются *начальные* и *центральные моменты* различных порядков, каждый из которых описывает то или иное свойство распределения. *Начальные моменты рассматриваются относительно начала координат*, а *центральные – относительно среднего значения*, то есть центра распределения.

Между числовыми моментами и законом распределения случайной величины существует взаимное соответствие, которое означает, что, зная закон распределения, можно вычислить любые моменты, число которых бесконечно. В то же время, зная конечное число начальных или центральных моментов, можно путем аппроксимации подобрать закон распределения случайной величины в виде функции или плотности распределения, причем, чем больше известно моментов, тем точнее аппроксимация закона распределения.

На практике обычно ограничиваются применением нескольких первых начальных или центральных моментов, что оказывается вполне достаточным для получения корректных результатов.

3.1. Начальные моменты

Положим, что случайная величина X описывается вероятностями p_1, p_2, ..., p_n появления значений x_1, x_2, ..., x_n, если X – дискретная величина, и плотностью распределения $f(x)$ $x \in (-\infty, +\infty)$, если X – непрерывная величина.

Начальный момент s-го порядка $\alpha_s[X]$ случайной величины X определяется следующим образом $(s = 1, 2, \ldots)$:

$$\alpha_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^s\, p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\, dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Первый начальный момент $\alpha_1[X]$ случайной величины X:

$$\boxed{\alpha_1[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx & \text{– для непрерывной случайной величины.} \end{cases}}$$

называется ***математическим ожиданием*** или *средним значением случайной величины* и обозначается $M[X]$: $M[X] = \alpha_1[X]$. Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, то есть показывает некоторое *среднее вероятностное* (не путать со средним арифметическим) значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Второй начальный момент $\alpha_2[X]$ случайной величины X характеризует *рассеивание*, то есть *разброс* (*удаленность*) значений случайной величины *относительно начала координат*, и имеет *размерность* квадрата случайной величины.

3.2. Центральные моменты

Центральный момент s-го порядка $\beta_s[X]$ случайной величины X определяется следующим образом $(s=1, 2, \dots)$:

$$\beta_s[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X])^s p_i & - \text{ для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^s f(x)\,dx & - \text{ для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Разность между значениями случайной величины и ее математическим ожиданием (X – M[X]) представляет собой отклонение случайной величины X от ее математического ожидания и называется ***центрированной случайной величиной***. Тогда центральный момент s-го порядка случайной величины X можно определить как математическое ожидание s-ой степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\beta_s[X] = \mathrm{M}[(X - \mathrm{M}[X])^s].$$

Для любой случайной величины *центральный момент первого порядка равен нулю*, так как математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю.

Второй центральный момент называется ***дисперсией*** случайной величины и обозначается D[X]: $\mathrm{D}[X] = \beta_2[X]$.

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$\boxed{\mathrm{D}[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X])^2 p_i & - \text{ для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^2 f(x)\,dx & - \text{ для непрерывной случайной величины.} \end{cases}}$$

Можно показать, что дисперсия и второй начальный момент связаны следующей зависимостью:

$$\boxed{\mathrm{D}[X] = \alpha_2[X] - (\mathrm{M}[X])^2}\ . \qquad (3)$$

Дисперсия случайной величины, как и второй начальный момент, характеризует разброс значений случайной величины, но, в отличие от второго начального момента, *относительно математического ожидания*, и имеет размерность квадрата случайной величины.

При решении различных задач удобно пользоваться характеристикой разброса, *размерность которой совпадает с размерностью случайной* *величины*. Такой характеристикой является ***среднеквадратическое отклонение*** $\sigma[X]$: $\boxed{\sigma[X]=\sqrt{\mathrm{D}[X]}}$.

В качестве *безразмерной* характеристики разброса случайных величин, определенных в области положительных значений, часто используют ***коэффициент вариации*** $\nu[X]$, который определяется как отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию:

$$\boxed{\nu[X]=\frac{\sigma[X]}{\mathrm{M}[X]}}$$

при условии, что $\mathrm{M}[X]>0$.

Применение числовых характеристик существенно облегчает решение многих вероятностных задач, в частности, при решении сложных задач, когда использование законов распределений приводит к громоздким выкладкам и не позволяет получить результаты в явном виде. Очень часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя одними числовыми характеристиками. Если в задаче фигурирует большое количество случайных величин, то для исчерпывающего суждения о результирующем законе распределения не требуется знать законы распределения отдельных случайных величин, фигурирующих в задаче, а достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики этих величин.

Альтернативой случайной величине является неслучайная величина, называемая **детерминированной**. Детерминированную величину $X=x$ можно рассматривать как случайную, которая с вероятностью $p=1$ принимает одно и то же значение x.

4. Типовые распределения случайных величин

Моделирование технических систем с дискретным характером функционирования предполагает применение разных законов распределений, как дискретных, так и непрерывных случайных величин. Ниже рассматриваются типовые законы распределений случайных величин, широко используемые в моделях массового обслуживания.

В качестве законов распределений **дискретных** случайных величин наиболее широко используются:

- распределение Пуассона;
- геометрическое распределение.

Поскольку в математических моделях массового обслуживания непрерывной случайной величиной обычно является *время*, наибольший интерес представляют законы распределений *непрерывных* случайных величин, определенных в области положительных значений:

- равномерный;
- экспоненциальный;
- Эрланга;

- Эрланга нормированный;
- гиперэкспоненциальный;
- гиперэрланговский.

4.1. Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность $P(X=k)$ того, что она примет определенное значение $x_k = k$ выражается формулой:

$$p_k = \Pr(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots), ,$$

где a – некоторая положительная величина, называемая *параметром* распределения Пуассона.

На рис.4 показаны многоугольники распределения Пуассона для трех значений параметра распределения: a=0,5; a=1; a=2.

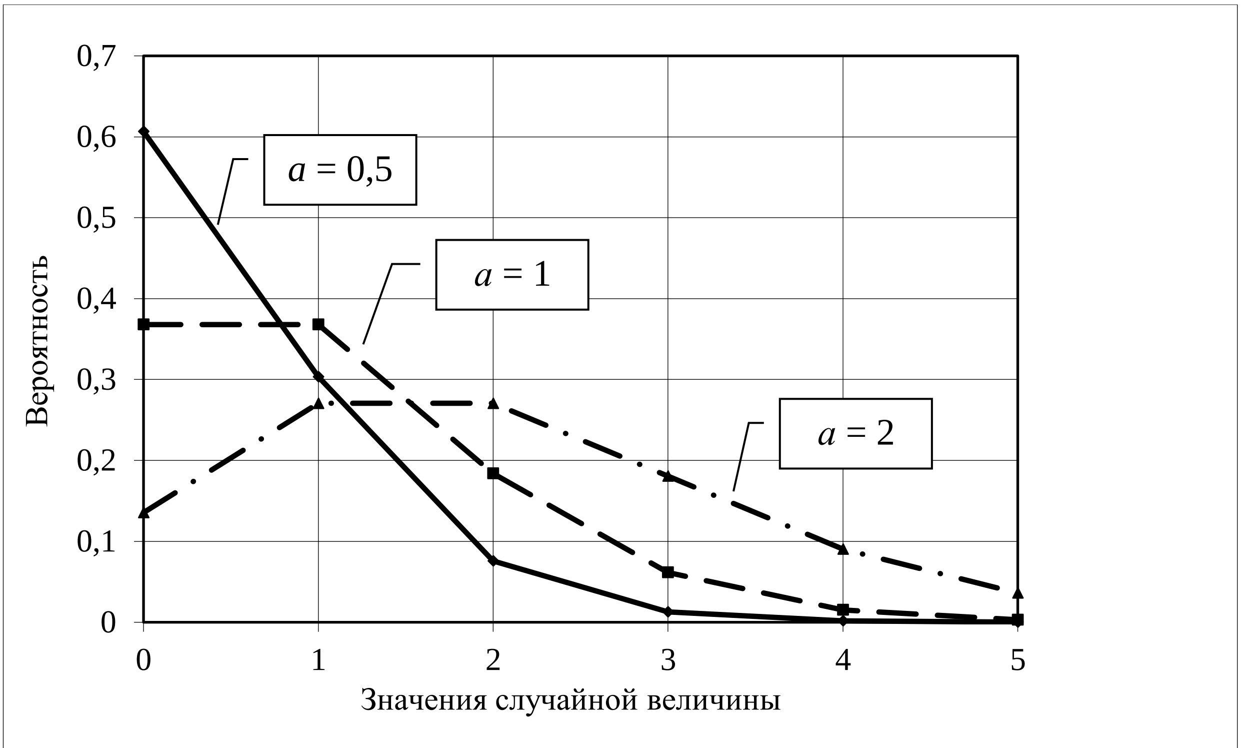


Рис.4. Многоугольники распределения Пуассона

4.2. Геометрическое распределение

Распределение дискретной случайной величины X=k вида

$$p_k = \Pr(X = k) = \rho^k (1 - \rho) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots), ,$$

где ρ - *параметр* распределения (0 < ρ < 1), называется ***геометрическим***.

Это же распределение может быть записано в несколько ином виде, если параметр ρ заменить параметром $\gamma = 1 - \rho$:

$$p_k = \gamma (1 - \gamma)^k \qquad (0 < \gamma < 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots)..$$

На рис. 5 показаны многоугольники геометрического распределения для трех значений параметра: $\gamma = 0{,}2$; $\gamma = 0{,}5$; $\gamma = 0{,}8$.

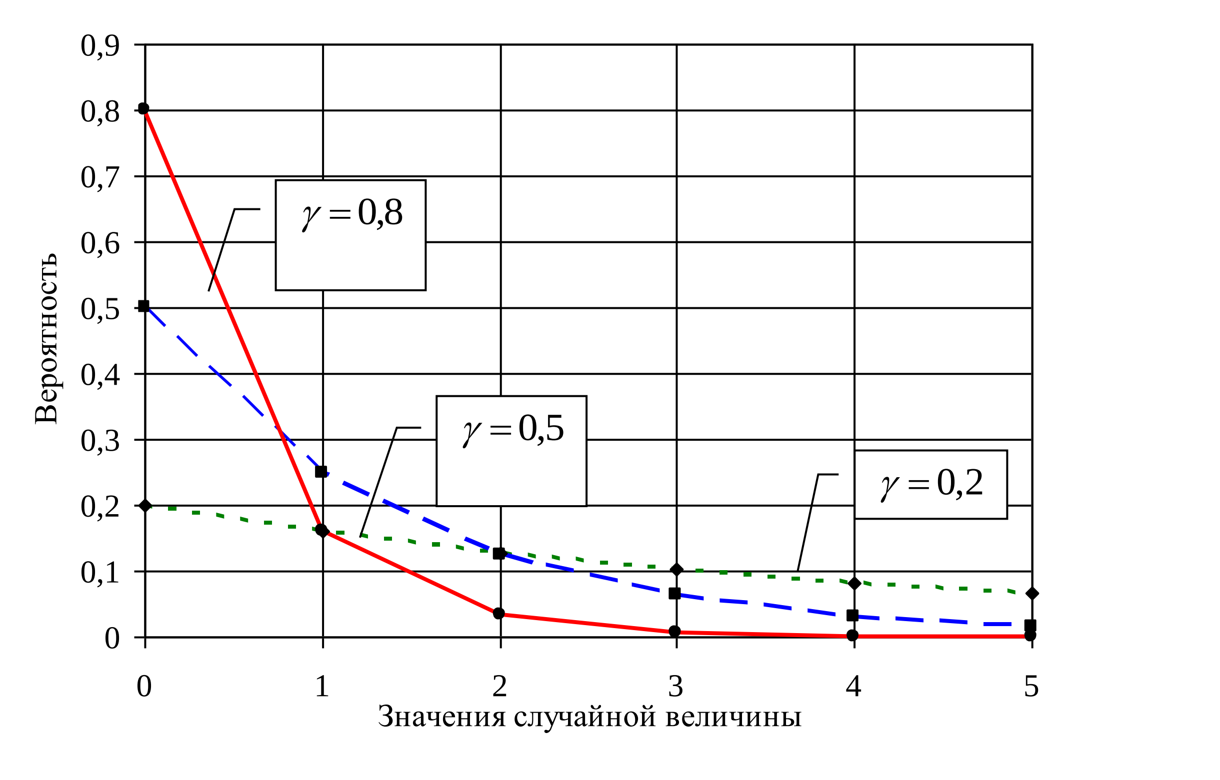


Рис.5. Многоугольники геометрического распределения

4.3. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X распределена ***равномерно*** в интервале $(a; b)$, где $a<b$, если функция $F(x)$ и плотность $f(x)$ распределения соответственно имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x < b; \\ 1 & \text{при} \quad x > b; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x < b; \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

На рис.6 показаны функция и плотность равномерного распределения.

4.4. Экспоненциальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X, принимающая положительные значения в бесконечном интервале $(0; +\infty)$, распределена по ***экспоненциальному*** (***показательному***) ***закону***, если функция $F(x)$ и плотность $f(x)$ распределения соответственно имеют вид:

$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \qquad f(x) = \alpha e^{-\alpha x},} \tag{7}$$

где $\alpha > 0$ – параметр распределения; $x \geq 0$ – непрерывная случайная величина.

Коэффициент вариации экспоненциального распределения не зависит от параметра α и **всегда равен единице**: $\nu_{эксп}[X] = 1$.

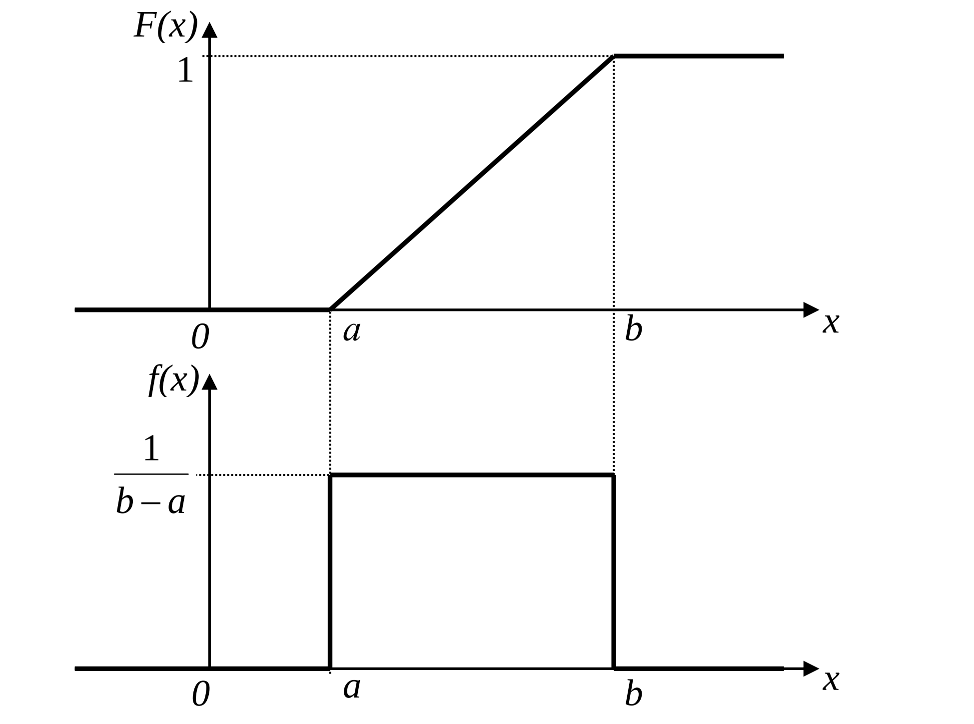


Рис.6. Функция и плотность равномерного распределения

На рис.7 показаны функция и плотность экспоненциального распределения для трех значений параметра: $\alpha = 0{,}5$; $\alpha = 1$; $\alpha = 2$.

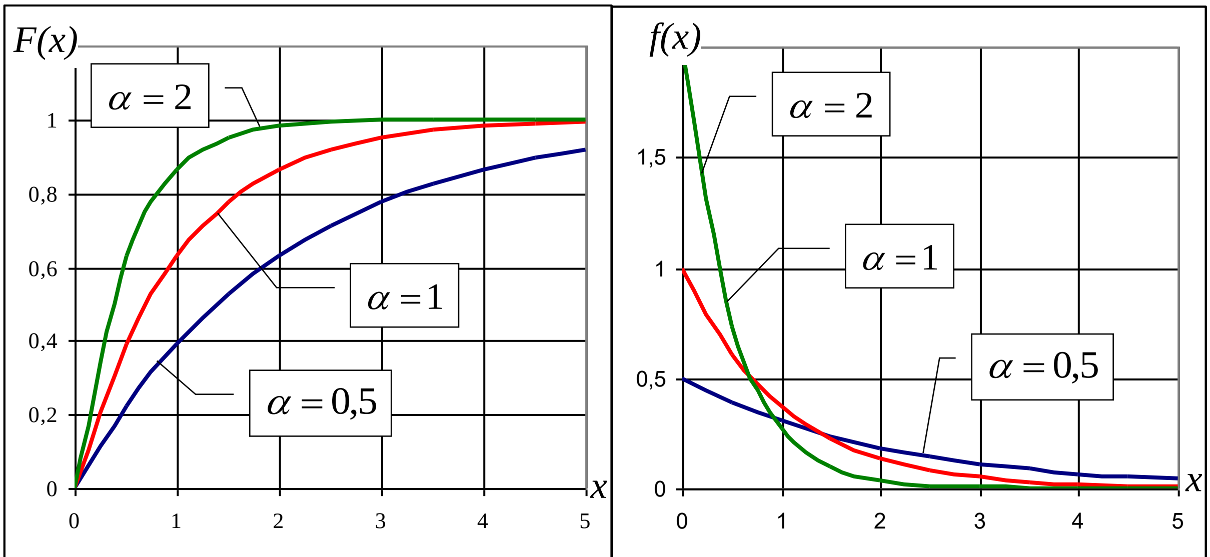


Рис.7. Функция и плотность экспоненциального распределения

Экспоненциальное распределение широко применяется при описании случайных процессов, протекающих в моделях массового обслуживания. Это объясняется тем, что экспоненциальное распределение обладает замечательным свойством, благодаря которому для многих моделей массового обслуживания удается получить достаточно простые аналитические результаты в явном виде. С этим же распределением тесно связан особый класс дискретных случайных процессов, называемых марковскими процессами, в которых переходы между состояниями не зависят от предыстории процесса и определяются только состоянием процесса в данное конкретное время. Это свойство иногда называют свойством отсутствия памяти у экспоненциального распределения (точнее, у экспоненциально распределенных случайных величин), а в теории массового обслуживания используется термин «отсутствие последействия».

Возможность получения сравнительно простых аналитических результатов при использовании предположения об экспоненциальном характере случайных процессов обусловила появление рассматриваемых ниже специфических законов распределений, представляющих собой композиции экспоненциальных распределений и позволяющих упростить решение многих задач, связанных с исследованием моделей массового обслуживания. К ним, в частности, относятся следующие распределения: Эрланга, гиперэкспоненциальное, гиперэрланговское.

4.5. Распределение Эрланга

Распределением Эрланга k-го порядка называется распределение, описывающее непрерывную случайную величину X, принимающую положительные значения в интервале $(0; +\infty)$ и представляющую собой *сумму k независимых случайных величин, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону с параметром α.* Функция и плотность распределения Эрланга k-го порядка имеют вид:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^i}{i!}; \qquad f_k(x) = \frac{\alpha (\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x},$$

где α и k – положительные параметры распределения ($\alpha \geq 0; k = 1, 2, \ldots$); $x \geq 0$ – непрерывная случайная величина.

На рис.8 показаны плотности распределения Эрланга при $\alpha = 1$ для трех значений параметра: $k = 1$; $k = 2$; $k = 4$.

При $k = 1$ распределение Эрланга вырождается в экспоненциальное, а при $k \to \infty$ – приближается к *нормальному распределению*.

Коэффициент вариации распределения Эрланга зависит от параметра k и принимает значения **меньшие или равное единице**:

$$\nu_{Эk}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Отметим, что математическое ожидание распределения Эрланга зависит от значения параметра k, что создаёт определенные проблемы при аппроксимации реальных распределений законом Эрланга. Эти проблемы отсутствуют при аппроксимации нормированным распределением Эрланга.

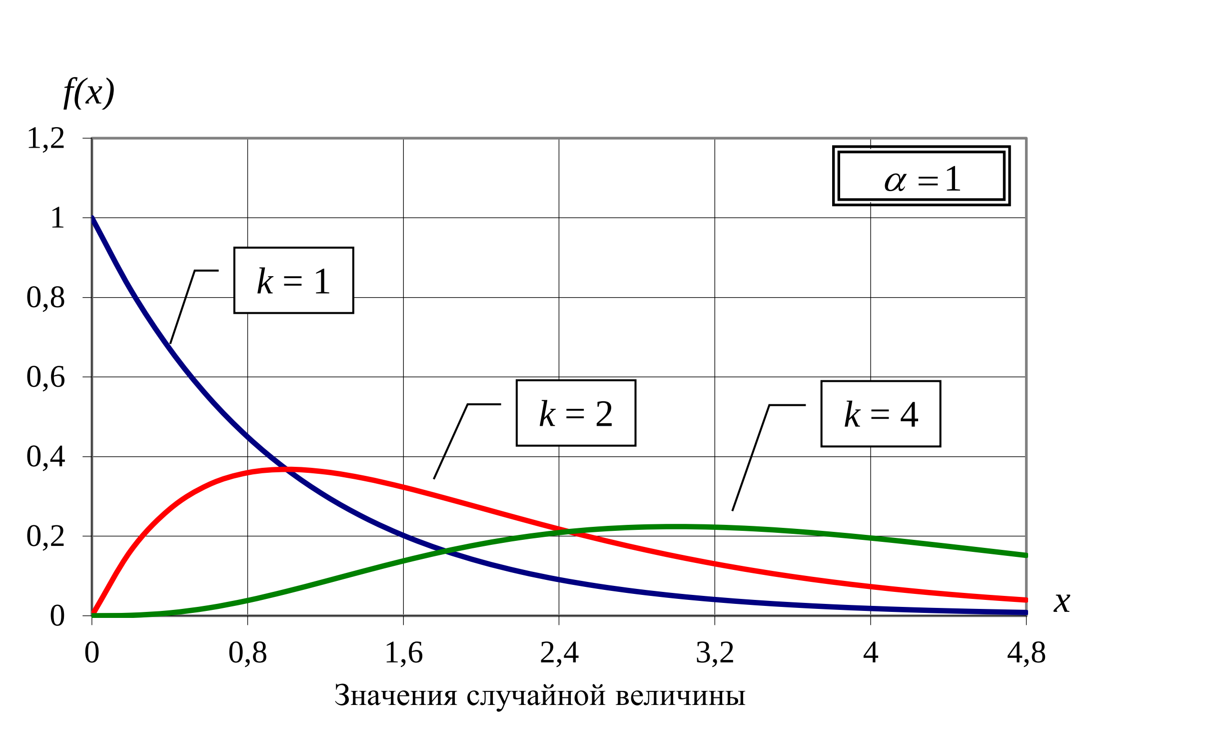


Рис.8. Плотность распределения Эрланга

4.6. Нормированное распределение Эрланга

Нормированное распределение Эрланга представляет собой распределение суммы k независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону с параметром $k\alpha$, зависящим от k. Другими словами, суммируются k экспоненциально распределенных случайных величин, каждая из которых имеет математическое ожидание в k раз меньшее, чем исходное математическое ожидание реального распределения, что приводит к независимости математического ожидания нормированного распределения Эрланга от параметра k.

Математические выражения для функции и плотности нормированного распределения Эрланга:

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\alpha x)^i}{i!}; \qquad f_k(x) = \frac{k\alpha (k\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\alpha x},$$

Коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга так же, как и ненормированного, зависит от параметра k и принимает значения **меньшие или равное единице**: $\nu_{нЭк}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \le 1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

На рис.9 показаны плотности распределения Эрланга при $\alpha = 1$ для трех значений параметра: $k = 1$; $k = 2$; $k = 16$.

Нормированное распределение Эрланга при $k \to \infty$, в отличие от простого распределения Эрланга, приводит к *детерминированной величине* $1/\alpha$.

4.7. Гиперэкспоненциальное распределение

В тех случаях, когда некоторое реальное распределение непрерывной случайной величины, принимающей неотрицательные значения, имеет **коэффициент вариации больше единицы**, для его аппроксимации может использоваться гиперэкспоненциальное распределение.

Как следует из названия, гиперэкспоненциальное распределение некоторым образом связано с экспоненциальным и представляет собой аддитивную смесь разных экспоненциальных распределений. Процесс формирования случайных величин с гиперэкспоненциальным распределением из экспоненциально распределенных случайных величин может быть представлен следующим образом.

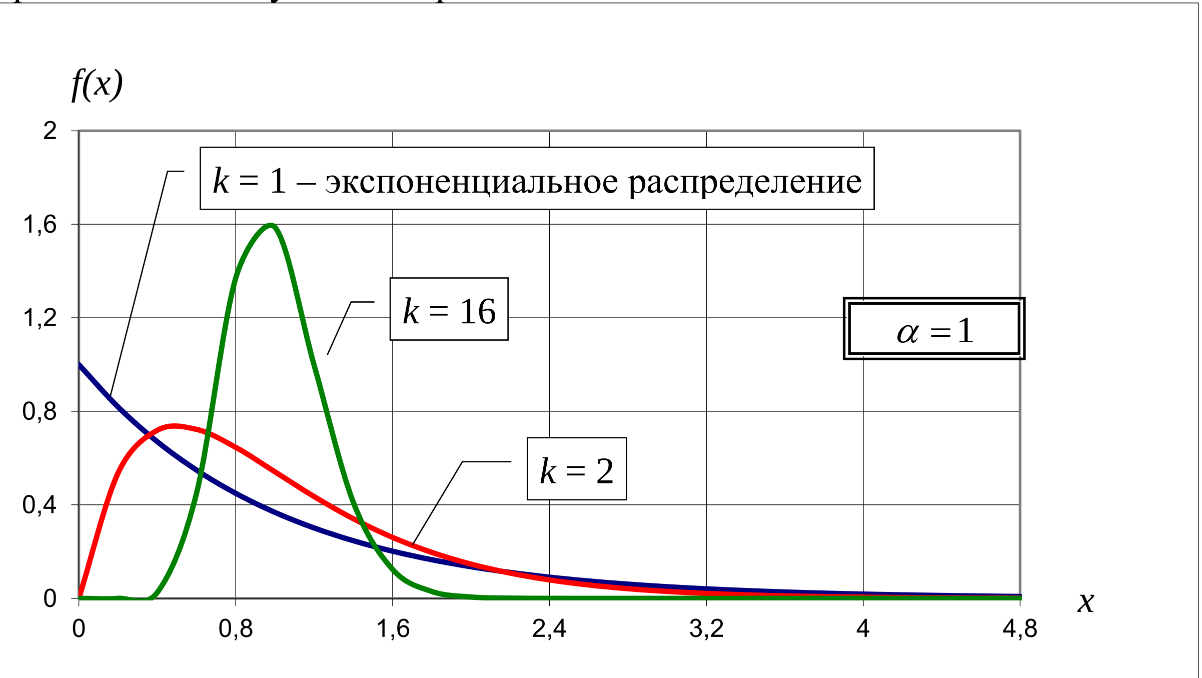


Рис.9. Плотность нормированного распределения Эрланга

Положим, что имеется n разных генераторов экспоненциально распределённых случайных величин с параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ соответственно (математическими ожиданиями $M_1 = 1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n$), причем $\alpha_i \neq \alpha_j$ для всех $i \neq j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть в результате одного опыта с вероятностью q_i вырабатывается только одна случайная величина i-м генератором с параметром α_i $(i = \overline{1, n})$, причем $q_1 + \dots + q_n = 1$. Совокупность случайных величин, полученных в результате проведения множества таких опытов, будет распределена по гиперэкспоненциальному закону:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{n} q_i (1 - e^{-\alpha_i x}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\alpha_i x}; \\ f(x) &= \sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i e^{-\alpha_i x} \end{aligned}\right\}.$$

Гиперэкспоненциальное распределение содержит $(2n-1)$ параметров: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n, q_1,\ldots,q_{n-1}$, поскольку $q_n = 1-\sum_{i=1}^{n-1} q_i$.

В простейшем варианте случайные величины с гиперэкспоненциальным распределением могут быть получены с использованием только двух экспоненциальных распределений: n=2. Тогда функция и плотность гиперэкспоненциального распределения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &F(x) = qp(1-e^{-\alpha_1 x}) + (1-q)(1-e^{-\alpha_2 x});\\ &f(x) = q\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + (1-q)\alpha_2 e^{-\alpha_2 x}\ . \end{aligned}\right\}$$

Заметим, что это гиперэкспоненциальное распределение является трехпараметрическим, то есть содержит три независимых параметра: q, α_1 , α_2 $(0<q<1; \alpha_1 \ge 0; \alpha_2 \ge 0)$. Следовательно, аппроксимация реальных распределений гиперэкспоненциальным может осуществляться по трем моментам распределения, а не по двум, как в распределении Эрланга.

На рис.10 показаны плотности гиперэкспоненциального распределения случайной величины X с математическим ожиданием, равным 1, для двух значений коэффициента вариации: $\nu[X]=2$ и $\nu[X]=4$. Параметры распределения (8) имеют следующие значения:

- $\alpha_1 = 0{,}183;\quad \alpha_2 = 1{,}506$ для распределения с $\nu[X]=2$;
- $\alpha_1 = 0{,}091;\quad \alpha_2 = 4{,}022$ для распределения с $\nu[X]=4$,

причем параметр q одинаков для обоих распределений и равен 0,07.

Здесь же для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием M=1.

Как видно из представленных графических зависимостей, плотность гиперэкспоненциального распределения по сравнению с экспоненциальным распределением характеризуется более резким спадом в области малых значений случайной величины, причем чем больше коэффициент вариации случайной величины, тем круче эта зависимость.

Можно показать, что вероятность появления маленьких значений случайной величины для гиперэкспоненциального распределения намного больше вероятности появления больших значений. Определим вероятность того, что случайная величина примет значение меньше математического ожидания M. Для этого рассчитаем значение функции распределения в точке $x = \mathrm{M}$: $\Pr(X<\mathrm{M}) = F(x=\mathrm{M}) = F(\mathrm{M})$.Тогда для рассмотренных выше гиперэкспоненциальных распределений получим:

$$\Pr(X<\mathrm{M}) = F(\mathrm{M}) = \begin{cases} 0{,}735 & \text{для распределения с } \nu[\mathrm{X}]=2;\\ 0.919 & \text{для распределения с } \nu[\mathrm{X}]=4. \end{cases}$$

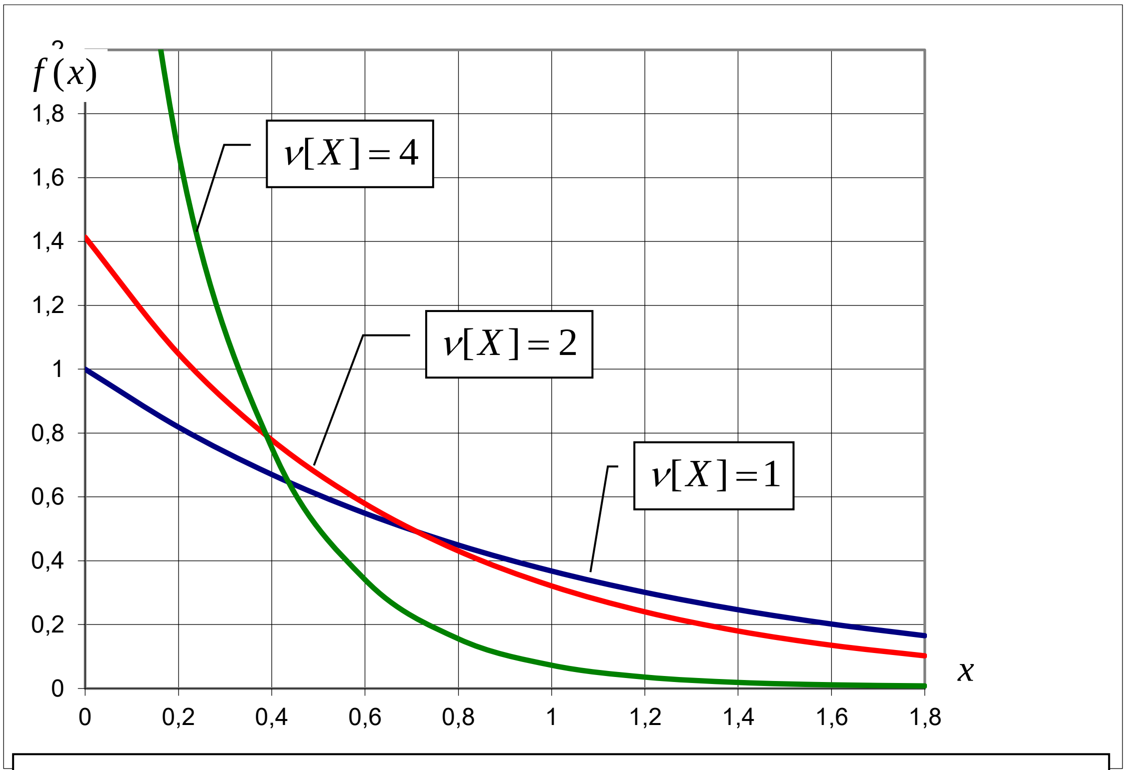


Рис.10. Плотность гиперэкспоненциального распределения

Таким образом, более 73% значений случайной величины, распределенной по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации, равным 2, попадает в интервал (0; M) и только 27% значений окажутся больше математического ожидания. Для случайной величины, с коэффициентом вариации, равным 4, вероятность попадания в интервал (0; M) еще выше и составляет почти 92%. Очевидно, что чем больше коэффициент вариации, тем больше вероятность появления маленьких значений случайной величины.

Эта же вероятность для экспоненциального распределения равна $\Pr(X < \mathrm{M}) = F(\mathrm{M}) = 0{,}632$, что значительно меньше, чем при гиперэкспоненциальном распределении.

Представление о гиперэкспоненциальном распределении будет не полным, если не обратить внимания на «хвост» этого распределения. На рис.11 представлен график плотности гиперэкспоненциального распределения для значений случайной величины больше 4. Напомним, что математическое ожидание случайной величины равно 1.

Из графика видно, что кривая плотности гиперэкспоненциального распределения с коэффициентом вариации, равным 4, имеет длинный так называемый «тяжелый хвост», характеризующийся малым изменением. Это означает, что при гиперэкспоненциальном распределении вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем, например, для экспоненциального распределения.

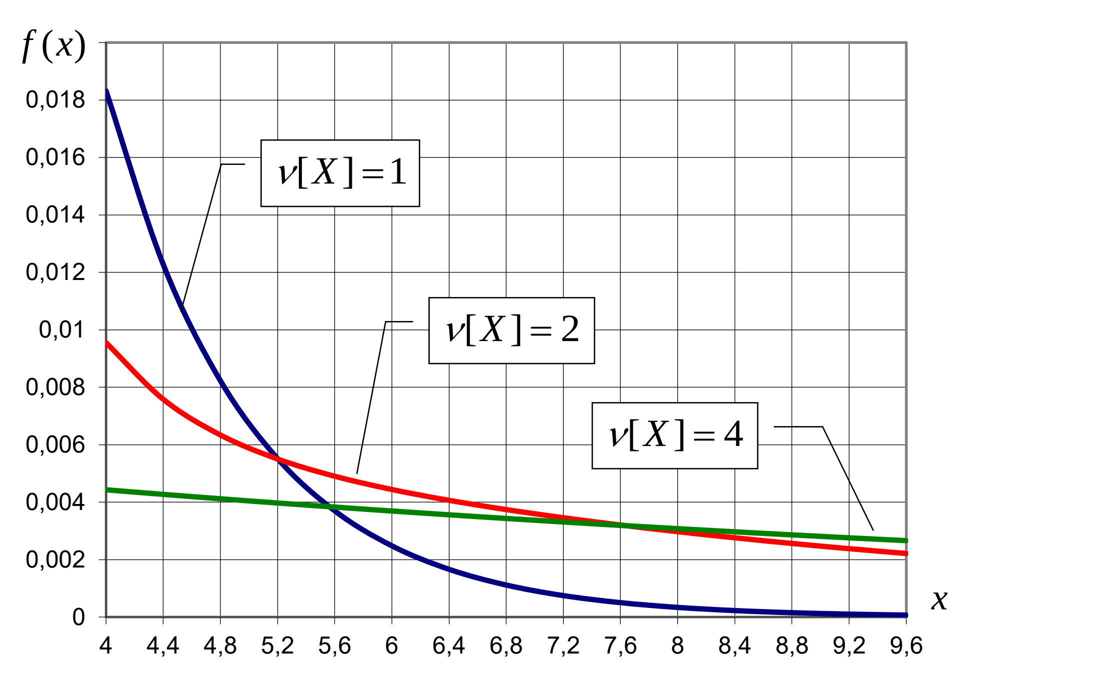


Рис.11. «Хвост» гиперэкспоненциального распределения

Числовые характеристики распределений

Распределение	**M[X]**	$\boldsymbol{\alpha_2[X]}$	**D[X]**	$\boldsymbol{\sigma[X]}$	$\boldsymbol{\nu[X]}$	**Примечания**
Пуассона	a	$a(a+1)$	a	$\sqrt{a}$	$1/\sqrt{a}$	$a>0$
Геометрическое	$\dfrac{1-\gamma}{\gamma}$	$\dfrac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{\gamma^2}$	$\dfrac{1-\gamma}{\gamma^2}$	$\dfrac{\sqrt{1-\gamma}}{\gamma}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\gamma}}$	$0<\gamma<1$
Равномерное	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\dfrac{b-a}{\sqrt{3}(a+b)}$	$b>a$
Экспоненциальное	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\dfrac{2}{\alpha^2}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}$	$\dfrac{1}{\alpha}$	1	$\alpha>0$
Эрланга	$\dfrac{k}{\alpha}$	$\dfrac{k(k+1)}{\alpha^2}$	$\dfrac{k}{\alpha^2}$	$\dfrac{\sqrt{k}}{\alpha}$	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$k=1,2,\ldots$
Эрланга нормированное	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\dfrac{k+1}{k\alpha^2}$	$\dfrac{1}{k\alpha^2}$	$\dfrac{1}{\alpha\sqrt{k}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$k=1,2,\ldots$
Гиперэкспоненциальное	$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{q_i}{\alpha_i}$	$2\sum_{i=1}^{n}\dfrac{q_i}{\alpha_i^2}$	$\alpha_2[X]-$ $-(M[X])^2$	$\sqrt{D[X]}$	$\nu[X]\ge 1$	$\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ $\alpha_i>0$

Представленные числовые характеристики связаны между собой следующими соотношениями:

$$D[X]=\boldsymbol{\alpha_2[X]}-(M[X])^2; \qquad \boldsymbol{\sigma[X]}=\sqrt{D[X]}; \qquad \boldsymbol{\nu[X]}=\frac{\sigma[X]}{M[X]}.$$

5. Аппроксимация неэкспоненциальных распределений

5.1. Аппроксимация распределения с коэффициентом вариации $0 < \nu < 1$

Положим, что математическое ожидание и коэффициент вариации некоторой случайной величины τ, определенной в положительной области действительных чисел, соответственно равны t и ν, причем $0 < \nu < 1$.

Для аппроксимации закона распределения такой случайной величии-ны в теории массового обслуживания часто используют распределение Эрланга *k*-го порядка E_k, которое может быть представлено в виде последовательности *k* экспоненциально распределенных фаз с одинаковым параметром $\alpha_i = \alpha = 1/\mathrm{M}[\tau] \quad (i = \overline{1,k})$, где $\mathrm{M}[\tau]$ – математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины в одной фазе (рис.12).

Такое представление позволяет трактовать формирование случайных величин, распределенных по закону Эрланга, как сумму *k* случайных величин, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону.

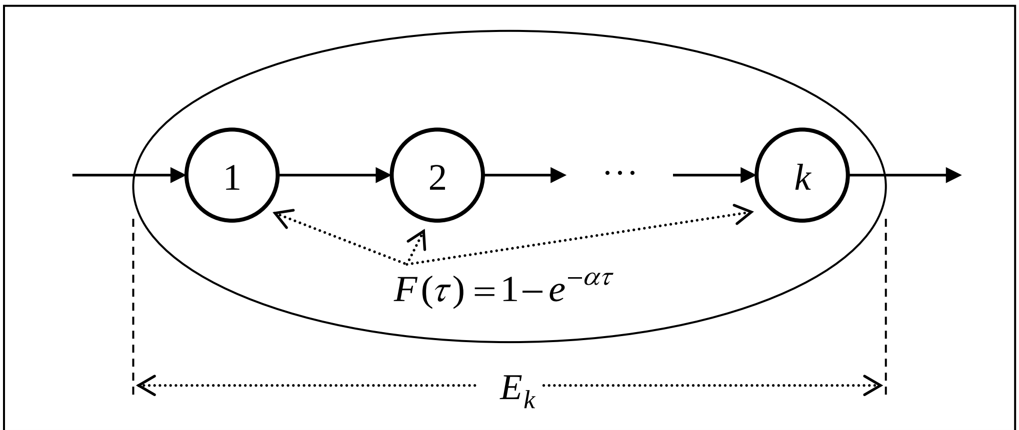


Рис.12. Многофазное представление распределения Эрланга

Математическое ожидание и коэффициент вариации случайной величины, распределенной по закону Эрланга *k*-го порядка:

$$\mathrm{M}_{E_k} = k\mathrm{M}[\tau]; \qquad \nu_{E_k} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

где $k = 1, 2, \ldots$ – параметр распределения Эрланга, принимающий только целочисленные значения.

Тогда для заданных реальных (измеренных) значений математического ожидания t и коэффициента вариации $\nu \; (0 < \nu < 1)$ некоторой случайной величины τ, определенной в положительной области действительных чисел, параметры аппроксимирующего распределения Эрланга будут определяться следующим образом:

$$k = \left]\frac{1}{\nu^2}\right[; \qquad \mathrm{M}[\tau] = \frac{t}{k},$$

где]*x*[означает ближайшее целое, большее *x*, поскольку параметр *k* может принимать только целочисленные значения.

Нетрудно убедиться, что распределение Эрланга позволяет аппроксимировать только те реальные распределения, коэффициенты вариации которых имеют следующие значения: $\nu = 0{,}707$ при $k = 2$; $\nu = 0{,}577$ при $k = 3$; $\nu = 0{,}5$ при $k = 4$ и т.д.

5.2. Аппроксимация распределения с коэффициентом вариации $\nu > 1$

Положим, что математическое ожидание и коэффициент вариации некоторой случайной величины τ, определенной в положительной области действительных чисел, соответственно равны t и ν, причем $\nu > 1$.

Для аппроксимации закона распределения такой случайной величины в теории массового обслуживания часто используют *гиперэкспоненциальное распределение*, представляющее собой композицию экспоненциальных распределений.

В простейшем случае гиперэкспоненциальное распределение может быть представлено в виде двухфазного распределения (рис.13). Параметрами такого распределения являются: t_1 и t_2 – математические ожидания первой и второй экспоненциальных фаз соответственно; q – вероятность формирования значения случайной величины в первой фазе.

Полученное таким образом распределение является трехпараметрическим. Это означает, что аппроксимация таким распределением может выполняться по трем числовым моментам. Выбор значений параметров гиперэкспоненциального распределения только по двум моментам (математическому ожиданию и коэффициенту вариации) предполагает наличие некоторого произвола.

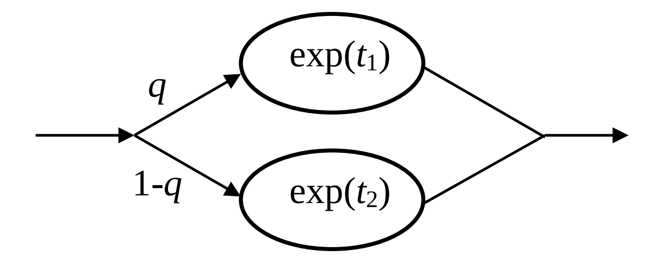


Рис.13. Двухфазное представление гиперэкспоненциального распределения

Таким образом, задача аппроксимации гиперэкспоненциальным распределением сводится к определению значений параметров t_1, t_2 и q в зависимости от известных значений математического ожидания t и коэффициента вариации ν аппроксимируемого закона распределения случайной величины τ.

Для аппроксимации закона распределения с коэффициентом вариации $\nu > 1$ двухфазным гиперэкспоненциальным распределением следует выбрать значение вероятности q из условия:

$$q \le \frac{2}{1+\nu^2}$$

и рассчитать значения t_1 и t_2 по формулам:

$$t_1 = \left[1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}(\nu^2 - 1)} \right] t; \qquad t_2 = \left[1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(\nu^2 - 1)} \right] t.$$

6. Резюме

1. Базовые понятия теории вероятностей – «*событие*», «*вероятность*», «*случайная величина*».

Вероятность – численная мера степени объективной возможности некоторого события. Вероятность может принимать только положительные значения из интервала [0; 1].

Величина, принимающая значение, *неизвестное заранее*, называется *случайной*. Различают *дискретные* (прерывные) и *непрерывные* (аналоговые) случайные величины**.**

2. *Закон распределения* случайной величины – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан:

- *аналитически* в виде математического выражения;
- *таблично* в виде ряда распределения;
- *графически* в виде многоугольника распределения.

Закон распределения непрерывной случайной величины может быть задан в виде:

- *функции распределения* $F(x)$ случайной величины X, представляющей собой *вероятность* того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем некоторое заданное значение x: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$;
- *плотности распределения* $f(x)$, определяемой как производная от функции распределения $F(x)$ по x: $f(x) = F'(x)$.

Функция распределения однозначно определяется через плотность распределения как

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Свойства функции распределения:

- $F(x)$ – неубывающая функция: если $x_j > x_i$, то $F(x_j) \ge F(x_i)$;
- функция распределения принимает значения от 0 до 1 , причём: $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

Свойства плотности распределения:

- плотность распределения принимает только неотрицательные значения: $f(x) \ge 0$;
- площадь на графике, ограниченная плотностью распределения и

осью абсцисс, всегда равна единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

3. Числовые характеристики – *начальные* $\alpha_s[X]$ и *центральные* $\beta_s[X]$ *моменты* – позволяют выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины

Первый начальный момент случайной величины X называется *математическим ожиданием* и характеризует *среднее значение* случайной величины: $M[X] = \alpha_1[X]$.

Второй начальный момент $\alpha_2[X]$ случайной величины X характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно начала координат*.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины: $\mathrm{D}[X] = \beta_2[X]$ и характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно математического ожидания*.

Дисперсия и второй начальный момент связаны зависимостью

$$\mathrm{D}[X] = \alpha_2[X] - (\mathrm{M}[X])^2.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma[X]$ – характеристика *разброса, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины*:

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]}.$$

Коэффициент вариации $\nu[X]$ – *безразмерная* характеристика *разброса* случайных величин, определенных в области положительных значений:

$$\nu[X] = \sigma[X] / \mathrm{M}[X] \qquad (\mathrm{M}[X] > 0).$$

4. В моделях дискретных систем наиболее широко применяются следующие законы распределений случайных величин:

• *распределение Пуассона* (дискретный закон):

$$p_k = Pr(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где a – параметр распределения ($a > 0$);

• *геометрическое распределение* (дискретный закон):

$$p_k = \Pr(X = k) = \rho^k (1 - \rho) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где ρ – параметр распределения ($0 < \rho < 1$);

• *равномерное распределение* (непрерывный закон) с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{при} \quad a < x < b; \\ 0 & \text{при} \quad x > b; \end{cases}$$

• *экспоненциальное распределение* (непрерывный закон) с функцией и плотностью

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \qquad f(x) = \alpha e^{-\alpha x},$$

где $\alpha > 0$ – параметр распределения; $x \ge 0$; $\nu_{эксп}[X] = 1$.

• *нормированное распределение Эрланга* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\alpha x)^i}{i!}; \qquad f_k(x) = \frac{k\alpha (k\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\alpha x},$$

коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга также меньше или равен единице: $\nu_{нЭ_k}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \le 1$, но математическое ожидание *не зависит* от значения параметра *k*;

• *гиперэкспоненциальное распределение* (непрерывный закон):

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{n} q_i (1 - e^{-\alpha_i x}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\alpha_i x}; \\ f(x) &= \sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i e^{-\alpha_i x} \end{aligned}\right\}.$$

5. Если реальные временн*ы*е интервалы имеют значения коэффициента вариации, значительно отличающиеся от единицы, использование экспоненциального распределения может привести к большим погрешностям конечных результатов. В этих случаях в качестве аппроксимирующих функций законов распределений могут использоваться вероятностные законы, представляющие собой композицию экспоненциальных распределений, при этом аппроксимация реального распределения, в простейшем случае, выполняется по двум первым моментам: математическому ожиданию t и коэффициенту вариации ν.

В качестве таких аппроксимирующих распределений могут использоваться:

• *распределение Эрланга*, если коэффициент вариации временного интервала меньше единицы ($0 < \nu < 1$);

• *гипреэкспоненциальное распределение*, если коэффициент вариации временного интервала больше единицы ($\nu > 1$)

7. Задачи

Задача 1. Дискретная случайная величина *X* принимает значения: 1; 2; 3 с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 соответственно.

1) Нарисовать график функции распределения дискретной случайной величины *X*.

2) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации случайной величины *X*.

Дано: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$;

$p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

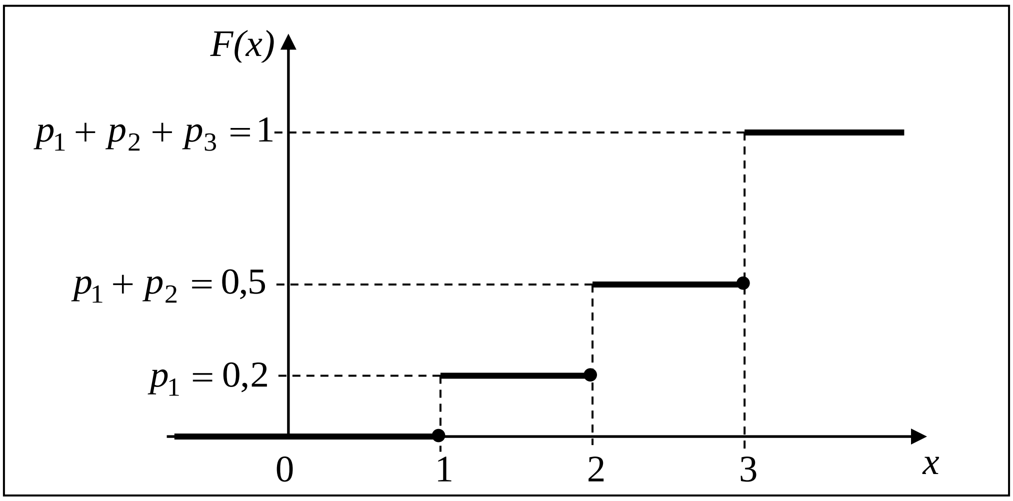
Требуется:

1) нарисовать $F(x)$;

2) вычислить $M[X]$, $D[X]$, $\alpha_2[X]$, $\sigma[X]$, $\nu[X]$.

Решение.

1) График функции распределения случайной величины *X*:



Следует отметить, что значения функции распределения $F(x)$ для каждого значения случайной величины x_i увеличиваются на величину, равную соответствующей *вероятности* p_i появления этого значения, причем самое верхнее значение *всегда равно* 1.

Отметим также, что, как показано на графике (в виде черных кружочков), значения функции распределения в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$ соответственно равны: $F(1) = 0$, $F(2) = 0{,}2$ и $F(3) = 0{,}5$, поскольку функция распределения $F(x)$ определяется как вероятность появления случайной величины, значение которой строго меньше (а не меньше или равно) x: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$.

2) Математическое ожидание:

$$M[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0{,}2\times1 + 0{,}3\times2 + 0{,}5\times3 = 2{,}3.$$

Второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 = 0{,}2\times1 + 0{,}3\times4 + 0{,}5\times9 = 5{,}9.$$

Дисперсия: $D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 5{,}9 - 5{,}29 = 0{,}61$.

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \approx 0{,}78$.

Коэффициент вариации: $\nu[X] = \dfrac{\sigma[X]}{M[X]} \approx 0{,}34$.

Задача 2. Чему равно математическое ожидание, дисперсия, второй начальный момент и коэффициент вариации детерминированной величины $x = 10$? Нарисовать график функции и плотности распределения случайной величины.

Дано: детерминированная величина: $x = 10$.

Требуется:

1) вычислить $M[X]$, $D[X]$, $\alpha_2[X]$, $\nu[X]$;

2) нарисовать $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

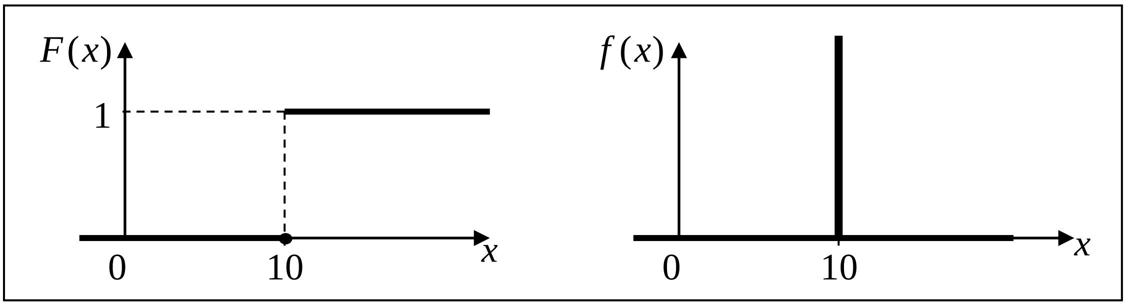
1) Детерминированную величину можно рассматривать как случайную величину, принимающую одно и то же значение $x = 10$ с вероятностью $p = 1$. Тогда:

- математическое ожидание: $M[X] = px = 10$;
- второй начальный момент: $\alpha_2[X] = px^2 = 100$;
- дисперсия: $D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2 = 0$;
- коэффициент вариации: $\nu[X] = \dfrac{\sqrt{D[X]}}{M[X]} = 0$.

Полученные достаточно тривиальные результаты становятся очевидными, если вспомнить физическое толкование представленных величин. Математическое ожидание, представляющее собой среднее значение случайной величины, естественно, совпадает с единственно возможным значением $x = 10$. Дисперсия, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации, определяющие разброс значений относительно математического ожидания, очевидно всегда равны нулю для детерминированной величины, поскольку разброса значений просто нет. Однако следует обратить внимание, что *второй начальный момент не равен нулю*, хотя тоже определяет разброс значений, но, в отличие от предыдущих характеристик, относительно начала координат. Действительно, единственное значение $x = 10$ находится от начала координат на «расстоянии», не равном нулю и, следовательно, второй начальный момент отличен от нуля.

2) Графики функции и плотности распределения детерминированной

величины:



Как следует из представленных графиков, функция распределения детерминированной величины представляет собой *функцию Хевисайда*, а плотность распределения – *дельта-функцию*:

$$F(x) = H(x - \mathrm{M}); \quad f(x) = \delta(x - \mathrm{M}),$$

где М – математическое ожидание, равное значению детерминированной величины (в нашем случае М=10).

Задача 3. Непрерывная случайная величина равномерно распределена в интервале (-30; +20). Нарисовать график плотности и функции распределения случайной величины. Определить: а) математическое ожидание случайной величины; б) вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения.

Дано: равномерно распределённая случайная величина в интервале (-30; +20).

Требуется:

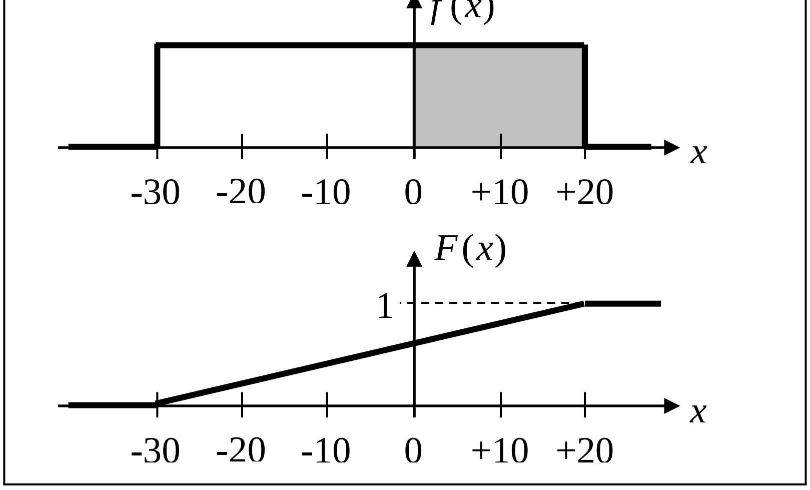
1) нарисовать $f(x)$ и $F(x)$;

2) вычислить $M[X]$;

3) определить $\Pr(X \geq 0) = 1 - F(0)$.

Решение.

1) Графики плотности и функции равномерно распределённой случайной величины:



2) Очевидно, что математическое ожидание равномерно распределённой случайной величины находится в середине заданного интервала (-30; +20) и равно: $\mathrm{M} = -5$. Этот же результат может быть получен с использованием формулы для расчета математического ожидания равномерно распределённой случайной величины: $\mathrm{M} = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{-30+20}{2} = -5$, где a и b - соответственно левая и правая границы интервала.

3) Вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения, также может быть определена несколькими способами.

Во-первых, через значение функции распределения: $\Pr(X \geq 0) = 1 - F(0) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Во-вторых, из графика плотности распределения как площадь под плотностью распределения, ограниченная слева значением $x = 0$ и справа значением $x = +20$ (на графике выделена серым цветом). Помня, что площадь под плотностью распределения на всём интервале значений случайной величины равна 1, можно сделать вывод, что площадь на интервале значений (0, +20) составляет 2/5, то есть равна 0,4.

8. Перечень контрольных вопросов и задач

1. Что понимается под случайной величиной?
2. Приведите примеры случайных величин.
3. Является ли случайной величиной…:

… число дней в году?
… рост человека?
… количество пассажиров в автобусе?
… интервал между поездами в метро?
… температура воздуха на улице?
… напряжение в электрической сети?
… количество студентов в группе?
… оценка на экзамене?

Ответы сопроводить необходимыми пояснениями. Какие из перечисленных величин являются непрерывными?

4. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
5. Что характеризует вероятность?
6. Как рассчитать вероятность какого-либо события?
7. Рассчитайте вероятность того, что в тщательно перемешанной колоде из 36 карт нижней картой окажется …:

… туз пиковый?
… туз любой масти?
… любой масти туз или король?
… пиковый туз или пиковый король?
… пиковый туз или крестовый король?

… любая карта красной масти?

8. Рассчитайте вероятность того, что в тщательно перемешанной колоде из 36 карт две верхние карты окажутся …:

… тузами?

… туз и король одной масти?

… пиковый туз и пиковый король?

… пиковый туз или король любой масти?

… красной масти?

9. Из тщательно перемешанной колоды, содержащей 36 карт, отброшена половина карт. Какова вероятность того, что в оставшейся половине колоды находится …:

… туз пиковый?

… туз любой масти?

… любой масти туз или король?

… пиковый туз или пиковый король?

… пиковый туз или крестовый король?

… любая карта красной масти?

10. Понятие и способы задания закона распределения случайной величины.

11. Понятие и свойства функции распределения случайной величины.

12. Понятие и свойства плотности распределения вероятностей.

13. Что характеризует и какую размерность имеет математическое ожидание (дисперсия; второй начальный момент; среднеквадратическое отклонение; коэффициент вариации, функция распределения, плотность распределения) случайной величины?

14. Для чего используются производящая функция и преобразование Лапласа? Для каких случайных величин используется преобразование Лапласа?

15. Назовите известные Вам дискретные и непрерывные законы распределений.

16. Чему равен коэффициент вариации: а) экспоненциального распределения; б) распределения Эрланга 9-го порядка?

17. В каком интервале находится коэффициент вариации распределения: а) Эрланга; б) гиперэкспоненциального?

18. Нарисовать график плотности и функции распределения: а) экспоненциального; б) Эрланга; в) гиперэкспоненциального.

19. Показать на графике и пояснить, в чём различие между плотностями распределений экспоненциального и гиперэкспоненциального законов.

20. Показать на графике и пояснить, в чём различие между плотностями распределений Эрланга 2-го и 4-го порядка.

21. Дискретная случайная величина принимает значения 1; 2; 3 с вероятностями 0,5; 0,4; 0,1 соответственно. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое

отклонение, коэффициент вариации.

22. Чему равно математическое ожидание, дисперсия, второй начальный момент и коэффициент вариации детерминированной величины X=25?

23. Определить значение детерминированной величины X, если известно, что ее второй начальный момент равен 25?

24. Определить коэффициент вариации детерминированной величины X, если известно, что ее второй начальный момент равен 121?

25. Математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины равно 0,1. Определить среднеквадратическое отклонение, второй начальный момент и коэффициент вариации.

26. Дисперсия экспоненциально распределенной случайной величины равна 16. Определить математическое ожидание и второй начальный момент.

27. Чему равен коэффициент вариации распределения Эрланга 4-го порядка?

28. Чему равна дисперсия случайной величины, распределенной по закону Эрланга 9-го порядка с математическим ожиданием, равным 15?

29. Дискретная случайная величина принимает значения 1; 2; 3 соответственно с вероятностями 0,3; 0,1; 0,6. Нарисовать график функции распределения случайной величины. Определить математическое ожидание и второй начальный момент.

30. Непрерывная случайная величина принимает значения в интервалах (1; 2) и (3; 4), причем вероятность появления значения из интервала (3; 4) в три раза больше вероятности появления значения из интервала (1; 2). Полагая, что в пределах каждого из интервалов случайная величина имеет равновероятное распределение, построить графики функции и плотности распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации.

31. Случайная величина может принимать только два значения 10 и 90. Какова вероятность появления этих значений, если известно, что математическое ожидание случайной величины равно 80?

32. В чём заключается свойство отсутствия последействия, присущее экспоненциальному закону распределения случайных величин?

33. Какие распределения, связанные с экспоненциальным, можно использовать для аппроксимации случайных величин с коэффициентом вариации $\nu < 1$?

34. Что представляет собой однофазное гиперэкспоненциальное распределение?

35. В каком интервале находится коэффициент вариации случайной величины, имеющей однофазное гиперэкспоненциальное распределение?