姓名：________

学号：________

学院（系）：________

_____ 级_____ 班

装 订 线

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称：<u>工程数值方法</u> 试卷：<u>A</u> 考试形式：<u>闭卷</u>

授课院（系）：<u>运载</u> 考试日期：<u>2013 年 7 月 21 日</u> 试卷共<u>4</u>页

	一	二	三	四	五	六	总分
标准分	**10**	**20**	**15**	**15**	**20**	**20**	**100**
得 分							

一．填空题（每空 2 分，共 10 分）

1．复合梯形求积公式的代数精度为<u>1</u>，复合辛普森求积公式的代数精度为<u>3</u>。 （第 4 章）

2．Simpson 求积公式 $S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$。当 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ 时，则 $\int_a^b f(x)dx-S=$<u>0</u>。 （第 4 章）

3．用 Gauss--Seidel 迭代法解方程组 $\begin{cases} x_1+ax_2=4 \\ 2ax_1+x_2=-3 \end{cases}$，其中 a 为实数，方法收敛的充要条件是满足 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$。 （第 6 章）

4．已知近似值 0.07014×10^3 的绝对误差限是最末一位的半个单位，则此近似值具有<u>4</u>位有效数字。 （第 1 章）

评分标准：每空正确得 2 分，错误得 0 分。

二．选择题（每空 2 分，共 20 分）

1．求方程 $x^2-18x+1=0$ 的根 x_1,x_2 时，取四位浮点数计算。$x_1=9+\sqrt{80}$ 则 $x_2=$（ C ）。 （第 1 章）

（A）$9-\sqrt{80}$ （B）$9+\sqrt{80}$ （C）$\frac{1}{x_1}$ （D）$-x_1$

2. 设 $p(x)$ 为满足插值条件 $p(x_i)=y_i \quad (x_i$ 互异，$i=0,1,\cdots,n)$ 的插值多项式，则 $p(x)$ 的次数是（ D ）。（第 2 章）

（A）大于 n　　（B）小于 n　　（C）等于 n　　（D）不超过 n

3. 牛顿-柯特斯求积公式中的柯特斯求积系数 $c_i\ (i=0,1,\cdots,n)$，成立 $\sum_{i=0}^{n} c_i =$（ C ）。

（第 4 章）

（A）$b-a$　　（B）0　　（C）1　　（D）c

4. 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 及右端向量 f，Jacobi 迭代公式

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$　（第 6 章）

收敛于方程组的精确解 x^* 的充要条件是（ A ）。

（A）$\rho(B)<1$　　（B）$\|B\|_\infty <1$　　（C）$\|B\|_1 <1$　　（D）$\|B\|_2 <1$

5. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 3 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$，要使 $A=LL^T$，则 a 必须满足（ B ），其中 L 为对角元为正的下三角矩阵。（第 5 章）

（A）$|a|<\sqrt{6}$　　（B）$|a|<\sqrt{3}$　　（C）$|a|\le\sqrt{6}$　　（D）$|a|\le\sqrt{3}$

6. 用迭代公式 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d$ 求解线性代数方程组 $Ax=b$ 的解，则（ D ）时，迭代收敛。　（第 6 章）

（A）方程组系数矩阵 A 严格对角占优　　（B）迭代矩阵 G 严格对角占优

（C）方程组系数矩阵 A 对称正定　　（D）迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G)<1$

7. 五个节点的高斯求积公式，其代数精度为（ C ）。（第 4 章）

（A）5　　（B）7　　（C）9　　（D）11

8. 五个节点的牛顿-柯特斯求积公式，其代数精度为（ B ）。（第 4 章）

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

9. 设 $x_i (i=0,1,2,3,4,5)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数，

则 $\sum_{i=0}^{5} x_i^5 l_i(0) =$（ A ）。（第 2 章）　作业题的证明

（A）0　　（B）1　　（C）x^5　　（D）$l_i(0)$

10. 若 n 阶方阵 A 的谱半径 $\rho(A)<1$，则求解 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss--Seidel 迭代法（ B ）。（第 6 章）

（A）都收敛
（B）无法判断收敛和发散
（C）Jacobi 迭代法收敛而 Gauss--Seidel 迭代法发散
（D）Jacobi 迭代法发散而 Gauss--Seidel 迭代法收敛

评分标准：每空正确得 2 分，错误得 0 分。

三．（15 分）用欧拉（Euler）法计算积分 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在点 $x=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 上的近似值。取步长 $h=0.1$，小数点后至少保留 5 位。 （第 9 章）与作业题类似

解：令 $y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$，则 $y'=\frac{\sin x}{x}$，且 $y(0)=0$。

欧拉格式为 $y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$，其中 $f(x_i,y_i)=\frac{\sin x_i}{x_i}$， $h=0.1$

故 $y_{i+1}=y_i+h\frac{\sin x_i}{x_i}=y_i+0.1\frac{\sin x_i}{x_i}$

由 $y_0=y(0)=0$ 计算得

$$y(0.1)=\int_0^{0.1}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_1=0+0.1\frac{\sin 0}{0}=0.1$$
$$y(0.2)=\int_0^{0.2}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_2=y_1+0.1\frac{\sin 0.1}{0.1}=0.19983$$
$$y(0.3)=\int_0^{0.3}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_3=y_2+0.1\frac{\sin 0.2}{0.2}=0.29917$$
$$y(0.4)=\int_0^{0.4}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_4=y_3+0.1\frac{\sin 0.3}{0.3}=0.39768$$
$$y(0.5)=\int_0^{0.5}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_5=y_4+0.1\frac{\sin 0.4}{0.4}=0.49503$$

评分标准：(1)写对基本求解格式 5 分；(2)写对欧拉格式 5 分；(3)计算每步 1 分；如没有写欧拉格式直接计算，则计算每步 2 分。“如果计算过程正确，结果错误则扣 2 分”。

四．（15 分）用改进的平方根（LDL^T）法解方程组 $\begin{cases}3x_1+3x_2+5x_3=10\\3x_1+5x_2+9x_3=16\\5x_1+9x_2+17x_3=30\end{cases}$。（第 5 章）

解：方程组系数阵 $A=\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}$，改进的平方根法 $A=LDL^T$，即

$$\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&0&0\\0&d_2&0\\0&0&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&l_{31}\\0&1&l_{32}\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1&0&0\\l_{21}d_1&d_2&0\\l_{31}d_1&l_{32}d_2&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&l_{31}\\0&1&l_{32}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得 $d_1=3$， $l_{21}=1$， $l_{31}=5/3$， $d_2=2$， $l_{32}=2$， $d_3=2/3$，

由 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\5/3&2&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}10\\16\\30\end{Bmatrix}$ 得 $y=\begin{Bmatrix}10\\6\\4/3\end{Bmatrix}$

由 $\begin{bmatrix}1&1&5/3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3&0&0\\0&1/2&0\\0&0&3/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}10\\6\\4/3\end{Bmatrix}$ 得 $x=\begin{Bmatrix}1\\-1\\2\end{Bmatrix}$

评分标准：(1)写出 L、D 和 L^T 矩阵形式　5 分；(2)求出矩阵内参数　3 分；(3)写出求解方程组的形式　4 分；(4)结果求解正确　3 分。

五．（20 分）已知 $f(x)=x^3+4x^2-10$ 在 $[1,2]$ 上有且仅有一个零点 α，

（1）试写出能保证收敛到 $f(x)$ 的零点 α 的不动点迭代公式；

（2）用此迭代公式求零点 α，取初始值为 $x_0=1.5$，要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-3}$。

（第 7 章）

解：迭代格式不唯一，所以有的格式不收敛，首先利用定理 7.1 中的第(1)条验证迭代函数是否也在区间内

（1）由 $f(x)=0$，得 $x=\sqrt{\dfrac{10}{x+4}}$，故迭代函数 $g(x)=\sqrt{\dfrac{10}{x+4}}$，　$\forall x\in[1,2]$。

因 $\forall x\in[1,2]$，　$g'(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{(x+4)^3}}<0$，故 $g(x)$ 单调递减，

$$\therefore\quad 1<\sqrt{\frac{3}{5}}=g(2)\le g(x)\le g(1)=\sqrt{2}<2$$

因 $\forall x\in[1,2]$，　$\dfrac{d|g'(x)|}{dx}=-g''(x)=-\dfrac{3}{4}\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{(x+4)^5}}<0$，故 $|g'(x)|$ 单调递减，

$$\therefore\quad |g'(x)|=\left|\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{(x+4)^3}}\right|\le|g'(1)|=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{(1+4)^3}}=\frac{1}{\sqrt{50}}<1$$

所以 $\forall x_0\in[1,2]$，迭代 $x_{n+1}=g(x_n)$ 均收敛于 $f(x)$ 的零点 α。

（2）迭代公式 $x_{k+1}=\sqrt{\dfrac{10}{x_k+4}}$， $x_0=1.5$

计算结果如下

迭代次数 k	0	1	2	3	4	5
x_k	1.5	1.3484	1.3674	1.3650	1.3653	1.3652

$\because$ $|x_5-x_4|=|1.3653-1.3652|=0.0001<10^{-3}$,

故 $\alpha\approx 1.365$

评分标准：（1）写出不动点迭代公式 10 分；（2）证明迭代公式收敛 6 分；（3）结果求解正确 4 分。“此题若用牛顿迭代法求解正确只给 8 分。”

六．（20 分）给定表中数据

x	1	2	3
y	$e^{1.6}$	e^{2}	$e^{2.5}$

试求形如 $y=ae^{bx}$ 的拟合函数。

（第 3 章，例 11） 6 种非线性拟合之一

解：取对数，得 $\ln y=\ln a+bx$，令 $w=\ln y$， $A=\ln a$， 则得

$w=A+bx$。根据数据（x_i,y_i）算出对应的（x_i,w_i）,得表如下

x	1	2	3
w	1.6	2	2.5

法方程为 $\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=0}^{2}1 & \sum\limits_{i=0}^{2}x_i\\ \sum\limits_{i=0}^{2}x_i & \sum\limits_{i=0}^{2}x_i^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A\\ b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum\limits_{i=0}^{2}w_i\\ \sum\limits_{i=0}^{2}x_iw_i\end{Bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A\\ b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6.1\\ 13.1\end{Bmatrix}$

解得 $\begin{Bmatrix}A\\ b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}17/15\\ 9/20\end{Bmatrix}, a=e^A=e^{\frac{17}{15}}$。

拟合函数为 $y=e^{\frac{17}{15}}e^{\frac{9}{20}x}=e^{\frac{17}{15}+\frac{9}{20}x}$

这里不用法方程用线性矛盾方程组方法同样可以得到结果

$$A+b=1.6$$
$$A+2b=2$$
$$A+3b=2.5$$

写成矩阵形式$\mathbf{C}\begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \mathbf{D}$，其中系数矩阵$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} 1.6 \\ 2 \\ 2.5 \end{Bmatrix}$

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}，即\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.1 \\ 13.1 \end{Bmatrix}$$

解得 $\begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17/15 \\ 9/20 \end{Bmatrix}, a = e^{A} = e^{\frac{17}{15}}$ 。

拟合函数为$y = e^{\frac{17}{15}} e^{\frac{9}{20}x} = e^{\frac{17}{15} + \frac{9}{20}x}$

评分标准：

(1)取对数，得到 A 和 b 的线性函数 $w = A + bx$　2 分；(2) 根据数据 (x_i, y_i) 算出对应的 (x_i, w_i)　2 分；(3) 得到法方程　12 分；(4) 求出 A 和 b　2 分；(4) 写出拟合函数　2 分。