工程数值方法

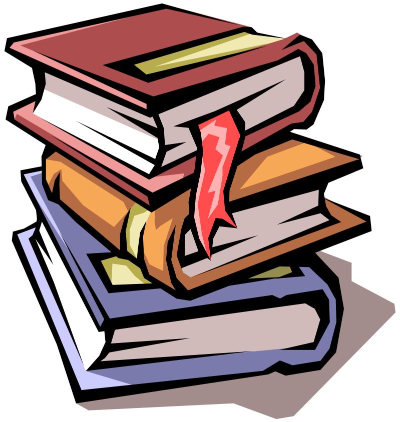
大连理工大学运载学部　力学系

何宜谦

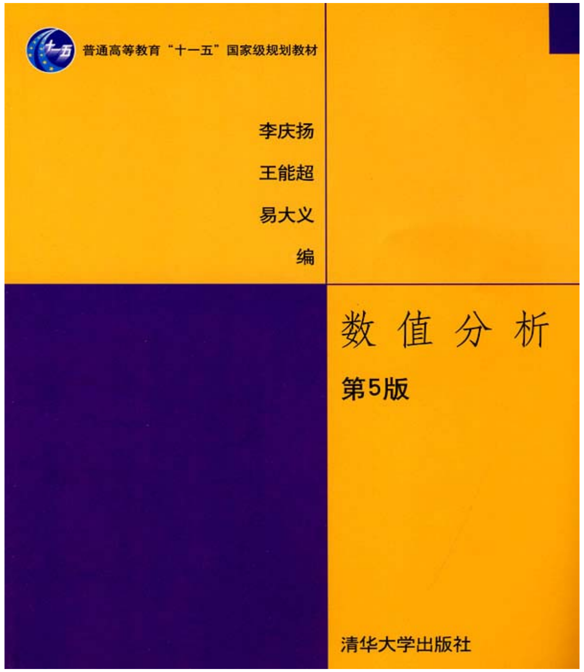
QQ群：538992322

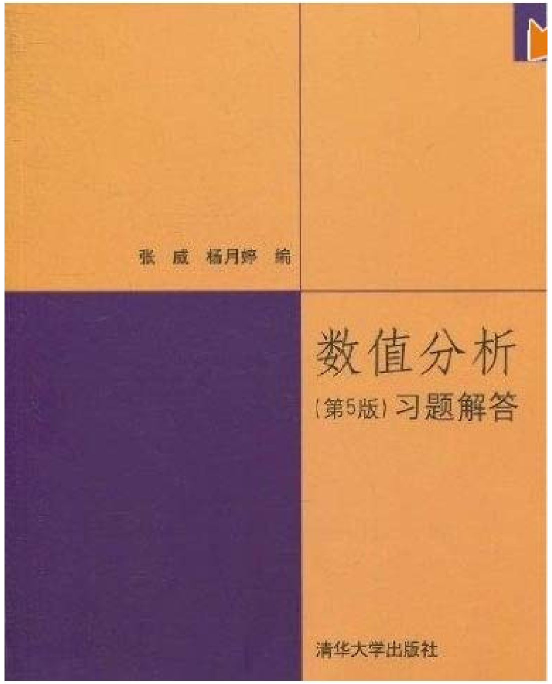
Email：heyiqian@dlut.edu.cn

Mobile：13998576316



参考教材


普通高等教育"十一五"国家级规划教材
李庆扬
王能超
易大义
编
数 值 分 析
第5版
清华大学出版社


张 威 杨月婷 编
数值分析
(第5版)习题解答
清华大学出版社

学习要求

§1 24学时讲授+12学时上机

§1 听课

§2 练习

§3 上机 3次 每周一次

平时成绩

§4 闭卷考试 + 上机考试

第1章　引论

§1.1 数值分析的对象、作用和特点

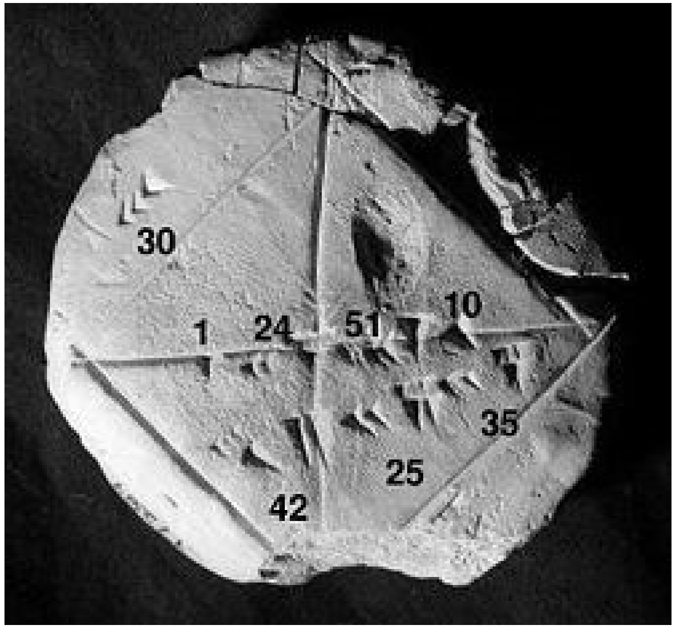
§1.2 数值分析的误差

§1.3 误差定性分析与避免误差危害

§1.4 数学软件

§ 1.1 数值分析的对象、作用和特点

数值分析又称计算方法，它是研究各种数学问题的**数值**解法及其理论的一门学科。



Babylonian clay tablet YBC 7289 (c. 1800–1600 BC) with annotations.

The approximation of the square root of 2 is four sexagesimal figures, which is about six decimal figures. $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296$

➢计算机求解科学问题的步骤

根据实际问题建立数学模型 ⟶ 应用数学

建立数值计算方法

编制程序上机计算

⟶ 数值分析

数值方法的研究内容举例

1. 求方程近似解

解方程 $x^2 = 2$

$$\left(x+\Delta x\right)^2 \approx x^2 + 2x \cdot \Delta x = 2 \qquad \Delta x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x = x_k + \frac{1}{x_k} - \frac{x_k}{2} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$$

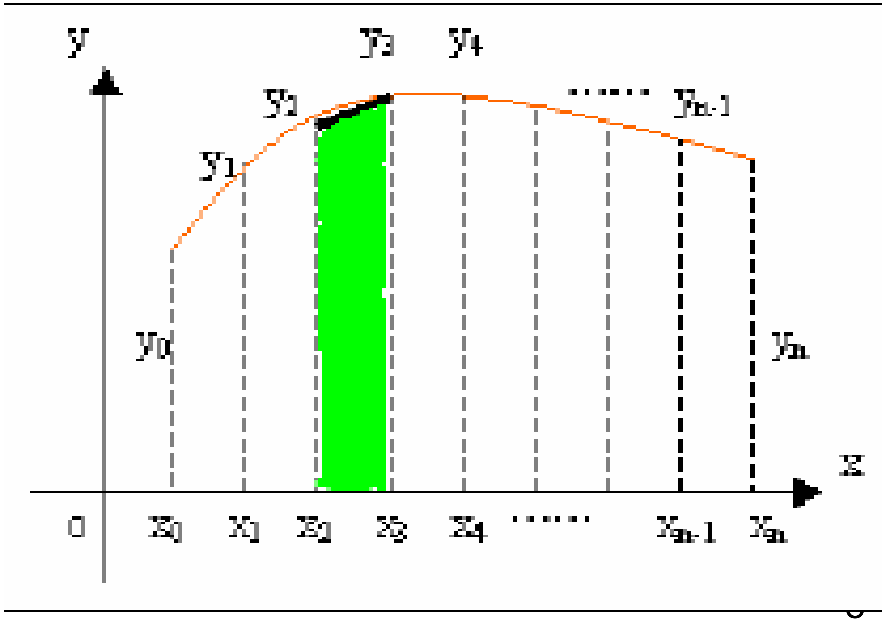
$$x_0 = 1.5 \Rightarrow x_1 = 1.4167 \Rightarrow x_2 = 1.4142$$

数值方法的研究内容举例

2. 离散化： 把求连续变量的问题转化为离散变量的问题

例　计算定积分 $I = \int_a^b f(x)\,dx$

I 为如图所示的曲边梯形的面积。



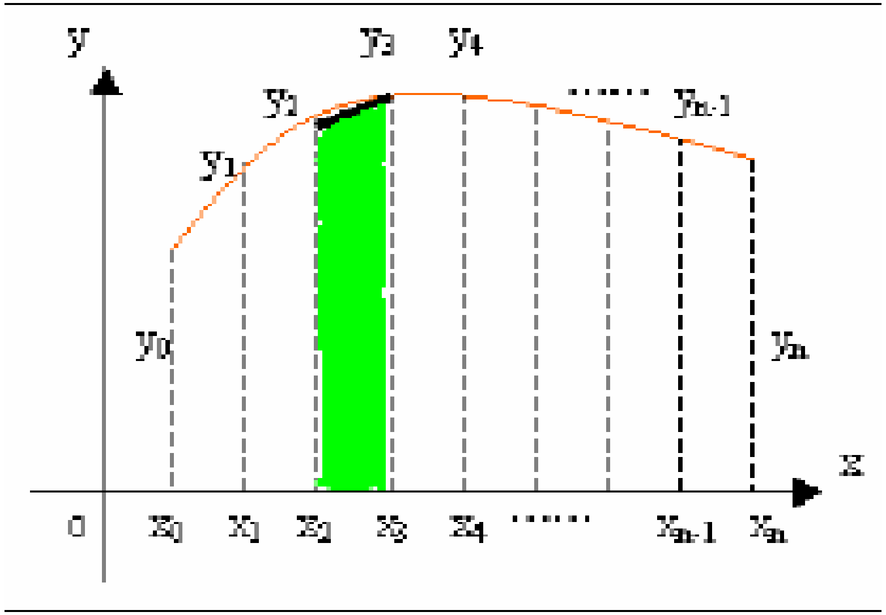
数值方法的研究内容

解法：

1. n等分[a,b],

   $a=x_0<x_1< \ldots <x_n=b$,

   $y_i=f(x_i),\ i = 0,1,\ldots .\ n$；



2. 用n个小梯形的面积之和近似代替曲边梯形的面积。

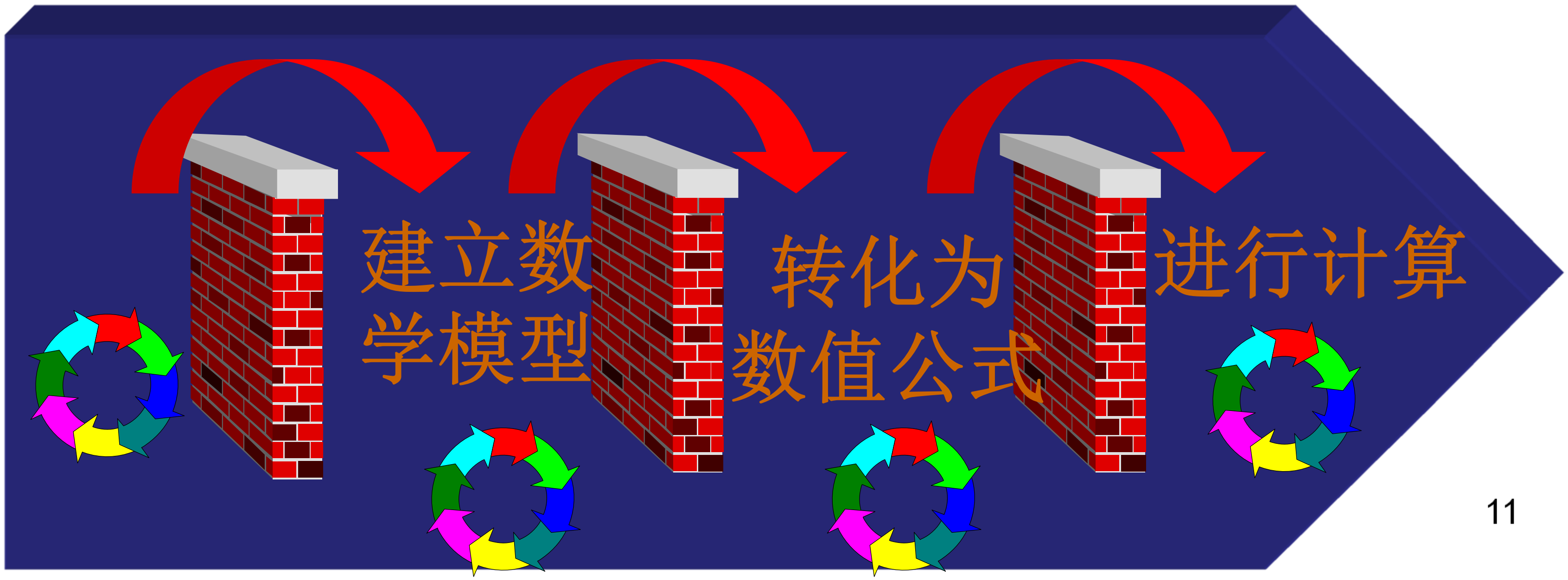
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots y_{n-1}]$$

数值方法的四个基本算法

1. 计算连乘积；
2. 计算累加和；
3. 递推算法；
4. 迭代算法。

数值方法解题的一般过程

1. 建立数学模型
2. 选择算法，建立数值公式
3. 编写软件进行计算，得到计算结果



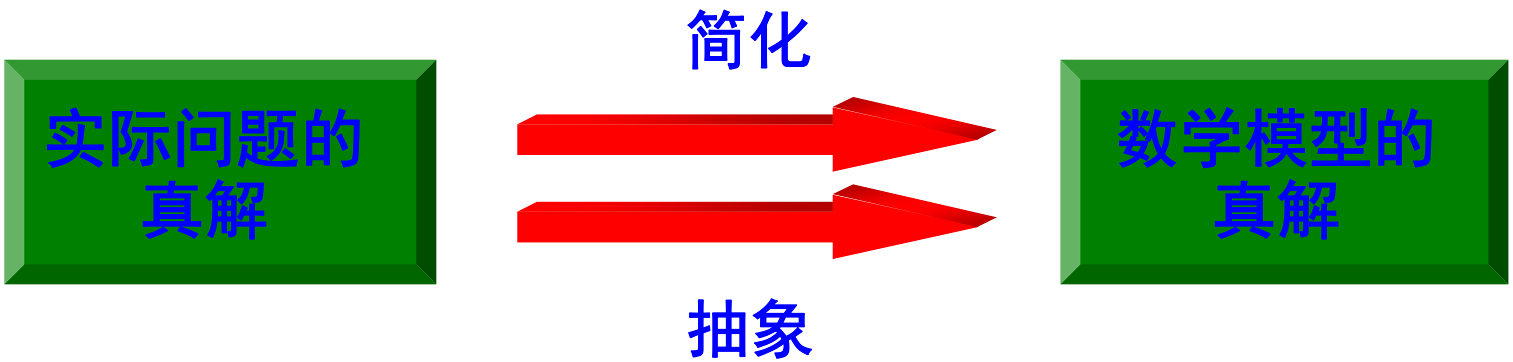
§ 1.2 数值分析的误差

一．误差来源：

1. 模型误差
2. 观测误差
3. 截断误差
4. 舍入误差

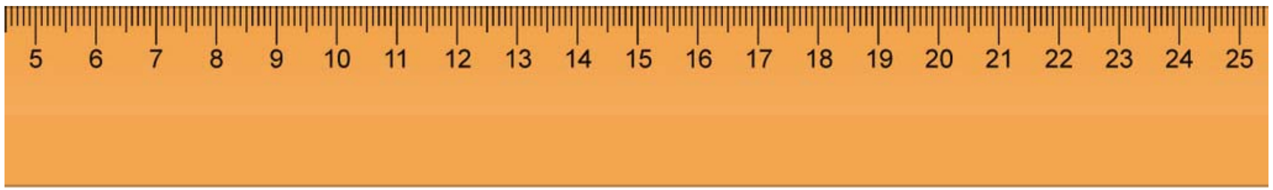
1. 模型误差

用数学方法解决一个具体的实际问题，首先要建立数学模型，这就要对实际问题进行抽象、简化，我们把数学模型与实际问题之间出现的这种误差叫做**模型误差**。



2. 观测误差

- 数学模型中的参数和原始数据，是由观测和试验得到的。由于测量工具的精度、观测方法或客观条件的限制，使数据含有测量误差，这类误差叫做**观测误差**。



3. 截断误差

- 精确公式用近似公式代替时，所产生的误差叫**截断误差**。例如，函数$f(x)$用泰勒(Taylor)多项式

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

截断误差是

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (\xi\text{介于}0\text{与}x\text{之间})$$

4. 舍入误差

- 在数值计算中只能对有限位字长的数值进行运算。用有限位数字代替精确数，这种误差叫做**舍入误差**，是数值计算中必须考虑的一类误差

例如：$1 \div 3 = 0.3333333333$

(精确表达 $1 \div 3 = 0.\dot{3}\cdots$)

绝对误差

定义1.1 设精确值x的近似值为x^*，称差

$$e^* = x^* - x$$

为近似值x^*的绝对误差，简称误差。

由于精确值一般是未知的，因而e* 不能求出来，但可以根据测量误差或计算情况设法估计出它的取值范围，即误差绝对值的一个上界或称误差限。

误差限

定义1.2 设存在一个正数 ε^*，使

$$|e^*| = |x^* - x| \le \varepsilon^*$$

则ε^*称为近似值的绝对误差限，简称误差限或精度。

如果近似数 x^* 的误差限为 ε^*，则 $x^* - \varepsilon^* \le x \le x^* + \varepsilon^*$ 表明准确值 x 必落在[$x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon$] 上，常采用下面的写法

$$x = x^* \pm \varepsilon^*$$

来表示近似值的精度或准确值x所在的范围。

相对误差

定义1.3　绝对误差与精确值x的比值

$$e_r^* = \frac{e^*}{x} = \frac{x - x^*}{x}$$

称为相对误差。

相对误差越小，精度就越高，实际计算时，x通常是不知道的，因此可用下列公式计算相对误差

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*}$$

相对误差限

定义1.4 设存在一个正数 ε_r^* ，使

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{\left|x^*\right|}$$

则称 ε_r^* 为近似值 x^* 的相对误差限。

例题

例1.1 甲打字每100个错一个，乙打字每1000个错一个，求其相对误差。

解：

根据定义：

甲打字时的相对误差为

$$\left|e_r^*\right| = \frac{1}{100} = 1\%$$

乙打字时的相对误差

$$\left|e_r^*\right| = \frac{1}{1000} = 0.1\%$$

有效数字

定义1.5 设x的近似值

$$x^* = \pm 0.x_1 x_2 \cdots x_n \times 10^m$$

其中 x_i 是0到9之间的任一个数，但 $x_1 \neq 0, i = 1,2,3,\cdots,n$

n是正整数，m是整数，若

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则称 x^* 为x的具有n位有效数字的近似值，x^*准确到第n位，$x_1 x_2 \cdots x_n$ 是 x^*的有效数字。

例题

例1.2　3.142作为π的近似值时有几位有效数字

解：　$3.141592\cdots = 0.3141592\cdots \times 10^{1}$

$3.142 = 0.3142 \times 10^{1}$

$m = 1$

$$|\pi - 3.142| = |0.3141592\cdots \times 10^{1} - 0.3142 \times 10^{1}|$$

$$< 0.000041 \times 10^{1} < 0.0005 = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$m - n = 1 - n = -3$

所以 $n = 4$，具有4位有效数字

例题

例1.3 当取3.141作为π的近似值时

$$|\pi-3.141|=|0.3141592\cdots\times10^{1}-0.3141\times10^{1}|$$

$$\leqslant 0.0000592\times10^{1}$$

$$<0.005=1/2\times10^{-2}$$

$m-n=1-n=-2$ 所以$n=3$具有3位有效数字

推论 如果近似数x*误差限是某一位的半个单位，由该位到x*的第一位非零数字一共有n位x*就有n位有效数字，也就是说准确到该位。

有效数字

① 用四舍五入取准确值的前n位x^*作为近似值，则x^*必有n位有效数字。如3.142作为 π的近似值有4位有效数字，而3.141为3位有效数字

② 有效数字相同的两个近似数，绝对误差不一定相同。例如，设$x_1^*=12345$，设$x_2^*=12.345$，两者均有5位有效数字但绝对误差不一样

$$|x - x_1^*| = |x - 12345| \leqslant 0.5 = 1/2\times10^0$$

$$|x - x_2^*| = |x - 12.345| \leqslant 0.0005 = 1/2\times10^{-3}$$

③ 准确值具有无穷多位有效数字，如三角形面积$S=1/2ah=0.5ah$因为0.5是真值，没有误差$\varepsilon^*=0$，因此$n\to\infty$，准确值具有无穷位有效数字

有效数字与误差的关系

定理1.2 若近似数$x^*=\pm 0.x_1x_2\ldots x_n\times 10^m$相对误差

$$\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2(x_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$$

则该近似数具有n位有效数字。

反之，若近似数x^*具有n位有效数字，则

$$\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2x_1}\times 10^{-(n-1)}$$

有效数字与误差的关系

证：∵ $x^*=\pm 0.x_1x_2\ldots x_n\times 10^m$

∴ $|x^*| \leqslant (x_1+1)\times 10^{m-1}$

$$|x-x^*| = \frac{|x-x^*|}{|x^*|}|x^*| \leq \frac{1}{2(x_1+1)}\times 10^{-(n-1)}\times(x_1+1)\times 10^{m-1} = \frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

由有效数字定义可知，x^*具有n位有效数字。

反之，由

$$x_1\times 10^{m-1}\leq |x^*| \leq (x_1+1)\times 10^{m-1}$$

当x^*具有n位有效数字时

$$|e_r^*| = \frac{|x-x^*|}{|x^*|} \leq \frac{0.5\times 10^{m-n}}{x_1\times 10^{m-1}} = \frac{1}{2x_1}\times 10^{-n+1}$$

§ 1.3 误差定性分析与避免误差危害

误差是用来衡量数值方法好与坏的重要标志，为此对每一个算法都要进行误差分析。

一、防止相近的两数相减

两个相近的数相减，会严重损失有效数字

例1.4 $x^2 - 16x + 1 = 0$

解：$x_1 = 8 + \sqrt{63} \approx 8+7.94=15.94$

$$x_2 = 8 - \sqrt{63} \approx 8 - 7.94 = 0.06$$

$$x_2 = 8 - \sqrt{63} = \frac{1}{8+\sqrt{63}} \approx \frac{1}{15.94} \approx 0.0627$$

数值计算中值得注意的问题

二、防止大数吃小数

当两个绝对值相差很大的数进行加法或减法运算时，绝对值小的数有可能被绝对值大的数"吃掉"从而引起计算结果很不可靠.

数值计算中值得注意的问题

例1.4 求一元二次方程 $x^2-(10^8+1)x+10^8=0$ 的实数根。

采用因式分解法，很容易得到两个根为$x_1=10^8$, $x_2=1$.

按二次方程求根公式

$$x_1=(10^8+(10^{16}-4)^{1/2})/2$$

$$x_2=(10^8-(10^{16}-4)^{1/2})/2$$

如采用字长为16位的单精度计算机来计算，求得根为 $x_1\approx10^8$ ，$x_2\approx0$.（怎样计算可得较好的结果?）

产生错误的原因

① 出现大数10^{16}吃掉小数4的情况

② 分子部分出现两个相近数相减而丧失有效数位常称为灾难性的抵消

数值计算中值得注意的问题

三、防止接近零的数做除数

分母接近零的数会产生溢出错误, 因而产生大的误差, 此时可以用数学公式化简后再做.

数值计算中值得注意的问题

例1.5 计算 $$D=\frac{0.0005\times 0.0143\times 0.0012}{0.0003\times 0.0125\times 0.0135}$$

解： 分子分母分别计算后相除(取9位小数)

A=0.0005*0.0143*0.0012=0.00000715*0.0012

=0.000000009(有舍入)

B=0.0003*0.0125*0.0135=0.00000375*0.0135

=0.000000051(有舍入)

D=A/B=0.17647

真值为0.16948148…，所以D只准确到小数后一位

数值计算中值得注意的问题

$$D = \overbrace{\left(\frac{0.0005}{0.0003}\right)}^{a}\times\overbrace{\left(\frac{0.0143}{0.0125}\right)}^{b}\times\overbrace{\left(\frac{0.0012}{0.0135}\right)}^{c}$$

算法2：分成三组因子。每组只取六位小数计算

$a=0.0005/0.0003=1.666667$（有舍入）

$b=0.0143/0.0125=1.144000$

$c=0.0012/0.0135=0.088889$（有舍入）

$D=a\times b\times c=1.666667\times 1.144000\times 0.088889=0.169482$

准确到小数后5位。

数值计算中值得注意的问题

四、注意计算步骤的简化, 减小运算次数

简化计算步骤，减少运算次数是提高程序执行速度的关键，它不仅可以节省时间，还能减少舍入误差。

如计算多项式

$p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ 的值

若直接计算$a_k x^k$, 再逐项相加，一共要做

$n+(n-1)+\cdots+2+1=n(n+1)/2$次乘法和$n$次加法

数值计算中值得注意的问题

如果将前n项提出x，则有

$$p(x) = (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1)\, x + a_0$$

$$= ((a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + a_2) x + a_1)\, x + a_0$$

$$= (\ldots(a_n x + a_{n-1}) x + \ldots + a_2) x + a_1) x + a_0$$

写成递推公式

$$\begin{cases} b_k = b_{k-1} x + a_{n-k} & (k = 1, 2, \cdots, n) \\ b_0 = a_n \end{cases}$$

于是 $P(x) = b_n$，这种多项式求值的算法称为**秦九韶算法**，只做n次乘法和n次加法，程序实现简单。

数值计算中值得注意的问题

五、控制递推公式中误差的传播

对于一个数学问题的求解往往有多种数值方法在选择数值方法时，要注意所用的数值方法不应将计算过程中难以避免的误差放大的较快，造成计算结果完全失真。

数值计算中值得注意的问题

例1.6 计算积分 $I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx \ (\mathrm{n} = 0,1,\ldots)$ 并估计误差

解： 递推公式

$$\begin{cases} I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \\ I_0 = e^{-1}\int_0^1 e^x dx = 1 - e^{-1} \end{cases}$$

迭代A
$$\begin{cases} I_n = 1 - nI_{n-1} \\ I_0 = 0.6321 \end{cases}$$

VS

迭代B
$$\begin{cases} I_{n-1} = \dfrac{1}{n}(1 - I_n) \\ I_9 = 0.6834 \end{cases}$$

数值计算中值得注意的问题

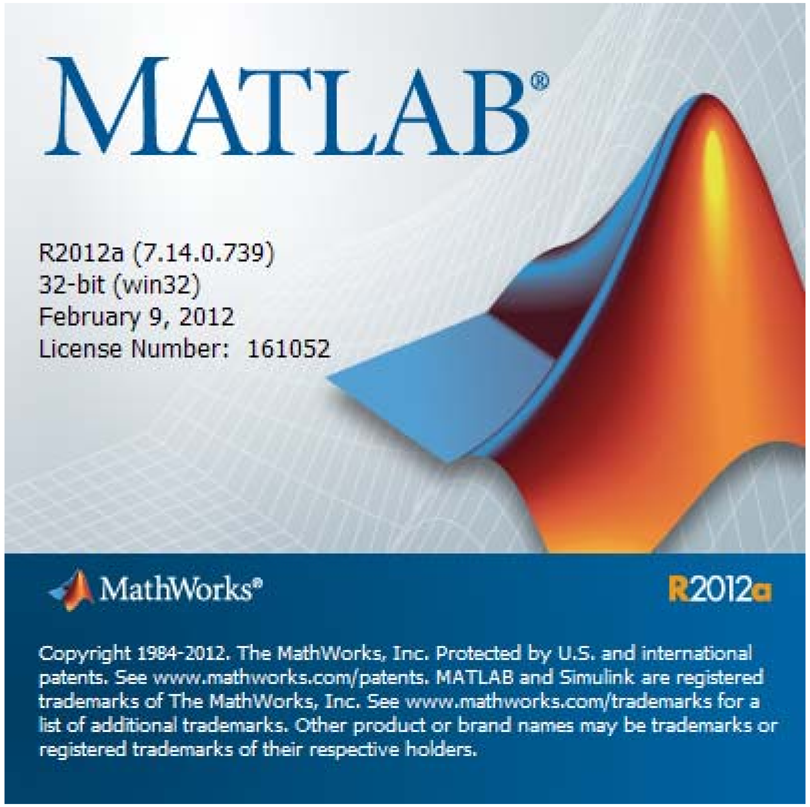
n	迭代A	迭代B
0	0.6321	0.6321
1	0.3679	0.3679
2	0.2642	0.2643
3	0.2074	0.2073
4	0.1704	0.1708
5	0.1480	0.1455
6	0.1120	0.1268
7	0.2160	0.1121
8	-0.7280	0.1035
9	7.552	0.0684

数值计算中值得注意的问题

即每计算一步的误差的绝对值是上一步的十分之一，误差的传播逐步缩小，得到很好的控制，这个算法是数值稳定的。

§ 1.4　数学软件

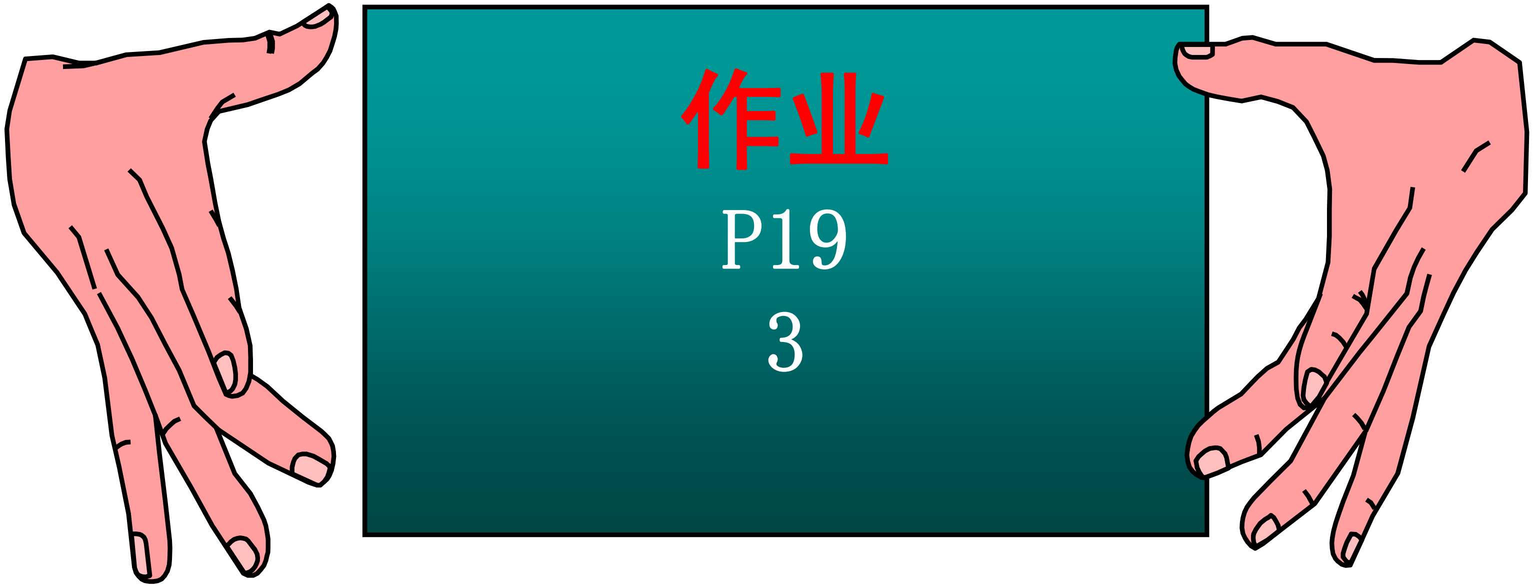
MATLAB



本章小结

1. 熟悉计算方法在解决实际问题中所处的地位，熟悉计算方法是以计算机为工具求近似解的数值方法；
2. 熟悉绝对误差（限），相对误差（限）及有效数字概念；

本章习题



本章结束