第5章 解线性方程组的直接方法

§5.1　引言与预备知识

在工程技术、自然科学和社会科学中，经常遇到的许多问题最终都可归结为解线性方程组，如电学中网络问题、用最小二乘法求实验数据的曲线拟合问题，工程中的三次样条函数的插值问题，经济运行中的投入产出问题以及大地测量、机械与建筑结构的设计计算问题等等，都归结为求解线性方程组或非线性方程组的数学问题。因此线性方程组的求解对于实际问题是极其重要的。

线性方程组分量形式

常见的线性方程组是方程个数和未知量个数相同的n阶线性方程组，一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

线性方程组矩阵形式

简记为 Ax=b，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

一般b≠0, 当系数矩阵A非奇异(即detA≠0)时，方程组（1）有惟一解。

线性方程组的数值解法

线性方程组的数值解法一般有两类：

1. **直接法**：就是经过有限步算术运算，可求得方程组精确解的方法（若计算过程中没有舍入误差），如克莱姆法则就是一种直接法，直接法中具有代表性的算法是高斯(Gauss)消去法。

2. **迭代法:** 就是用某种极限过程去逐步逼近线性方程组的精确解的方法。也就是从解的某个近似值出发，通过构造一个无穷序列去逼近精确解的方法。(一般有限步内得不到精确解)

§ 5.2 高斯消去法

1 高斯消去法的基本思想

先用一个简单实例来说明Gauss法的基本思想

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 & ① \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 & ② \\ x_1 + 2x_2 = 7 & ③ \end{cases}$$

解：该方程组的求解过程实际上是将中学学过的消元法标准化,将一个方程乘或除以某个常数,然后将两个方程相加减,逐步减少方程中的未知数,最终使

消元过程

每个方程只含有一个未知数,从而得出所求的解。

整个过程分为消元和回代两个部分。

（1）消元过程

第1步:将方程①乘上(-2)加到方程 ②上去,将方程 ①乘上$\left(-\frac{1}{2}\right)$加到方程 ③上去,这样就消去了第2、3个方程的 x_1 项,于是就得到等价方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 - x_3 = 2 & ④ \\ \qquad \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = \frac{13}{2} & ⑤ \end{cases}$$

消元过程

第2步：将方程 ④乘上 $\left(-\frac{5}{8}\right)$ 加到方程 ⑤上去，这样就消去了第3个方程的 x_2 项，于是就得到等价方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 4x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad -\dfrac{7}{8}x_3 = \dfrac{21}{4} \end{cases} \qquad ⑥$$

这样，消元过程就是把原方程组化为上三角形方程组，其系数矩阵是上三角矩阵。

回代过程

（2）回代过程

回代过程是将上述三角形方程组自下而上求解，从而求得原方程组的解：

$$x_1 = 9, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = -6$$

增广矩阵

前述的消元过程相当于对原方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

的增广矩阵进行下列变换（ 表示增广矩阵的第 行）

$$\widetilde{A} = [A|b] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+(-\frac{1}{2})r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

同样可得到与原方程组等价的方程组 ⑥

$$\xrightarrow{r_3+(-\frac{5}{8})r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{21}{4} \end{bmatrix}$$

高斯消去法的基本思想

由此看出,高斯消去法解方程组基本思想是设法消去方程组的系数矩阵A的主对角线下的元素,而将Ax=b化为等价的上三角形方程组,然后再通过回代过程便可获得方程组的解。换一种说法就是用矩阵行的初等变换将原方程组系数矩阵化为上三角形矩阵,而以上三角形矩阵为系数的方程组的求解比较简单,可以从最后一个方程开始,依次向前代入求出未知变量 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 这种求解上三角方程组的方法称为回代, 通过一个方程乘或除以某个常数，以及将两个方

高斯消去法的基本思想

程相加减,逐步减少方程中的变元数,最终将方程组化成上三角方程组,一般将这一过程称为消元,然后再回代求解。

通常把按照先消元,后回代两个步骤求解线性方程组的方法称为高斯（Gauss）消去法。

高斯消去法算法构造

2 高斯消去法算法构造

我们知道,线性方程组(1)用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

解线性方程组(1)的高斯（Gauss）消去法的消元过程就是对(3)的增广矩阵进行行初等变换。将例1中解三阶线性方程组的消去法推广到一般的 $n\times n$ 阶

高斯消去法算法构造

线性方程组并记

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, b_i^{(1)} = b_i \, (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

则高斯消去法的算法构造归纳为：

(1) 消元过程,高斯消去法的消元过程由n-1步组成：

第1步 设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$,把(3.3)中的第一列中元素

$a_{21}^{(1)}, a_{31}^{(1)}, \cdots, a_{n1}^{(1)}$ 消为零，令 $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad (i = 2,3,\cdots,n)$

用 $-m_{i1}$ 乘以第1个方程后加到第　个方程上去, 消

去第2～n个方程的未知数 x_1 ，得到 $A^{(2)}x = b^{(2)}$

高斯消去法算法构造

即

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)} \end{cases}$$

$$i, j = 2,3\cdots, n$$

第k步 (k=2,3,…,n-1)继续上述消元过程，设第k-1次消元已经完成，得到与原方程组等价的方程组

高斯消去法算法构造

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^k \end{bmatrix}$$

记为 $A^{(k)}x = b^{(k)}$

其中 $\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)} \end{cases}$ $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ $\quad (i = k+1, \cdots, n)$

$i, j = k+1 \cdots, n$

高斯消去法算法构造

只要$a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 消元过程就可以进行下去, 直到经过n−1次消元之后，消元过程结束，得到与原方程组等价的上三角形方程组, 记为 $A^{(n)}x = b^{(n)}$

或者写成

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad \qquad \cdots\cdots \\ \qquad \qquad \qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{7}$$

(2)回代过程

就是对上三角方程组(7)自下而上逐步回代解方程组计算，即 $x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}, \qquad (i = n-1, \cdots, 2, 1)$$

高斯消去法算法构造

(3) 高斯消去法的计算步骤：

① 消元过程：设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, 对 $k = 1,2,\cdots,n-1$ 计算

$$\begin{cases} m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \end{cases}$$

$$i, j = k+1, k+2, \cdots, n$$

高斯消去法算法构造

② 回代过程

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \end{cases}$$

$$i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

(4)Gauss消去法计算量 $\approx \frac{1}{3} n^3$

① 消元计算： $\mathbf{a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}\, a_{kj}^{(k)}}$

$\mathbf{(i,j=k+1,k+2, \ldots , n)}$

第一 步计算乘数$\mathbf{m_{ik}}$， $\mathbf{m_{ik}=a_{i1}/a_{11}\ (i=2,3,\ldots,n)}$

高斯消去法算法构造

需要n-1次除法运算，计算 $a_{ij}^{(2)}$ (i,j=2,3,…,n)

需要$(n-1)^2$次乘法运算及$(n-1)^2$次加减法运算

第k 步	加减法次数	乘法次数	除法次数
1 2 3 … n-1	$(n-1)^2$ $(n-2)^2$ $(n-3)^2$ … 1	(n-1)2 (n-2)2 (n-3)2 … 1	(n-1) (n-2) (n-3) … 1
合计	n(n-1) (2n-1)/6	n(n-1) (2n-1)/6	n(n-1)/2

高斯消去法算法构造

乘除法次数：

$$MD = n(n-1)(2n-1)/6 + n(n-1)/2 = 1/3\ n(n^2-1)$$

加减法次数： $AS = n(n-1)(2n-1)/6$

3 高斯消去法的适用条件

定理1 方程组系数矩阵的顺序主子式全不为零则高斯消去法能实现方程组的求解。

证明 上三角形方程组是从原方程组出发，通过逐次进行“一行乘一数加到另一行”而得出的，该变换不改变系数矩阵顺序主子式的值。

设方程组系数矩阵 $A=(a_{ij})_n$ ，其顺序主子式

高斯消去法的适用条件

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \quad （m =1, 2, …, n）$$

经变换得到的上三角形方程组的顺序主子式

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1m}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2m}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mm}^{(m)} \end{vmatrix} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{mm}^{(m)} \neq 0$$

（m =1, 2, …, n）所以能实现高斯消去法求解

高斯消去法的适用条件

定义1 设矩阵 $A=(a_{ij})_n$ 每一行对角元素的绝对值都大于同行其他元素绝对值之和

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则称A为严格对角占优矩阵。

定理2 若方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵A为严格对角占优，则用高斯消去法求解时，$a_{kk}^{(k)}$ 全不为零。

高斯消去法的适用条件

证:先考察消元过程的第1步, 因A为严格对角占优, 故

故 $|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$ ， $a_{11}^{(1)} = a_{11} \neq 0$ 又根据高斯消去公式得

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \qquad i, j = 2,3,\cdots,n$$

于是 $$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}^{(2)}\right| \leq \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{1j}\right|$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| - \left|a_{i1}\right| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \left(\sum_{j=2}^{n} \left|a_{1j}\right| - \left|a_{1i}\right|\right)$$

再利用方程组的对角占优性, 由上式可进一步得

高斯消去法的适用条件

$$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| < \left|a_{ii}\right| - \left|a_{i1}\right| + \frac{\left|a_{i1}\right|}{\left|a_{11}\right|}\left(\left|a_{11}\right| - \left|a_{1i}\right|\right) = \left|a_{ii}\right| - \frac{\left|a_{i1}\right|\left|a_{1i}\right|}{\left|a_{11}\right|}$$

又由 $$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \qquad i, j = 2,3,\cdots,n$$

得 $$\left|a_{ii}^{(2)}\right| = \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right| \geq \left|a_{ii}\right| - \frac{\left|a_{i1}\right|\left|a_{1i}\right|}{\left|a_{11}\right|}$$

故有 $$\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(2)}\right| < \left|a_{ii}^{(2)}\right|, \qquad i = 2,3,\cdots,n$$

当A为严格对角占优时, $a_{11}^{(1)} = a_{11} \neq 0$,余下的子阵仍是对角占优的，从而又有 $a_{22}^{(2)} \neq 0$。依次类推全不为零。定理证毕。

高斯消去法的适用条件

一般线性方程组使用高斯消去法求解时，在消元过程中可能会出现 $a_{kk}^{(k)}=0$ 的情况，这时消去法将无法进行；即使 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ ，但它的绝对值很小时，用其作除数，会导致其他元素数量级的严重增长和舍入误差的扩散，将严重影响计算结果的精度。实际计算时必须避免这类情况的发生。主元素消去法就可弥补这一缺陷。

4 高斯主元素消去法

- 交换原则：通过方程或变量次序的交换，使在对角线位置上获得绝对值尽可能大的系数作为$a_{kk}^{(k)}$，称这样的$a_{kk}^{(k)}$ 为主元素，并称使用主元素的消元法为主元素法
- 根据主元素选取范围分为：列主元素法、行主元素法、全主元素法

例题

例2 用高斯消去法求下列方程组的解

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \\ \qquad\ \ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

解： **确定乘数** $m_{21} = 10^5$，**再计算系数**

$$\begin{cases} a_{22}^{(2)} = a_{22} - m_{21}a_{12} = 1 - 10^5 \\ b_2^{(2)} = 2 - 10^5 \end{cases}$$

假设计算在4位浮点十进值的计算机上求解,则有

$$1 - 10^5 = 0.00001 \times 10^5 - 10^5 = -10^5, \qquad 2 - 10^5 = 0.00002 \times 10^5 - 10^5 = -10^5$$

例题

这时方程组的实际形式是
$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \\ -10^5 x_2 = -10^5 \end{cases}$$

由此回代解出 $x_1 = 0, x_2 = 1$,但这个解不满足原方程组,解是错误的。这是因为所用的除数太小使得上式在消元过程中“吃掉”了下式，解决这个问题的方法之一就是采用列选主元高斯消元法。即按列选绝对值大的系数作为主元素，则将方程组中的两个方程相交换，原方程组变为
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

例题

得到消元后的方程组

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 = \quad 2 \\ \quad (1-10^5)\,x_2 = 1-2\times 10^{-5} \end{cases}$$

这时

$$1-10^5 = 0.00001\times 10^5 - 10^5 = -10^5, \qquad 2-10^5 = 0.00002\times 10^5 - 10^5 = -10^5$$

因而方程组的实际形式是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \quad x_2 = 1 \end{cases}$$

由此回代解出 $x_1 = 1, x_2 = 1$,这个结果是正确的

避免采用绝对值很小的主元素

可见用高斯消去法解方程组时,小主元可能导致计算失败,因为用绝对值很小的数作除数,乘数很大,引起约化中间结果数量级严重增长,再舍入就使得计算结果不可靠了,故避免采用绝对值很小的主元素。以便减少计算过程中舍入误差对计算解的影响。

主元素消去法

全主元素消去法是通过方程或变量次序的交换，使在对角线位置上获得绝对值尽可能大的系数作为$a_{kk}^{(k)}$，称这样的$a_{kk}^{(k)}$为主元素。尽管它的算法更稳定，但计算量较大，实际应用中大多数使用列主元素消去法即可满足需要。

例题

全主元素法不是按列选主元素，而是在全体待选系数中选取，则得全主元素法。

例3　用全主元素法解下列线组

$$\begin{cases} 10x_1 - 19x_2 - 2x_3=3 & (1) \\ -20x_1 + 40x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

解：选择所有系数中绝对值最大的40作为主元素，交换第一、二行和交换第一、二列使该主元素位于对角线的第一个位置上，得

例题

$$\begin{cases} 40x_2 - 20x_1 + x_3 = 4 & (4) \\ -19x_2 + 10x_1 - 2x_3 = 3 & (5) \\ 4x_2 + x_1 + 5x_3 = 5 & (6) \end{cases}$$

计算m_{21}=-19/40=0.475，m_{31}=4/40=0.1

(5)- m_{21}(4)，(6)- m_{31}(4) 消去x_2 得

$$\begin{cases} 0.5x_1 - 1.525\, x_3 = 4.9 & (7) \\ 3x_1 + 4.9\, x_3 = 4.6 & (8) \end{cases}$$

选4.9为主元素

$$\begin{cases} 4.9\, x_3 + 3x_1 = 4.6 & (9) \\ 1.525\, x_3 + 0.5x_1 = 4.9 & (10) \end{cases}$$

例题

计算m32=-1.525/4.9=-0.31122，

(10)- m32(9)消去x2得

1.43366x1=6. 33161　(11)

保留有主元素的方程

$$\begin{cases} 40x_2 - 20x_1 + x_3 = 4 & (4) \\ 4.9x_3 + 3x_1 = 4.6 & (9) \\ 1.43366x_1 = 6.33161 & (11) \end{cases}$$

进行回代

$$\begin{cases} x_1 = 4.41634 \\ x_3 = -1.76511 \\ x_2 = 2.35230 \end{cases}$$

例题

列主元素法就是在待消元的所在列中选取主元，经方程的行交换，置主元素于对角线位置后进行消元的方法。

例4　用列主元素法解下列线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{10}x_1 - 19x_2 - 2x_3 = 3 & (1) \\ \boxed{-20}x_1 + 40x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 & (3) \end{cases}$$

解：选择-20作为该列的主元素，

例题

$$\begin{cases} -20x_1 + 40x_2 + x_3 = 3 & (4) \\ 10x_1 - 19x_2 - 2x_3 = 4 & (5) \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5 & (6) \end{cases}$$

计算m21 =10/-20=-0.5

m31=1/-20=-0.05

(5)- m21(4), (6)- m31(4)得

$$\begin{cases} x_2 - 1.5x_3 = 5 & (7) \\ 6x_2 + 5.05x_3 = 5.2 & (8) \end{cases}$$

选6为主元素

例题

$$\begin{cases} 6x_2 + 5.05x_3 = 5.2 & (9) \\ x_2 - 1.5x_3 = 5 & (10) \end{cases}$$

计算$m_{32}=1/6=0.16667$，

(10)- m_{32}(9) 得

$-2.34168x_3=4.13332$ (11)

例题

保留有主元素的方程

$$\begin{cases} -20x_1 + 40x_2 + x_3 = 4 & (4) \\ 6x_2 + 5.05x_3 = 5.2 & (9) \\ -2.34168x_3 = 4.13332 & (11) \end{cases}$$

进行回代

$$\begin{cases} x_3 = -1.76511 \\ x_2 = 2.35230 \\ x_1 = 4.41634 \end{cases}$$

列选主元素的计算方法与高斯消去法完全一样，不同的是在每步消元之前要按列选出主元

例题

例5 用矩阵的初等行变换求解解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$$

解：用矩阵的初等行变换求解，对增广矩阵

（下面带下划线元素为主元素）

例题

$$\widetilde{A}^{(1)}=[A|b]=\begin{bmatrix}2&2&3&3\\4&7&7&1\\-2&4&5&-7\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}4&7&7&1\\2&2&3&3\\-2&4&5&-7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_1]{r_2+\left(-\frac{1}{2}\right)r_1}\begin{bmatrix}4&7&7&1\\0&-1.5&-0.5&2.5\\0&7.5&8.5&-6.5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}4&7&7&1\\0&7.5&8.5&-6.5\\0&-1.5&-0.5&-2.5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\left(\frac{1}{5}\right)r_2}\begin{bmatrix}4&7&7&1\\0&7.5&8.5&-6.5\\0&0&1.2&1.2\end{bmatrix}$$

5.3 矩阵三角分解法

矩阵三角分解法是高斯消去法解线性方程组的一种变形解法

1 矩阵三角分解原理

应用高斯消去法解n阶线性方程组Ax=b，经过n步消元之后，得出一个等价的上三角型方程组$A^{(n)}x=b^{(n)}$，对上三角形方程组用逐步回代就可以求出解来。上述过程可通过矩阵分解来实现。

将非奇异阵A分解成一个下三角阵L和一个上三角阵U的乘积 A=LU称为对矩阵A的三角分解，又称LU分解

矩阵三角分解原理

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=LU$$

其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & & 1 \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & & a_{3n}^{(3)} \\ & & & & \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

矩阵三角分解原理

方程组Ax=b的系数矩阵A经过顺序消元逐步化为上三角型A(n),相当于用一系列初等变换左乘A的结果。事实上，第1列消元将A(1)=A化为A(2)，若令：

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \qquad (i = 2,3,\cdots,n)$$

则根据距阵左乘有$L_1A^{(1)}=A^{(2)}$

矩阵三角分解原理

第2列消元将$A^{(2)}$化为$A^{(3)}$，若令：

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \qquad (i = 3,4,\cdots,n)$$

经计算可知 $L_2A^{(2)}=A^{(3)}$,依此类推,一般有$L_kA^{(k)}=A^{(k+1)}$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -m_{k+1,k} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵三角分解原理

于是矩阵 $A=A^{(1)}$ 经过消元化为上三角阵 $A^{(n)}$ 的过程可表示为 $L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1A=A^{(n)}$

上述矩阵 $L_k\,(k=1,2,\cdots,n-1)$ 是一类初等矩阵, 它们都是单位下三角阵，且其逆矩阵也是单位下三角阵, 只需将 L_k^{-1} 改为 $-m_{ik}$，就得到 $m_{ik}\,(i=k+1,k+2,\cdots,n)$。即

$$L_k^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$m_{i1}=a^{(1)}{}_{i1}/\,a^{(1)}{}_{11}$　　　i=2,3,……n

矩阵三角分解原理

于是有

$$A=(L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1})A^{(n)}=(L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1})U\equiv LU$$

其中

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & & 1\end{bmatrix},\qquad U=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & & a_{3n}^{(3)} \\ & & & & \\ & & & & a_{nn}^{(n)}\end{bmatrix}$$

矩阵三角分解原理

于是得到下述定理：

定理5 设 $A \in R^{n\times n}$ 如果A顺序各阶主子式,

$\det(A_i) \neq 0 (i = 1,2,\cdots,n-1)$,则A可惟一地分解成 一个单位下三角阵L和一个非奇异的上三角阵U的乘积。

证：由于A各阶主子式不为零,则消元过程能进行到底, 前面已证明将方程组的系数矩阵A用初等变换的方法分解成两个三角矩阵的乘积A=LU的过程。

现仅证明分解的惟一性。

设A有两种LU分解 $A = LU = \overline{L}\,\overline{U}$

矩阵三角分解原理

其中 $L,\overline{L}$ 为单位下三角阵， $U,\overline{U}$ 为上三角阵

$\because$ A的行列式 $|A| \neq 0, L, U, \overline{L}, \overline{U}$ 均为非奇异矩阵, 有

$$LU = \overline{L}\,\overline{U}$$

上式两边左边同乘 $\overline{L}^{-1}$ ，右边同乘 U^{-1} 得

$$\overline{L}^{-1}L = \overline{U}U^{-1}$$

上式左边为单位下三角阵, 右边为上三角阵, 故应为单位阵, 即

$$L = \overline{L}, U = \overline{U}$$ 惟一性得证。

矩阵三角分解原理

把A分解成一个单位下三角阵L和一个上三角阵U的乘积称为杜利特尔（Doolittle）分解。其中

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},\qquad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵三角分解原理

若把A分解成一个下三角阵L和一个单位上三角阵U的乘积称为克洛特分解(Crout)

其中

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

2 用三角分解法解方程组

求解线性方程组Ax=b时,先对非奇异矩阵A进行LU分解使A=LU，那么方程组就化为

LU x=b

从而使问题转化为求解两个简单的的三角方程组

L y=b 求解 y

U x=y 求解 x

这就是求解线性方程组的三角分解法的基本思想。下面只介绍杜利特尔（Doolittle）分解法。设A=LU为

用三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法规则 $a_{1i} = u_{1i} \qquad i = 1,2,\cdots,n$

$$a_{i1} = l_{i1}u_{11} \qquad i = 2,3,\cdots,n$$

由此可得U的第1行元素和L的第1列元素

$$u_{1i} = a_{1i} \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \qquad i = 2,3,\cdots,n$$

用三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

再确定U的第k行元素与L的第k列元素,对于

k=2,3, …,n计算：① 计算U的第k行元素

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} \qquad (j=k, k+1, \cdots, n)$$

② 计算L的第k列元素

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}}{u_{kk}} \qquad (i=k, k+1, \ldots, n)$$

用三角分解法解方程组

利用上述计算公式便可逐步求出U与L的各元素

求解 Ly=b **，即计算:**

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \qquad (i = 2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

求解 Ux=y **，即计算:**

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}} \qquad (i = n-1,\cdots,2,1) \end{cases}$$

用三角分解法解方程组

显然，当 $u_{kk} \neq 0(k=1,2,\cdots,n)$时， 解Ax=b直接三角分解法计算才能完成。设A为非奇异矩阵，当 u_{kk} 时计算将中断或者当 $u_{kk}=0$绝对值很小时，按分解公式计算可能引起舍入误差的积累，因此可采用与列主元消去法类似的方法，对矩阵进行行交换，则再实现矩阵的三角分解。

$$L_{n-1}P_{n-1}L_{n-2}P_{n-2}\cdots L_2P_2L_1P_1A = A^{(n)}$$

用直接三角分解法解Ax=b大约需要 $n^3/3$ 次乘除法。

例题

例8 用三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 1 \quad u_{12} = 2 \quad u_{13} = 3 \quad l_{21} = 1 \quad l_{31} = 1$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 1 \times 2 = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 5 - 1 \times 3 = 2$$

例题

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (3 - 1\times 2)/1 = 1$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 6 - 1\times 3 - 1\times 2 = 1$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

求解　Ly=b　得　y= [2，2，1]^T

求解　Ux=y　得　x= [-1，0，1] ^{T}

所以方程组的解为

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$$

3 平方根法

工程实际计算中，线性方程组的系数矩阵常常具有对称正定性，其各阶顺序主子式及全部特征值均大于0。矩阵的这一特性使它的三角分解也有更简单的形式，从而导出一些特殊的解法，如平方根法与改进的平方根法。

定理6 设A是正定矩阵，则存在惟一的对角元素均为正数的下三角阵L，使$A=LL^T$

平方根法

证：因A是正定矩阵，A的顺序主子式

$\Delta_i > 0, \quad i=1, 2, \ldots, n$

因此存在惟一的分解　A=LU

L是单位下三角阵, U是上三角阵, 将U再分解

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \dfrac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \dfrac{u_{n-1,n}}{u_{n-1,n-1}} \\ & & & 1 \end{bmatrix} = DU_0$$

其中D为对角阵, U_0为单位上三角阵，于是

平方根法

$$\mathbf{A = L\,U = L\,D\,U_0}$$

又 $$\mathbf{A = A^T = U_0^T D\,L^T}$$

由分解惟一性, 即得

$$\mathbf{U_0^T = L} \qquad \mathbf{A = L\,D\,L^T}$$

记
$$D = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

又因为$\mathbf{det(A_k) > 0, (k=1,2,\ldots,n)}$, 故 $u_{ii} > 0, (i = 1,2,\cdots,n)$

于是对角阵D还可分解

平方根法

$$D=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}=D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore A=LDL^T=LD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L^T=(LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^T=L_1L_1^T$$

其中 $L_1=LD^{\frac{1}{2}}$**为下三角阵,令L=L1，定理得证。**

将A=LL^T^展开，写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

平方根法

按矩阵乘法展开，可逐行求出分解矩阵L的元素，计算公式是对于i=1, 2, …, n

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}} \qquad j=i+1,\ i+2, \ldots, n$$

这一方法称为平方根法,又称乔累斯基(Cholesky)分解,它所需要的乘除次数约 $\frac{1}{6}n^3$ 为数量级, 比LU分解节省近一半的工作量。

例题

例9　平方根法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解：因方程组系数矩阵对称正定，设A= LL^T **，即：**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

例题

$$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=\sqrt{2-1}=1 \qquad l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=\frac{0-1\times 2}{1}=-2$$

$$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=\sqrt{11-4-4}=\sqrt{3}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & -2 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

由Ly=b解得 $y_1=5, y_2=3, y_3=\sqrt{3}$

由 $L^T x=y$ **解得**

$x_1=-2, x_2=5, x_3=1$

改进的平方根法

由此例可以看出，平方根法解正定方程组的缺点是需要进行开方运算。为避免开方运算，我们改用单位三角阵作为分解阵，即把对称正定矩阵**A**分解成 $A = LDL^T$ 的形式，其中

改进的平方根法

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

为对角阵，而

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

是单位下三角阵, 这里分解公式为

$$\begin{cases} l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{ik} l_{jk}) / d_j & j = 1,2,\cdots,i-1 \\ d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k l_{ik}^2 & i = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

改进的平方根法

据此可逐行计算 $d_1 \to l_{21} \to d_2 \to l_{31} \to l_{32} \to d_3 \to \cdots$

运用这种矩阵分解方法,方程组Ax=b即 $L(DL^T x) = b$

可归结为求解两个上三角方程组 $DL^T x = y$

$$Ly = b \quad \text{和} \quad L^T x = D^{-1} y$$

其计算公式分别为

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

和

$$x_i = y_i / d_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k \qquad i = n, n-1, \cdots, 1$$

改进的平方根法

求解方程组的上述算法称为改进的平方根法。这种方法总的计算量约为 $n^3/6$ ，即仅为高斯消去法计算量的一半。

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & \\
l_{21} & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
d_1 & & \cdots & \\
 & d_2 & \cdots & \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & d_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & l_{21} & & l_{n1} \\
 & 1 & & l_{n2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

例题

例10 用改进的平方根（LDL^T）法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 11 \\ 3x_1 + 7x_2 + 18x_3 = 28 \end{cases}$$

解：方程组系数阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例题

$$=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ l_{21}d_1 & d_2 & 0 \\ l_{31}d_1 & l_{32}d_2 & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得

$$d_1 = 1 \quad l_{21} = 1 \quad l_{31} = 3$$

$$d_2 = 2 \quad l_{32} = 2 \quad d_3 = 1$$

例题

由 $$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\11\\28\end{Bmatrix}$$ 得 $$y=\begin{Bmatrix}5\\6\\1\end{Bmatrix}$$

由 $$\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\6\\1\end{Bmatrix}$$

得 $$x=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

本章小结

- 线性方程组的直接法。
  - 高斯（Gauss）消去
  - LU分解
    - 杜利特尔分解（Doolittle）
    - 克洛特分解(Crout）
  - 平方根法
  - 改进平方根

杜利特尔分解（Doolittle）

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n}\\ & u_{22} & \cdots & u_{2n}\\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

克洛特分解(Crout)

$$L=\begin{bmatrix}l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1 & u_{12} & \cdots & u_{1n}\\ & 1 & \cdots & u_{2n}\\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

平方根法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

改进平方根法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

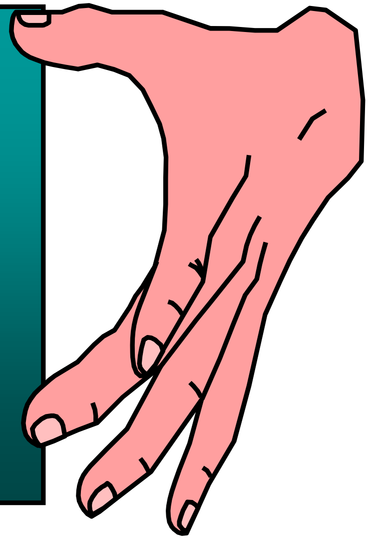
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \cdots & \\ & d_2 & \cdots & \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & & l_{n1} \\ & 1 & & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

本章习题

作业

P177

8,10



一、用改进的平方根（LDL^T）法解方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 16 \\ 5x_1 + 9x_2 + 17x_3 = 30 \end{cases}$

二、用 LU（Doolittle 分解）求线性方程组 $\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

本章结束