# 第9章　常微分方程初值问题数值解法

## §9.1　引言

包含自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。**在微分方程中，自变量的个数只有一个，称为常微分方程**。自变量的个数为两个或两个以上的微分方程叫**偏微分方程**。微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数。如果未知函数y及其各阶导数

$$y', y'', \cdots, y^{(n)}$$

都是一次的,则称它是线性的,否则称为非线性的。

# 引言

在高等数学中，对于常微分方程的求解，给出了一些典型方程求解析解的基本方法，如可分离变量法、常系数齐次线性方程的解法、常系数非齐次线性方程的解法等。但能求解的常微分方程仍然是有限的，大多数的常微分方程是不可能给出解析解。

譬如

$$y' = x^2 + y^2$$

这个一阶微分方程就不能用初等函数及其积分来表达它的解。

# 引言

从**数值计算的角度**，如方程

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的解 $y = e^x$, 虽然有表可查,但对于表上没有给出 $e^x$ 的值,仍需插值方法来计算

# 引言

从实际问题当中归纳出来的微分方程，通常主要依靠数值解法来解决。本章主要讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

在区间a ≤ x ≤ b上的数值解法。

可以证明，如果函数在带形区域 R=a≤x≤b, -∞ < y < ∞} 内连续，且关于$y$满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数L(它与$x, y$无关)使

# 引言

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L\left| y_1 - y_2 \right|$$

**对R内任意两个** $y_1, y_2$ **都成立, 则方程( 1 )的解** $y = y(x)$ **在[a, b]上存在且唯一。**

## §9.2 简单的数值方法

对常微分方程初值问题(1)式的数值解法，就是要算出精确解$y(x)$在区间[a,b]上的一系列离散节点处的函数值 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

$y(x_0), y(x_1), \cdots, y(x_n)$ 的近似值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 。

相邻两个节点的间距 $h = x_{i+1} - x_i$ 称为步长，步长可以相等，也可以不等。本章总是假定h为定数，称为定步长，这时节点可表示为

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

# 数值方法的基本思想

数值解法需要把连续性的问题加以离散化，从而求出离散节点的数值解。

对常微分方程数值解法的基本出发点就是离散化。其数值解法有两个基本特点，它们都采用“步进式”，即求解过程顺着节点排列的次序一步一步地向前推进，描述这类算法，要求给出用已知信息 $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \cdots, y_0$ 计算 $y_{i+1}$ 的递推公式。建立这类递推公式的基本方法是在这些节点上用数值积分、

# 数值方法的基本思想

数值微分、泰勒展开等离散化方法，对初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

中的导数 $y'$ 进行不同的离散化处理。

对于初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

# 数值方法的基本思想

的数值解法，首先要解决的问题就是如何对微分方程进行离散化，建立求数值解的递推公式。递推公式通常有两类，一类是计算$y_{i+1}$时只用到$x_{i+1}$, $x_i$ 和$y_i$，即前一步的值，因此有了初值以后就可以逐步往下计算，此类方法称为**单步法**；其代表是龙格—库塔法。另一类是计算$y_{i+1}$时，除用到$x_{i+1}$, $x_i$和$y_i$以外，还要用到 $x_{i-p}, y_{i-p}\ (p=1,2,\cdots,k)$，即前面k步的值，此类方法称为**多步法**；其代表是亚当斯法。

## 1 Euler公式

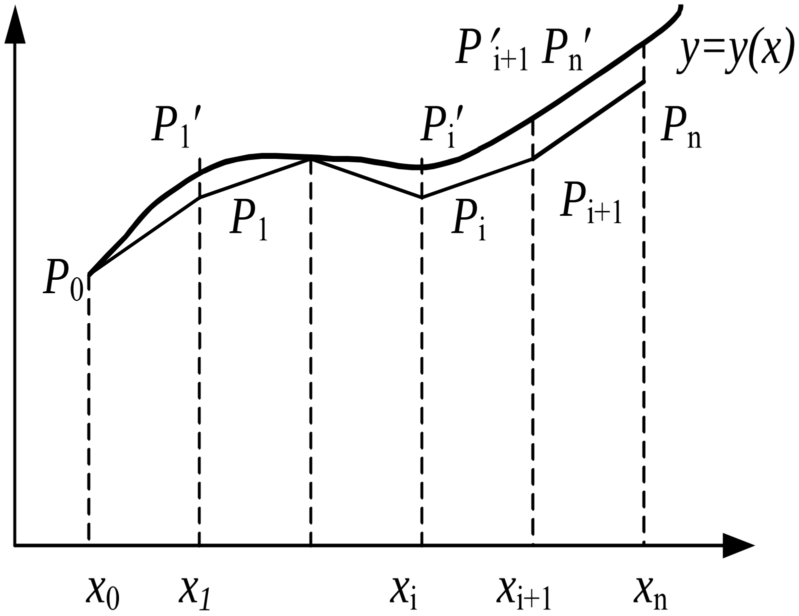
欧拉（Euler）方法是解初值问题的最简单的数值方法。初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解y=y(x)代表通过点$(x_0, y_0)$的一条称之为微分方程的积分曲线。积分曲线上每一点 $(x, y)$ 的切线的斜率 $y'(x)$ 等于函数 $f(x, y)$ 在这点的值。

# Euler公式

Euler法的**求解过程**是:从初始点$P_0$(即点$(x_0,y_0)$)出发,作积分曲线$y=y(x)$在$P_0$点上切线 $\overline{P_0P_1}$ (其斜率为 $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$ ),与$x=x_1$直线

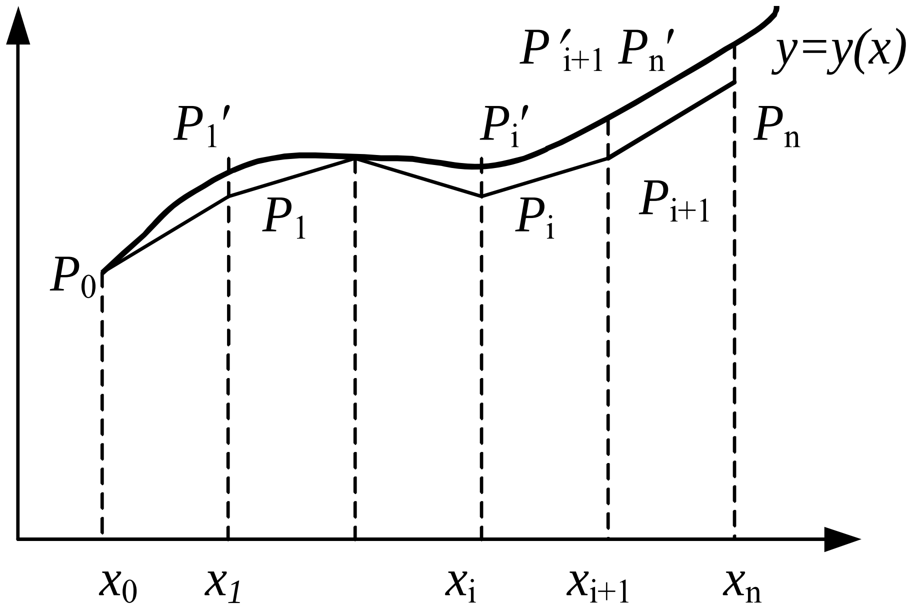



相交于P1点(即点(x1,y1)),得到y1作为y(x1)的近似值,如上图所示。过点(x0,y0),以f(x0,y0)为斜率的切线方程为 $y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$

当$x=x_1$时,得 $y_1=y_0+f(x_0,y_0)(x_1-x_0)$

# Euler公式

这样就获得了P1点的坐标。



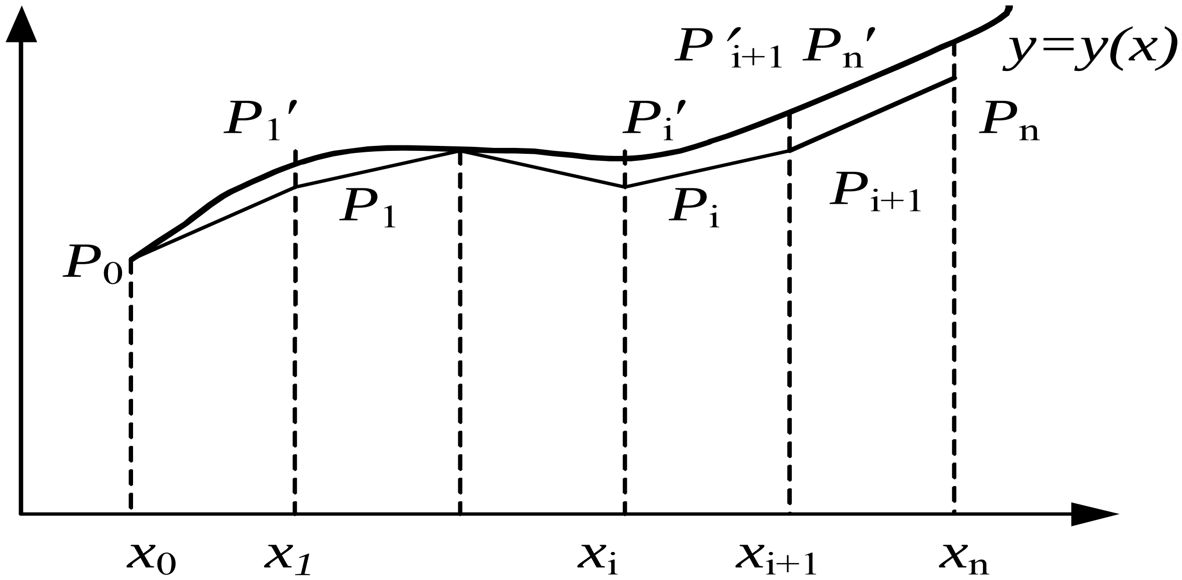

同样，过点$P_1(x_1, y_1)$，作积分曲线$y=y(x)$的切线

交直线$x=x_2$于$P_2$点，切线$\overline{P_1P_2}$ 的斜率$y'(x_1)=f(x_1,y_1)$

直线方程为 $y=y_1+f(x_1,y_1)(x-x_1)$

# Euler公式

当 $x = x_2$ 时, 得 $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$

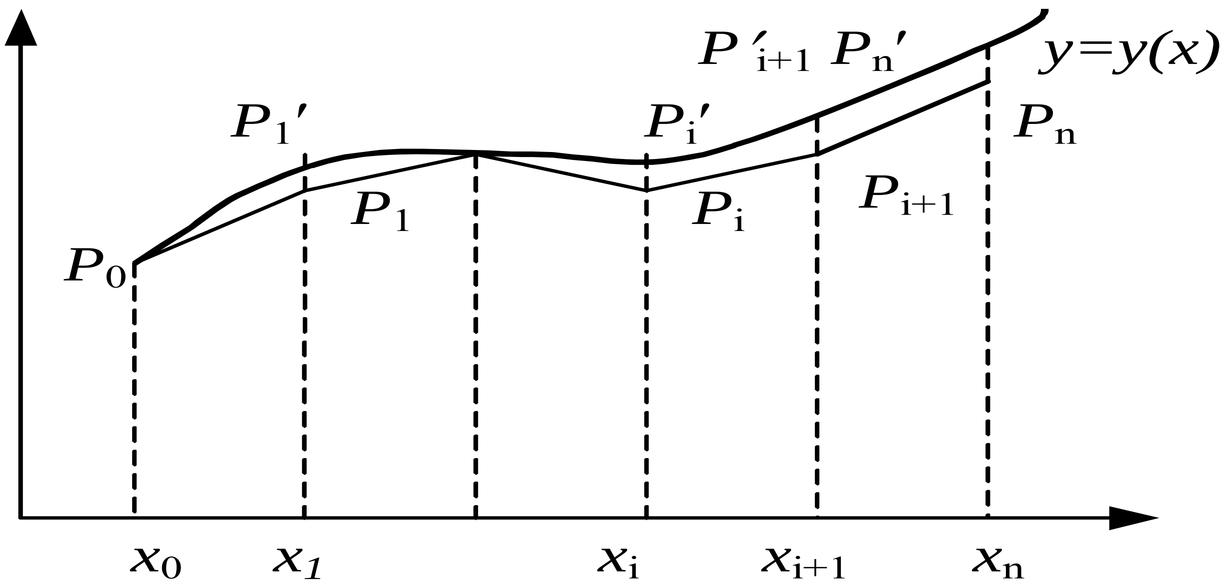



由此获得了$P_2$的坐标。重复以上过程, 就可获得一系列的点: $P_1$, $P_2$, …, $P_n$。对已求得点 $P_n(x_n, y_n)$ 以 $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ 为斜率作直线 $y = y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n)$

# Euler公式

当 $x = x_{n+1}$时, 得 $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{x+1} - x_n)$

取 $y(x_n) \approx y_n$




这样, 从$x_0$逐个算出 $x_1, x_2, \cdots x_n$

对应的数值解 $y_1, y_2, \cdots y_n$

# Euler公式

从图形上看,就获得了一条近似于曲线y=y(x)的折线 $\overline{P_1P_2P_3\cdots P_n}$ 。

通常取 $x_{i+1}-x_i=h_i=h$(常数),则**Euler**法的计算格式

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) \\ y_0=y(x_0) \end{cases} \quad \boldsymbol{i=0,1,\ldots,n} \qquad (2)$$

还可用数值微分、数值积分法和泰勒展开法推**Euler**格式。以数值积分为例进行推导。

将方程 $y'=f(x,y)$ 的两端在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上积分得,

# Euler公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x,y(x)]dx \quad \textbf{(3)}$$

**选择不同的计算方法计算上式的积分项**

**$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x,y(x)]dx$ ,就会得到不同的计算公式。**

**用左矩形方法计算积分项**

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x,y(x)]dx \approx (x_{i+1} - x_i) f[x_i, y(x_i)]$$

# Euler公式

代入(3)式,并用$y_i$近似代替式中$y(x_i)$即可得到向前欧拉（Euler）公式

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

由于数值积分的矩形方法精度很低，所以欧拉（Euler）公式当然很粗糙。

# 例题

**例1 用欧拉法解初值问题**

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 & (0 \le x \le 0.6) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**取步长h=0.2 ,计算过程保留4位小数**

**解: h=0.2,** $f(x, y) = -y - xy^2$ **欧拉迭代格式**

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i - hy_i - hx_i y_i^2$$

$$= 0.2y_i(4 - x_i y_i^2) \qquad (i = 0,1,2)$$

# 例题

当 $i=0,\ x_1=0.2$时，已知$x_0=0$，$y_0=1$，有

$$y(0.2)\approx y_1=0.2\times 1(4-0\times 1)=0.8$$

当 $i=1,\ x_2=0.4$时，已知$x_1=0.2$，$y_1=0.8$，有

$$y(0.4)\approx y_2=0.2\times 0.8\times(4-0.2\times 0.8)=0.6144$$

当 $i=2,\ x_3=0.6$时，已知$x_2=0.4$，$y_2=0.6144$，有

$$y(0.6)\approx y_3=0.2\times 0.6144\times(4-0.4\times 0.6144)=0.4613$$

# 梯形公式

## 2 梯形公式

为了提高精度，对方程 $y' = f(x, y)$ 的两端在区间上 $[x_i, x_{i+1}]$ 积分得，

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]dx \qquad (4)$$

改用梯形方法计算其积分项，即

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

代入(4)式，并用近似代替式中即可得到梯形公式

# 梯形公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \qquad (5)$$

由于数值积分的梯形公式比矩形公式的精度高，因此梯形公式（5）比欧拉公式(2)的精度高的数值方法。

(5)式的右端含有未知的$y_{i+1}$,它是一个关于$y_{i+1}$的函数方程,这类数值方法称为隐式方法。相反地,欧拉法是关于$y_{i+1}$的一个直接的计算公式， 这类数值方法称为显式方法。

# 欧拉法的局部截断误差

## 4 欧拉法的局部截断误差

衡量求解公式好坏的一个主要标准是求解公式的精度, 因此引入局部截断误差和阶数的概念。

**定义1** 在$y_i$准确的前提下, 即$y_i = y(x_i)$ 时, 用数值方法计算$y_{i+1}$的误差 $R_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ ，称为该数值方法计算时$y_{i+1}$的局部截断误差。

对于欧拉公式，假定 $y_i = y(x_i)$ ，则有

$$y_{i+1} = y(x_i) + h\left[f(x_i, y(x_i))\right] = y(x_i) + hy'(x_i)$$

# 欧拉法的局部截断误差

而将真解y(x)在$x_i$处按二阶泰勒展开

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi) \qquad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

因此有 $$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^2}{2!}y''(\xi)$$

**定义2** 数值方法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$,则称这种数值方法的阶数是P。步长(h<1) 越小,P越高，则局部截断误差越小,计算精度越高。欧拉公式的局部截断误差为 $O(h^2)$ ,**欧拉方法仅为一阶方法**。

## 5 改进的欧拉公式 ***

显式欧拉公式计算工作量小,但精度低。梯形公式虽提高了精度,但为隐式公式,需用迭代法求解,计算工作量大。综合欧拉公式和梯形公式便可得到改进的欧拉公式。

先用欧拉公式(2)求出一个初步的近似值 $\bar{y}_{i+1}$,称为预测值, 它的精度不高, 再用梯形公式(5)对它

# 改进的欧拉公式

校正一次,即迭代一次,求得$y_{i+1}$,称为校正值，这种预测-校正方法称为改进的欧拉公式：

预测

校正

$$\begin{cases} \overline{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y}_{i+1})\right] \end{cases} \quad (10)$$

$$i = 0,1,2\cdots, n-1$$

可以证明,公式(10)的精度为二阶。这是一种一步显式格式,它可以表示为嵌套形式。

# 改进的欧拉公式

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[ f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)) \right] \qquad \text{（11）}$$

**或者表示成下列平均化形式**

$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \qquad i = 0,1,2\cdots,n-1 \end{cases} \qquad \text{（12）}$$

# 改进欧拉算法的实现

## 6 改进欧拉法算法实现

### （1）计算步骤

① 输入 $x_0, x_1$, **h** , **N**

② 使用以下改进欧拉法公式进行计算

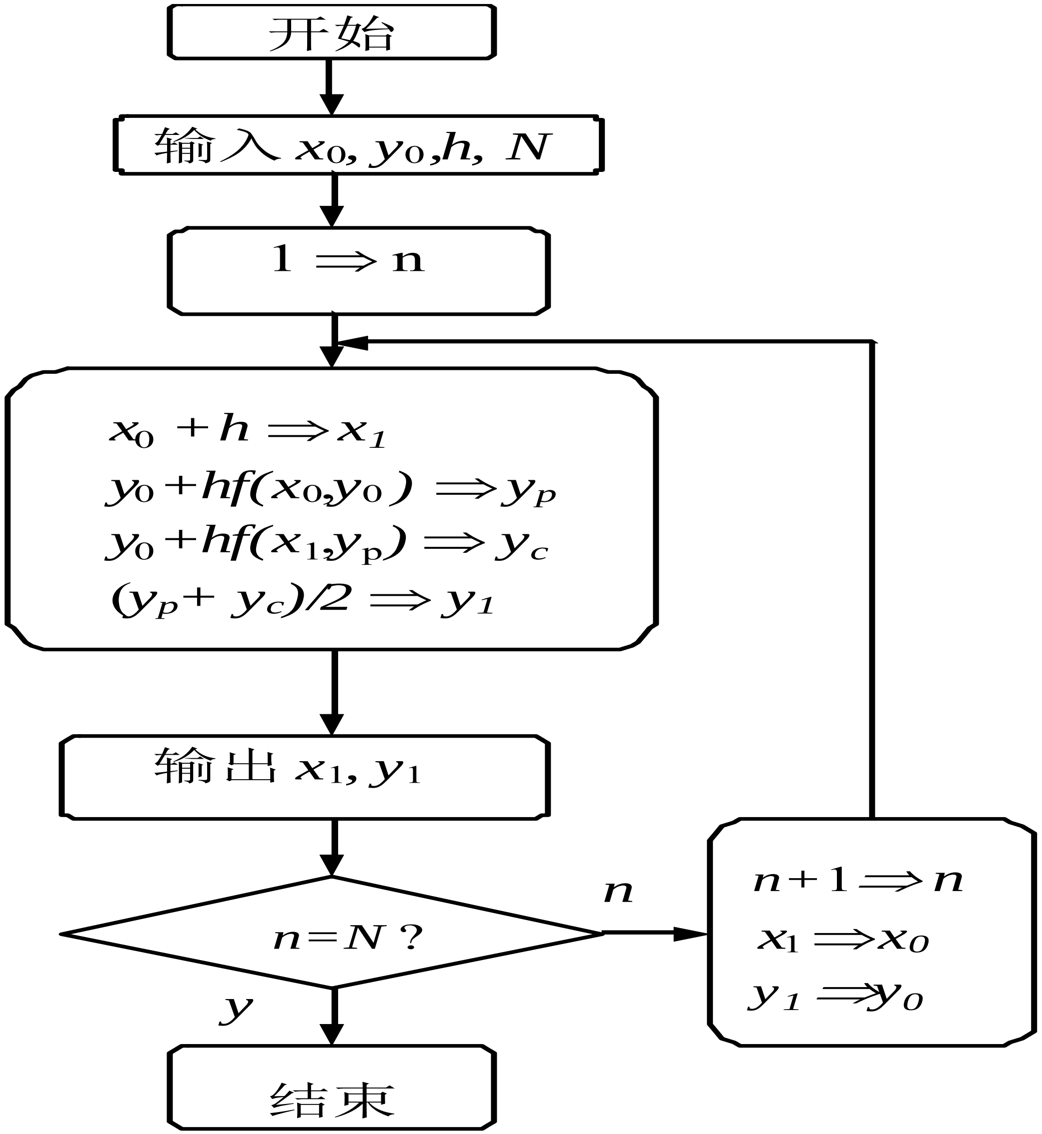
$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

③ 输出 $x_1, y_1$，并使 $x_1 \Rightarrow x_0, y_1 \Rightarrow y_0$

转到 ② 直至**n** > **N** 结束。

# 改进欧拉算法实现

（2）改进欧拉法的流程图



# 例题

**例2 用改进欧拉法解初值问题**

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

**区间为[0,1],取步长h=0.1**

**解: 改进欧拉法的具体形式**

$$\begin{cases} y_p = y_i + 0.1(y_i - \dfrac{2x_i}{y_i}) \\ y_c = y_i + 0.1(y_p - \dfrac{2x_{i+1}}{y_p}) \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

**本题的精确解为** $y(x) = \sqrt{1+2x}$ **,计算结果略。**

# 例题

**例3 对初值问题** $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

**证明用梯形公式求得的近似解为**

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n \qquad x = nh$$

**并证明当步长h→0时,$y_n$收敛于精确解** $e^{-x}$

**证明: 解初值问题的梯形公式为**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

# 例题

$$\because \quad f(x,y) = -y$$

$$\therefore \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$$

**整理成显式** $y_{n+1} = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right) y_n$ **反复迭代, 得到**

$$y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right) y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^3 y_{n-2}$$

$$= \dots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

# 例题

$\because \quad y_0 = 1 \qquad \therefore \quad y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$

由于 $x = nh$ ，有

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-\dfrac{h}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{h}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)}}{\left(1+\dfrac{h}{2}\right)^{\left(\frac{2}{h}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \mathrm{e}^{-x}$$

$\therefore \quad \lim\limits_{h\to 0} y_n = \mathrm{e}^{-x}$ 证毕

# §9.3 龙格-库塔方法

## 1 龙格-库塔(Runge-Kutta)法的基本思想

**Euler公式可改写成**

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hK_1 \\ K_1 = f(x_i, y_i) \end{cases}$$

**则$y_{i+1}$的表达式$y(x_{i+1})$与的Taylor展开式的前两项完全相同,即局部截断误差为** $O(h^2)$ 。

**改进的Euler公式又可改写成**

# 龙格-库塔法的基本思想

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_{i+1}, y_i + hK_1) \end{cases}$$

**上述两组公式在形式上有一个共同点:都是用f(x,y)在某些点上值的线性组合得出$y(x_{i+1})$的近似值$y_{i+1}$,而且增加计算的次数*f*(x,y)的次数,可提高截断误差的阶。如欧拉公式:每步计算一次*f*(x,y)的值,为一阶方法。改进欧拉公式需计算两次*f*(x,y)的值,它是二阶方法。它的局部截断误差为** $O(h^3)$ **。**

## 龙格-库塔法的基本思想

于是可考虑用函数$f(x,y)$在若干点上的函数值的线性组合来构造近似公式，构造时要求近似公式在$(x_i,y_i)$处的Taylor展开式与解$y(x)$在$x_i$处的Taylor展开式的前面几项重合，从而使近似公式达到所需要的阶数。既避免求偏导,又提高了计算方法精度的阶数。或者说,在 $[x_i, x_{i+1}]$ 这一步内多预报几个点的斜率值，然后将其加权平均作为平均斜率，则可构造出更高精度的计算格式，这就是龙格—库塔（Runge-Kutta）法的基本思想。

## 2 二阶龙格—库塔法

在 $[x_i, x_{i+1}]$上取两点$x_i$和 $x_{i+p} = x_i + ph$ ,以该两点处的斜率值$k_1$和$k_2$的加权平均(或称为线性组合)来求取平均斜率$k^*$的近似值$K$，即

$$K = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$$

式中: $k_1$为$x_i$点处的切线斜率值, $k_1 = f(x_i, y_i) = y'(x_i)$

$k_2$为$x_i + ph$点处的切线斜率值,比照改进的欧拉法,将 $x_{i+p}$ 视为 $x_{i+1}$，即可得

# 二阶龙格-库塔法

$$k_2 = f(x_i + ph, y_i + phk_1)$$

**对常微分方程初值问题(1)式的解 $y=y(x)$,根据微分中值定理，存在点 $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ ，使得**

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = y'(\xi)(x_{i+1} - x_i)$$

**也即** $$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hK \qquad \text{(13)}$$

**式中** $$K = y'(\xi) = f(\xi, y(\xi))$$

**K可看作是y=y(x)在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的平均斜率。所以**

# 二阶龙格-库塔法

**可得计算公式为：**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hK \qquad \text{(14)}$$

$$= y(x_i) + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)$$

**将$y(x_i)$在$x=x_i$处进行二阶Taylor展开：**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + O(h^3) \qquad \text{(15)}$$

**将** $k_2 = y'(x_i + ph) = f(x_i + ph, y_i + phk_1)$

**在x=xi处进行一阶Taylor展开：**

# 二阶龙格-库塔法

$$k_2 = f(x_i, y_i) + ph\left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)\right] + O(h^2)$$

$$= y'(x_i) + ph \cdot y''(x_i) + O(h^2)$$

**将以上结果代入（14）得：**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)$$

$$= y(x_i) + h\left\{\lambda_1 y'(x_i) + \lambda_2 \left[y'(x_i) + ph \cdot y''(x_i) + O(h^2)\right]\right\}$$

$$= y(x_i) + h(\lambda_1 + \lambda_2) y'(x_i) + \lambda_2 ph^2 y''(x_i) + O(h^3) \quad \text{（16）}$$

**对式(15)和(16)进行比较系数后可知,只要**

# 二阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 \cdot p = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (17)$$

有2阶精度

成立,格式(14)的局部截断误差就等于$O(h^3)$

式(17)中具有三个未知量,但只有两个方程,因而有无穷多解。若取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ ,则$p$=1，这是无穷多解中的一个解，将以上所解的值代入式(14)并改写可得

# 二阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1) \end{cases}$$

不难发现，上面的格式就是改进的欧拉格式。凡满足条件式（17）有一簇形如上式的计算格式，这些格式统称为二阶龙格—库塔格式。因此改进的欧拉格式是众多的二阶龙格—库塔法中的一种特殊格式。

# 二阶龙格-库塔法

若取 $\lambda_1 = 0$ ,则 $\lambda_2 = 1, p = \frac{1}{2}$ ，此时二阶龙格-库塔法的计算公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \end{cases} i = 0,1,2\cdots, n-1$$

此计算公式称为变形的二阶龙格—库塔法。式中 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 为区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的中点。

## 3 三阶龙格-库塔法

为了进一步提高精度，设除 $x_{i+p}$ 外再增加一点

$$x_{i+q} = x_i + qh \qquad (p \le q \le 1)$$

并用三个点 $x_i$，$x_{i+p}$，$x_{i+q}$ 的斜率 $k_1,k_2,k_3$ 加权平均得出平均斜率 $k^*$ 的近似值，这时计算格式具有形式:

# 三阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h[(1-\lambda-\mu)k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3] \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + ph, y_i + phk_1) \end{cases} \qquad (18)$$

为了预报点 $x_{i+q}$ 的斜率值**$k_3$**,在区间 $[x_i, x_{i+q}]$内有两个斜率值**$k_1$**和**$k_2$**可以用,可将**$k_1$**,**$k_2$**加权平均得出$[x_i, x_{i+q}]$上的平均斜率,从而得到 $y(x_{i+q})$的预报值 $y_{i+q}$

$$y_{i+q} = y_i + qh[(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2]$$

于是可得 $k_3 = f(x_{i+q}, y_{i+q})$

# 三阶龙格-库塔法

运用Taylor展开方法选择参数 $p,q,\lambda,\mu,\alpha$ ,可以使格式(18)的局部截断误差为 $O(h^4)$ ,即具有三阶精度，这类格式统称为三阶龙格—库塔方法。下列是其中的一种，称为库塔（Kutta）公式。

$$
\begin{cases}
k_1 = f(x_i, y_i) \\
k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\
k_3 = f(x_{i+1}, y_i + h(-k_1 + 2k_2)) \\
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)
\end{cases}
\quad （19）
$$

# 四阶龙格-库塔法

## 4 四阶龙格—库塔法

如果需要再提高精度，用类似上述的处理方法，只需在区间 $\left[x_i, x_{i+q}\right]$上用四个点处的斜率加权平均作为平均斜率$k^*$的近似值，构成一系列四阶龙格—库塔公式。具有四阶精度，即局部截断误差是 $O(h^5)$ 。

由于推导复杂，这里从略，只介绍最常用的一种四阶经典龙格—库塔公式。

# 四阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \qquad (20)$$

# 四阶龙格-库塔法算法实现

## 5 四阶龙格—库塔法算法实现

**(1) 计算步骤**

① 输入 $x_0, x_1$ ,$\boldsymbol{h}$,$\boldsymbol{N}$

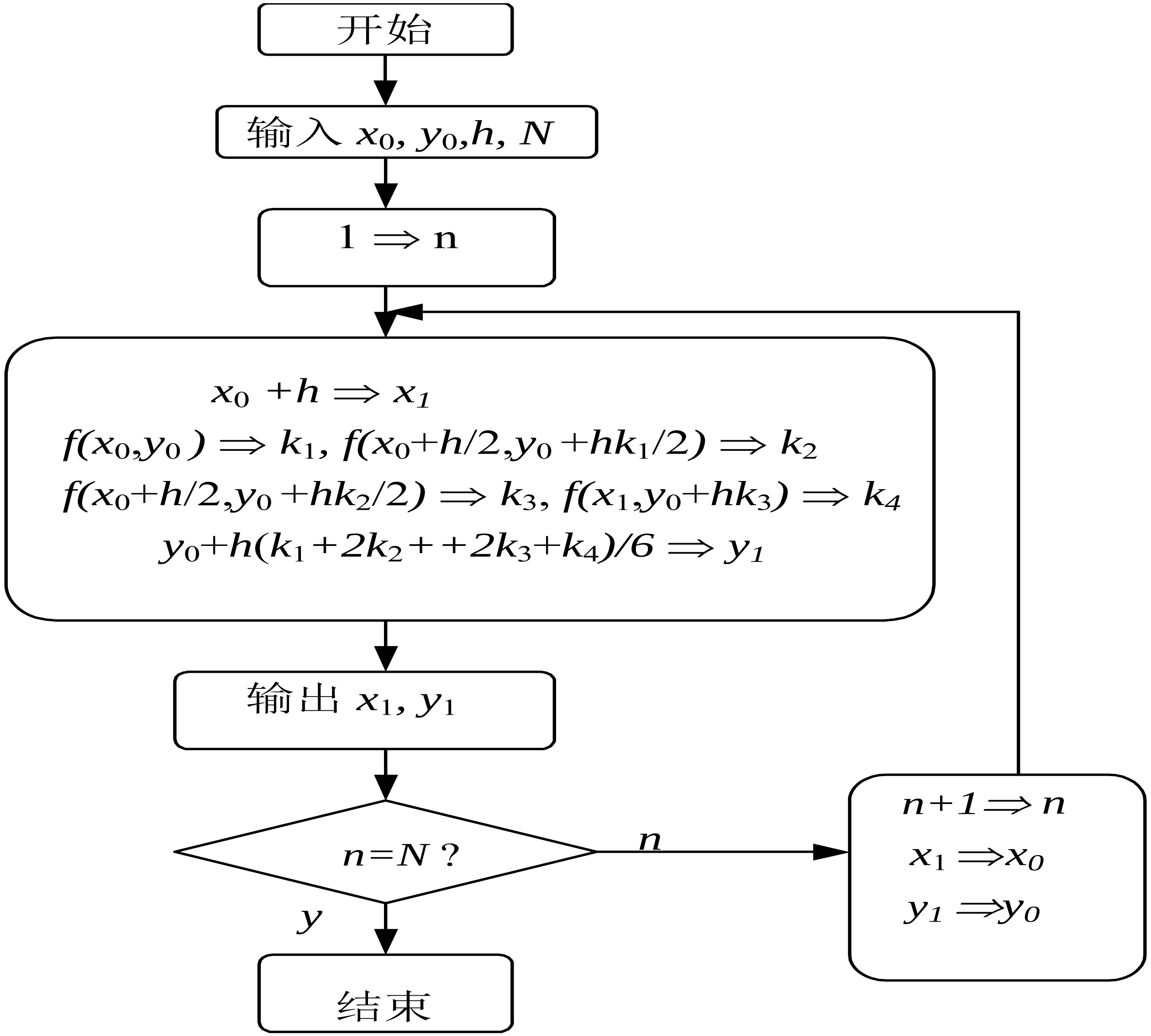
② 使用龙格—库塔公式（20）计算出$\mathbf{y_1}$

③ 输出 $x_1, y_1$ ，并使 $x_1 \Rightarrow x_0, y_1 \Rightarrow y_0$

转到 ② 直至$n > N$ 结束。

# 四阶龙格-库塔法算法实现

（2）四阶龙格—库塔算法流程图



# 例题

**例4　取步长h=0.2，用经典格式求解初值问题**

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad 0 \le x \le 1$$

**解:** $f(x,y) = 2xy, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad h = 0.2$

**由四阶龙格-库塔公式可得**

$$k_1 = f(x_0, y_0) = 0$$

$$k_2 = f(x_{0+\frac{h}{2}}, y_0 + \frac{h}{2}k_1) = f(0.1, 1) \approx 0.2$$

$$k_3 = f(x_{0+\frac{h}{2}}, y_0 + \frac{h}{2}k_2) = f(0.1, 1.02) \approx 0.204$$

# 例题

$$k_4 = f(x_{0+h}, y_0 + hk_3) = f(0.2,1.0408) \approx 0.41632$$

$$y_1 = y_0 + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 1.040811$$

可同样进行其余yi的计算。本例方程的解为 $y = e^{x^2}$

龙格—库塔方法的推导基于Taylor展开方法，因而它要求所求的解具有较好的光滑性。如果解的光滑性差，那么，使用四阶龙格—库塔方法求得的数值解，其精度可能反而不如改进的欧拉方法。在实际计算时，应当针对问题的具体特点选择合适的算法。

## 6 变步长的龙格-库塔法

在微分方程的数值解中，选择适当的步长是非常重要的。单从每一步看，步长越小，截断误差就越小；但随着步长的缩小，在一定的求解区间内所要完成的步数就增加了。这样会引起计算量的增大，并且会引起舍入误差的大量积累与传播。因此微分方程数值解法也有选择步长的问题。

以经典的四阶龙格-库塔法(20)为例。从节点$x_i$出发，先以h为步长求出一个近似值，记为$y_{i+1}^{(h)}$，

# 变步长的龙格-库塔法

由于局部截断误差为$O(h^5)$，故有

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(h)} \approx ch^5$$

当h值不大时，式中的系数c可近似地看作为常数。

然后将步长折半,即以为 $\frac{h}{2}$ 步长,从节点$x_i$出发,跨两步到节点$x_{i+1}$,再求得一个近似值 $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ ,每跨一步的截断误差是 $c\left(\frac{h}{2}\right)^5$ ,因此有

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i+1}^{(\frac{h}{2})}) \approx 2c\left(\frac{h}{2}\right)^5$$

# 变步长的龙格-库塔法

这样 $$\frac{y(x_{i+1})-y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{i+1})-y_{i+1}^{(h)}}\approx\frac{1}{16}$$

由此可得 $$y(x_{i+1})-y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}\approx\frac{1}{15}\left(y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{i+1}^{(h)}\right)$$

这表明以 $y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}$ 作为$y(x_{i+1})$的近似值，其误差可用步长折半前后两次计算结果的偏差 $\Delta=\left|y_{i+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{i+1}^{(h)}\right|$

来判断所选步长是否适当

# 变步长的龙格-库塔法

当要求的数值精度为ε时：

（1）如果Δ>ε，反复将步长折半进行计算，直至Δ<ε为止,并取其最后一次步长的计算结果作为 $y_{i+1}$

（2）如果Δ<ε，反复将步长加倍，直到Δ>ε为止，并以上一次步长的计算结果作为 $y_{i+1}$ 。

这种通过步长加倍或折半来处理步长的方法称为变步长法。表面上看，为了选择步长，每一步都要反复判断Δ，增加了计算工作量，但在方程的解y(x)变化剧烈的情况下，总的计算工作量得到减少，结果还是合算的。

# 本章小结

本章介绍了常微分方程初值问题的基本数值解法。包括单步法和多步法。单步法主要有欧拉法、改进欧拉法和龙格—库塔方法。多步法是亚当姆斯法。它们都是基于把一个连续的定解问题离散化为一个差分方程来求解，是一种步进式的方法。用多步法求常微分方程的数值解可获得较高的精度。

实际应用时，选择合适的算法有一定的难度，既要考虑算法的简易性和计算量，又要考虑截断误差和收敛性、稳定性。

# 本章小结

龙格-库塔法较为常用，适用于多步方法中作初值计算和函数f(x,y)较为简单的场合。四阶标准龙格—库塔法精度高，程序简单，易于改变步长，比较稳定，也是一个常用的方法，但计算量较大。当函数f(x,y)较为复杂，可用显式亚当姆斯方法或亚当姆斯预测—校正方法，不仅计算量较小，稳定性也比较好，但不易改变步长。

一般采用龙格—库塔法提供初值$y_1$, $y_2$, $y_3$，然后用亚当姆斯外推公式求得预测值 $y_{i+1}^{(0)}$ ，再由

# 本章小结

亚当姆斯内插值求得校正值$y_{i+1}$，如此求得的值近似程度好且节省计算量，是一种较好的方法。

# 本章习题

# 本章结束