第7章 非线性方程与方程组的数值解法

§ 7.1 方程求根与二分法

在科学研究和工程设计中，经常会遇到的一大类问题是非线性方程

$$f(x)=0 \tag{7.1}$$

的求根问题，其中f(x)为**非线性函数**。

方程f(x)=0的根, 亦称为函数f(x)的**零点**。

如果f(x)可以分解成 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中m为正整数且 $g(x^*)\neq 0$ ，则称x^*是f(x)的**m重零点**, 或称方程f(x)=0的**m重根**。当m=1时称x^*为单根。若f(x)存在m阶导数, 则是方程f(x)的m重根(m>1) 当且仅当

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\ f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

非线性方程的概念

当$f(x)$不是x的线性函数时，称对应的函数方程为**非线性方程**。如果$f(x)$是多项式函数，则称为**代数方程**，否则称为**超越方程**（三角方程，指数、对数方程等）。一般称n次多项式构成的方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

为n次代数方程, 当n＞1时, 方程显然是非线性的

一般稍微复杂的3次以上的代数方程或超越方程,很难甚至无法求得精确解。本章将介绍常用的求解非线性方程的近似根的几种数值解法

求根步骤

通常方程根的数值解法大致分为三个步骤进行

① 判定根的存在性。即方程有没有根？如果有根，有几个根？

② 确定根的分布范围。即将每一个根用区间隔离开来，这个过程实际上是获得方程各根的初始近似值。

③ 根的精确化。将根的初始近似值按某种方法逐步精确化，直到满足预先要求的精度为止

二分法

二分法又称二分区间法，是求解方程(7.1)的近似根的一种常用的简单方法。

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，根据连续函数的性质可知，$f(x)=0$在(a,b)内必有实根，称区间$[a,b]$为有根区间。为明确起见，假定方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$内有惟一实根x^*。

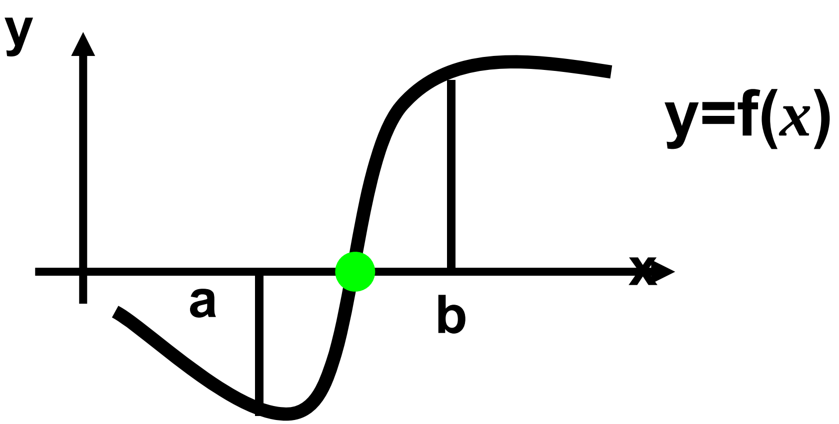
二分法的基本思想是：首先确定有根区间，将区间二等分，通过判断$f(x)$的符号，逐步将有根区间缩小，直至有根区间足够地小，便可求出满足精度要求的近似根。

有根区间的确定

- 为了确定根的初值，首先必须圈定根所在的范围，称为<u>圈定根或根的隔离</u>。
- 在上述基础上，采取适当的数值方法确定具有一定精度要求的初值。
- 对于代数方程，其根的个数（实或复的）与其次数相同。至于超越方程，其根可能是一个、几个或无解，并没有什么固定的圈根方法
- 求方程根的问题，就几何上讲,是求曲线 $y=f(x)$与x轴交点的横坐标。

有根区间的确定

由高等数学知识知，设$f(x)$为区间$[a,b]$上的单值连续，如果$f(a)\cdot f(b)<0$，则$[a,b]$中至少有一个实根。如果$f(x)$在$[a,b]$上还是单调地递增或递减，则仅有一个实根。



- 大体确定根所在子区间的方法有：

  (1) 画图法　　　(2) 逐步搜索法

画图法

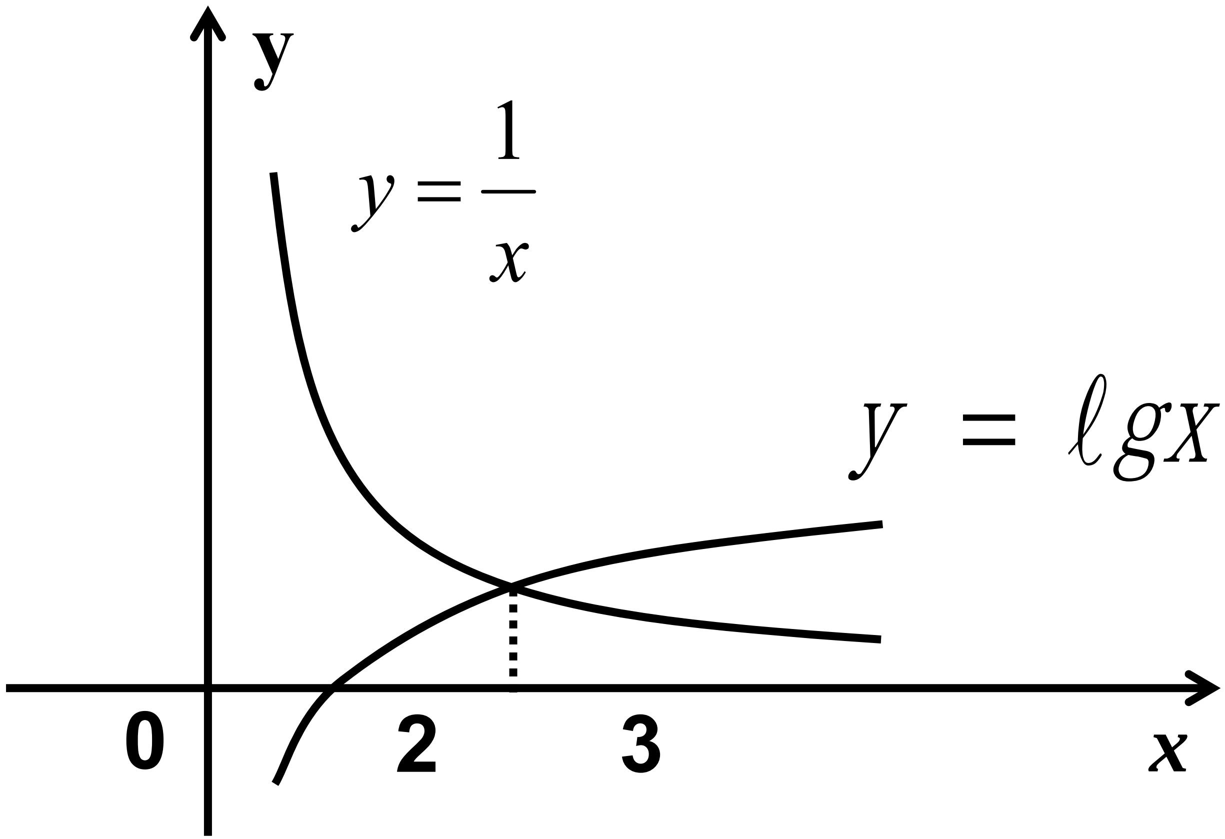
- 画出$y = f(x)$的略图，从而看出曲线与x轴交点的大致位置。
- 也可将$f(x) = 0$分解为$\varphi_1(x)= \varphi_2(x)$的形式，$\varphi_1(x)$与 $\varphi_2(x)$两曲线交点的横坐标所在的子区间即为含根区间。

例如 $xlogx-1= 0$

可以改写为$logx=1/x$

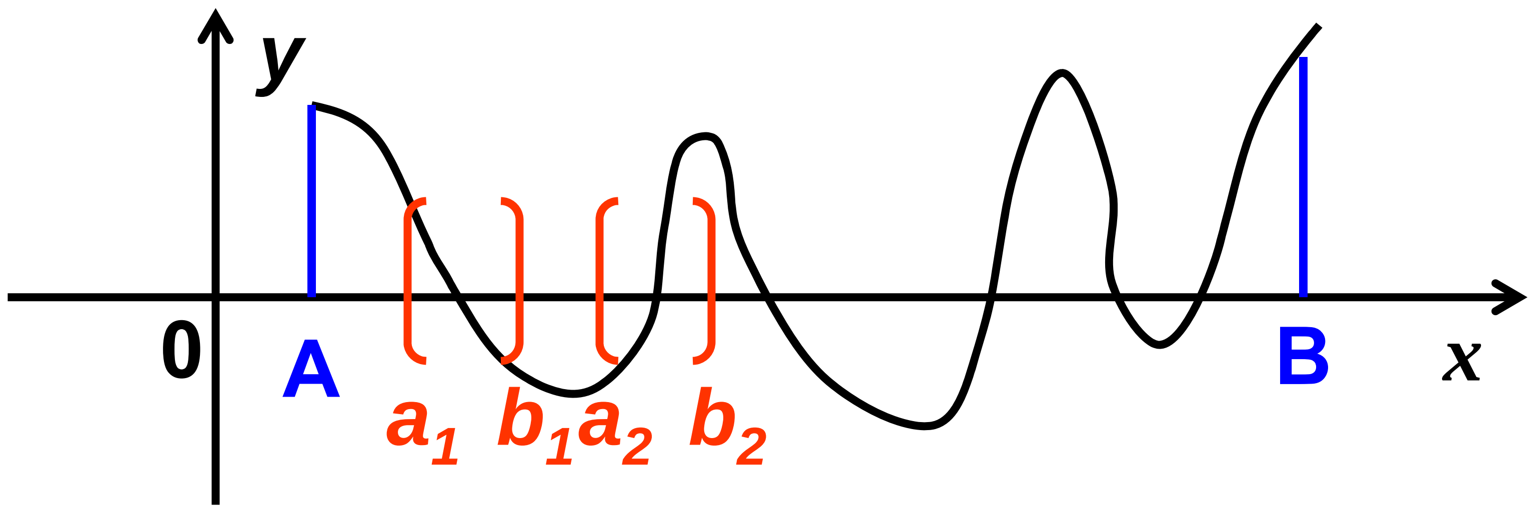
画出对数曲线$y=logx$, 与双曲线$y= 1/x$,它们交点的横坐标位于区间[2, 3]内

画图法



搜索法

对于给定的$f(x)$,设有根区间为[A, B],从x_0=A出发, 以步长h=(B-A)/n(n是正整数),在[A, B]内取定节点:$x_i=x_0+ih$ (i=0,1,2,…, n),从左至右检查f (x_i)的符号, 如发现x_i与端点x_0的函数值异号, 则得到一个缩小的有根子区间［x_{i-1}, x_i］。



例题

例7.1 方程$f(x)=x^3-x-1=0$ 确定其有根区间

解：用试凑的方法，不难发现

f(0)<0 f(2)>0

在区间（0，2）内至少有一个实根

设从x=0出发，取h=0.5为步长向右进行根的搜索，列表如下

x	0	0.5	1.0	1.5	2
f(x)	–	–	–	+	+

可以看出，在[1.0,1.5]内必有一根

搜索法

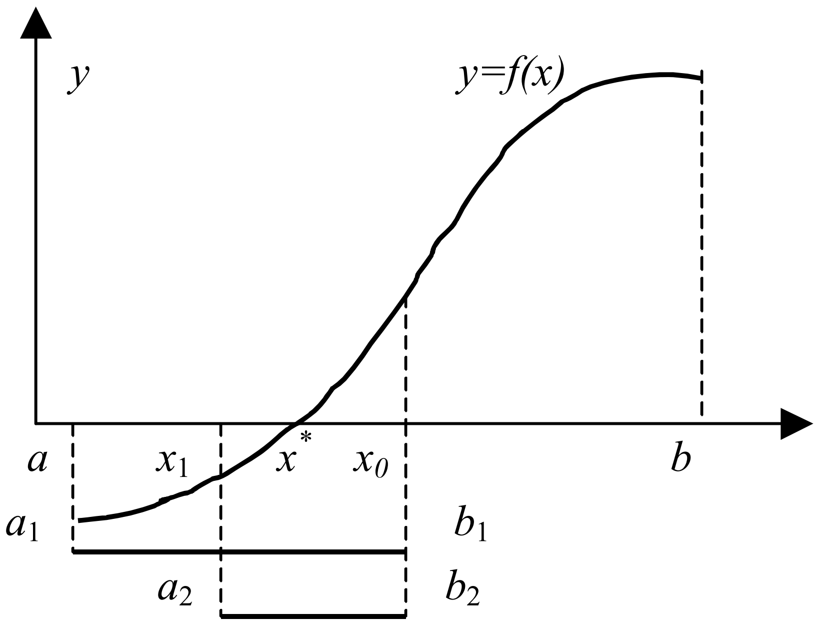
- 用逐步搜索法进行实根隔离的关键是选取步长h
- 要选择适当h，使之既能把根隔离开来，工作量又不太大。
- 为获取指定精度要求的初值, 可在以上隔离根的基础上采用对分法继续缩小该含根子区间

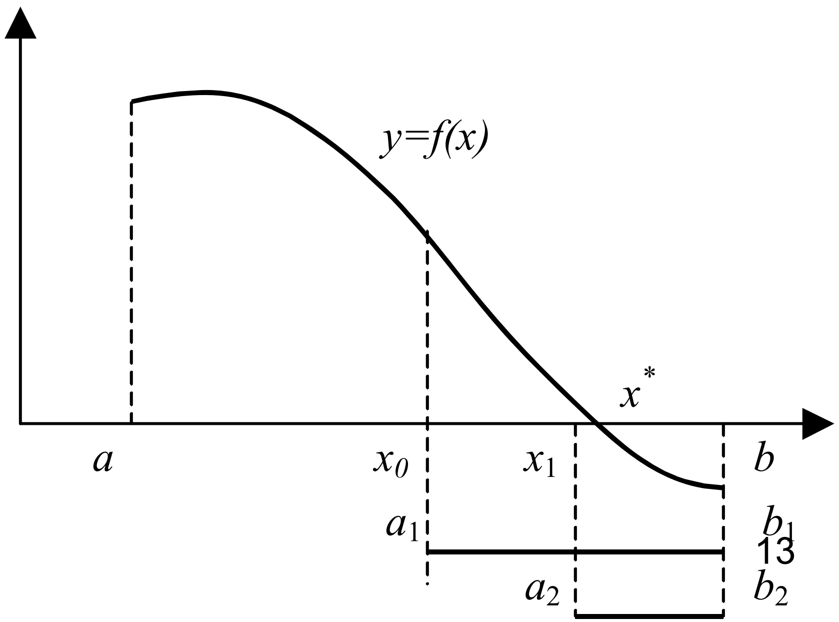
二分法可以看作是搜索法的一种改进。

二分法求根过程

设方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$内有根，二分法就是逐步收缩有根区间，最后得出所求的根。具体过程如下

① 取有根区间$[a,b]$之中点, 将它分为两半,分点 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$,这样就可缩小有根区间





二分法求根过程

② 对压缩了的有根区间 $[a_1, b_1]$ 施行同样的手法，即取中点 $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ，将区间 $[a_1, b_1]$ 再分为两半，然后再确定有根区间 $[a_2, b_2]$ ，其长度是 $[a_1, b_1]$ 的二分之一

③ 如此反复下去，若不出现 $f(x_k) = 0$ ，即可得出一系列有根区间序列：

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots$$

上述每个区间都是前一个区间的一半，因此 $[a_k, b_k]$ 的长度

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

二分法求根过程

当$k\to\infty$时趋于零, 这些区间最终收敛于一点x^* 即为所求的根 。

每次二分后, 取有根区间 $[a_k, b_k]$ 的中点 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

作为根的近似值，得到一个近似根的序列

$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ 该序列以根x^*为极限

只要二分足够多次(即k足够大), 便有 $\left|x^* - x_k\right| < \varepsilon$

这里 ε 为给定精度, 由于 $x^* \in [a_k, b_k]$, 则

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

二分法求根过程

$$\because \frac{b_k - a_k}{2} = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

当给定精度 ε ＞0后, 要想 $|x^* - x_k| < \varepsilon$ 成立, 只要取k满足 $\frac{1}{2^{k+1}}(b-a) < \varepsilon$ 即可，亦即当:

$$k \geq \frac{\lg(b-a) - \lg \varepsilon}{\lg 2} - 1 \qquad (7.2)$$

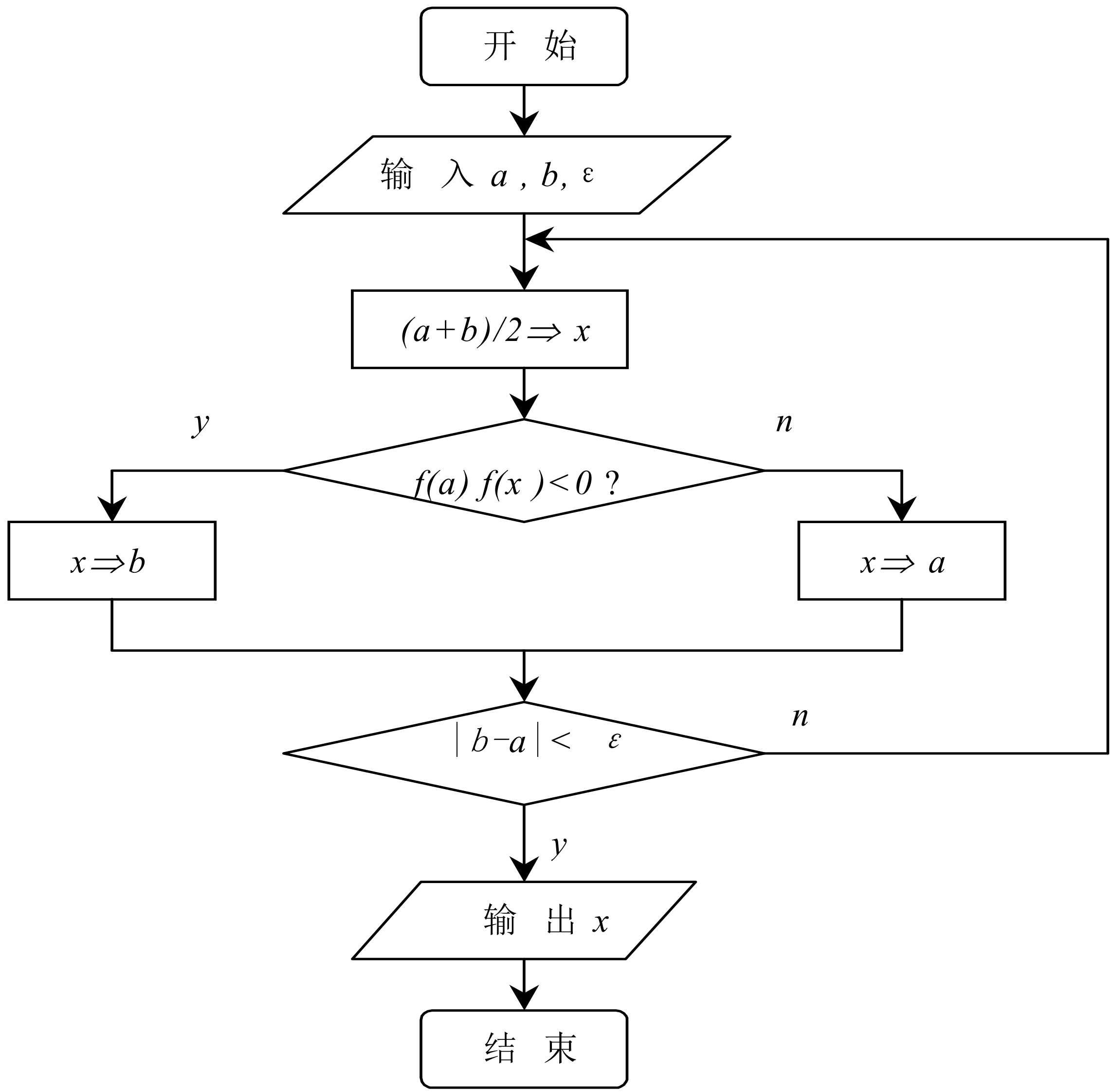
时, 做到第$k+1$次二分, 计算得到的 x_k 就是满足精度要求的近似根 。

二分法求根过程

时, 做到第$k+1$次二分, 计算得到的 x_k 就是满足精度要求的近似根 。

在程序中通常用相邻的 x_k 与 x_{k-1}的差的绝对值或 a_k 与 b_k 的差的绝对值是否小于ε来决定二分区间的次数。

二分法算法实现



例题

例7.2 证明方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间[2, 3]内有一个根，使用二分法求误差不超过0.5×10^{-3} 的根要二分多少次？

证明：令$f(x)=x^3-2x-5,\ f(2)=-1<0, f(3)=16>0$

且$f(x)$在[2, 3]上连续，故方程$f(x)=0$在[2, 3]内至少有一个根。又 $f'(x)=3x^2-2$ 当 $x\in[2,3]$ 时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在[2, 3]上是单调递增函数，从而$f(x)$在[2, 3]上有且仅有一根。

给定误差限ε＝ 0.5×10^{-3}，使用二分法时

例题

误差限为 $\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ 只要取k满足

$$\frac{1}{2^{k+1}}(b-a) \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$ 即可，亦即

$$2^k \ge 10^3 \qquad k \ge \frac{3\lg 10}{\lg 2} = 9.97$$

所以需二分10次便可达到要求。

小结

二分法的优点是不管有根区间 $[a, b]$ 多大，总能求出满足精度要求的根，且对函数 $f(x)$ 的要求不高，只要连续即可，计算亦简单；它的局限性是只能用于求函数的实根，不能用于求复根及重根，它的收敛速度与比值为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数相同。

§ 7.2 不动点迭代法及其收敛性

对于一般的非线性方程, 没有通常所说的求根公式求其精确解, 需要设计近似求解方法, 即迭代法。它是一种逐次逼近的方法, 用某个固定公式反复校正根的近似值, 使之逐步精确化，最后得到满足精度要求的结果。

不动点迭代法的基本思想

为求解非线性方程$f(x)=0$的根，先将其写成便于迭代的等价方程

$$x=\varphi(x) \tag{7.3}$$

其中 $\varphi(x)$ 为x的连续函数

即如果数 x^* 使f(x)=0, 则也有 $x^*=\varphi(x^*)$, 反之, 若 $x^*=\varphi(x^*)$, 则也有 $f(x^*)=0$, 称 $\varphi(x)$ 为迭代函数。任取一个初值 x_0 , 代入式 $x=\varphi(x)$ 的右端, 得到

$$x_1=\varphi(x_0)$$

不动点迭代法的基本思想

再将 x_1 代入式 $x=\varphi(x)$ 的右端，得到 $x_2=\varphi(x_1)$，依此类推，得到一个数列 $x_3=\varphi(x_2)$ …，其一般表示

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (7.4)$$

式(7.4)称为求解非线性方程的简单迭代法。

如果由迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

则称迭代法收敛。

迭代法的基本思想

实际计算中当然不可能也没必要无穷多步地做下去，对预先给定的精度要求ε，只要某个k满足

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

即可结束计算并取 $x^* \approx x_k$

当然，迭代函数 $\varphi(x)$ 的构造方法是多种多样的。

“不动点”

不动点，是一个函数术语，在数学中是指“被这个函数映射到其自身一个点”。

例如： 定义在实数上的函数f，

$$f(x) = x^2 - 3x + 4,$$

则2是函数f的一个不动点，因为f(2) = 2。

例题

例7.3 用迭代法求方程 $x-e^{-x}=0$ 在 $[\frac{1}{2},\ln 2]$ 中的根。

解　将方程改写成如下等价形式

$$x=\varphi(x)=e^{-x}$$

相应地可得到迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=e^{-x_k}$$

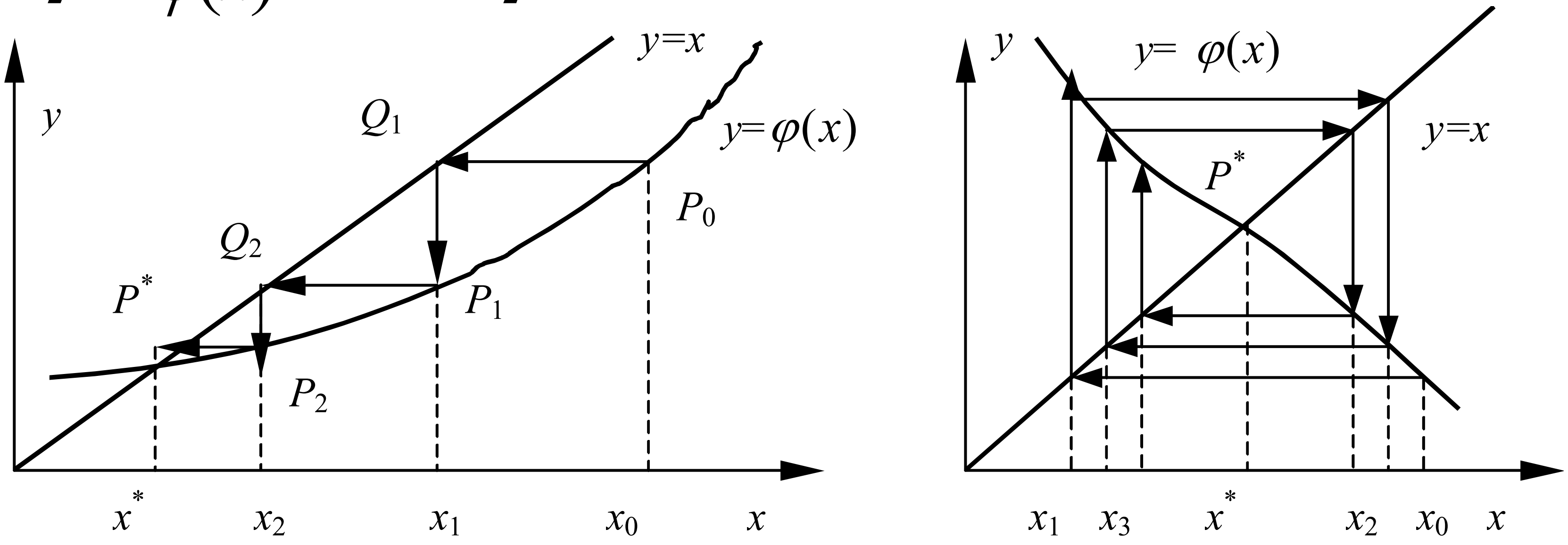
取初始值 x_0 =0.5，用上述迭代公式迭代，计算结果见表

例题

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.606531	0.545239	0.579703	0.560065
k	5	6	7	8	9
x_k	0.571172	0.564863	0.568438	0.566410	0.567560
k	10	11	12	13	14
x_k	0.566907	0.567278	0.567067	0.567187	0.567119

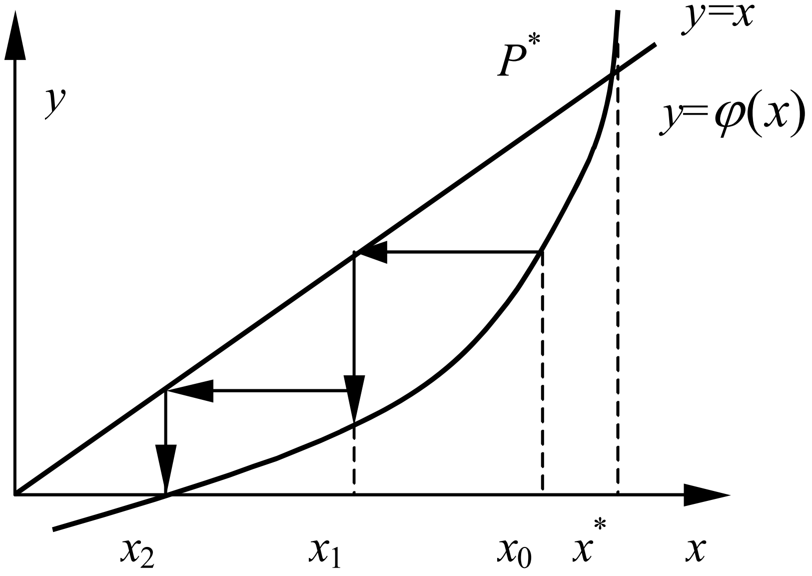
迭代法的几何意义

通常将方程f(x)=0化为与它同解的方程 $x=\varphi(x)$ 的方法不止一种，有的收敛，有的不收敛，这取决于 $\varphi(x)$ 的性态，方程 $x=\varphi(x)$ 的求根问题在几何上就是确定曲线**y=** $\varphi(x)$ 与直线**y=x**的交点**P***的横坐标（如图所示）



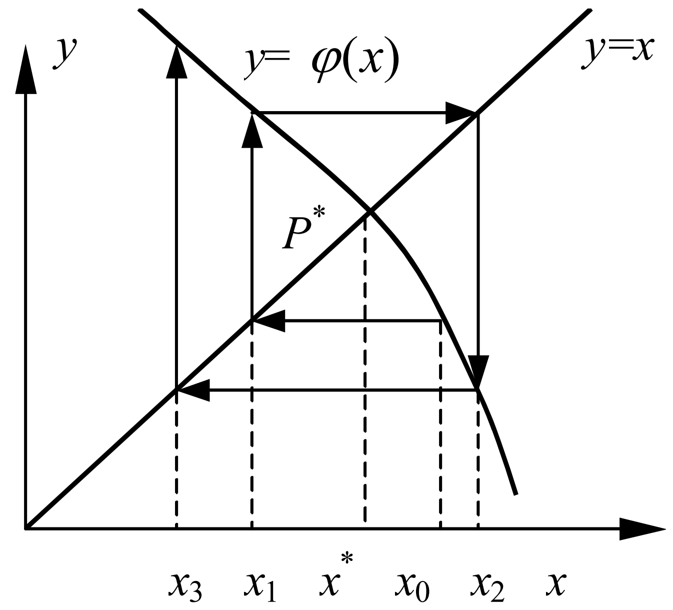
(a) $0<\varphi'(x^*)<1$ (b) $-1<\varphi'(x^*)<0$

迭代法的几何意义



$$\varphi'(x^*) > 1$$

（c）



$$\varphi'(x^*) < -1$$

（d）

迭代法收敛的条件

对方程f(x)=0可以构造不同的迭代公式, 但迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

并非总是收敛。那么, 当迭代函数 $\varphi(x)$ 满足什么条件时，相应的迭代公式才收敛呢？即使迭代收敛时，我们也不可能迭代很多次，而是迭代有限次后就停止，这就需要估计迭代值的误差，以便适时终止迭代

迭代法收敛的条件

定理7.1 设函数 $\varphi(x)$ 在[a,b]上具有连续的一阶导数，且满足

（1）对所有的$x \in [a,b]$ 有 $\varphi(x) \in [a,b]$

（2）存在 0 < L< 1 ,使所有的$x \in [a,b]$有

$$|\varphi'(x)| \le L$$

则方程 $x = \varphi(x)$ 在[a,b]上的解 x^*存在且唯一，对任意的 $x_0 \in [a,b]$，迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 均收敛于 x^*。并有误差估计式

迭代法收敛的条件

① $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

② $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

迭代法收敛的条件

证: 构造函数 $\psi(x)=\varphi(x)-x$,由条件①对任意的$x\in[a, b]$

$\varphi(x)\in[a, b]$有

$$\psi(a)=\varphi(a)-a\geq 0$$

$$\psi(b)=\varphi(b)-b\leq 0$$

由连续函数介值定理知, 必有 $x^*\in[a, b]$, 使

$\psi(x^*)=\varphi(x^*)-x^*=0$ 所以有解存在, 即 $x^*=\varphi(x^*)$

假设有两个解 x^*和 $\tilde{x}$, x^*, $\tilde{x}\in[a, b]$, 则 ,

$$\tilde{x}=\varphi(\tilde{x})$$

迭代法收敛的条件

由微分中值定理有 $x^* - \tilde{x} = \varphi(x^*) - \varphi(\tilde{x}) = \varphi'(\xi)(x^* - \tilde{x})$
其中ξ是介于*x**和 $\tilde{x}$之间的点 从而有ξ∈[*a*,*b*]，进而
有 $(x^* - \tilde{x})[1 - \varphi'(\xi)] = 0$ 由条件(2)有 $|\varphi'(x)|$ <1, 所以
x^* - $\tilde{x}$ =0，即 x^* = $\tilde{x}$，解唯一。

按迭代过程 $x_k = \varphi(x_{k-1})$,有

$$x^* - x_k = \varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\xi)(x^* - x_{k-1})$$

$$|x^* - x_k| = |\varphi'(\xi)(x^* - x_{k-1})| \le L|x^* - x_{k-1}|$$

$$|x^* - x_k| \le L|x^* - x_{k-1}| \le L^2|x^* - x_{k-2}| \le \cdots \le L^k|x^* - x_0|$$

由于L<1, 所以有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \to x^*$, 可见L越小, 收敛越快

迭代法收敛的条件

再证误差估计式

① $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

② $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\because \quad \left|x^* - x_k\right| \le L\left|x^* - x_{k-1}\right| = L\left|x^* - x_k + x_k - x_{k-1}\right|$$

$$\le L\left(\left|x^* - x_k\right| + \left|x_k - x_{k-1}\right|\right)$$

$$(1-L)\left|x^* - x_k\right| \le L\left|x_k - x_{k-1}\right|$$

迭代法收敛的条件

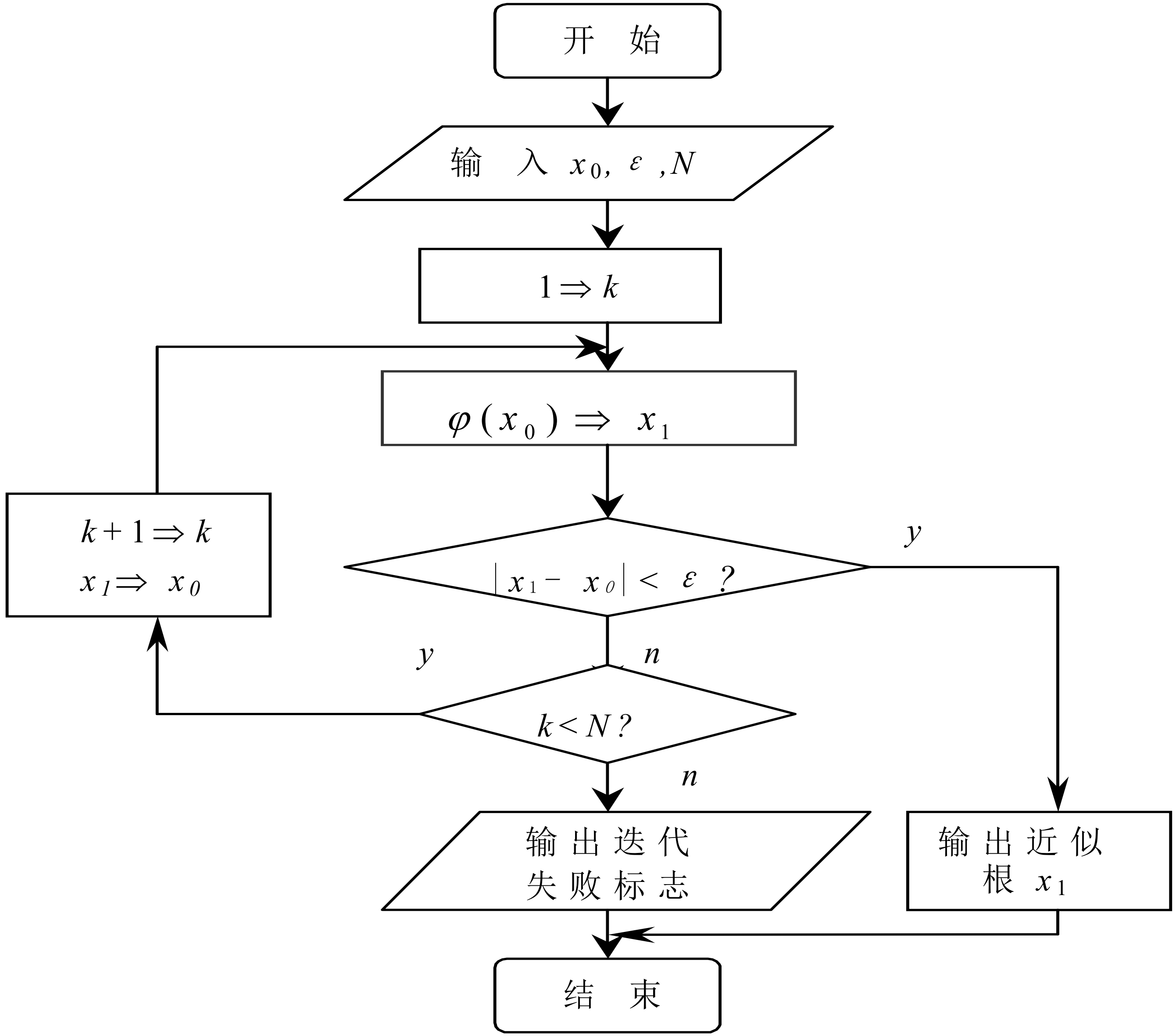
$\therefore \quad \left| x^* - x_k \right| \le \dfrac{L}{1-L} \left| x_k - x_{k-1} \right|$ 　　即 ① 得证。

$$\left| x_k - x_{k-1} \right| = \left| \varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-2}) \right| = \left| \varphi'(\xi)(x_{k-1} - x_{k-2}) \right| \le L \left| x_{k-1} - x_{k-2} \right|$$

$$\left| x^* - x_k \right| \le \frac{1}{1-L} \left| x_k - x_{k-1} \right| \le \frac{L^2}{1-L} \left| x_{k-1} - x_{k-2} \right| \le \cdots \le \frac{L^k}{1-L} \left| x_1 - x_0 \right|$$

即 ② 得证。

迭代法的算法框图



开 始
输 入 x_0, ε, N
$1 \Rightarrow k$
$\varphi(x_0) \Rightarrow x_1$
$k+1 \Rightarrow k$
$x_1 \Rightarrow x_0$
$|x_1 - x_0| < \varepsilon$?
y
n
y
$k < N$?
n
输出迭代
失败标志
输出近似
根 x_1
结 束

局部收敛性

当迭代函数较复杂时，通常只能设法使迭代过程在根的邻域（局部）收敛。

定理7.2 设$\varphi(x)$ 在 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*的邻域中有连续的一阶导数，且 $|\varphi'(x^*)|<1$ 则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有**局部收敛性**。

证：由于 $|\varphi'(x^*)|<1$，存在充分小邻域△： $|x-x^*|<\delta$，使成立 $|\varphi'(x^*)|\le L<1$ 这里L为某个定数，根据微分中值定理 $\varphi(x)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi)(x-x^*)$ 由于 $\varphi(x^*)=x^*$，又当 $x\in\Delta$ 时 $\xi\in\Delta$，故有 $|\varphi(x)-x^*|\le L|x-x^*|\le|x-x^*|<\delta$

由定理7.1知 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意的 $x_0\in\Delta$ 都收敛

例题

例7.4 **设** $\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$ **,要使迭代过程** $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ **局部收敛到** $x^*=\sqrt{5}$, **求** α **的取值范围。**

解：

$$\varphi(x)=x+\alpha(x^2-5)$$

$$\varphi'(x)=1+2\alpha x$$

由在根 $x^*=\sqrt{5}$ **邻域具有局部收敛性时，收敛条件**

$$|\varphi'(x^*)|=|1+2a\sqrt{5}|<1$$

$$-1<1+2a\sqrt{5}<1$$

例题

$$-2 < 2a\sqrt{5} < 0$$

所以 $$-\frac{1}{\sqrt{5}} < a < 0$$

例题

例7.5 已知方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内有根 x^*，且在 $[a,b]$ 上满足 $|\varphi'(x)-3|<1$，利用 $\varphi(x)$ 构造一个迭代函数 $g(x)$，使 $x_{k+1}=g(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 局部收敛于 x^*。

解：由 $x=\varphi(x)$ 可得，$x-3x=\varphi(x)-3x$

$$x=-\frac{1}{2}(\varphi(x)-3x)=g(x)$$

$$|g'(x)|=\left|-\frac{1}{2}(\varphi'(x)-3)\right|=\frac{1}{2}|\varphi'(x)-3|<\frac{1}{2}<1 \qquad x\in[a,b]$$

故 $|g'(x^*)|<1$，迭代公式

$$x_{k+1}=g(x_k)=-\frac{1}{2}(\varphi(x_k)-3x_k)$$ 局部收敛

收敛速度

一种迭代法具有实用价值，首先要求它是收敛的，其次还要求它收敛得比较快。

定义7.2 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于 $x=\varphi(x)$ 的根 x^* ，记迭代误差 $e_k=x^*-x_k$

若存在常数p（p≥1）和c（c>0），使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的，c称渐近误差常数。特别地，p=1时称为线性收敛，p=2时称为平方收敛。$1<p<2$时称为超线性收敛。

收敛速度

数p的大小反映了迭代法收敛的速度的快慢，p愈大，则收敛的速度愈快，故迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

收敛阶数

定理7.3 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻域连续且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$$

则迭代过程在 x^* 邻域是p阶收敛的。

证: 由于 $\varphi'(x^*)=0$ 即在 x^* 邻域 $|\varphi'(x^*)|<1$，所以 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 有局部收敛性, 将 $\varphi(x_k)$ 在 x^* 处泰勒展开

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{1}{2!}\varphi''(x^*)(x_k-x^*)^2+\cdots+\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p$$

根据已知条件得 $\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\dfrac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi)(x_k-x^*)^p$

收敛阶数

由迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 及 $x^* = \varphi(x^*)$ 有

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \neq 0$$

例题

例7.6 已知迭代公式 $x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{x_k^2}$ 收敛于 $x^* = \sqrt[3]{3}$ 证明该迭代公式平方收敛。

证: 迭代公式相应的迭代函数为 $\varphi(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{x^2}$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{x^3}, \quad \varphi''(x) = \frac{6}{x^4}$$

将$x^* = \sqrt[3]{3}$ 代入，$\varphi'(x^*) = 0, \quad \varphi''(x^*) = \frac{6}{3\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \neq 0$

根据定理7.3可知，迭代公式平方收敛。

§ 7.3　迭代收敛的加速方法

略

§ 7.4　牛顿法

用迭代法可逐步精确方程 $f(x)=0$ 根的近似值，但必须要找到 $f(x)=0$的等价方程 $x=\varphi(x)$, 如果 $\varphi(x)$ 选得不合适, 不仅影响收敛速度, 而且有可能造成迭代格式发散。能否找到一种迭代方法, 既结构简单, 收敛速度快, 又不存在发散的问题。这就是本节要介绍的牛顿迭代法。

牛顿迭代法一种重要和常用的迭代法, 它的基本思想是将非线性函数$f(x)$逐步线性化, 从而将非线性方程$f(x)=0$近似地转化为线性方程求解。

牛顿迭代公式

对于方程 $f(x)=0$,设其近似根为 x_k ,函数$f(x)$可在 x_k 附近作泰勒展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(x-x_k)^2+\cdots$$

忽略高次项,用其线性部分作为函数f(x)的近似,

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

设 $f(x)=0$ 的根 x^*,则有 $f(x^*)=0$,即 $f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)\approx 0$

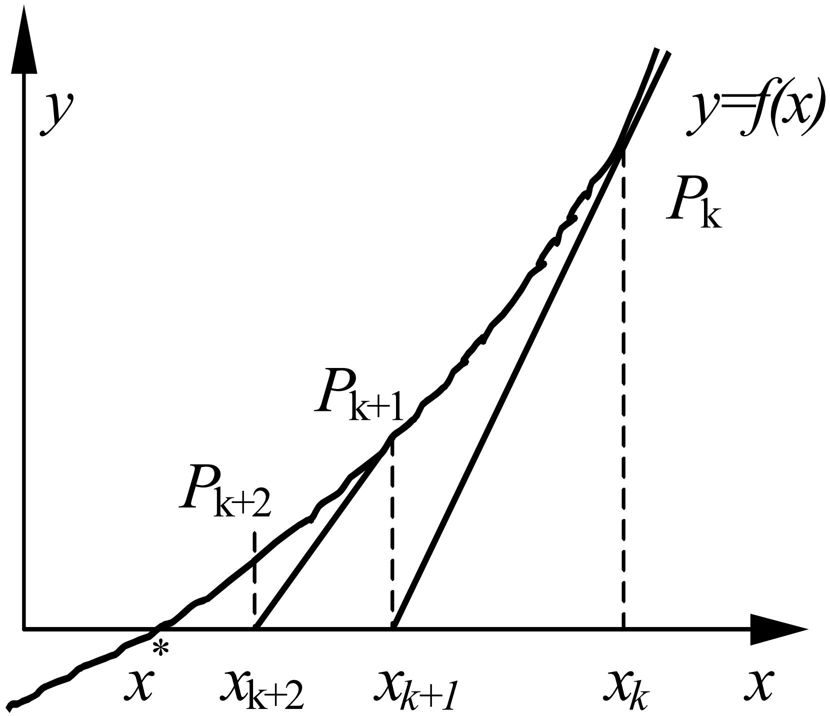
$$x^*\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

将左端取为 x_{k+1},即 x_{k+1} 是比 x_k更接近于 x^* 的近似值

牛顿迭代公式 $$x_{k+1}\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,2\cdots)$$

牛顿迭代法的几何解释

方程$f(x)=0$的根x^*是曲线$y=f(x)$与x轴交点的横坐标，设x_k是根x^*的某个近似值，过曲线$y=f(x)$的横坐标为x_k的点$P_k=(x_k, f(x_k))$引切线交x轴于x_{k+1}，并将其作为x^*新的近似值，重复上述过程，可见一次次用切线方程来求解方程$f(x)=0$的根，所以亦称为牛顿切线法。



牛顿迭代法的收敛性

定理7.4 设x^* 是方程 $f(x)=0$的单根, 且$f(x)$在x^*的某邻域内有连续的二阶导数, 则牛顿法在x^*附近局部收敛, 且至少二阶收敛, 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$

证: 牛顿迭代公式对应的迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

若 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的单根,则有 $f(x^*)=0$, $f'(x^*)\neq 0$

从而

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2}=0$$

牛顿迭代法的收敛性

由定理7.2知,牛顿迭代法在 x^* 附近局部收敛。又由定理7.3知, 迭代公式至少具有二阶收敛速度。

利用泰勒公式

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2, \qquad \xi \in [x^*, x_k]$$

$$x_k - x^* = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

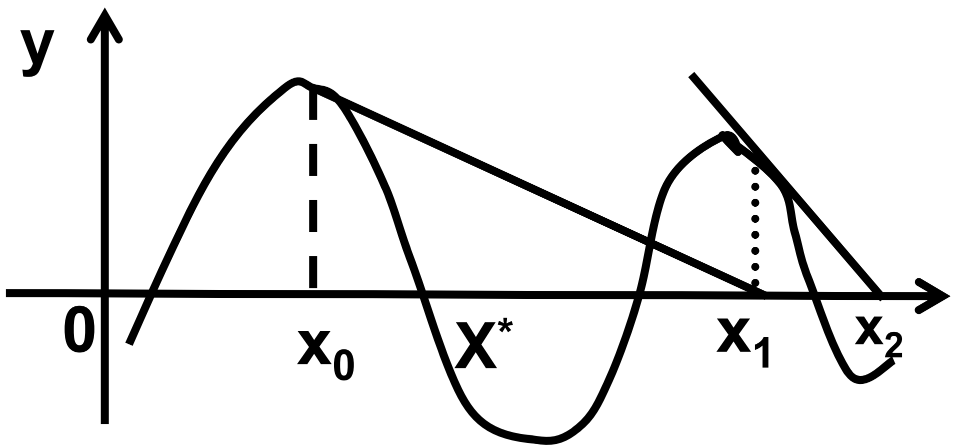
牛顿迭代法的收敛性

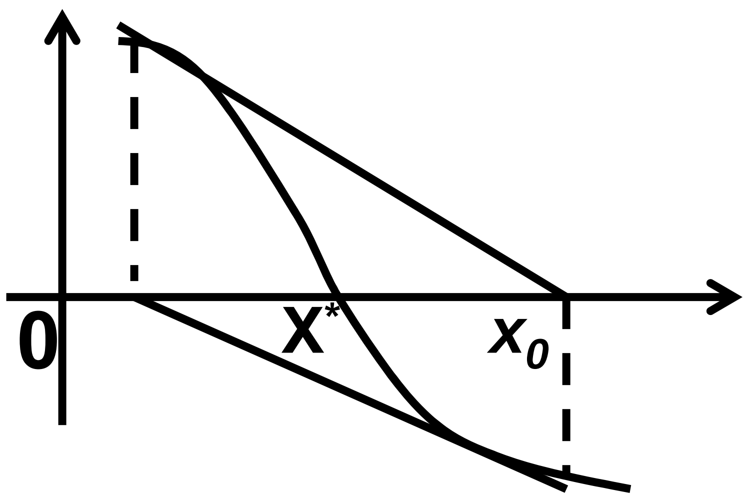
$$x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

所以 $$\lim_{k\to\infty}\frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^2} = \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}$$ 证毕

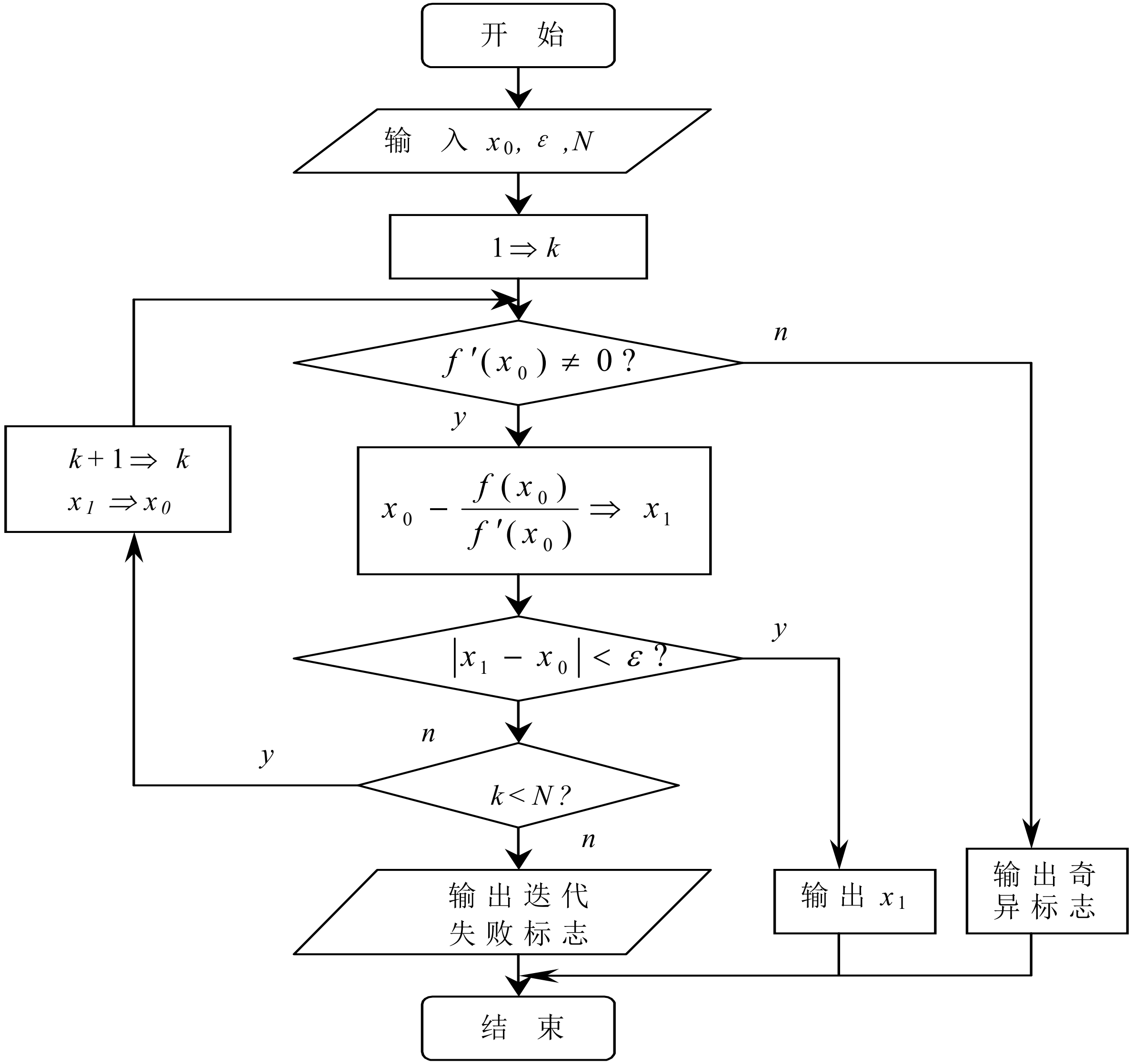
牛顿迭代法的收敛性

不满足迭代条件时，可能导致迭代值远离根的情况而找不到根或死循环的情况





牛顿迭代法的算法实现



开 始
输 入 x_0, ε, N
$1 \Rightarrow k$
$f'(x_0) \neq 0$?
n
y
$x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1$
$k+1 \Rightarrow k$
$x_1 \Rightarrow x_0$
$|x_1 - x_0| < \varepsilon$?
y
n
y
$k < N$?
n
输出迭代失败标志
输出 x_1
输出奇异标志
结 束

例题

例7.7　用牛顿迭代法求 $x\,e^x-1=0$的根,$\varepsilon=10^{-4}$

解：因 $f(x_k)=x\,e^x-1$, $f'(x_k)=e^x(x+1)$

建立迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n e^{x_n}-1}{e^{x_n}(1+x_n)}=x_n-\frac{x_n-e^{-x_n}}{1+x_n}$$

取x_0=0.5,逐次计算得

x_1=0.57102,

x_2=0.56716,

x_3=0.56714

§ 7.5　弦截法

牛顿迭代法虽然具有收敛速度快的优点，但每迭代一次都要计算导数 $f'(x_k)$，当 $f(x)$ 比较复杂时，不仅每次计算 $f'(x_k)$ 带来很多不便，而且还可能十分麻烦，如果用不计算导数的迭代方法，往往只有线性收敛的速度。本节介绍的弦截法便是一种不必进行导数运算的求根方法。弦截法在迭代过程中不仅用到前一步处的函数值 x_k，而且还使用 x_{k-1} 处的函数值来构造迭代函数，这样做能提高迭代的收敛速度。

弦截迭代公式

为避免计算函数的导数 $f'(x_k)$，使用差商

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}$$

替代牛顿公式中的导数 $f'(x_k)$,便得到迭代公式

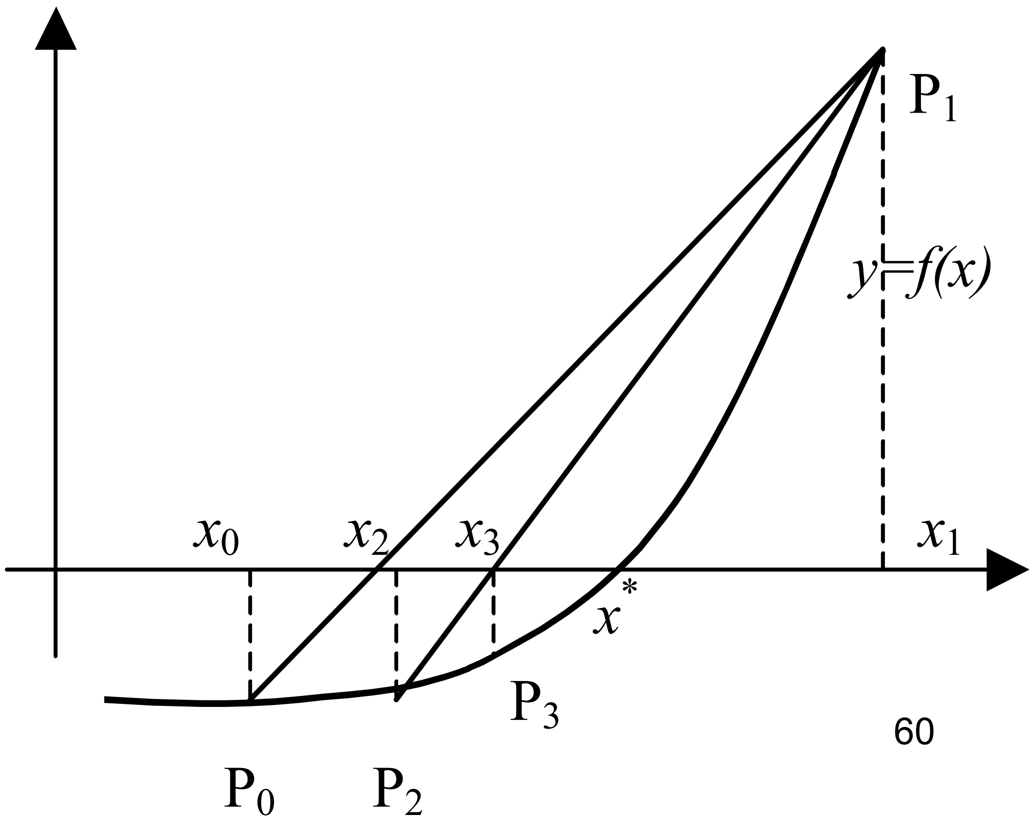
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

称为弦截迭代公式,

相应的迭代法称为弦截法。

弦截法几何意义

弦截法也称割线法, 其几何意义是用过曲线上两点 $P_0(x_0,f(x_0))$ 、 $P_1(x_1,f(x_1))$ 的割线来代替曲线, 用割线与x轴交点的横坐标作为方程的近似根 x_2 再过 P_1 点和点 $P_2(x_2,f(x_2))$ 作割线求出 x_3 ，再过 P_2 点和点 $P_3(x_3,f(x_3))$ 作割线求出 x_4 ，余此类推，当收敛时可求出满足精度要求的 x_k



收敛速度

可以证明，弦截法具有超线性收敛，收敛的阶约为**1.618**，它与前面介绍的一般迭代法一样都是线性化方法，但也有区别。即一般迭代法在计算x_{k+1}时只用到前一步的值 x_k ，故称之为单点迭代法；而弦截法在求x_{k+1}时要用到前两步的结果x_{k-1} 和 x_k ，使用这种方法必须给出两个初始近似根 x_0, x_1 ，这种方法称为多点迭代法。

例题

例7.8 用弦截法求方程 $x^3 - x - 1 = 0$ **在区间（1，2）内的实根。初始值取** $x_0=1, x_1=2$，

要求 $\left|x_{k+1} - x_k\right| < 0.0001$

解：取 $x_0 = 1$ ，$x_1 = 2$ ，**令** $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

利用弦截迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^3 - x_k - 1)}{(x_k^3 - x_k - 1) - (x_{k-1}^3 - x_{k-1} - 1)}(x_k - x_{k-1})$$

计算结果见表

例题

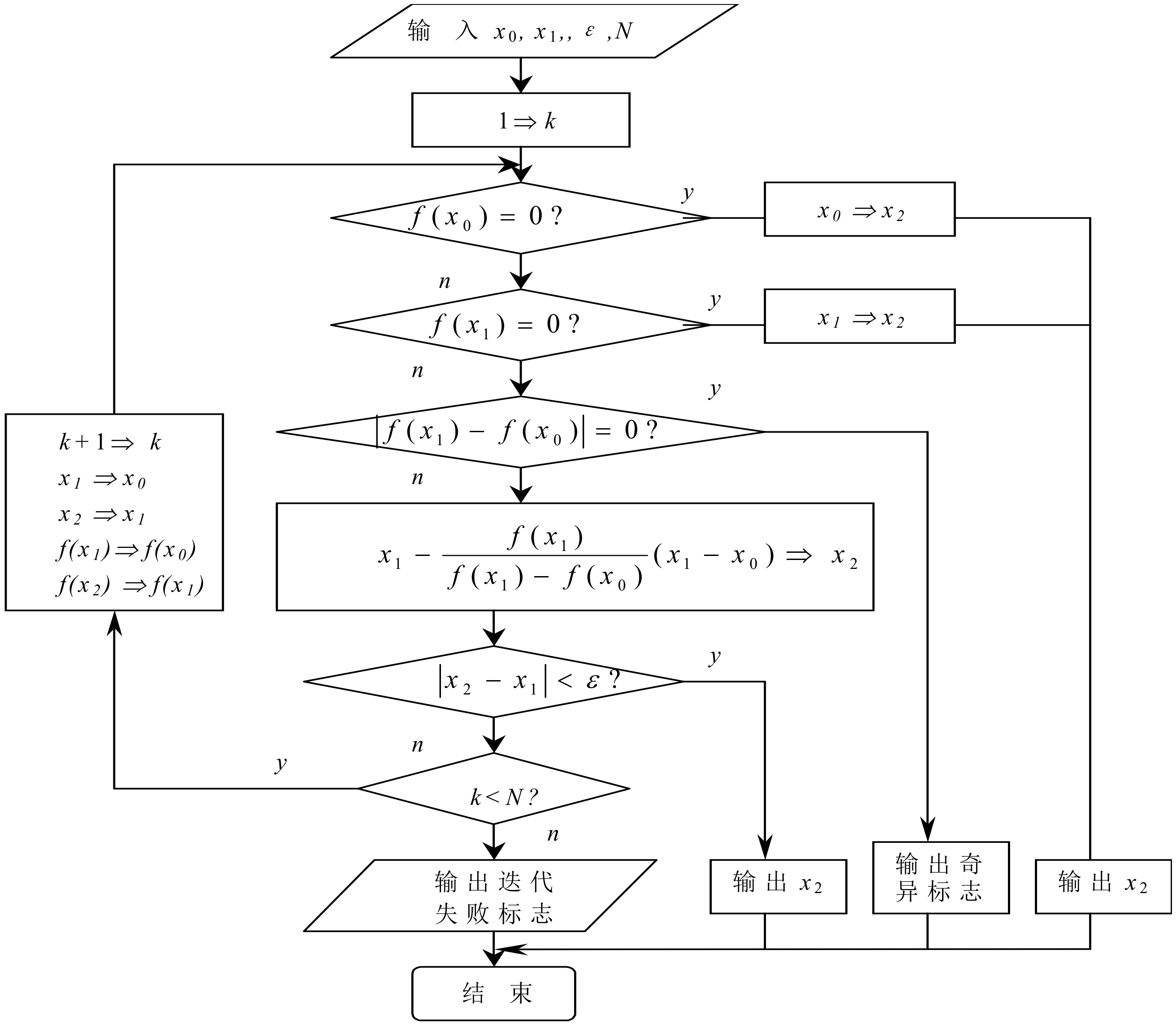
k	x_k	$f(x_k)$
0	1	-1
1	2	5
2	1.166666667	-0.57870369
3	1.253112023	-0.28536302
4	1.337206444	0.053880579
5	1.323850096	-0.0036981168
6	1.324707936	-4.273521×10^{-5}
7	1.324717965	3.79×10^{-8}

随堂测验

六、(15 分) 用弦截法求立方根$\sqrt[3]{d}$。(1) 给出迭代公式;(2) 用此迭代公式计算$\sqrt[3]{3}$，取初始值为

$x_0=1$，$x_1=2$，要求$|x_{k+1}-x_k|<10^{-2}$。

弦截法算法实现



输 入 $x_0, x_1,, \varepsilon ,N$
$1 \Rightarrow k$
$f(x_0)=0$?
y
$x_0 \Rightarrow x_2$
n
$f(x_1)=0$?
y
$x_1 \Rightarrow x_2$
n
$|f(x_1)-f(x_0)|=0$?
y
n
$x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0) \Rightarrow x_2$
$k+1 \Rightarrow k$
$x_1 \Rightarrow x_0$
$x_2 \Rightarrow x_1$
$f(x_1) \Rightarrow f(x_0)$
$f(x_2) \Rightarrow f(x_1)$
$|x_2-x_1|<\varepsilon$?
y
n
y
$k<N$?
n
输 出 迭 代
失 败 标 志
输 出 x_2
输 出 奇
异 标 志
输 出 x_2
结 束

本章习题

本章结束