姓名：__________

学号：__________

院系：__________

_____ 级_____ 班

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称：工程数值方法　试卷：A　考试形式：闭卷

授课院（系）：运载　考试日期：2016 年 7 月 20 日　试卷共 4 页

	一	二	三	四	五	六	七	总分
标准分	20	10	10	15	15	15	15	100
得　分								

装

得分	

一、（10 分，每空 2 分）填空题

1. 4 个互异节点的插值型求积公式最低代数精度为__3__，最高代数精度为__7__。

2. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3a & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$**，则关于求解此方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充要条件是__** $\sqrt{6a} < 1$ **__。**

3. 复化 Simpson 求积公式 $T = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$。

当 $f(x) = ax^2 + bx + C$ **时，则** $\int_a^b f(x)dx - S =$ **__0__。**

4. 2.718281 作为自然对数 e **的近似值具有__6__位有效数字。**

二、（20 分，每空 2 分）选择题

1. 求方程 $x^2 - (10^4 + 1)x + 10^4 = 0$ **的根** x_1, x_2 **时，取四位浮点数计算。**

$x_1 = 10^4$ **则** $x_2 =$ **（ C ）。**

（A）$\frac{1}{2}(10^4 + 1) - \sqrt{[\frac{1}{2}(10^4 + 1)]^2 - 10^4}$　（B）0　（C）$\frac{10^4}{x_1}$　（D）$-x_1$

订

2. 求方程 $x = g(x)$ **根的 Newton 迭代公式为（ B ）。**

（A）$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$　（B）$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - g(x_k)}{1 - g'(x_k)}$

（C）$x_{k+1} = g(x_k)$　（D）$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - g(x_k)}{x_k - x_{k-1} - g(x_k) + g(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$。

得分	

3. 关于积分$\int_a^b f(x)dx$的6点Gauss求积公式中的求积系数c_i（$i = 0,1,\cdots,5$），成立$\sum_{i=0}^{5} c_i =$（ A ）。

（A）$b-a$　　（B）0　　（C）1　　（D）c

4. 对任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$及右端向量$\boldsymbol{f}$，Gauss-Seidel 迭代公式$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}x^{(k)} + \boldsymbol{f}$收敛于方程组的精确解$\boldsymbol{x}^*$的充要条件是（ A ）。

A）$\rho(\boldsymbol{B})<1$　　（B）$\|\boldsymbol{B}\|_\infty<1$　　（C）$\|\boldsymbol{B}\|_1<1$　　（D）$\|\mathbf{B}\|_2<1$

5. 若 n 阶方阵 A 的谱半径$\rho(A)<1$，则求解$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的 Jacobi 迭代法和 Gauss--Seidel 迭代法（ B ）。

（A）都收敛
（B）无法判断收敛和发散
（C）Jacobi 迭代法收敛而 Gauss--Seidel 迭代法发散
（D）Jacobi 迭代法发散而 Gauss--Seidel 迭代法收敛

6. 用 Gauss 消去法求解线性方程组$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{Bmatrix}$，则如下说法正确的为（ C ）。

（A）不能完成计算　　（B）无法判断能否完成计算
（C）能完成计算　　（D）需改用选主元 Gauss 消去法才能完成计算

7. 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 法具有（ B ）精度。

（A）1 阶　　（B）2 阶　　（C）3 阶　　（D）4 阶

8. 计算$\sqrt{a}$的迭代公式$x_{k+1} = \frac{3}{4}x_k + \frac{a}{4x_k}$具有的收敛速度为（ D ）。

（A）平方收敛　　（B）超线性收敛　　（C）三阶收敛　　（D）线性收敛

9. 设$x_i(i=0,1,2,3,4,5)$为互异节点，$l_i(x)$为对应的5次Lagrange插值基函数，则$\sum_{i=0}^{5}(x_i^5 - x^5)l_i(0) =$（ A ）。

（A）0　　（B）1　　（C）x^5　　（D）$l_i(0)$

10. 设 $H(x)$ 为满足如下插值条件的插值多项式，$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i)$，　$(i = 0,1,\cdots,n)$，(x 互异，$i=0,1,\cdots,n$)，则$H(x)$的次数为（ D ）。

（A）大于 $2n+1$　　（B）小于 $2n+1$　　（C）等于 $2n+1$　　（D）不超过 $2n+1$

得分	

三、（10 分）求三次 Hermite 插值多项式 $H(x)$，使满足 $H(-1)=-1$，$H(1)=1$，

$H'(0)=0$，$H''(1)=1$。

解：所求三次 Hermite 的插值多项式为

$$H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

由插值条件得到以下方程组

$$H_3(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3=-1$$

$$H_3(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=1$$

$$H_3'(0)=a_1=0$$

$$H_3''(1)=2a_2+6a_3=1$$

解上述方程组

$$a_0=\frac{5}{2},\ a_1=0,\ a_2=-\frac{5}{2},\ a_3=1$$

故得 $H_3(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}x^2+x^3$

得分	

四、（15 分）用最小二乘原理确定经验公式 $y = ax^b$ 中的参数 *a* 和 *b*, 使该函数曲线与下列数据相拟合。

x_i	1	2	3	4
y_i	10^2	$10^{2.5}$	$10^{3.4}$	10^4

解：对经验公式 $y = ax^b$ 两边取对数， 得

$$\lg y = \lg a + b\lg x$$

令 $w = \lg y$， $A = \lg a$， $z = \lg x$，则得

$w = A + bz$，将数据(x_i, y_i) 转化为对应的(x_i, w_i) ，得下表

x_i	1	2	3	4
w_i	2	2.5	3.4	4

按题意，得矛盾方程组 $Aw = b$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$， $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 3.4 \\ 4 \end{bmatrix}$， $w = \begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix}$

其法方程为 $A^T Aw = A^T b$，即 $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.9 \\ 33.2 \end{Bmatrix}$

解得 $\begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} == \begin{Bmatrix} 1.25 \\ 0.69 \end{Bmatrix}$ $\therefore a = 10^A = 10^{1.25}$。拟合曲线为 $y = 10^{1.25} x^{0.69}$

得分	

五、（15 分）确定下列求积公式的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式具有的代数精度，

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx A_{-1} f(-h) - A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

解：将 $f(x)=1$， x， x^2 分别代入公式两端并令其左右相等，得

$$\begin{cases} A_{-1} - A_0 + A_1 = 4h \\ -hA_{-1} + hA_1 = 0 \\ h^2 A_{-1} + h^2 A_1 = 2(2h)^3/2 \end{cases}$$

解得 $A_{-1} = A_1 = \frac{8h}{3}$， $A_0 = \frac{4}{3}h$，所求公式至少具有 2 次代数精度。

又由于

$$\int_{-2h}^{2h} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-2h}^{2h} = 0 = \frac{8}{3}h\left[(-h)^3 + (h)^3\right],$$

$$\int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-2h}^{2h} = \frac{64}{5}h^5 \neq \frac{16}{3}h^5 = \frac{8}{3}h\left[(-h)^4 + (h)^4\right]。$$

故 $\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{8h}{3} f(-h) - \frac{4h}{3} f(0) + \frac{8h}{3} f(h)$ 具有 3 次代数精度。

评分标准:（1）每个系数 4 分（若系数不对，按方程可酌情加 1-3 分),（2）验证精度正确 6 分

得分	

六、（15 分）利用矩阵的杜立特尔(Doolittle)分解法解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ 2x_1+5x_2+2x_3=18 \\ 3x_1+x_2+5x_3=20 \end{cases}$$

解：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$

由矩阵乘法得 $u_{11}=1$，$u_{12}=2$，$u_{13}=3$，$l_{21}=2$，$u_{22}=1$，$u_{23}=-4$，

$l_{31}=3$，$l_{32}=-5$，$u_{33}=-24$

由 **L y=b**，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{Bmatrix}$，得 $y=\begin{Bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{Bmatrix}$

由 **Ux=y**，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{Bmatrix}$，得 $x=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

评分标准:（1）矩阵分解形式 1 分,（2）L 矩阵 4 分,（3）U 矩阵 4 分,（4）y 向量 3 分,（5）x 向量 3 分（若 y 向量省略，x 向量正确可加 6 分）

得分	

七、（15 分）用改进的欧拉（Euler）方法计算初值问题 $y' = x + y$， $y(0) = 1$，$x \in [0, 0.6]$ 的解的近似值，取 $h = 0.2$ 。保留 4 位有效数字。

解：改进的 Euler 法格式为

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\right] \end{cases}$$

由 $y' = x + y$ 得 $f(x, y) = x + y$ 。于是有

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i) = y_i + 0.2(x_i + y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i + x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1}) = y_i + 0.1(x_i + y_i + x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1})$$

计算结果如表

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.2	1.2400
2	0.4	1.5768
3	0.6	2.0317

评分标准:（1）给出改进的 Euler 法一般公式得 4 分，（2）列出改进的 Euler 具体公式加 5 分，（3）结果每步正确加 2 分。