

姓名: _____

学号: _____

院系: _____

_____ 级 _____ 班

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称: _____ 工程数值方法 _____ 试卷: _____ B _____ 考试形式: _____ 闭卷 _____

授课院 (系): _____ 运载 _____ 考试日期: 2015 年 7 月 20 日 试卷共 4 页

	一	二	三	四	五	六	七	总分
标准分	20	10	10	15	15	15	15	100
得 分								

装

得	
分	

一、(10 分, 每空 2 分) 填空题

1. 5 个互异节点的插值型求积公式最低代数精度为 4, 最高代数精度为 9。

2. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$, 则关于求解此方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充要条件是 $3\sqrt{a} < 1$ 。

3. 复化 Simpson 求积公式 $S = \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$ 。

当 $f(x) = A(x-a)^2 + bx + C$ 时, 则 $\int_a^b f(x)dx - S =$ 0。

4. 2.7182 作为自然对数 e 的近似值具有 4 位有效数字。

二、(10 分, 每空 2 分) 单项选择题

1. 求方程 $x^2 - (10^3 + 1)x + 10^3 = 0$ 的根 x_1, x_2 时, 取三位浮点数计算。
 $x_1 = 10^3$ 则 $x_2 =$ (C)。

(A) $\frac{1}{2}(10^3 + 1) - \sqrt{[\frac{1}{2}(10^3 + 1)]^2 - 10^3}$ (B) 0 (C) $\frac{10^3}{x_1}$ (D) $-x_1$

2. 求方程 $x = f(x)$ 根的 Newton 迭代公式为 (B)。

(A) $x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$ (B) $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - g(x_k)}{1 - g'(x_k)}$

(C) $x_{k+1} = g(x_k)$ (D) $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - g(x_k)}{x_k - x_{k-1} - g(x_k) + g(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$ 。

B-1

订

得 分	
--------	--

3. 关于积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的 7 点 Gauss 求积公式中的求积系数 c_i ($i = 0, 1, \dots, 6$), 成立 $\sum_{i=0}^6 c_i =$ (C)。

- (A) 1 (B) 0 (C) $b-a$ (D) c

4. 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 及右端向量 f , Gauss-Seidel 迭代公式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛于方程组的精确解 x^* 的充要条件是 (D)。

- (A) $\|B\|_2 < 1$ (B) $\|B\|_\infty < 1$ (C) $\|B\|_1 < 1$ (D) $\rho(B) < 1$

5. 若 n 阶方阵 A 的谱半径 $\rho(A) < 1$, 则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法 (B)。

- (A) 都收敛
(B) 无法判断收敛和发散
(C) Jacobi 迭代法收敛而 Gauss-Seidel 迭代法发散
(D) Jacobi 迭代法发散而 Gauss-Seidel 迭代法收敛

6. 用 Gauss 消去法求解线性方程组 $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \end{Bmatrix}$, 则如下说法正确的为 (C)。

- (A) 不能完成计算 (B) 无法判断能否完成计算
(C) 能完成计算 (D) 需改用选主元 Gauss 消去法才能完成计算

7. 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 法具有 (A) 精度。

- (A) 2 阶 (B) 1 阶 (C) 4 阶 (D) 3 阶

8. 计算 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式 $x_{k+1} = \frac{5}{6}x_k + \frac{a}{6x_k^2}$ 具有的收敛速度为 (D)。

- (A) 平方收敛 (B) 超线性收敛 (C) 三阶收敛 (D) 线性收敛

9. 设 x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) 为互异节点, $l_i(x)$ 为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数,

则 $\sum_{i=0}^5 (x_i^4 - x^4)l_i(0) =$ (A)。

- (A) 0 (B) 1 (C) x^5 (D) $l_i(0)$

10. 设 $H(x)$ 为满足如下插值条件的插值多项式,

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n), (x \text{ 互异}, i = 0, 1, \dots, n),$$

则 $H(x)$ 的次数为 (D)。

- (A) 大于 $2n+1$ (B) 小于 $n+1$ (C) 不超过 $n+1$ (D) 不超过 $2n+1$

得 分	
--------	--

三、(10 分) 求三次 Hermite 插值多项式 $H(x)$, 使满足 $H(-1) = -1$, $H(1) = 1$, $H'(0) = 1$, $H''(1) = 0$ 。

解: 所求三次 Hermite 的插值多项式为

$$H_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

由插值条件得到以下方程组

$$H_3(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -1$$

$$H_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$H'_3(0) = a_1 = 1$$

$$H''_3(1) = 2a_2 + 6a_3 = 0$$

解上述方程组

$$a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = -3, a_3 = 1$$

故得 $H_3(x) = 3 - 3x^2 + x^3$

得	
分	

四、(15 分) 用最小二乘原理确定经验公式 $y = ax^b$ 中的参数 a 和 b , 使该函数曲线与下列数据相拟合

x_i	1	2	3	4
y_i	10^1	$10^{2.1}$	$10^{3.8}$	10^4

解: 对经验公式 $y = ax^b$ 两边取对数, 得

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$

令 $w = \lg y$, $A = \lg a$, $z = \lg x$, 则得

$w = A + bz$, 将数据 (x_i, y_i) 转化为对应的 (x_i, w_i) , 得下表

x_i	1	2	3	4
w_i	1	2.1	3.8	4

按题意, 得矛盾方程组 $Aw = b$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.1 \\ 3.8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix}$$

$$\text{其法方程为 } A^T A w = A^T b, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.9 \\ 33.2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{解得 } \begin{Bmatrix} A \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.05 \\ 1.07 \end{Bmatrix} \therefore a = 10^A = 10^{0.05}. \text{ 拟合曲线为 } y = 10^{0.05} x^{1.07}$$

得 分	
--------	--

五、（15 分）给定求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx Af(-h) + \frac{B}{2}f(0) + \frac{C}{3}f(h)$$

试确定 A, B, C, 使它的代数精确度尽可能地高, 并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

解: 令 $f(x) = 1, x, x^2$, 代入所给定近似求积公式, 使公式精确成立, 得:

$$4h = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{3}$$

$$0 = -hA + 0 + h\frac{C}{3}$$

$$\frac{16}{3}h^3 = h^2A + 0 + h^2\frac{C}{3}$$

联立求解关于系数 A, B, C 的方程, 得

$$A = \frac{8}{3}h, \quad B = -\frac{8}{3}h, \quad C = 8h$$

$$\text{于是 } \int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{4}{3}h[2f(-h) - f(0) + 2f(h)]$$

它至少具有 2 次的代数精确度。

$$\text{令 } f(x) = x^3, \text{ 代入公式得: 左边} = 0, \text{ 右边} = \frac{4}{3}h[-2h^3 - 0 + 2h^3] = 0$$

故 左边 = 右边

$$\text{令 } f(x) = x^4, \text{ 代入公式得: 左边} = \frac{64}{5}h^5, \text{ 右边} = \frac{4}{3}h[2h^4 - 0 + 2h^4] = \frac{16}{3}h^5$$

则 左边 \neq 右边

至此可知求积公式具有 3 次代数精确度。

评分标准: (1) 每个系数 4 分 (若系数不对, 按方程可酌情加 1-3 分), (2) 验证精度正确 6 分

得分	
----	--

六、(15 分) 利用改进平方根法解方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 17 & -17 \\ -4 & -17 & -20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

$$\text{解: } \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 17 & -17 \\ -4 & -17 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ l_{21}d_1 & d_2 & 0 \\ l_{31}d_1 & l_{32}d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得 $d_1 = 2$, $l_{21} = 3$, $l_{31} = -2$, $d_2 = -1$, $l_{32} = 5$, $d_3 = -3$

$$\text{由 } \mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -33 \end{bmatrix}, \quad \text{得 } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } \mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{y}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \text{得 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

评分标准: (1) 矩阵分解形式 1 分, (2) L 矩阵 4 分, (3) U 矩阵 4 分, (4) y 向量 3 分, (5) x 向量 3 分 (若 y 向量省略, x 向量正确可加 6 分)

得 分	
--------	--

七、(15 分) 用改进的欧拉 (Euler) 方法计算初值问题 $y' = x + y$, $y(0) = 2$,

$x \in [0, 0.6]$ 的解的近似值, 取 $h = 0.2$ 。保留 4 位有效数字。

解: 改进的 Euler 法格式为

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \end{cases}$$

由 $y' = x + y$ 得 $f(x, y) = x + y$ 。于是有

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i) = y_i + 0.2(x_i + y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(x_i + y_i + x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1}) = y_i + 0.1(x_i + y_i + x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1})$$

计算结果如表

i	x_i	y_i
0	0	2
1	0.2	2.4600
2	0.4	3.0652
3	0.6	3.8475

评分标准: (1) 给出改进的 Euler 法一般公式得 4 分, (2) 列出改进的 Euler 具体公式加 5 分, (3) 结果每步正确加 2 分。