第6章　解线性方程组的迭代法

§ 6.1 迭代法的基本概念

§ 6.2 雅可比迭代法与高斯-赛德尔迭代法

§ 6.3 超松弛迭代法*

§ 6.4 共轭梯度法*

6.1 迭代法的基本概念

1 引言

我们知道，凡是迭代法都有一个收敛问题，有时某种方法对一类方程组迭代收敛，而对另一类方程组进行迭代时就会发散。一个收敛的迭代法不仅具有程序设计简单，适于自动计算，而且较直接法更少的计算量就可获得满意的解。因此，迭代法亦是求解线性方程组，尤其是求解具有大型稀疏矩阵的线性方程组的重要方法之一。

迭代法的基本思想

2 迭代法的基本思想

迭代法的基本思想是将线性方程组转化为便于迭代的**等价方程组**，对任选一组**初始值**$x_i^{(0)}\,(i=1,2,\cdots,n)$，按某种计算规则，不断地对所得到的值进行**修正**，最终获得满足精度要求的方程组的近似解。

设 $A\in R^{n\times n}$非奇异，$b\in R^n$，则线性方程组 $Ax=b$ 有惟一解 $x=A^{-1}b$，经过变换构造出一个等价同解方程组 $x=Gx+d$

迭代法的基本思想

$$x^{(k)}=\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right\}^T$$

将上式改写成迭代式 $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d \qquad (k=0,1,\cdots)$

选定初始向量 $x^{(0)}=\left\{x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right\}^T$ ，反复不断地使用迭代式逐步逼近方程组的精确解，直到满足精度要求为止。这种方法称为迭代法

如果 $x^{(k)}=\left\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right\}^T$ 存在极限 $x^*=\left\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right\}^T$ 则称迭代法是收敛的，否则就是发散的。

迭代法的基本思想

收敛时，在迭代公式

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d \qquad (k = 0,1,\cdots)$$

中当 $k \to \infty$ 时, $x^{(k)} \to x^*$, 则 $x^* = Gx^* + d$

, 故 x^* 是方程组 $Ax = b$ 的解。

对于给定的方程组可以构造各种迭代公式。

并非全部收敛

例题

例1　用迭代法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$$

解　构造方程组的等价方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_1 - x_2 + 3 \\ x_2 = 2x_1 - 4x_2 + 3 \end{cases}$$

据此建立迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 3 \\ x_2^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

取初值 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$

例题

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3 \\ x_2^{(1)} = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = -3 \\ x_2^{(2)} = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(3)} = 9 \\ x_2^{(3)} = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(4)} = -15 \\ x_2^{(4)} = -15, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(5)} = 33 \\ x_2^{(5)} = 33, \end{cases} \cdots$$

迭代解离精确解 $x_1 = 1, x_2 = 1$ **越来越远迭代不收敛**

6.2 雅可比迭代法与高斯-赛德尔迭代法

1 雅可比（Jacobi）迭代法

1.雅可比迭代法算法构造

例2 用雅可比迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

例题

解：从方程组的三个方程中分离出 x_1, x_2 **和** x_3

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{5}{2} \\ x_2 = -\frac{4}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 + 3 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 3 \end{cases}$$

例题

建立迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{3}{8}x_2^{(k)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{5}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{4}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} + 3 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{4}x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0,0,0)^T$

进行迭代, 可以逐步得出一个近似解的序列:

$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ （**k=1, 2, …**）

例题

直到求得的近似解能达到预先要求的精度，则迭代过程终止，以最后得到的近似解作为线性方程组的解。当迭代到第10次有

$$x^{(10)}=(x_1^{(10)},x_2^{(10)},x_3^{(10)})^T=(3.000032,\quad 1.999838,\quad 0.9998813)^T$$

计算结果表明，此迭代过程收敛于方程组的精确解$x^*=(3,2,1)^T$。

例题

考察一般的方程组，将n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

写成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

例题

若 $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1,2,\cdots,n)$，分离出变量 x_i

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j) \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

据此建立迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \qquad i = 1,2,\cdots n$$

上式称为解方程组的Jacobi迭代公式。

雅可比（Jacobi）迭代法

2. 雅可比迭代法的矩阵表示

设方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵A非奇异，且主对角元素 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则可将A分裂成

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & a_{n-1n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

记作 $\mathbf{A}=\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U}$

雅可比（Jacobi）迭代法

则 $Ax=b$ 等价于 $(L+D+U)x=b$

即 $$Dx=-(L+U)x+b$$

因为 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

这样便得到一个迭代公式

$$\begin{aligned}x^{(k+1)}&=-D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b\\&=-D^{-1}(A-D)x^{(k)}+D^{-1}b\\&=(I-D^{-1}A)x^{(k)}+D^{-1}b\end{aligned}$$

雅可比（Jacobi）迭代法

令 $B=(I-D^{-1}A)\qquad f=D^{-1}b$

则有 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ （**k = 0,1,2…**）

称为雅可比迭代公式，B称为雅可比迭代矩阵

其中

$$B=(I-D^{-1}A)=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

雅可比（Jacobi）迭代法

在例2中,由迭代公式写出雅可比迭代矩阵为

$$B = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

雅可比迭代矩阵表示法，主要是用来讨论其收敛性，实际计算中，要用雅可比迭代法公式的分量形式。即

雅可比（Jacobi）迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n) \end{cases}$$

(k=0,1,2,…)

高斯-赛德尔迭代法

3 高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）迭代法

1. 高斯-塞德尔迭代法的基本思想

在Jacobi迭代法中，每次迭代只用到前一次的迭代值，若每次迭代充分利用当前最新的迭代值，即在求 $x_i^{(k+1)}$ 时用新分量 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 代替旧分量 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$, 就得到高斯-赛德尔迭代法。其迭代法格式为：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

(**i**=1, 2, …, **n** **k**=0, 1, 2, …)

例题

例3 用Gauss—Seidel 迭代格式解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

精确要求为 ε =0. 005

解 Gauss—Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 1)/8 \\ x_2^{(k+1)} = (-2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + 4)/10 \\ x_3^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} - 3)/5 \end{cases}$$

例题

取初始迭代向量 $x^{(0)}=(0 \quad ,0 \quad ,0)^T$ **，迭代结果为：**

$$x^{(1)}=(0.1250, \quad 0.3750, \quad -0.5000)^T$$

$$x^{(2)}=(0.2344, \quad 0.3031, \quad -0.4925)^T$$

$$x^{(3)}=(0.2245, \quad 0.3059, \quad -0.4939)^T$$

$$\boldsymbol{x}^* \approx \quad x^{(4)}=(0.2250, \quad 0.3056, \quad -0.4936)^T$$

$$\left|x_i^{(4)}-x_i^{(3)}\right|<0.005, \qquad (i=1,2,3)$$

高斯-赛德尔迭代法

2. Gauss—Seidel 迭代法的矩阵表示

将A分裂成A =L+D+U，则 $Ax=b$等价于

(L+D+U)x = b ，于是,则高斯—塞德尔迭代过程

$$Dx^{(k+1)}=-Lx^{(k+1)}-Ux^{(k)}+b$$

因为 $|D|\neq 0$ ，所以 $|D+L|=|D|\neq 0$

故 $$(D+L)x^{(k+1)}=-Ux^{(k)}+b$$

$$x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}+(D+L)^{-1}b$$

令 $G_1=-(D+L)^{-1}U,\qquad d_1=(D+L)^{-1}b$

则高斯-塞德尔迭代形式为：$x^{(k+1)}=G_1x^{(k)}+d_1$

迭代法的收敛性

我们知道, 对于给定的方程组可以构造成简单迭代公式、雅可比迭代公式、高斯-塞德尔迭代公式和超松弛迭代公式，但并非一定收敛。现在分析它们的收敛性。

对于方程组 $Ax=b$ 经过等价变换构造出的等价方程组

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d \qquad (k = 0,1,\cdots)$$

在什么条件下迭代序列$\left\{x^{(k)}\right\}$收敛？先引入如下定理

迭代法的收敛性

定理1 迭代公式 $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d \quad (k = 0,1,\cdots)$ 收敛的充分必要条件是迭代矩阵G的谱半径 $\rho(G) < 1$

证:必要性 设迭代公式收敛, 当k→∞时, $x^{(k)} \to x^*$

则在迭代公式两端同时取极限得 $x^* = Gx^* + d$

记 $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, 则 $e^{(k)}$ 收敛于0(零向量), 且有

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x^* = Gx^{(k-1)} + d - (Gx^* + d) = G(x^{(k-1)} - x^*) = Ge^{(k-1)}$$

于是 $e^{(k)} = Ge^{(k-1)} = G^2e^{(k-2)} = \cdots = G^ke^{(0)}$

由于 $e^{(0)}$ 可以是任意向量, 故 $e^{(k)}$ 收敛于0当且仅当 G^k 收敛于零矩阵, 即当 $k \to \infty$ 时 $\|G^k\| \to 0$

迭代法的收敛性

于是 $\|G^k\| \geq \rho(G^k) = (\rho(G))^k \to 0$

所以必有 $\rho(G) < 1$

充分性：设 $\rho(G) < 1$, 则必存在正数ε, 使 $\rho(G) + \varepsilon < 1$

则存在某种范数$\|\bullet\|$, 使 $\|G\| \leq \rho(G) + \varepsilon < 1$,

$\|G^k\| \leq \|G\|^k \leq (\rho(G) + \varepsilon)^k$ ，则 $\lim\limits_{k\to\infty}(\rho(G) + \varepsilon)^k = 0$ ，所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\|G^k\| = 0$ ，即 $\lim\limits_{k\to\infty} G^k = 0$ 。故 $e^{(k)}$ 收敛于0, $x^{(k)}$ 收敛于 x^*

迭代法的收敛性

由此定理可知，不论是雅可比迭代法、高斯—塞德尔迭代法还是超松弛迭代法，它们收敛的充要条件是其迭代矩阵的谱半径 $\rho(G)<1$ 。

事实上，在例1中，迭代矩阵G= $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$，

其特征多项式为 $\det(\lambda I - G) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$

,特征值为 -2，-3，$\rho(G)=3>1$ ，所以迭代发散

迭代法的收敛性

定理2（迭代法收敛的充分条件）

若迭代矩阵G的一种范数 $\|G\|<1$，则迭代公式

$$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d \qquad (k=0,1,\cdots)$$

收敛，且有误差估计式

$$\|x^{*}-x^{(k)}\|\le\frac{\|G\|}{1-\|G\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

及

$$\|x^{*}-x^{(k)}\|\le\frac{\|G\|^{k}}{1-\|G\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

矩阵的谱半径

设A是n × n矩阵，λ_i是其特征值，i = 1，2，……，n。称$\rho(A)=\max\{|\lambda_i|,i=1,2,\ldots\ldots n\}$为A的谱半径。即矩阵A的谱半径等于矩阵A的特征值的模的最大值；若特征值为虚数，则谱半径为实部与虚部的平方和的开方。

迭代法的收敛性

证：矩阵的谱半径不超过矩阵的任一种范数, 已知 $\|G\|<1$, 因此 $\rho(G)<1$, 根据定理2可知迭代公式收敛

又因为 $\|G\|<1$, 则**det (I-G)≠0, I-G**为非奇异矩阵,故**x＝Gx＋d**有惟一解 x^*, 即 $x^*=Gx^*+d$

与迭代过程 $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d$ 相比较, 有

$$x^*-x^{(k)}=G(x^*-x^{(k-1)})$$

两边取范数

迭代法的收敛性

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \|G\| \left\|x^* - x^{(k-1)}\right\|$$

$$= \|G\| \left\|x^* - x^{(k)} + x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

$$\le \|G\| \left\|x^* - x^{(k)}\right\| + \|G\| \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

$$(1 - \|G\|)\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \|G\| \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

$$\therefore \quad \left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \frac{\|G\|}{1 - \|G\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$$

迭代法的收敛性

由迭代格式，有

$$x^{(k)}-x^{(k-1)}=G(x^{(k-1)}-x^{(k-2)})=G^2(x^{(k-1)}-x^{(k-2)})=\cdots=G^{k-1}(x^{(1)}-x^{(0)})$$

两边取范数，代入上式，得

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\frac{\|G\|^k}{1-\|G\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$ 证毕

由定理知，当 $\|G\|<1$ 时，其值越小，迭代收敛越快，在程序设计中通常用相邻两次迭代 $\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|<\varepsilon$ （ε 为给定的精度要求）作为控制迭代结束的条件

例题

例5　已知线性方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 66 \end{cases}$$

考察用Jacobi迭代和G-S迭代求解时的收敛性

解:（1）雅可比迭代矩阵

$$B = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

例题

$$\|B\|_\infty = \max\left\{\frac{5}{8}, \frac{5}{11}, \frac{9}{12}\right\} = \frac{9}{12} < 1$$ **故Jacobi迭代收敛**

(2) 将系数矩阵分解

$$A = D + L + U = \begin{bmatrix} 8 & & \\ & 11 & \\ & & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ 4 & 0 & \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

则高斯-塞德尔迭代矩阵

$$G_1 = -(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 8 & & \\ 4 & 11 & \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

例题

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & 0 & 0\\ -\frac{1}{22} & \frac{1}{11} & 0\\ -\frac{9}{176} & -\frac{1}{44} & \frac{1}{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8}\\ 0 & -\frac{3}{22} & \frac{2}{11}\\ 0 & -\frac{27}{176} & -\frac{7}{88}\end{bmatrix}$$

$$\|G_1\|_\infty=\max\left\{\frac{5}{8},\frac{7}{22},\frac{41}{176}\right\}=\frac{5}{8}<1$$

故高斯—塞德尔迭代收敛。

迭代法的收敛性

定理3 对角占优线性方程组 $Ax=b$ 的雅可比迭代公式和高斯-赛德尔迭代公式均收敛。

（对角占优阵： 其主对角元素的绝对值大于同行 其它元素绝对值之和）

证: 雅可比迭代公式的迭代矩阵为

$$B = I - D^{-1}A$$

由定理4知，这时 $\|B\|_\infty = \|I - D^{-1}A\|_\infty < 1$，再由定理3知迭代收敛，再考察高斯-赛德尔迭代公式的迭代矩阵 $G_1 = -(D+L)^{-1}U$

令 $y = G_1 x$ ，则有

$y = -(D+L)^{-1}Ux$ 即 $(D+L)y = -Ux$

迭代法的收敛性

$y = -D^{-1}Ly - D^{-1}Ux$ 写出分量形式有

$$y_i = -\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}y_i - \sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

设 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i| = 1$ 而 $\|y\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|y_i| = |y_k|, \quad 1 \le k \le n$

迭代法的收敛性

由上式得 $$\|y\|_\infty = |y_k| \le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}\|y\|_\infty + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

由此整理得 $$\|y\|_\infty \le \frac{\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}}{1-\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}}$$

利用对角占优条件知上式右端小于1,(如果右端大1,则得出与对角占优条件矛盾的结果)故有

$\|G_1\|_\infty = \max\limits_{\|x\|_\infty=1}\|y\|_\infty < 1$ **据定理3知G-S收敛**

迭代法的收敛性

定理4 若方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵A是正定的，则G－S迭代法收敛

例题

例1 设求解线性方程组 $Ax=b$ 的雅可比迭代

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f,\qquad k=0,1,\cdots$$

求证当 $\|B\|_\infty<1$ 时, 相应的高斯–塞德尔迭代收敛

证: 由于B是雅可比迭代的迭代矩阵, 故有

$$I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

例题

又 $\|B\|_\infty < 1$, 故有

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad \text{则} \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1,2,\cdots,n$$

∴系数矩阵 $Ax = b$ 为对角占优阵, 故G-S迭代收敛

例题

例2 设 $a_{11}a_{22} \neq 0$,证明, 求解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的Jacobi迭代与G-S迭代同时收敛或发散

证:雅可比迭代矩阵

$$B = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$

例题

其谓半径 $\rho(B)=\sqrt{\dfrac{|a_{12}a_{21}|}{|a_{11}a_{22}|}}$

G-S迭代矩阵 $G_1=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{21}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$

其谱半径 $\rho(G_1)=\dfrac{|a_{12}a_{21}|}{|a_{11}a_{22}|}$

显然, $\rho(B)$ 和 $\rho(G_1)$ 同时小于、等于或大于1,因而Jacobi迭代法与G-S迭代法具有相同的收敛性

例题

例3 考察用雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法解线性方程组Ax=b的收敛性，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

解： 先计算迭代矩阵

雅可比矩阵

例题

$$B = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} & -\dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

求特征值

$$\left|\lambda I - B\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = 0$$

例题

$\rho(B) = 0 < 1$

∴用雅可比迭代法求解时，迭代过程收敛

高斯-塞德尔迭代矩阵

$$G_1 = -(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例题

求特征值

$$\left|\lambda I - G_1\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

$\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=2$ $\rho(G_1)=2>1$

∴用高斯-塞德尔迭代法求解时，迭代过程发散

例题

例4 设 方程组

$$\begin{cases} x_1 + a x_2 = b_1 \\ a x_1 + 2 x_2 = b_2 \end{cases}$$

① 写出解方程组的Jacobi迭代公式和迭代矩阵并讨论迭代收敛的条件。

② 写出解方程组的Gauss-Seidel迭代矩阵,并讨论迭代收敛的条件。

解 ① Jacobi迭代公式和Jacobi矩阵分别为

例题

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -ax_2^{(k)} + b_1 \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a}{2} x_1^{(k)} + b_2 \end{cases} \qquad G_J = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -\dfrac{a}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

当$|a|<1$时,Jacobi矩阵$\|G_J\|_\infty<1$,对初值$x(0)$均收敛

② Gauss-Seidel矩阵为

例题

也可用矩阵的谱半径 $\rho(G_S)<1$ 来讨论

$$G_S = -(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{a}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & -\dfrac{a^2}{2} \end{bmatrix}$$

当$|a|<1$时, Gauss-Seidel矩阵 $\|G_s\|_\infty<1$,

所以对任意初值$x^{(0)}$均收敛。

例题

例5 讨论用雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法解线性方程组Ax=b的收敛性。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解： 先计算迭代矩阵

雅可比矩阵

例题

$$B = I - D^{-1}A \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

求特征值

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \lambda & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(2\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0$$

例题

$\lambda_1 = -1$， $\lambda_{2,3} = 1/2$

$\rho(B) = 1$

∴用雅可比迭代法求解时，迭代过程不收敛

高斯-塞德尔迭代矩阵

$$G_1 = -(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

求特征值

例题

$$\left|\lambda I - G_1\right| = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \lambda - \frac{3}{8} \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{16}$$

$$\rho(G_1) = 0.3536 < 1$$

∴用高斯-塞德尔迭代法求解时，迭代过程收敛

例题

例6 给定线性方程组 AX= b

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

用迭代公式

$X^{(K+1)}=X^{(K)}+\alpha(b-AX^{(K)})$ (k=0,1,…）

求解AX=b,当α取何值时迭代收敛?

解:所给迭代公式的迭代矩阵为

例题

$$B = I - \alpha A = \begin{bmatrix} 1-3\alpha & -2\alpha \\ -\alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - B\right| = \begin{bmatrix} \lambda-(1-3\alpha) & 2\alpha \\ \alpha & \lambda-(1-2\alpha) \end{bmatrix} = 0$$

即 $\lambda^2-(2-5\alpha)\lambda+1-5\alpha+4\alpha^2=0$

$\lambda^2-(2-5\alpha)\lambda+(1-\alpha)(1-4\alpha)=0$

$[\lambda-(1-\alpha)][\lambda-(1-4\alpha)]=0$

$\lambda_1=1-\alpha \quad \lambda_2=1-4\alpha$

例题

$\rho(B)=\max\{|1-\alpha|, |1-4\alpha|\}<1$

取$0<\alpha<1/2$迭代收敛

例题

例7 设求解线性方程组Ax=b的简单迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g \qquad (k=0,1,2,\ldots\ldots)$$

收敛, 求证: 对$0<\omega<1$, 迭代法

$$x^{(k+1)}=[(1-\omega)I+\omega B]x^{(k)}+\omega g \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

收敛。

例题

证: 设$C=(1-\omega)I+\omega B$, $\lambda(C)$和$\lambda(B)$分别为C和B的特征值，则显然

$\lambda(C)=(1-\omega)+\omega\lambda(B)$

因为$0<\omega<1$, $\lambda(C)$ 是1和$\lambda(B)$ 的加权平均,

且由迭代法 $k=0,1,\ldots\ldots$

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g \qquad (k=0,1,2,\ldots\ldots)$

收敛知$|\lambda(B)|<1$, 故$|\lambda(C)|<1$, 从而$\rho(C)<1$, 即

$x^{(k+1)}=[(1-\omega)I+\omega B]x^{(k)}+\omega g \qquad (k=0,1,2,\ldots)$ 收敛

随堂测验

1. 对任意初始向量$x^{(0)}$及右端向量 f，Jacobi迭代公式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

收敛于方程组的精确解 x^* 的充要条件是（　　）

（A）$\rho(B) < 1$　（B）$\|B\|_\infty < 1$　（C）$\|B\|_1 < 1$　（D）$\|B\|_2 < 1$

2. 用Gauss--Seidel迭代法解方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 = 4 \\ 2ax_1 + x_2 = -3 \end{cases}$

其中a为实数，方法收敛的充要条件是满足（　　）

本章小结

本章介绍了解线性方程组 $Ax=b$ 迭代法的一些基本理论和具体方法。

迭代法是一种逐次逼近的方法，即对任意给定的初始近似解向量，按照某种方法逐步生成近似解序列，使解序列的极限为方程组的解。注意到在使用迭代法

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

本章小结

解方程组时，其迭代矩阵B和迭代向量f在计算过程中始终不变,迭代法具有循环的计算公式,方法简单，程序实现方便，它的优点是能充分利用系数的稀疏性,适宜解大型稀疏系数矩阵的方程组。迭代法不存在误差累积问题。使用迭代法的关键问题是其收敛性与与收敛速度，收敛性与迭代初值的选取无关，这是比一般非线性方程求根的优越之处。

本章小结

在实际计算中，判断一种迭代格式收敛性较麻烦，由于求迭代的谱半径时需要求特征值，当矩阵的阶数较大时，特征值不易求出，通常采用矩阵的任一种范数都小于1或对角占优来判断收敛性。有时也可边计算边观察其收敛性。如何加快迭代过程的收敛速度是一个很重要的问题，实用中更多的采用SOR法，选择适当的松驰因子ω有赖于实际经验。我们应针对不同的实际问题，采用适当的数值算法。

本章习题

本章结束