第3章　函数逼近与最小二乘法

§3.1　函数逼近的基本概念*

§3.2　正交多项式*

§3.3　最佳平方逼近*

§3.4　曲线拟合的最小二乘法

§3.5　有理逼近*

§3.6　三角逼近与快速傅里叶变换*

§ 3.1　函数逼近的基本概念

问题的提出

- 在数值计算中经常要计算函数值，如计算机中计算基本初等函数及其它特殊函数；当函数只在有限点集上给定函数值，要在包含该点集的区间上用公式给出函数的简单表达式，这些都涉及在区间$[a, b]$上用简单函数逼近已知复杂函数的问题，这就是函数逼近问题. 第二章讨论的插值法就是函数逼近的一种.

问题的提出

本章讨论的函数逼近，是指“对函数类A中给定的函数$f(x)$，记作$f(x)\in A$，要求在另一类简单的便于计算的函数类B中求函数$p(x)\in B$，使$p(x)$与$f(x)$的误差在某种度量意义下最小”．函数类A通常是区间$[a,\ b]$上的连续函数，记作$C[a,\ b]$，称为函数逼近空间；而函数B通常为n次多项式，有理函数或分段低次多项式等. 为了在数学上描述更精确，先要介绍代数和分析中一些基本概念及预备知识。

空间定义

数学上常把在各种集合中引入某一些不同的确定关系称为赋予集合以某种空间结构，并将这样的集合**称为空间。**

空间举例

例1 所有实n维向量集合，按向量的加法和数乘构成实数域R上的线性空间---R^n, 称为n维向量空间.

例2　对次数不超过n的（n为正整数）实系数多项式全体，按多项式加法和数乘构成数域R上的多项式线性空间--H_n, 称为多项式空间.

例3 所有定义在 $[a,b]$ 集合上的连续函数全体，按函数的加法和数乘构成数域R上的连续函数线性空间–$C[a, b]$, 称为连续函数空间. 类似地记$C^p[a, b]$为具有p阶连续导数的函数空间.

线性无关

定义1　设集合S是数域P上的线性空间，元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in S$，如果存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$，使得

$$\boxed{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0,} \qquad (3.1)$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性相关，否则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，即只有当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时等式(3.1)才成立.

线性空间

若线性空间S是由n个线性无关元素$x_1,\cdots,x_n$生成的，即对任意$x\in$S，都有

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

则$x_1,\ldots,x_n$称为空间S的一组基，记为S=span{$x_1,\ldots,x_n$}，并称空间S为n维空间，系数$a_1,\ldots,a_n$为x在基$x_1,\ldots,x_n$下的坐标，记作$(a_1,\cdots,a_n)$，如果S中有无限多个线性无关元素$x_1,\ldots,x_n,\cdots$，则称S为无限维线性空间.

多项式空间

下面考虑次数不超过n实系数多项式集合H_n，其元素$p(x)\in H_n$表示为

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (3.2)$$

它由n+1个系数$(a_0, a_1,\cdots,a_n)$唯一确定. $1,x,\cdots,x^n$ 线性无关，它是H_n的一组基，故集合

$$H_n=\mathrm{span}\{1, x,\cdots,x^n\},$$

且$(a_0, a_1,\cdots,a_n)$是$p(x)$的坐标向量，H_n是n+1维的.

范数与赋范线性空间

为了对线性空间中元素大小进行衡量，需要引进范数定义，它是R^n空间中向量长度概念的直接推广.

定义2 设S为线性空间，$x\in$S，若存在唯一实数$\|\cdot\|$，满足条件：

(1) $\|x\|\geq 0$;当且仅当$x=0$时, $\|x\|=0$; (正定性)

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, $\alpha\in$R; (齐次性)

(3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, $x,y\in$S. (三角不等式)

则称$\|\cdot\|$为线性空间S上的范数，S 与$\|\cdot\|$一起称为赋范线性空间，记为X.

向量的常用范数

对$\mathbf{R}^n$上的向量 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, 三种常用范数为:

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|,$$ 称为 ∞一范数或最大范数,

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,$$ 称为 1一范数,

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$ 称为 2一范数.

函数的常用范数

类似的对连续函数空间C[a, b], 若f∈C[a, b]可定义以下三种常用函数的范数

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|,$$ 称为∞－范数

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$ 称为1－范数

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$ 称为2－范数

矩阵的常用范数

对n阶方阵$A=(a_{ij})_n$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ 称为A的行范数

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$ 称为A的列范数

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$ 称为A的2-范数

其中 $\lambda_{\max}(A^TA)$表示 A^TA的最大特征值

即$f(\lambda)=|\lambda E-A^TA|=0$

连续函数逼近

对连续函数$f(x)\in C[a, b]$，它不能用有限个线性无关的函数表示，故$C[a, b]$是无限维的，但它的任一元素$f(x)\in C[a, b]$均可用有限维的$p(x)\in H_n$逼近，使误差

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-p(x)\right|=\left\|f(x)-p(x)\right\|_\infty<\varepsilon$$

其中ε为任意给的小正数，即精度要求．这就是下面著名的魏尔斯特拉斯（Weierstrass）定理.

魏尔斯特拉斯定理

定理1　设$f(x) \in C[a, b]$，则对任何$\varepsilon>0$，总存在一个代数多项式$p(x)$，使

$$\|f(x)-p(x)\|_{\infty}<\varepsilon$$

在$[a, b]$上一致成立.（证明略，见书p52有说明.）

例题

例4 计算向量x的范数，其中 $x=[1,-2,3]^T$

解

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}|x_i| = \max[1,|-2|,3] = 3$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3}|x_i| = 1+|-2|+3 = 6$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14} \approx 3.7$$

例题

例5 计算函数x^2关于C[0,1]的范数.

解

$$\|x^2\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|x^2| = 1$$

$$\|x^2\|_1 = \int_0^1 |x^2|dx = \frac{1}{3}$$

$$\|x^2\|_2 = \left(\int_0^1 (x^2)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

例题

例6 计算矩阵A的范数，其中 $A=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

解

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}| = \max[7+10,5+7]=17$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}| = \max[7+5,10+7]=17$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \approx \sqrt{223} = 14.9$$

最小二乘拟合

若$f(x)$是$[a, b]$上的一个列表函数，在区间节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_m \le b$上给出$f(x_i)(i=0,1, \ldots,m)$，要求$P^*(x) \in \Phi$使

$$\left\| f - P^* \right\|_2 = \min_{P \in \Phi} \left\| f - P \right\|_2 = \min_{P \in H_n} \sqrt{\sum_{i=0}^{m} [f(x_i) - P(x_i)]^2}$$

则称$P^*(x)$为$f(x)$在$[a, b]$上的最小二乘拟合.

§ 3.4 曲线拟合的最小二乘法

问题的提出

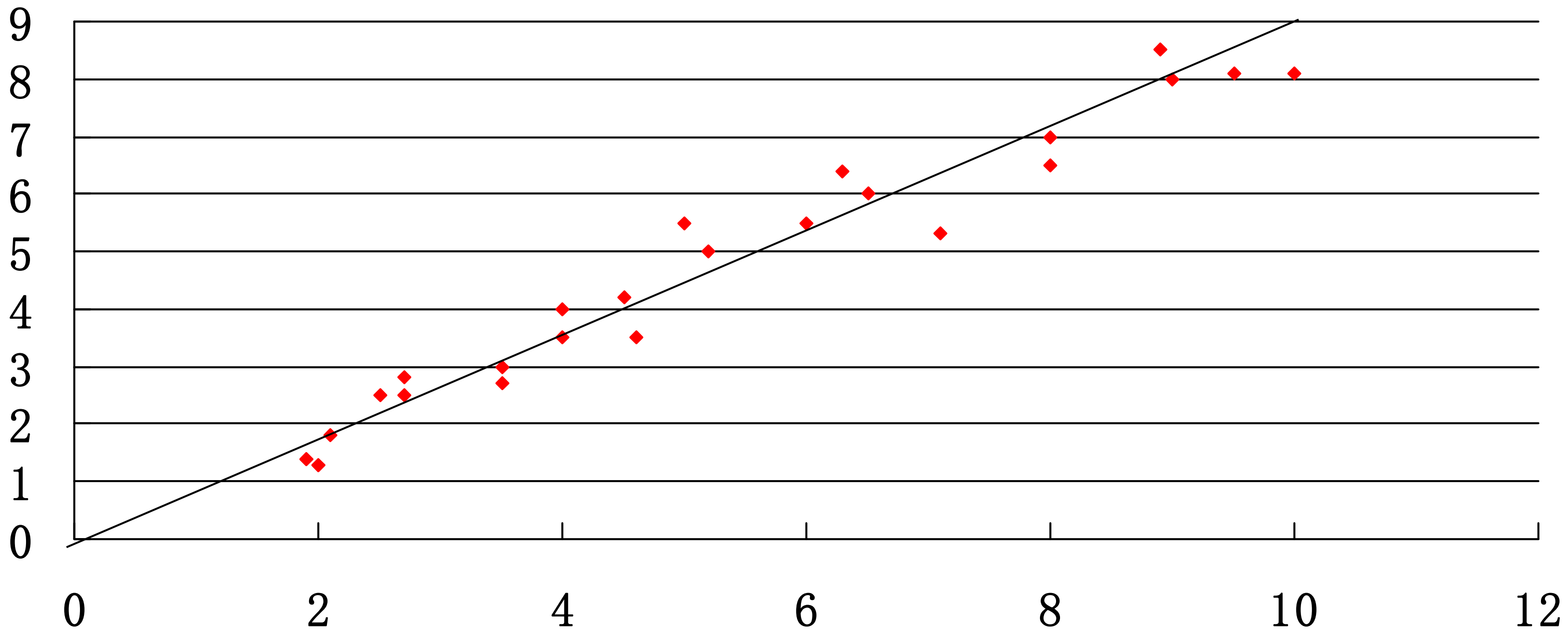
- 某种合成纤维的强度与其拉伸倍数有直接关系，下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应拉伸倍数的记录。

- 提示：将拉伸倍数作为x，强度作为y, 在座标纸上标出各点，可以发现什么?

数据表格

编号	拉伸倍数	强度 kg/mm^2	编号	拉伸倍数	强度 kg/mm^2
1	1.9	1.4	13	5.0	5.5
2	2.0	1.3	14	5.2	5.0
3	2.1	1.8	15	6.0	5.5
4	2.5	2.5	16	6.3	6.4
5	2.7	2.8	17	6.5	6.0
6	2.7	2.5	18	7.1	5.3
7	3.5	3.0	19	8.0	6.5
8	3.5	2.7	20	8.0	7.0
9	4.0	4.0	21	8.9	8.5
10	4.0	3.5	22	9.0	8.0
11	4.5	4.2	23	9.5	8.1
12	4.6	3.5	24	10.0	8.1

数据图



曲线拟合

已知的离散数据$y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\ \ldots,n)$往往是通过观测而得到的，经常带有观测误差。

曲线拟合：希望找到一条曲线，它既能反映结定数据的总体分布形式，又不致于出现局部较大的波动。这种逼近方式．只要所构造的逼近函数$\Phi(x)$与被逼近函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的偏差满足其种要求即可。

最小二乘法

曲线拟合的最小二乘法：以使得偏差的平方和最小为标准

$$E=\sum_{i=0}^{n}e_i^2=\sum_{i=0}^{n}w(x_i)[\Phi(x_i)-y_i]^2=\min$$

$$\Phi(x)=\sum_{j=0}^{m}a_j\varphi_j(x)$$

线性最小二乘拟合

假设所给的数据点(x_i, y_i), (i=0,1,2, …,n)的分布大致呈直线，故可选择线性函数作拟合曲线。

【问题1】 对于给定的数据点(x_i, y_i), (i=0,1,2, …,n)，求作一次式$y=a+bx$，使总误差为最小。

$$E=\sum_{i=0}^{n}[a+bx_i-y_i]^2=\min$$

线性最小二乘拟合（续）

【解】由微积分的知识可知，这一问题的求解，可归结为求二元函数*E(a,b)*的极值，即

$$\frac{\partial E}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial b}=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a}=2\sum_{i=0}^{n}[a+bx_i-y_i]=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b}=2\sum_{i=0}^{n}[a+bx_i-y_i]x_i=0$$

线性最小二乘拟合（续）

$$a\sum_{i=0}^{n}1+b\sum_{i=0}^{n}x_i=\sum_{i=0}^{n}y_i$$

$$a\sum_{i=0}^{n}x_i+b\sum_{i=0}^{n}x_i^2=\sum_{i=0}^{n}x_iy_i$$

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{n}1 & \sum_{i=0}^{n}x_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=0}^{n}y_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_iy_i\end{Bmatrix}$$

这是关于a,b的线性方程组，称为法方程。

多项式最小二乘拟合

有时所给数据点的分布并不一定近似地呈一条直线，这时若仍用直线似合显然是不合适的。对于这种情况，可以考虑用多项式拟合。

【问题2】对于给定的数据点(x_i, y_i), (i=0,1,2, …,n)，求作多项式，$y=\sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ 使总误差为最小。

$$E=\sum_{i=0}^{n}[\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i]^2 = \min$$

多项式最小二乘拟合（续）

【解】由微积分的知识可知，这一问题的求解，可归结为求二元函数$E(a_0,a_1,\dots,a_m)$的极值，即

$$\frac{\partial E}{\partial a_0}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial a_1}=0,\cdots,\frac{\partial E}{\partial a_m}=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{n}[\sum_{j=0}^{m}a_j x_i^j-y_i]x_i^k=0\qquad k=0,1,\cdots,m$$

$$\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=0}^{n}x_i^{j+k}-\sum_{i=0}^{n}y_i x_i^k=0\qquad k=0,1,\cdots,m$$

多项式最小二乘拟合（续）

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^m & \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m \end{Bmatrix}$$

这是关于$a_0, a_1, \ldots, a_m$的线性方程组，称为法方程。

例题

例8 某合金成分x与膨胀系数y之间的关系有如下实验数据，求膨胀系数y与成分x的拟合曲线$y=P(x)$。

i	0	1	2	3	4	5	6
x	37	38	39	40	41	42	43
y	3.40	3.00	2.10	1.53	1.80	1.90	2.90

例题

解　将数据标在坐标纸上，由散点图可以推断他们大致分布在一条抛物线上。为此取

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

例题

法方程

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{6} 1 & \sum_{i=0}^{6} x_i & \sum_{i=0}^{6} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{6} x_i & \sum_{i=0}^{6} x_i^2 & \sum_{i=0}^{6} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{6} x_i^2 & \sum_{i=0}^{6} x_i^3 & \sum_{i=0}^{6} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{6} y_i \\ \sum_{i=0}^{6} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{6} y_i x_i^2 \end{Bmatrix}$$

例题

代入数据后得

$$\begin{bmatrix} 7 & 280 & 11228 \\ 280 & 11228 & 451360 \\ 11228 & 451360 & 18188996 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16.63 \\ 661.2 \\ 26368.2 \end{Bmatrix}$$

解得

$$a_0 = 268.010, \quad a_1 = -13.171, \quad a_2 = 0.163$$

于是所求拟合曲线为

$$p_2(x) = 268.010 - 13.171x + 0.163x^2$$

其他函数曲线拟合

最小二乘法并不只限于多项式，也可以用任何具体给出的函数形式。即可取

$$\Phi(x)=\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)$$

【问题3】对于给定的数据点$(x_i，y_i)$, (i=0,1,2, …,n)，求作曲线，$y=\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x)$使总误差为最小。

$$E=\sum_{i=0}^{n} w(x_i)[\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i)-y_i]^2=\min$$

其他函数曲线拟合（续）

【解】由微积分的知识可知，这一问题的求解，可归结为求二元函数**E(a$_0$,a$_1$, …,a$_m$)**的极值，即

$$\frac{\partial E}{\partial a_0}=0,\quad \frac{\partial E}{\partial a_1}=0,\cdots,\frac{\partial E}{\partial a_m}=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{n}w(x_i)[\sum_{j=0}^{m}a_j\varphi_j(x_i)-y_i]\varphi_k(x_i)=0\quad k=0,1,\cdots,m$$

$$\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=0}^{n}w(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)=\sum_{i=0}^{n}w(x_i)y_i\varphi_k(x_i)\quad k=0,1,\cdots,m$$

其他函数曲线拟合（续）

引进内积记号

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{n}w(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$$

$$(y,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{n}w(x_i)y_i\varphi_k(x_i)$$

$$\sum_{j=0}^{m}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(y,\varphi_k)\quad k=0,1,\cdots,m$$

其他函数曲线拟合（续）

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \\ \vdots \\ (y,\varphi_m) \end{Bmatrix} \qquad (3.4)$$

这是关于$a_0,a_1,\ldots,a_m$的线性方程组，称为法方程。

例题

例9 对例8中的数据，试求形如

$$\Phi(x)=a_0+a_1\sin\frac{\pi}{5}x+a_2\cos\frac{\pi}{10}x$$

的拟合函数。

解 取拟合函数系

$$\left\{\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_1(x)=\sin\frac{\pi}{5}x,\quad \varphi_2(x)=\cos\frac{\pi}{10}x\right\}$$

例题

得法方程

$$\begin{bmatrix} 7 & 0.0 & 5.6957 \\ 0.0 & 4.3090 & 0.0 \\ 5.6957 & 0.0 & 4.8090 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16.6300 \\ -1.6980 \\ 12.9064 \end{Bmatrix}$$

解出

$$a_0 = 5.289, \quad a_1 = -0.394, \quad a_2 = -3.581$$

因此所求的拟合函数为

$$\Phi(x) = 5.289 - 0.394\sin\frac{\pi}{5}x - 3.581\cos\frac{\pi}{10}x$$

非线性最小二乘拟合

（1） $y = ax^b$

两边取对数，得

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$

令 $w = \lg y$， $A = \lg a$， $z = \lg x$，则得

$$w = A + bz$$

（2） $y = ae^{bx}$

两边取自然对数，得

$$\ln y = \ln a + bx$$

令 $w = \ln y$， $A = \ln a$， $z = x$，则得

$$w = A + bz$$

非线性最小二乘拟合（续）

（3） $y = ab^x$

两边取对数，得

$$\lg y = \lg a + x \lg b$$

令 $w = \lg y$， $A = \lg a$, $B = \lg b$, $z = x$, 则得

$$w = A + Bz$$

（4） $y = a + b \lg x$

令 $w = y$， $z = \lg x$， 则得

$$w = a + bz$$

非线性最小二乘拟合（续）

（5）$y = \dfrac{1}{ax+b}$

令 $w = 1/y$， $z = x$，则得

$$w = az + b$$

（6）$y = \dfrac{x}{ax+b}$

令 $w = 1/y$， $z = 1/x$，则得

$$w = a + bz$$

例题

例11 给定实验数据

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

试求形如 $y = ae^{bx}$ 的拟合函数。

解 对拟合函数的两边取自然对数，即

$$\ln y = \ln a + bx$$

令 $w = \ln y\,,\ A = \ln a\,,\ z = x\,,$

则上式 成为关于A，b 的线性函数

$$w = A + bz$$

例题

根据数据(x , y) 算出对应的(z , w) , 得下表

z	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
w	1.6292	1.7561	1.8764	2.0082	2.1353

建立法方程

$$\begin{bmatrix} 5 & 7.5 \\ 7.5 & 11.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4052 \\ 14.4239 \end{bmatrix}$$

解得

$$A = 1.1225\,,\ b = 0.5057\,,\ a = e^{A} = 3.0725$$

因此，所求的拟合函数为

$$y = 3.0725e^{0.5057x}$$

线性矛盾方程组

方程个数大于未知量个数的方程组称为矛盾方程组，一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

即

线性矛盾方程组（续）

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad (3.11)$$

A是 n ×m阶的列满秩矩阵, ***x***是 m维的列向量, ***b***是 n维的列向量,

剩余向量 $e = b - Ax$

$$e^T e = \|e\|_2^2 = \|b - Ax\|_2^2 = \min \qquad (3.12)$$

线性矛盾方程组（续）

$$e^T e = (b - Ax)^T (b - Ax)$$

$$= b^T b - b^T A(A^T A)^{-1} A^T b$$

$$+ (A^T Ax - A^T b)^T (A^T A)^{-1} (A^T Ax - A^T b)$$

由于A的m个列向量线性无关，易知$\mathbf{A}^T\mathbf{A}, (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$是m×m阶对称正定矩阵，而且上式右端最后一项是正定二次型，同时其它两项与x无关。因此，欲使式（3.12）成立，必须有

线性矛盾方程组（续）

$$A^T A\boldsymbol{x} - A^T \boldsymbol{b} = 0$$

$$A^T A\boldsymbol{x} = A^T \boldsymbol{b} \qquad (3.13)$$

该式称为方程组$Ax=b$ 的法方程。因此，求解n阶矛盾方程组的问题转化求解m阶线性方程组的问题。

例题

例12 利用解线性矛盾方程组对例8中的数据作二次拟合，$p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$。

i	0	1	2	3	4	5	6
x	37	38	39	40	41	42	43
y	3.40	3.00	2.10	1.53	1.80	1.90	2.90

解：按题意，得矛盾方程组，

$$a_0+a_1x_i+a_2x_i^{\ 2}=y_i \qquad i=0,1,2\cdots,6$$

例题

写成矩阵形式，为

$$Aw = y$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_6 & x_6^2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad w = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

例题

其法方程为

$$A^T A w = A^T y$$

即

$$\begin{bmatrix} 7 & 280 & 11228 \\ 280 & 11228 & 451360 \\ 11228 & 451360 & 18188996 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16.63 \\ 661.2 \\ 26368.2 \end{Bmatrix}$$

例题

解得

$$a_0 = 268.010, \quad a_1 = -13.171, \quad a_2 = 0.163$$

于是所求拟合曲线为

$$p_2(x) = 268.010 - 13.171x + 0.163x^2$$

例题

例13 已知观测数据(1，-5)，(2，0)，(4，5)，(5，6)，

试用最小二乘法求形如

$$\varphi(x) = ax + \frac{b}{x}$$

上的经验公式。

例题

解：记

$$x_0 = 1, y_0 = -5; \quad x_1 = 2, y_1 = 0;$$

$$x_2 = 4, y_2 = 5; \quad x_3 = 5, y_3 = 6;$$

按题意，得矛盾方程组，

$$ax_i + b/x_i = y_i \quad (i = 0,1,2,3)$$

写成矩阵形式，为

例题

写成矩阵形式，为

$$Aw = y$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & 1/x_0 \\ x_1 & 1/x_1 \\ x_2 & 1/x_2 \\ x_3 & 1/x_3 \end{bmatrix} \quad y = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad w = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

例题

其法方程为

$$A^T A w = A^T y$$

即
$$\begin{bmatrix} 46 & 4 \\ 4 & 1.3525 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45 \\ -2.55 \end{Bmatrix}$$

解得 $a = 1.537650114 \quad b = -6.432976311$

于是所求拟合曲线为

$$y = 1.537650x - 6.432976 / x$$

六. （20 分）给定表中数据

x	1	2	3
y	$e^{1.6}$	e^{2}	$e^{2.5}$

试求形如 $y = ae^{bx}$ 的拟合函数。

§ 3.5　有理逼近

略

§3.6 三角逼近与快速傅里叶变换

略

本章小结

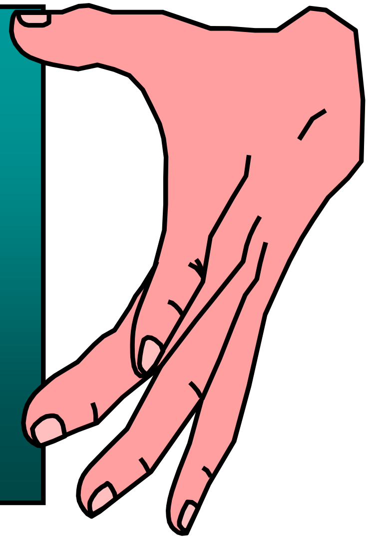
- 最小二乘法曲线拟和是实验数据处理的常用方法。
- 掌握线性最小二乘拟合的法方程。
- 掌握非线性最小二乘拟合的方法。
- 掌握线性矛盾方程组的解法。

本章习题

作业

P94-95

17,18



本章结束