姓名：______
学号：______
学院（系）:______
_____ 级_____ 班

装　订　线

大 连 理 工 大 学

课 程 名 称： 计算方法　试卷： A　考试形式： 闭卷

授课院（系）： 力学　考试日期：2012 年 6 月 14 日　试卷共 4 页

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
标准分	20	10	10	10	10	10	10	10	10	100
得　分										

一．填空题（每空 2 分，共 20 分）

1．$\boldsymbol{x}_i=(3\quad -1\quad 5\quad 8)^T$，则 $\|\boldsymbol{x}\|_1=$ <u>17</u>， $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=$ <u>8</u>。（第 3 章）

2．已知

$$\boldsymbol{x}=(1,-2)^T，\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}，$$

则 $\|\boldsymbol{Ax}\|_2=$ <u>12.0830</u>， $Cond(\boldsymbol{A})_\infty=$ ______， $Cond(\boldsymbol{A})_1=$ ______。（超范围）

3．设 $x_i(i=0,1,2,3,4,5)$ 为互异节点， $l_i(x)$ 为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数，

则 $\sum_{i=0}^{5}x_i^5 l_i(0)=$ <u>0</u>， $\sum_{i=0}^{5}(x_i^5+2x_i^4+x_i^3+1)l_i(x)=$ <u>$x^5+2x^4+x^3+1$</u>。（第 2 章）

4．Simpson 求积公式 $S=\dfrac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$ 具有 <u>3</u> 次代数精度，当 $f(x)$ 为二次多项式时，则 $\int_a^b f(x)dx-S=$ <u>0</u>。（第 4 章）

5．用 Gauss--Seidel 迭代法解方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2=4\\ 2ax_1+x_2=-3\end{cases}$，其中 a 为实数，方法收敛的充要条件是满足 <u>$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$</u>。（第 6 章）

二．单项选择题（每空 2 分，共 10 分）

1．线性代数方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，迭代公式

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

对任意初始向量 $x^{(0)}$ 及右端向量 f，收敛于方程组的精确解 x^* 的充要条件是（ D ）。

（第 6 章）

（A） $\|A\|_1 < 1$；　（B） $\|B\|_\infty < 1$；　（C） $\rho(A) < 1$ ；　（D）都不是

2. 若线性代数方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 是对角占优的，则 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法（ A ）。（第 6 章）

（A）都收敛；　（B）都发散；

（C）Jacobi 迭代法收敛而 G-S 迭代法发散；（D）Jacobi 迭代法发散而 G-S 迭代法收敛。

3. 非奇异矩阵 A 的条件数 $Cond(A)$ （　）（超范围）

（A） >1；　（B） ≥ 1；　（C） ≤ 1 ；　（D） <1

4. 5 个节点的高斯求积公式，其代数精度为（ C ）。（第 4 章）

（A）5　（B）6　（C）9　（D）11

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 3 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$，要使 $A = LL^T$，则 a 必须满足（ C ），其中 L 为对角元为正的下三角矩阵。（第 2 章）

（A） $|a| < \sqrt{6}$　（B） $|a| \leq \sqrt{6}$　（C） $|a| < \sqrt{3}$　（D） $|a| \leq \sqrt{3}$

三．求不高于 3 次的 Hermite 插值多项式 $H(x)$，使满足 $H(0) = H'(0) = 0$，

$H(1) = H'(1) = 1$（10 分）。

（第 2 章）

解：设 $H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$，则 $H'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$，

根据 $H(0) = H'(0) = 0$，有 $a_0 = a_1 = 0$，又由 $H(1) = H'(1) = 1$ 得方程组

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 1 \\ 2a_2 + 3a_3 = 1 \end{cases} \text{解之得} \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

于是所求的插值多项式为 $H(x)=2x^2-x^3$

四．给定表中数据

x	1	2	4
y	0.25	0.2	0.125

试求形如 $y=\dfrac{1}{a+bx}$ 的拟合函数（10 分）。

（第 3 章） 6 种非线性拟合之一

解： $w=1/y$ **得** $w=a+bx$

根据数据（x_i,y_i）算出对应的（x_i,w_i）,得表如下

x	1	2	4
w	4	5	8

法方程为 $\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2}1 & \sum_{i=0}^{2}x_i \\ \sum_{i=0}^{2}x_i & \sum_{i=0}^{2}x_i^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{2}w_i \\ \sum_{i=0}^{2}x_iw_i \end{Bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 17 \\ 46 \end{Bmatrix}$

解得 $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 5/2 \\ 19/14 \end{Bmatrix}$,

拟合函数为 $y=\dfrac{1}{\frac{5}{2}+\frac{19}{14}x}=\dfrac{14}{35+19x}$

五．设某物体垂直于 ox 轴的可变截面的面积为 $s(x)$，且设

$s(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D \qquad (a\le x\le b)$**，其中 A，B，C，D 为任意常数，**

试证明：此物体界于 $x=a$ 及 $x=b$ 间的体积 V 由下式给出：

$V=\dfrac{b-a}{6}\left[s(a)+4s(\dfrac{a+b}{2})+s(b)\right]$ **（10 分）。（第 4 章）辛普森公式**

解：物体界于 $x=a$ 及 $x=b$ 间的体积 V 可以表示为：

$$V=\int_a^b s(x)$$

由辛普森积分公式

$\int_a^b f(x)dx\approx\dfrac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)\right]$ 并且该积分公式具有 3 次代

数精度。所以，对于三次多项式 $s(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D \qquad (a\le x\le b)$ 积分可以得到精确值。故

$$V=\frac{b-a}{6}\left[s(a)+4s(\frac{a+b}{2})+s(b)\right]$$

六．用牛顿法求立方根 $\sqrt[3]{d}$。（1）给出迭代公式；（2）用此迭代公式计算 $\sqrt[3]{3}$，取初始值为 $x_0=3$，要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-3}$（10 分）。

（第 7 章） 其中用到牛顿法单根时平方收敛的特性

解：(1) 令 $f(x)=x^3-d$，$\sqrt[3]{d}$ 为方程 $f(x)$=0 的单根。

由 $f'(x)=3x^2$，得牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-d}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+d}{3x_k^2}$$

(2) 令 $d=3$，则有 $x_{k+1}=\dfrac{2x_k^3+3}{3x_k^2}$

取 $x_0=3$，则

$$x_1=\frac{2x_0^3+3}{3x_0^2}=\frac{2\times3^3+3}{3\times3^2}=2.1111$$

$$x_2=\frac{2x_1^3+3}{3x_1^2}=\frac{2\times2.1111^3+3}{3\times2.1111^2}=1.6318$$

$$x_3=\frac{2x_2^3+3}{3x_2^2}=\frac{2\times1.6318^3+3}{3\times1.6318^2}=1.4634$$

$$x_4=\frac{2x_3^3+3}{3x_3^2}=\frac{2\times1.4634^3+3}{3\times1.4634^2}=1.4426$$

$$x_5=\frac{2x_4^3+3}{3x_4^2}=\frac{2\times1.4426^3+3}{3\times1.4426^2}=1.4422$$

$$|x_5-x_4|=|1.4426-1.4422|=0.6\times10^{-3}<10^{-3}$$

七．设代数方程组为$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}$，用 Jacobi 迭代法求解，（1）判定解法的收敛性；（2）以 $x^{(0)}=[x_1\quad x_2\quad x_3]^{\mathrm{T}}=\{0,0,0,\}^{\mathrm{T}}$ 为初始点，求解此方程组（10 分）。

（第六章）

解：（1）

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ 1 & & \\ 2 & 2 & \end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & 2 & -2\\ & & 1\\ & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{I}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}|=\lambda^3=0$， 即 $\rho(\mathbf{B})=0<1$，故迭代法收敛

(2)

$$\mathbf{f}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}$$

雅克比迭代式为 $\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{f}$

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{B}\mathbf{x}_0+\mathbf{f}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{B}\mathbf{x}_1+\mathbf{f}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5\\ -3\\ -3\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3=\mathbf{B}\mathbf{x}_2+\mathbf{f}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}5\\ -3\\ -3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_4=\mathbf{B}\mathbf{x}_3+\mathbf{f}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

八．设 $A=\begin{bmatrix}6 & 8 & 10\\ 8 & 10 & 5\\ 10 & 5 & 26\end{bmatrix}$，若用 Jacobi 法求 A 的特征值和特征向量，求其第一步迭代所用的吉文斯（Givens）矩阵（10 分）。

（超范围）

九．用欧拉（Euler）法计算积分 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 在点 $x=0.1, 0.2, 0.3$ 的近似值，小数点后至少保留 5 位。（10 分）。 **（第 9 章）与作业题类似**

解：令 $y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$，则 $y'=\frac{\sin x}{x}$，且 $y(0)=0$。

（这里初值是根据积分上下限都是 0 得到的结果是 y(0)=0）

欧拉格式为 $y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$，其中 $f(x_i,y_i)=\frac{\sin x_i}{x_i}$，$h=0.1$

故 $y_{i+1}=y_i+h\frac{\sin x_i}{x_i}=y_i+0.1\frac{\sin x_i}{x_i}$

由 $y_0=y(0)=0$ 计算得

$$y(0.1)=\int_0^{0.1}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_1=0+0.1\frac{\sin 0}{0}=0.1$$
$$y(0.2)=\int_0^{0.2}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_2=y_1+0.1\frac{\sin 0.1}{0.1}=0.19983$$
$$y(0.3)=\int_0^{0.3}\frac{\sin t}{t}dt\approx y_3=y_2+0.1\frac{\sin 0.2}{0.2}=0.29917$$