# 《工程数值方法》课程要点总结

2015.7

# 第1章 引论

- 计算有效数字的位数（定理1.2，推论***）

# 第2章 插值法

- 拉格朗日插值：

（1）能写出Lagrange插值多项式表达式和任意阶次的基函数；

（2）掌握插值余项表达式

（3）能证明和应用等式，$\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k$ 及其特殊情况 $\sum_{i=1}^{n} l_i(x) = 1$

- 埃尔米特插值：

（1）能够用待定系数法求解埃尔米特插值多项式表达式（如例2.11）

# 第3章 函数逼近与最小二乘法

- 向量、矩阵、函数常用范数的计算：

- 掌握曲线拟合的最小二乘法

（1）对于任何函数形式，都能熟练写出并计算线性方程组的法方程；

（2）对于非线性最小二乘拟合，如

$$y = ax^{b} \qquad y = ae^{bx} \qquad y = ab^{x} \qquad y = \frac{1}{ax+b}$$

能够通过函数变换，转为 $w = A + bz$ ，再进行最小二乘拟合运算。

# 第4章 数值积分和数值微分

- 熟练采用中矩形、梯形和Simpson公式进行数值积分，并能进行相对应的复合积分。
- 能够写出牛顿-柯特斯积分的表达式，以及系数和基函数的关系 $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$ ，能够进行1-3阶的牛顿-柯特斯积分。N=1时，牛顿-柯特斯积分即为梯形公式；N=2时，即为Simpson公式。
- 熟练掌握具体积分公式的代数精度

（1）**n+1个节点的求积公式至少具有n次代数精度。**

（2）**梯形公式和中矩形公式具有1次代数精度，辛卜生公式有3次代数精度。**

（3）**当n为偶数时，牛顿-柯特斯公式至少有n+1次代数精度。**

（4） **n+1个节点的高斯积分具有2n+1次代数精度**

- 能够通过待定系数法，求解某待定的积分公式，使其具有尽可能高的代数精度，并指出其代数精度。
- 能够通过待定系数法构造高斯积分公式。
- **定理：**Gauss型求积公式是具有**最高代数精度**的求积公式。
- 能够进行n=1-3的高斯积分

# 第5章　解线性方程组的直接方法

- 能够熟练采用以下三种方法求解线性方程组

　（1）LU分解

　（2）LLT分解（平方根法）

　（3）LDLT分解（改进的平方根法）

分解矩阵的构造采用待定系数法即可！！

# 第6章　解线性方程组的迭代法

- 掌握迭代法的基本思想和一般方程 $x = Gx + d$
- 熟练掌握雅克比迭代 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

$$B = (I - D^{-1}A) \qquad f = D^{-1}b$$

- 熟练掌握高斯-赛德尔迭代 $x^{(k+1)} = G_1 x^{(k)} + d_1$

$$G_1 = -(D+L)^{-1}U, \qquad d_1 = (D+L)^{-1}b$$

- 灵活使用以下定理判断迭代公式的收敛性

（1）收敛的充分必要条件是迭代矩阵G的谱半径 $\rho(G)<1$

（2）收敛的充分条件是迭代矩阵G的一种范数 $\|G\|<1$

（3）对角占优线性方程组 $Ax=b$ 的雅可比迭代公式和高斯-赛德尔迭代公式均收敛。（充分条件）

（4）若方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵A是正定的，则高斯-赛德尔迭代法收敛。（充分条件）

# 第7章 非线性方程与方程组的数值解法

- 掌握不动点迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$
- 掌握不动点迭代公式的收敛性条件定理：

  （1）对所有的x∈[a, b] 有 $\varphi(x) \in$ [a, b]

  （2）存在 0 < L< 1 ,使所有的 $x \in [a,b]$有 $|\varphi'(x)| \leqslant$ L
- 掌握不动点迭代公式的局部收敛性条件定理：

  在 $x = \varphi(x)$ 的根 $x^*$ 的邻域中有连续的一阶导数，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$

- 掌握收敛阶次的判据定理

  若 $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0, \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$

  则迭代过程在 $x^*$ 邻域是p阶收敛的。

- 熟练应用牛顿法的计算公式 $x_{k+1}\approx x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

- 熟练应用弦截法的计算公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$

- 能够通过构造非线性方程，并采用牛顿或弦截法求解一些代数式，如 $\sqrt[3]{d}$

# 第9章 常微分方程初值问题数值解法

- 熟练采用欧拉法(Euler法)求解常微分方程

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

- 熟练采用改进的欧拉法求解常微分方程

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))\right]$$

**或者**

$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

- 数值方法的阶数

(1) 定义：数值方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，则称这种数值方法的阶数是P

(2) 欧拉方法仅为一阶方法

(3) 改进的欧拉方法仅为二阶方法

(4) 改进的欧拉格式是众多的二阶龙格—库塔法中的一种特殊格式。

(5) 三阶龙格—库塔法为三阶方法

(5) 四阶龙格—库塔法为四阶方法