



## 第4章 数值积分和数值微分



- § 4.1 数值积分概论
- § 4.2 牛顿-柯特斯公式
- § 4.3 复合求积公式
- § 4.4 龙贝格求积公式\*
- § 4.5 自适应积分方法\*
- § 4.6 高斯求积公式
- § 4.7 多重积分\*
- § 4.8 数值微分

## § 4.1 数值积分概论

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且其原函数为 $F(x)$ ,则可用Newton-Leibnitz公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

求定积分的值, Newton-Leibnitz公式 无论在理论上还是在解决实际问题上都起了很大作用, 但它并不能完全解决定积分的计算问题, 因为积分学涉及的实际问题极为广泛, 而且极其复杂, 在实际计算中经常遇到以下三种情况:



## 无法用初等函数表示

(1) 被积函数 $f(x)$ 并不一定能够找到用初等函数的有限形式表示的原函数 $F(x)$ ，Newton-Leibnitz公式就无能为力了。例如：

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ 和 } \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

## 表达式太复杂

(2) 还有被积函数 $f(x)$ 的原函数能用初等函数表示，但表达式太复杂，例如函数  $f(x) = x^2 \sqrt{2x^2 + 3}$  并不复杂，但积分后其表达式却很复杂，积分后其原函数 $F(x)$ 为：

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 \sqrt{2x^2 + 3} + \frac{3}{16}x\sqrt{2x^2 + 3} - \frac{9}{16\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}x + x^2 \sqrt{2x^2 + 3})$$



# 数值积分

对于这些情况,要计算积分的准确值都是十分困难的。由此可见,通过原函数来计算积分有它的局限性,因而研究一种新的积分方法来解决Newton-Leibniz公式所不能或很难解决的积分问题,这时需要用数值解法来建立积分的近似计算方法。

将积分**区间细分**,在每一个小区间内用简单函数代替复杂函数进行积分,这就是**数值积分的思想**,用代数插值多项式去代替被积函数 $f(x)$ 进行积分是本章讨论数值积分的主要内容。



---

## 数值微分

同样对于函数 $f(x)$ 的求导问题，因为在微分学中，函数 $f(x)$ 的导数是通过极限定义的。若函数是以表格形式给出，或函数的表达式过于复杂时，也需要研究其数值计算方法。这是本章介绍的另一个内容——数值微分。

# 数值积分的基本思想

积分值  $I = \int_a^b f(x)dx$  在几何上可以解释为由  $x=a, x=b, y=0$  以及  $y=f(x)$  这四条边所围成的曲边梯形面积。如图1所示，而这个面积之所以难于计算是因为它有一条曲边  $y=f(x)$ 。

建立数值积分公式的途径比较多，其中最常用的有两种：

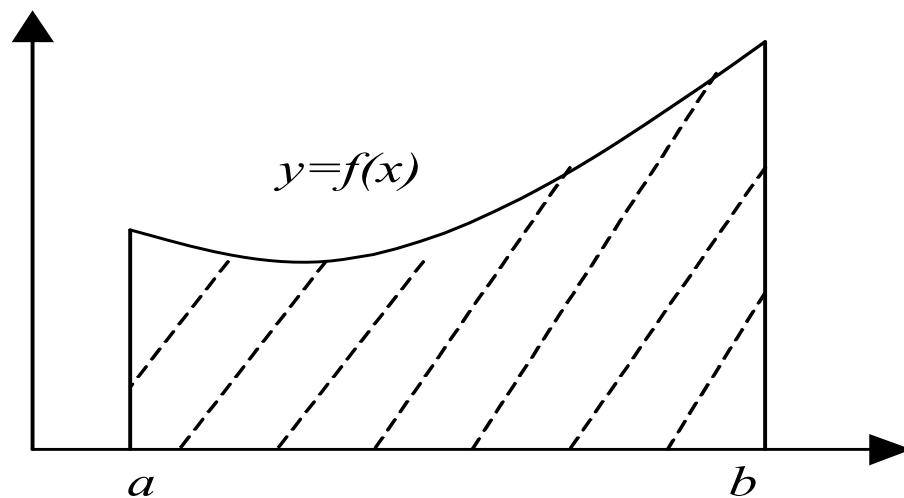


图1 数值积分的几何意义



## 基于积分中值定理

(1) 由**积分中值定理**可知, 对于连续函数 $f(x)$ , 在积分区间 $[a,b]$ 内存在一点 $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

即所求的曲边梯形的面积恰好等于底为 $(b-a)$ , 高为 $f(\xi)$ 的矩形面积。但是点 $\xi$ 的具体位置一般是未知的, 因而 $f(\xi)$ 的值也是未知的, 称 $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均高度。那么只要对平均高度 $f(\xi)$ 提供一种算法, 相应地就获得一种数值求积方法。



# 中矩形公式

按照这种思想，可构造出一些求积分值的近似公式。

## ①中矩形公式

取  $f(\xi) \approx f(\frac{a+b}{2})$ ，得到中矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

中矩形公式把 $[a,b]$ 的中点处函数值  $f(\frac{a+b}{2})$  作为平均高度  $f(\xi)$  的近似值而获得的一种数值积分方法。

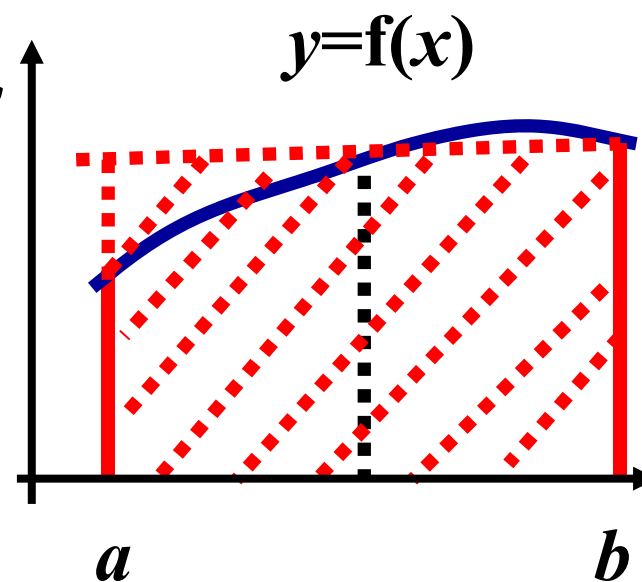


图2 中矩形公式

# 梯形公式

## ②梯形公式

取  $f(\xi) \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}$ ，则得到梯形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$$

梯形公式是把 $f(a)$ ,  $f(b)$ 的加权平均值  $\frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$  作为平均高度  $f(\xi)$ 的近似值而获得的一种数值积分方法。

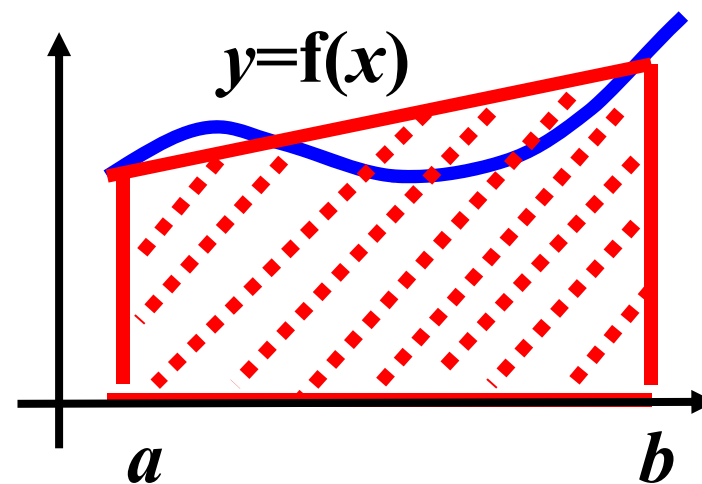


图3 梯形公式

# Simpson公式

## ③ Simpson公式(辛卜生公式)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Simpson公式是以函数 $f(x)$ 在 $a, b, (a+b)/2$ 这三点的函数值 $f(a), f(b),$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  的加权平均值

$$\frac{1}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$$

作为平均高度 $f(\xi)$ 的近似值而获得的一种数值积分方法。

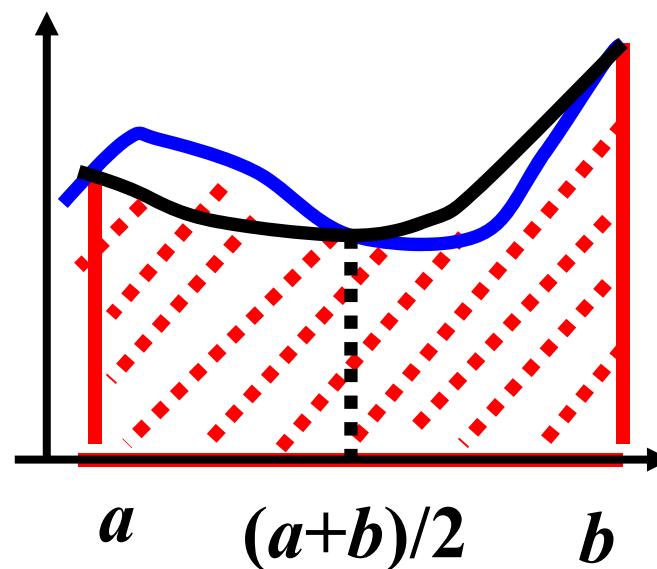


图4 Simpson公式



## 基于逼近思想

(2) 先用某个简单函数  $\varphi(x)$  近似逼近  $f(x)$ , 用  $\varphi(x)$  代替原被积函数  $f(x)$ , 即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

以此构造数值算法。



## 多项式逼近

从数值计算的角度考虑,函数应对 $f(x)$ 有充分的逼近程度,并且容易计算其积分。由于多项式能很好地逼近连续函数,且又容易计算积分,因此将  $\varphi(x)$  选取为插值多项式,这样 $f(x)$ 的积分就可以用其插值多项式的积分来近似代替。

## 插值求积公式

设已知 $f(x)$ 在节点  $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$  有函数值  $f(x_k)$ , 作 $n$ 次拉格朗日插值多项式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$$

式中 
$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

这里 
$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

## 插值求积公式

多项式 $P(x)$ 易于求积, 所以可取  $\int_a^b P(x)dx$  作为  $\int_a^b f(x)dx$  的近似值, 即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

$$= \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b l_k(x) dx$$

$$= \sum_{k=0}^n f(x_k) A_k$$

$$\text{其中 } A_k = \int_a^b l_k(x) dx = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx$$

称为**求积系数**。

# 插值求积公式

## 定义1 求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

其系数  $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$  时，则称求积公式为插值求积公式。



## 插值求积公式

设插值求积公式的余项为  $R(f)$  ,由插值余项定理得

$$R(f) = \int_a^b [f(x) - P(x)]dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx$$

其中  $\xi \in [a, b]$

当 $f(x)$ 是次数不高于 $n$ 的多项式时, 有  $f^{(n+1)}(x) = 0$   
 $R(f) = 0$  , 求积公式才能成为准确的等式。

## § 4.2 牛顿-柯特斯公式

在插值求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

中,当所取节点是等距时称为牛顿-柯特斯公式

其中 插值多项式  $P(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$

求积系数  $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

这里  $l_k(x)$  是插值基函数。即有

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx$$

## 区间n等分

将积分区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分, 步长  $h = \frac{b - a}{n}$

求积节点为  $x_k = a + kh (k = 0, 1, \dots, n)$  为了计算系数  $A_k$ , 由于  $x_k - x_i = (k - i)h$ , 所以

$$(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n) = (-1)^{n-k} k!(n-k)!h^n$$

## 求积系数

作变量代换  $x = a + th$  当  $x \in [a, b]$  时, 有  $t \in [0, n]$ , 于是  
可得

$$\begin{aligned} A_k &= \int_a^b l_k(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!h^n} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)h^n h dt \\ &= \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (t-i) dt \end{aligned}$$

# 柯特斯系数

引进记号

$$C_k = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (t-i) dt \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

则

$$A_k = (b-a)C_k \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

代入插值求积公式, 有

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n C_k f(x_k)$$

称为牛顿-柯特斯求积公式,  $C_k$  称为柯特斯系数。

## 柯特斯系数性质

容易验证  $\sum_{k=0}^n C_k = 1$

$$\because C_k = \frac{1}{b-a} A_k \quad A_k = \int_a^b l_k(x) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=0}^n C_k &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{b-a} \int_a^b l_k(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \sum_{k=0}^n l_k(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 dx = 1 \end{aligned}$$

## 低阶柯特斯系数

显然,  $C_k$  是不依赖于积分区间  $[a, b]$  以及被积函数  $f(x)$  的常数, 只要给出  $n$ , 就可以算出柯特斯系数。

当  $n=1$  时

$$C_0 = \frac{-1}{1 \cdot 0! \cdot 1!} \int_0^1 (t-1) dt = \frac{1}{2} \quad C_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

当  $n=2$  时

$$C_0 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 0! \cdot 2!} \int_0^2 (t-1)(t-2) dt = \frac{1}{6}$$

$$C_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1! \cdot 1!} \int_0^2 t(t-2) dt = \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \frac{(-1)^0}{2 \cdot 2! \cdot 0!} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{1}{6}$$



---

## 柯特斯系数

表1给出了 $n$ 从1~8的柯特斯系数。

当 $n=8$ 时，从表中可以看出出现了负系数，从而影响稳定性和收敛性，因此实用的只是低阶公式。



# 柯特斯系数表

表1

$n$	$C_k^{(n)}$									
1	$\frac{1}{2}$	$C_0^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	$C_1^{(1)}$						
2	$\frac{1}{6}$	$C_0^{(2)}$	$\frac{4}{6}$	$C_1^{(2)}$	$\frac{1}{6}$	$C_2^{(2)}$				
3	$\frac{1}{8}$	$C_0^{(3)}$	$\frac{3}{8}$	$C_1^{(3)}$	$\frac{3}{8}$	$C_2^{(3)}$	$\frac{1}{8}$	$C_3^{(3)}$		
4	$\frac{7}{90}$	$C_0^{(4)}$	$\frac{16}{45}$	$C_1^{(4)}$	$\frac{2}{15}$	$C_2^{(4)}$	$\frac{16}{45}$	$C_3^{(4)}$	$\frac{7}{90}$	$C_4^{(4)}$
5	$\frac{19}{288}$		$\frac{25}{96}$		$\frac{25}{144}$		$\frac{25}{144}$		$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$
6	$\frac{41}{840}$		$\frac{9}{35}$		$\frac{9}{280}$		$\frac{34}{105}$		$\frac{9}{280}$	$\frac{41}{840}$
7	$\frac{751}{17280}$		$\frac{3577}{17280}$		$\frac{1323}{17280}$		$\frac{2989}{17280}$		$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$
8	$\frac{989}{28350}$		$\frac{5888}{28350}$		$\frac{-928}{28350}$		$\frac{10496}{28350}$		$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$

# 梯形公式

在牛顿-柯特斯求积公式中 $n=1,2,4$ 时，就分别得到下面的梯形公式、辛卜生公式和柯特斯公式。

## (1) 梯形公式

当 $n=1$ 时，牛顿-柯特斯公式就是梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$$

**定理**（梯形公式的误差）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，则梯形公式的误差（余项）为

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in (a,b)$$

## 梯形公式

证: 由插值型求积公式的余项  $R_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) dx$

其中  $\xi \in (a, b)$ ,  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

可知梯形公式的误差为

$$R_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)dx$$

由于  $(x-a)(x-b)$  在  $[a, b]$  中不变号,  $f''(\xi)$  在  $[a, b]$  上连续, 根据高等数学中的积分中值定理, 在  $[a, b]$  上存在一点  $\eta$ , 使

$$\int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b)dx = f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{6} f''(\eta)$$

因此  $R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in (a, b)$

## 辛卜生公式

### (2) 辛卜生公式

当 $n=2$ 时，牛顿-柯特斯公式就是辛卜生公式（或称抛物线公式）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

**定理**（辛卜生公式的误差）设在 $[a, b]$ 上具有连续的四阶导数，则辛卜生求积公式的误差为

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in (a, b)$$

定理证明从略。

# 柯特斯公式

## (3) 柯特斯公式

当 $n=4$ 时，牛顿-柯特斯公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

**定理**（柯特斯公式的误差）设在 $[a,b]$ 上具有连续的6阶导数，则柯特斯求积公式的误差为

$$R_4(f) = -\frac{8}{945} \left( \frac{b-a}{4} \right)^7 f^{(6)}(\eta) \quad \eta \in (a,b)$$

定理的证明从略。

## 例题

例1 分别用梯形公式、辛卜生公式和柯特斯公式计算定积分  $\int_{0.5}^1 \sqrt{x} dx$  的近似值 (计算结果取5位有效数字)

(1) 用梯形公式计算

$$\int_{0.5}^1 \sqrt{x} dx \approx \frac{1-0.5}{2} [f(0.5) + f(1)] = 0.25 \times [0.70711 + 1] = 0.4267767$$

(2) 用辛卜生公式

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 \sqrt{x} dx &\approx \frac{1-0.5}{6} [\sqrt{0.5} + 4 \times \sqrt{(0.5+1)/2} + \sqrt{1}] \\ &= \frac{1}{12} \times [0.70711 + 4 \times 0.86603 + 1] = 0.43093403 \end{aligned}$$

## 例题

(3) 用柯特斯公式计算，系数为

$$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$$

$$\int_{0.5}^1 \sqrt{x} dx \approx \frac{1-0.5}{90} [7 \times \sqrt{0.5} + 32 \times \sqrt{0.625} + 12 \times \sqrt{0.75} + 32 \times \sqrt{0.875} + 7 \times \sqrt{1}]$$

$$\frac{1}{180} \times [4.94975 + 25.29822 + 10.39223 + 29.93326 + 7] = 0.43096407$$

积分的准确值为

$$\int_{0.5}^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_{0.5}^1 = 0.43096441$$

可见，三个求积公式的精度逐渐提高。

## 例题

例2 用辛卜生公式和柯特斯公式计算定积分

$$\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + 7x - 5)dx$$

的近似值, 并估计其误差(计算结果取5位小数)

解: 辛卜生公式

$$S \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] = \frac{3-1}{6} [1 + 4 \times 9 + 25] = \frac{62}{3} = 20\frac{2}{3}$$

由于  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$   $f^{(4)}(x) = 0$

由辛卜生公式余项

$$R(f) = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b]$$





## 例题

知其误差为  $R(f) = 0$

柯特斯公式

$$\begin{aligned} C &\approx \frac{3-1}{90} [7f(1) + 32f(1.5) + 12f(2) + 32f(2.5) + 7f(3)] \\ &= \frac{1}{45} \left[ 7 + 32 \times \frac{35}{8} + 12 \times 9 + 32 \times \frac{125}{8} + 7 \times 9 \right] = 20\frac{2}{3} \end{aligned}$$

知其误差为  $R(f) = 0$

## § 4.3 复合求积公式

由梯形、辛卜生和柯特斯求积公式余项可知，随着求积节点数的增多，对应公式的精度也会相应提高。但由于 $n \geq 8$ 时的牛顿-柯特斯求积公式开始出现负值的柯特斯系数。根据误差理论的分析研究，当积分公式出现负系数时，可能导致舍入误差增大，并且往往难以估计。因此不能用增加求积节点数的方法来提高计算精度。



---

## 复合求积公式

在实际应用中，通常将积分区间分成若干个小区间，在每个小区间上采用低阶求积公式，然后把所有小区间上的计算结果加起来得到整个区间上的求积公式，这就是复合求积公式的基本思想。常用的复合求积公式有复合梯形公式和复合辛卜生公式。

# 复合梯形公式及其误差

## 1 复合梯形公式及其误差

将积分区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分, 步长  $h = \frac{b-a}{n}$  求积节点为  $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$  在每个小区间上应用梯形公式  $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ )

$$x_k = a + kh \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

求出积分值  $I_k$ , 然后将它们累加求和, 用  $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$  作为所求积分  $I$  的近似值。

## 复合梯形公式及其误差

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \end{aligned}$$

记  $T_n = \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$

上式称为复合梯形公式。

## 复合梯形公式及其误差

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 在子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上梯形公式的余项已知为

$$R_{T_k} = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \quad \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

在 $[a,b]$ 上的余项

$$R_T = \sum_{k=0}^{n-1} R_{T_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \right]$$

## 复合梯形公式及其误差

设  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 根据连续函数的中值定理知, 存在  $\eta \in [a, b]$ , 使

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) = f''(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

因此, 余项

$$R_T = -\frac{h^3}{12} n f''(\eta) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

# 复合辛卜生公式及其误差

## 2 复合辛卜生公式及其误差

将积分区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分, 记子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  的中点为  $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h$  在每个小区间上应用辛卜生公式, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &\approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6} [f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \end{aligned}$$



## 复合辛卜生公式及其误差

$$= \frac{h}{6} \left[ f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

记 
$$S_n = \frac{h}{6} \left[ f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

称为复合辛卜生公式

类似于复合梯形公式余项的讨论，复合辛卜生公式的求积余项为

$$R_s = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

## 复合柯特斯公式及其误差

如果把每个子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  四等分, 内分点依次记

$x_{k+\frac{1}{4}}, x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{3}{4}}$  同理可得复合柯特斯公式

$$C_n = \frac{h}{90} \left[ 7f(a) + 32 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \right. \\ \left. + 32 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b) \right]$$

求积余项为  $R_c = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta) \quad \eta \in [a, b]$



## 复合辛卜生公式及其误差

复合求积公式的余项表明，只要被积函数 $f(x)$ 所涉及的各阶导数在 $[a,b]$ 上连续，那么复合梯形公式、复合辛卜生公式与复合柯特斯公式所得近似值

$T_n, S_n, C_n$  的余项和步长的关系依次为  $O(h^2)$   $O(h^4)$   $O(h^6)$ 。因此当 $h \rightarrow 0$  (即 $n \rightarrow \infty$ )时,  $T_n, S_n, C_n$ 都收敛于积分真值, 且收敛速度一个比一个快。

## 例题

例3 依次用 $n=8$ 的复合梯形公式、 $n=4$ 的复合

辛卜生公式计算定积分  $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

解：首先计算出所需各节点的函数值， $n=8$ 时，

$$h = \frac{1}{8} = 0.125$$

由复合梯形公式可得如下计算公式：

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{1}{16} [f(0) + 2f(0.125) + 2f(0.25) + 2f(0.375) + 2f(0.5) \\ &\quad + 2f(0.625) + 2f(0.75) + 2f(0.875) + f(1)] \\ &= 0.9456909 \end{aligned}$$

## 例题

由复合辛卜生公式可得如下计算公式

$$S_4 = \frac{1}{24} [f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)) \\ + 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))] = 0.9460832$$

(积分准确值I=0.9460831)

这两种方法都需要提供9个点上的函数值，计算量基本相同，然而精度却差别较大，同积分的准确值（是指每一位数字都是有效数字的积分值）比较，复合梯形法只有两位有效数字（ $T_8=0.9456909$ ），而复合辛卜生法却有六位有效数字。

## 例题

例4 用复合梯形公式计算定积分  $I = \int_0^1 e^x dx$ , 问区间  $[0, 1]$  应分多少等份才能使误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$

解: 取  $f(x) = e^x$ , 则  $f''(x) = e^x$ , 又区间长度  $b-a=1$ , 对复合梯形公式有余项

$$|R_T(x)| = \left| -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \right| \leq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} \right)^2 e \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

即  $n^2 \geq \frac{e}{6} \times 10^5$ ,  $n \geq 212.85$ , 取  $n=213$ , 即将区间  $[0, 1]$  分为213等份时, 用复合梯形公式计算误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 。

---

## § 4.4 龙贝格求积公式

### 略

---

## § 4.5 自适应积分方法

略



## § 4.6 高斯求积公式

### 1 求积公式代数精度

定义 (代数精度) 设求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

对于一切次数小于等于m的多项式

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$$

或

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$$

是准确的, 而对于次数为m+1的多项式是不准确的,  
则称该求积公式具有m次代数精度。



# 代数精度

由定义可知，若求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

的代数精度为 $n$ ，则求积系数  $A_k$  应满足线性方程组：

# 代数精度

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \dots\dots\dots \\ A_0 x_0^n + A_1 x_1^n + \cdots + A_n x_n^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{array} \right.$$

这是关于  $A_k$  的线性方程组，其系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

是梵得蒙矩阵，当  
 $x_k (k = 0, 1, \cdots, n)$   
 互异时非奇异，故  
 $A_k$  有唯一解。

## 插值型求积公式

**定理**  $n+1$ 个节点的求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$   
为插值型求积公式的充要条件是公式至少具有 $n$ 次代数精度。

## 插值型求积公式

证:充分性

设 $n+1$ 个节点的求积公式  $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$

为插值型求积公式, 求积系数为  $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

又  $f(x) = P(x) + R(x)$  当 $f(x)$ 为不高于 $n$ 次的多项式时,

$f(x)=P(x)$ , 其余项 $R(f)=0$ 。因而这时求积公式至少

具有 $n$ 次代数精度。

# 插值型求积公式

必要性

若求积公式至少具有n次代数精度, 则对n次多项式

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

精确成立, 即  $\int_a^b l_k(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j l_k(x_j)$  而  $l_k(x_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$

取  $f(x) = l_k(x)$  时

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b l_k(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j l_k(x_j)$$

所以有  $A_k = \int_a^b l_k(x) dx$  , 即求积公式为插值型求积公式

## 例题

例7 设积分区间 $[a, b]$ 为 $[0, 2]$ , 取

$f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4, e^x$  时,

分别用梯形和辛卜生公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0) + f(2)$$

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

计算其积分结果并与准确值进行比较

## 例题

解：梯形公式和辛卜生的计算结果与准确值比较如下表所示

$f(x)$	1	$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$e^x$
准确值	2	2	2.67	4	6.40	6.389
梯形公式计算值	2	2	4	8	16	8.389
辛卜生公式计算值	2	2	2.67	4	6.67	6.421



## 例题

从表中可以看出, 当 $f(x)$ 是  $x^2, x^3, x^4$  时, 辛卜生公式比梯形公式更精确。

一般说来, 代数精度越高, 求积公式越精确。梯形公式和中矩形公式具有1次代数精度, 辛卜生公式有3次代数精度。下面以梯形公式为例进行验证

## 例题

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

取 $f(x)=1$ 时,  $\int_a^b 1dx = b-a$ ,  $\frac{b-a}{2}(1+1) = b-a$  两端相等

取 $f(x)=x$ 时,

$$\int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \quad \frac{b-a}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \text{ 两端相等}$$

取 $f(x)=x^2$  时,

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3), \quad \frac{b-a}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(b-a)$$

两端不相等

所以梯形公式只有1次代数精度。



## 例题

例8 试确定一个至少具有2次代数精度的公式

$$\int_0^4 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(1) + Cf(3)$$

## 例题

解：要使公式具有2次代数精度，则对 $f(x)=1, x, x^2$ 求积公式准确成立，即得如下方程组。

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ B + 3C = 8 \\ B + 9C = 64/3 \end{cases}$$

解之得， $A = \frac{4}{9}, \quad B = \frac{4}{3}, \quad C = \frac{20}{9}$

所求公式为：

$$\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{9}[4f(0) + 12f(1) + 20f(3)]$$

## 例题

例9 试确定求积系数A, B, C 使

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

具有最高的代数精度。

## 例题

解：分别取  $f(x)=1, x, x^2$  使求积公式准确成立，即得如下方程组

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -A + C = 0 \\ A + C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

所得求积公式为：

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$$

对于  $f(x)=1, x, x^2, x^3$  都准确成立，对于  $f(x)=x^4$  就不准确了，所以此求积公式 3 次代数精度。



## 验算求积公式的代数精度

由于 $n+1$ 节点的插值求积公式至少有 $n$ 次代数精度，所以构造求积公式后应该验算所构造求积公式的代数精度。例如 插值求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

有三个节点至少有2次代数精度，是否有3次代数精度呢？将 $f(x)=x^3$ 代入公式两端，左端和右端都等于 $(b^4-a^4)/4$ ，公式两端严格相等，再将 $f(x)=x^4$ 代入公式两端，两端不相等，所以该求积公式具有3次代数精度。

## 例题

### 例10 考察求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(-1) + 2f(0) + f(1)]$$

的代数精度。



## 例题

解：可以验证, 对于 $f(x)=1$ ,  $x$ 时公式两端相等, 再将 $f(x)=x^2$ 代入公式

左端

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

右端

$$\frac{1}{2}[f(-1) + 2f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$

两端不相等, 所以该求积公式具有 1 次代数精度.

三个节点却不具有 2 次代数精度, 因为不是插值型的。

## 例题

### 例13 给定求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

试确定求积系数 $A_{-1}, A_0, A_1$ , 使其有尽可能高的代数精度, 并指出其代数精度。

## 例题

解：令求积公式对  $f(x)=1, x, x^2$  准确成立，则有

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 4h \\ -hA_{-1} + hA_1 = 0 \\ h^2 A_{-1} + h^2 A_1 = \frac{16}{3} h^3 \end{cases}$$

解之得

$$A_0 = -\frac{4}{3}h, A_1 = A_{-1} = -\frac{8}{3}h$$

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{4}{3}h[2f(-h) - f(0) + 2f(h)]$$

## 例题

其代数精度至少为2,将 $f(x)=x^3$ 代入求积公式两端相等,而将 $f(x)=x^4$ 代入求积公式两端不相等,所以其代数精度为3次。

## 例题

### 例 14 确定求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(a) + A_2 f(b) + A_3 f'(a)$$

使其具有尽可能高的代数精度。



## 例题

解：不妨设 $a=0$ ,  $b=h$ ,  $b-a=h$ , 设所求公式的代数精度为2, 则当 $f(x)=1, x, x^2$ 时公式变成等式, 即解之得:

$$A_2 = \frac{h}{3}, A_3 = \frac{h^2}{6}, A_1 = \frac{2}{3}h$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}[4f(a) + 2f(b) + hf'(a)]$$

其中 $h=b-a$ , 令 $f(x)=x^3$ 代入上式, 两端不等, 说明求积公式只有2次代数精度。



## 插值求积公式的特点

构造插值求积公式有如下特点：

- (1) 复杂函数 $f(x)$ 的积分转化为计算多项式的积分
- (2) 求积系数 $A_k$ 只与积分区间及节点 $x_k$ 有关，而与被积函数 $f(x)$ 无关，可以不管 $f(x)$ 如何，预先算出 $A_k$ 的值
- (3)  **$n+1$ 个节点的插值求积公式至少具有 $n$ 次代数精度**
- (4) 求积系数之和  $\sum_{k=0}^n A_k = b - a$   
可用此检验计算求积系数的正确性

## 例题

例15 求证当节点为 $n+1$ 个时, 插值求积系数之和为

$$\sum_{k=0}^n A_k = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$



## 例题

证: 
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

当节点为n+1个时，插值求积公式有n次代数精度，对于  $f(x) = x^n$ ，上式严格相等，所以取  $f(x)=1$  时，上式也严格相等，因此有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b 1dx = \sum_{k=0}^n A_k = b - a$$

$$\therefore \sum_{k=0}^n A_k = b - a$$

即

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n = b - a$$

# 构造插值求积公式的步骤

## 构造插值求积公式的步骤

- (1) 在积分区间 $[a,b]$ 上选取节点 $x_k$
- (2) 求出 $f(x_k)$ 及利用  $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$   
或解关于 $A_k$ 的线性方程组求出 $A_k$ , 这样就得到了

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

- (3) 利用 $f(x)=x^n, \dots$ 验算代数精度



# 高斯求积公式的构造与应用

## 2 高斯求积公式的构造与应用

在构造形如

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的两点公式时, 如果限定求积节点,  $x_0 = -1, x_1 = 1$

那么所得插值求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-1) + f(1)$$

的代数精度仅为1。



## 高斯求积公式的构造与应用

但是, 如果对式中的系数  $A_0, A_1$  和  $x_0, x_1$  节点都不加限制, 那么就可适当选取  $A_0, A_1$  和  $x_0, x_1$ , 使所得公式的代数精度  $m > 1$ 。事实上, 若要使求积公式对函数  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$  都准确成立, 只要  $A_0, A_1$  和  $x_0, x_1$  满足方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

## 高斯求积公式的构造与应用

解之得

$$A_0 = A_1 = 1 \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

代入即得

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

可以验证，所得公式是具有3次代数精度的插值型求积公式。

这个例子告诉我们，只要适当选择求积节点，可使插值型求积公式的代数精度达到最高。这就是本节要介绍的高斯求积公式。

## 高斯求积公式的定义

**定义：** 若一组节点  $x_0 \dots x_n \in [a, b]$ , 是使插值型求积公式

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

具有  $2n+1$  次代数精度。这样的节点称为 **Gauss 点**,  $A_k$  称为 **Gauss 系数**, 求积公式称为 **Gauss 型求积公式**。

## 高斯求积公式的定义

$w(x) \geq 0$  是  $[a, b]$  上的权函数。当  $[a, b]$  有限,  $w(x) = 1$  时即为普通积分。  
节点  $x_0 \dots x_n$  以及系数  $A_0 \dots A_n$  都作为待定系数。

## 高斯求积公式的构造与应用

要使求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，令 $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ 代入求积公式精确成立，解出 $x_k$ 和 $A_k$ .

可以证明， $n+1$ 个节点的高斯求积公式具有最高不超过 $2n+1$ 次的代数精度，这就是我们所要讨论的具有最高代数精度的插值型求积公式。





## 高斯求积公式的构造与应用

像构造两点高斯求积公式一样,对于插值型求积公式分别取  $f(x) = 1, x, \dots, x^{2n+1}$  用待定系数法来确定参数  $x_k$  和  $A_k, (k = 0, 1, \dots, n)$  从而构造  $n+1$  个点高斯求积公式。

但是, 这种做法要解一个包含  $2n+2$  个未知数的非线性方程组, 其计算工作量是相当大的。一个较简单的方法是:

# 待定系数法

## (1) 待定系数法

设被积函数  $f(x)$  是任一  $2n+1$  次代数多项式

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j x^j$$

则 Gauss 型求积公式精确成立，即

$$\int_a^b w(x) \left( \sum_{j=0}^{2n+1} a_j x^j \right) dx = \sum_{k=0}^n A_k \sum_{j=0}^{2n+1} a_j x_k^j$$

于是

$$\sum_{j=0}^{2n+1} a_j \int_a^b w(x) x^j dx = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j \sum_{k=0}^n A_k x_k^j$$





## 例题

例16 求Gauss型求积公式

$$\int_0^1 \ln x \cdot f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的节点及系数。

## 例题

解 这里二个节点和二系数待定，故以上求积公式具有最高3次代数精度。因此对于

$f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ，上式精确成立，从而得到关于  $x_0, x_1$ ，和  $A_0, A_1$  的方程组

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = -1 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = -\frac{1}{4} \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = -\frac{1}{9} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

## 例题

解出节点及系数  $x_0 = 0.112009$ ,  $x_1 = 0.602277$ ,  
 $A_0 = -0.718539$ ,  $A_1 = -0.281461$

所以求积公式为

$$\int_0^1 \ln x \cdot f(x) dx \approx -0.718539 f(0.112009) \\ - 0.281461 f(0.602277)$$

## 最高代数精度

**定理 Gauss型求积公式是具有最高代数精度的求积公式**

**证明：**对任意选择的 $n+1$ 个节点  $x_i \in [a, b]$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),  
可构造 $2n+2$ 次代数多项式

$$f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \geq 0$$

有

$$\int_a^b w(x) f(x) dx > 0$$

而对任意的求积系数  $A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )

$$\sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = 0$$

# 最高代数精度

可见插值求积公式

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

不精确成立。



## 正交多项式

### (2) 利用正交多项式确定求积节点及系数

**定义** 设 $S_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上首项系数 $a_n \neq 0$ 的 $n$ 次多项式,  
 $w(x)$ 为 $[a,b]$ 上权函数, 如果多项式序列 $\{S_n(x)\}$ 满足关系式

$$(S_j, S_k) = \int_a^b w(x) S_j(x) S_k(x) dx = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ A_k > 0 & (j = k) \end{cases}$$

则称多项式序列 $\{S_n(x)\}$ 为在 $[a,b]$ 上带权 $w(x)$ 的正交,  
称 $S_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上带权 $w(x)$ 的 $n$ 次正交多项式.

# 正交多项式

正交多项式可由下面的递推公式生成，即

$$\begin{cases} S_0(x) = 1 \\ S_1(x) = (x - \lambda_1)S_0(x) \\ S_{k+1}(x) = (x - \lambda_{k+1})S_k(x) - \mu_{k+1}S_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\text{式中 } \lambda_{k+1} = \frac{(xS_k, S_k)}{(S_k, S_k)} = \frac{\int_a^b w(x)xS_k^2(x)dx}{\int_a^b w(x)S_k^2(x)dx} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_{k+1} = \frac{(S_k, S_k)}{(S_{k-1}, S_{k-1})} = \frac{\int_a^b w(x)S_k^2(x)dx}{\int_a^b w(x)S_{k-1}^2(x)dx} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 勒让德(Legendre)多项式

当区间 $[-1,1]$ , 权函数 $w(x)\equiv 1$ 时, 由 $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ 正交化得到的多项式就称为**勒让德(Legendre)多项式**, 并用 $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ 表示. 这是**勒让德**于1785年引进的. 1814年**罗德利克(Rodrigul)**给出了简单的表达式为

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

**递推关系**

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = (1, 2, \dots)$$



## 勒让德(Legendre)多项式

由 $P_0(x)=1$ ,  $P_1(x)=x$ , 利用递推关系就可推出

$$P_2(x) = (3x^2 - 1) / 2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x) / 2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3) / 8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x) / 8$$

$$P_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) / 16$$

⋮

# Gauss点的充要条件

**定理** 求积公式

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

的节点  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 为Gauss点的充要条件是这些节点为  $[a, b]$  上带权  $w(x)$  的  $n+1$  次正交多项式的零点。

## Gauss点的充要条件

证明 必要性。设  $x_i \in [a, b]$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 是Gauss点，于是求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度。若记

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \text{则对任何不高于}n\text{次的}$$

多项式  $P(x)$ , 有

$$\int_a^b w(x)P(x)\omega_{n+1}(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k P(x_k)\omega_{n+1}(x_k) = 0$$

于是  $\omega_{n+1}(x)$  是  $[a, b]$  上带权  $w(x)$  正交多项式，

Gauss点是正交多项式的零点。



## Gauss点的充要条件

充分性 设  $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$  是  $[a, b]$  上带权  $w(x)$

的  $n+1$  次正交多项式  $\omega_{n+1}(x)$  的零点, 则

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

又设  $f(x)$  是任意的不高于  $2n+1$  次的多项式, 用  $\omega_{n+1}(x)$  去除  $f(x)$ , 其商式记为  $P(x)$ , 余式记为  $R(x)$ , 于是

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + R(x)$$

## Gauss点的充要条件

显然  $P(x), R(x)$  均为不高于  $n$  次的多项式。对上式的两边作  $[a, b]$  上带权  $w(x)$  的积分, 即

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) f(x) dx \\ = \int_a^b w(x) P(x) \omega_{n+1}(x) dx + \int_a^b w(x) R(x) dx \end{aligned}$$

由  $\omega_{n+1}(x)$  的正交性得知等式右端第一项积分为零, 故有

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \int_a^b w(x) R(x) dx$$



## Gauss点的充要条件

若令

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

其中  $l_k(x)$  是关于零点  $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为节点的  $n+1$  次插值基函数。由于  $R(x)$  是不高于  $n$  次的多项式，根据Lagrange插值公式，有等式

$$R(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) R(x_k)$$

于是求积公式

## Gauss点的充要条件

$$\begin{aligned} & \int_a^b w(x)R(x)dx \\ &= \int_a^b w(x) \left[ \sum_{k=0}^n l_k(x)R(x_k) \right] dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ \int_a^b w(x)l_k(x)dx \right] R(x_k) = \sum_{k=0}^n A_k R(x_k) \end{aligned}$$

精确成立。又因

$$f(x_k) = P(x_k)\omega_{n+1}(x_k) + R(x_k) = R(x_k)$$

$$\text{所以 } \int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

## 常用的Gauss型求积公式

### (1) 高斯-勒让德 (Gauss-Legendre) 公式

积分区间  $[a, b] = [-1, 1]$ , 权函数  $w(x) = 1$ ,  
相应的正交多项式为Legendre多项式。

求积系数

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{(x - x_k)P'_n(x_k)} dx = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

# 高斯-勒让德求积公式

截断误差

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{2^n (n!)^2 f^{(2n)}(\eta)}{[(2n)!]^2} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \\ &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \frac{2^{2n} (n!)^4}{[(2n)!]^2} \frac{2}{2n+1} \quad \eta \in [-1, 1] \end{aligned}$$

## 中矩形公式

$n=0$ 时, 节点 $x_0$ 是一次正交多项式  $P_1(x) = x$  的零点,  
即  $x_0 = 0$ , 求积系数

$$A_0 = \frac{2}{(1-x_0^2) \left[ P_1'(x_0) \right]^2} = 2$$

求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0)$$

这就是中矩形公式, 其截断误差为

$$E(f) = \frac{1}{3} f''(\eta) \quad \eta \in [-1, 1]$$

可知该求积公式具有1次代数精度。

## 两点高斯-勒让德公式

$n=1$ 时, 节点  $x_0, x_1$  是二次正交多项式

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ 的零点,}$$

即

$$x_0 = -1/\sqrt{3}, \quad x_1 = 1/\sqrt{3}$$

求积系数

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2) \left[ P_2'(x_k) \right]^2} = 1 \quad k = 0, 1$$

# 两点高斯-勒让德公式

求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

称为两点Gauss-Legendre公式，其截断误差为

$$E(f) = \frac{1}{135} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [-1, 1]$$

因此该求积公式具有3次代数精度。



## 三点高斯-勒让德公式

**n=2时，得到三点Gauss-Legendre公式**

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} \left[ 5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right]$$

**它具有 $2n+1=5$ 次代数精度。**



## 一般区间的高斯-勒让德公式

对于一般区间 $[a,b]$ 上的积分，总能通过积分变量的代换

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

化为 $[-1,1]$ 上的积分，即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

从而能够应用Gauss—Legendre公式。

## 高斯-勒让德求积公式的节点和系数

$n$	$x_k$	$A_k$
0	$0.00000000$	$2.00000000$
1	$\pm 0.5773503$	$1.00000000$
2	$\pm 0.7745967$ $0.00000000$	$0.55555556$ $0.88888889$
3	$\pm 0.8611363$ $\pm 0.3399810$	$0.3478548$ $0.6521452$
4	$\pm 0.9061798$ $\pm 0.5384693$ $0.00000000$	$0.2369269$ $0.4786287$ $0.5688889$

## 例题

### 例17 应用Gauss-Legendre公式计算积分

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

精确值为 -12.0703463

解 先作变量代换化积分区间 $[0, \pi]$ 为 $[-1, 1]$ , 令

$$x = \frac{\pi}{2}(1+t)$$

则

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}(1+t)} \left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right) dt$$

## 例题

$$f(t) = e^{\frac{\pi}{2}(1+t)} \left(-\sin \frac{\pi}{2} t\right)$$

应用两点Gauss—Legendre公式，得

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{\pi}{2} [f(0.5773503) + f(-0.5773503)] \\ &= -\frac{\pi}{2} \left[ e^{\frac{\pi}{2}(1+0.5773503)} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5773503\right) + e^{\frac{\pi}{2}(1-0.5773503)} \sin\left(-\frac{\pi}{2} \cdot 0.5773503\right) \right] \\ &= -12.3362118 \end{aligned}$$

应用五点Gauss—Legendre公式的计算结果为

$$I \approx -12.0701889$$

## 例题

例18 利用三点高斯-勒让德求积公式计算  $\int_{-1}^1 \sqrt{1.5+x} dx$  的近似值。精确值为 2.399529

解:由表可知, 得到三点高斯型求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 0.5555556 f(-0.7745967) + 0.8888889 f(0) + 0.5555556 f(0.7745967)$$

由所求公式得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1.5+x} dx &\approx 0.5555556 \sqrt{1.5-0.7745967} + 0.8888889 \sqrt{1.5+0} \\ &\quad + 0.5555556 \sqrt{1.5+0.7745967} \approx 2.3997 \end{aligned}$$



## 高斯求积的优缺点

高斯求积公式是高精度求积公式，其求积系数  $A_k > 0, (k = 0, 1, \dots, n)$ ，求积公式也是数值稳定的。但它明显的缺点是当  $n$  改变时，系数和节点几乎都在改变，因而应用起来十分不便。同时其余项涉及高阶导数，要利用它们来控制精度也十分困难，因此在实际计算中较多采用复合求积的方法。



## 复合高斯求积

譬如，先把积分区间 $[a,b]$ 分成 $m$ 个等长的小区间 $[x_{k-1}, x_k]$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) 然后在每个小区间上使用同一低阶（如两点的、三点的...）高斯型求积公式算出积分的近似值，将它们相加即得积分  $\int_a^b f(x)dx$  的近似值。

---

## § 4.7 多重积分

略



## § 4.8 数值微分

在微分学中，求函数  $f(x)$  的导数  $f'(x)$  通常是可求得的，但有的  $f'(x)$  比  $f(x)$  复杂的多。另外，有时  $f(x)$  仅由表格形式给出，则求  $f'(x)$  也不容易。根据函数在若干个点处的函数值去求该函数的导数的近似值称为数值微分。求数值导数也是实际问题经常遇到的，特别当该函数本身未知，但又需要对其求导数时，数值微分方法显得更为重要。

## 差商

最简单的数值微分是用差商近似代替导数，即

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

同样，也可用向后差商近似代替导数，即

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

或中心差商的方法，即

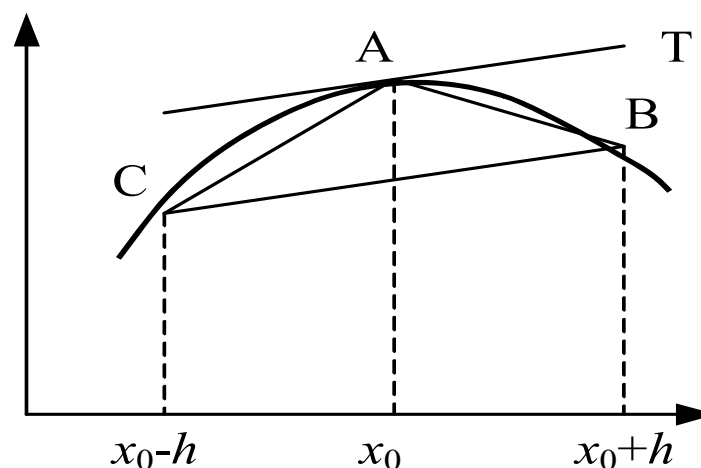
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

可以看出中心差商是向前差商和向后差商的算术平均值。

## 差商

上述三种方法的截断误差分别为  $O(h)$ 、 $O(h)$  和  $O(h^2)$

如右图所示，前述三种导数的近似值分别表示弦线AB，AC和BC的斜率，将这三条通过A点的弦的斜率与切线AT的斜率进行比较后，



可见弦BC的斜率更接近于切线AT的斜率  $f'(x_0)$ ，因此从精度方面看，用中心差商近似代替导数值更可取，则称

## 差商

$$G(h) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (1)$$

为求  $f'(x_0)$  的**中点方法**。

利用中点公式计算导数  $f'(x)$  , 首先必须选取合适的步长, 为此需要进行误差分析。分别将  $f(a \pm h)$  在  $x=a$  处泰勒展开, 有

$$f(a \pm h) = f(a) \pm hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) \pm \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(a) \pm \frac{h^5}{5!} f^{(5)}(a) + \dots$$

代入(1), 得

$$G(h) = f'(a) + \frac{h^2}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{5!} f^{(5)}(a) + \dots \quad (2)$$

## 差商

由此可知,从截断误差的角度来看,步长越小,计算结果越准确。但从舍入误差角度,  $h$  越小,  $f(a+h)$  与  $f(a-h)$  越接近, 直接相减会造成有效数字的严重损失。就舍入误差而言, 步长是不宜太小的。怎样选择最佳步长, 使截断误差与舍入误差之和最小呢?

由式 (2) 知, 当  $h$  适当小时:

$$f'(x_0) - G(h) \approx -\frac{h^2}{6} f'''(x_0)$$
$$f'(x_0) - G\left(\frac{h}{2}\right) \approx -\frac{1}{6} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f'''(x_0)$$

## 差商

因而  $f'(x_0) - G(\frac{h}{2}) \approx \frac{1}{4}[f'(x_0) - G(h)]$

对上式两边同乘以  $\frac{4}{3}$ ，并移项后得

$$f'(x_0) - G(\frac{h}{2}) \approx \frac{1}{3} \left[ G(\frac{h}{2}) - G(h) \right]$$

由此可以看出, 只要当二分前后的2个近似值  $G(h)$  和

$G(\frac{h}{2})$  很接近, 就可以保证  $G(\frac{h}{2})$  的截断误差很小, 大致等于  $\frac{1}{3} \left[ G(\frac{h}{2}) - G(h) \right]$ 。

## 差商

所以比较二分前后所得的  $G(h)$  和  $G(\frac{h}{2})$  ,  
若  $\left| G(h) - G(\frac{h}{2}) \right| < \varepsilon$  , 则  $\frac{h}{2}$  为所取的合适的步长, 且  
 $f'(x_0) \approx G(\frac{h}{2})$ ; 否则将步长再二等分, 继续进行计算。

## 插值型求导公式

### 2 插值型求导公式

函数 $f(x)$ 的定积分可以用插值多项式 $P(x)$ 的定积分来近似计算，同样，函数 $f(x)$ 的导数也可以用插值多项式 $P(x)$ 的导数来近似代替，即

$$f'(x) \approx P'(x) \quad (3)$$

这样建立的数值微分公式统称为插值型求导公式。

应当指出的是即使 $P(x)$ 与 $f(x)$ 处处相差不多，但  $f'(x)$  与  $P'(x)$  在某些点仍然可能出入很大，因而在使用插值求导公式时要注意误差的分析。



## 插值型求导公式

由插值余项公式

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

得求导公式 (3) 的余项为

$$f'(x) - P'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'(x) + \frac{\omega(x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi)$$

式中  $\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$  在这一余项公式中, 由于  $\xi$  和  $x$  是未知函数, 因此无法对它的第二项作出估计, 但在插值节点  $x_k$  处, 由于上式右端的第二项因式  $\omega(x_k)$  等于零, 因而在插值节点处的导数余项为

## 插值型求导公式

$$f'(x) - P'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'(x) \quad (4)$$

下面给出实用的两点公式和三点公式。

### (1) 两点公式

设已给出两个节点上  $x_0, x_1$  的函数值  $f(x_0), f(x_1)$ ，  
作线性插值

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

对上式两端求导，记  $h = x_1 - x_0$ ，则有

$$P'(x) = \frac{1}{h} [-f(x_0) + f(x_1)]$$

## 插值型求导公式

注意到  $f'(x) \approx P'(x)$ ，于是有下列求导的两点公式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)]$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)]$$

而利用余项公式(4)知, 带余项的两点公式是

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}[f(x_1) - f(x_0)] + \frac{h}{2}f''(\xi)$$

### (2) 三点公式

设已给出三个节点上  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$

## 插值型求导公式

的函数值，作二次插值，得

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

令  $x = x_0 + th$ ，上式可表示为

$$P(x_0 + th) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0) - t(t-2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

两端对t求导，有

$$P'(x_0 + th) = \frac{1}{2h}[(2t-3)f(x_0) - (4t-4)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)]$$

上式分别取t=0,1,2,得到三种三点公式

## 插值型求导公式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)]$$

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)]$$

而带余项的三点公式如下：

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

## 插值型求导公式

$$f'(x_2) \approx \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

式中  $\xi \in [x_0, x_1]$  , 截断误差是  $O(h^2)$

用插值多项式  $P(x)$  作为  $f(x)$  的近似函数, 还可以建立高阶数值求导公式

$$f^{(n)}(x) \approx P^{(n)}(x) \quad k=0, 1, \cdots, n$$

## 例题

例22 已知函数表如下：

$x_i$	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
$f(x_i)$	3.669	4.482	5.474	6.686	8.166	9.974	12.182

试求  $f(x)$  在  $x=1.7$  处的导数值。

解 应用两点公式,取  $h=0.2$ ,得

$$f'(1.7) = \frac{1}{h} [f(1.9) - f(1.7)] = 6.060$$

$$f'(1.7) \approx \frac{1}{h} [f(1.7) - f(1.5)] = 4.960$$

真值5.473



---

## 本章小结

本章介绍了积分和微分的数值计算方法，其基本原理主要是逼近论，即设法构造某个简单函数  $P(x)$  近似表示  $f(x)$ ，然后对  $P(x)$  求积或求导得到  $f(x)$  的积分或导数的近似值。基于插值原理，推导了数值积分和数值微分的基本公式。

插值型求积公式介绍了牛顿-柯特斯公式和高斯公式两类。前者取等距节点，算法简单而容易编制程序。但是，由于在  $n \geq 8$  时出现了负系数，从而影响稳定性和收敛性。因此实用的只是低阶公式。



## 本章小结

解决长区间与低阶公式的矛盾是使用复合求积公式，因此，常用的数值积分法都是复合求积公式。高斯公式不但具有最高代数精度，而且收敛性和稳定性都有保证，因此是高精度的求积公式。高斯公式还可以通过选择恰当的权函数，用于计算奇异积分和广义积分，也可使一些复杂的积分计算简化。高斯公式的主要缺点是节点与系数无规律。所以高阶高斯公式不便于上机使用。实际应用中可以把低阶高斯公式进行复合。

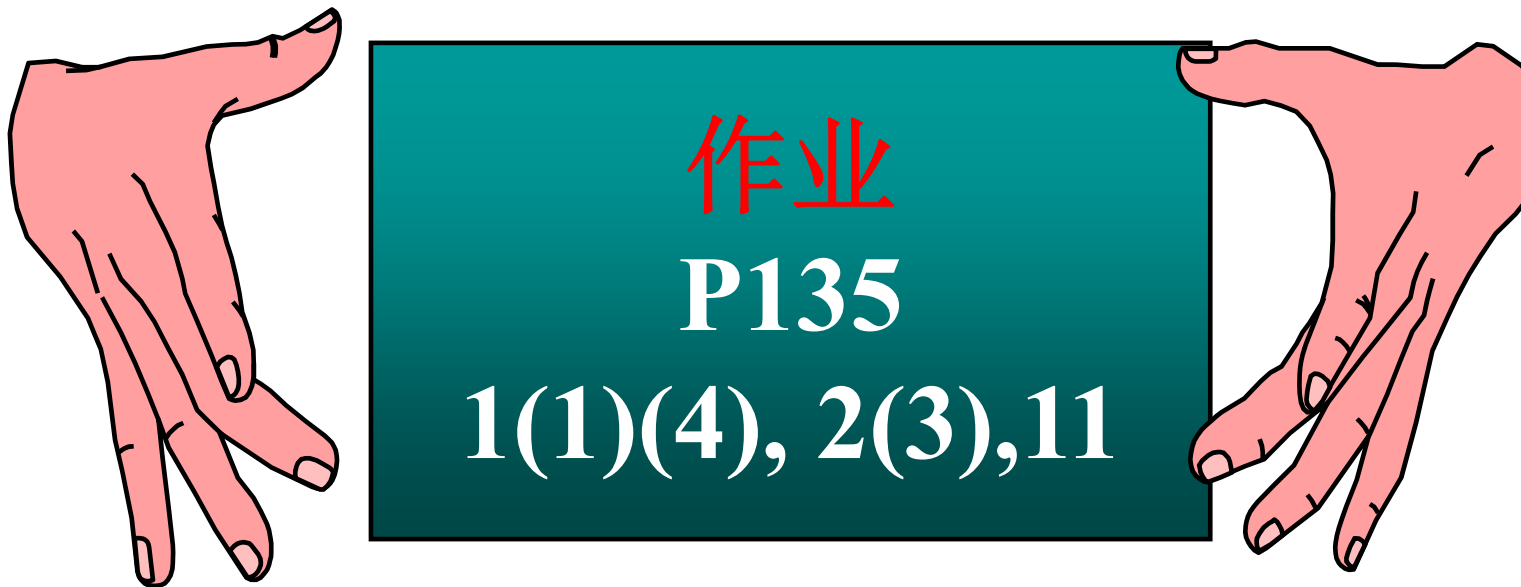
## 本章小结

龙贝格算法是在区间逐次分半过程中，对用梯形法所获得的近似值进行多级“加工”，从而获得高精度的积分近似值的一种方法。它具有自动选取步长且精度高，计算量小的特点，便于在计算机上使用。建立在代数精度概念上的待定系数法也是数值积分中的一般方法，按待定系数法确定的数值积分公式没有误差估计式，只能从代数精度出发，估计其精确程度。

## 本章小结

如果要求函数在某点的导数，而该函数仅仅是列表函数时，可使用插值求导公式去近似计算函数的导数。

## 本章习题



# 本章结束

