大学物 理 实 验

实验数据处理

秦　　颖

基础物理实验教学中心

2017.9

误差理论

第1章 测量与误差

第2章 有效数字及其运算

第3章 不确定度与测量结果

第4章 常用的数据处理方法

第1章 测量与误差

一、测量及分类

测量是将待测量与选做计量标准的同类物理量进行比较，得到被测物理量量值的过程。

测量值必须包括: 数值和单位。

1. **直接测量：** 可以用测量仪器仪表或量具直接读出测量值的测量，称为直接测量。

2. **间接测量：** 有些物理量无法进行直接测量，而需要依据待测物理量与若干个直接测量量的函数关系求出，这样的测量就称为间接测量。

$V = abc$ $\quad$ $R = R_0 + \alpha T$ （R、T）

二、测量误差

1. 真值与测量值

真值
- 1.理论真值（三角形的内角和等）
- 2.约定真值（1米、1秒、1千克、平均值）
- 3.相对真值：高一等级精度的标准所测的量值

2. 误差的定义

误差：指的是测量值 y 与真值 A 之间的差

绝对误差 $\boxed{\delta = y - A}$

残差 = 测量值 - 算术平均值

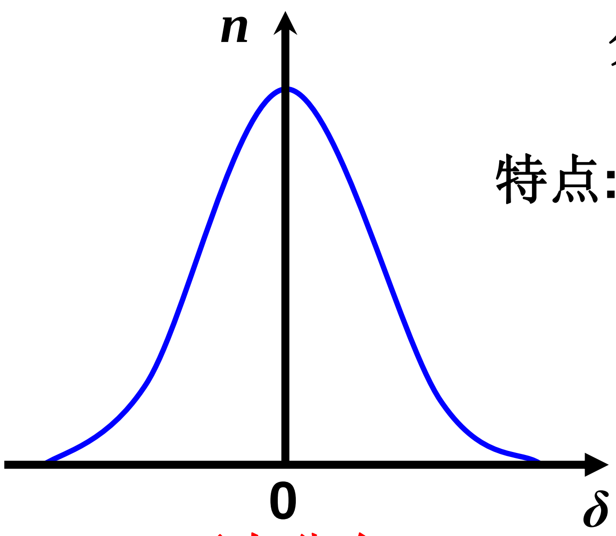
相对误差 $= \dfrac{\text{绝对误差}}{\text{被测真值}} \times 100\%$

三、误差的分类

误差分类----系统误差、随机误差、粗大误差

1. 随机误差

在相同的条件下，由于偶然的不确定因素造成每一次测量值的无规则涨落， 测量值对真值的偏离时大时小、时正时负， 这类误差称为随机（偶然）误差. —— 重复测量中以不可预知方式变化的误差分量。



正态分布

分布服从统计规律：A类不确定度 — U_A。

特点： 有界性：随机误差绝对值不会超过一定界限

单峰性：绝对值小的误差出现的概率大

对称性：绝对值相等的正负误差次数相等

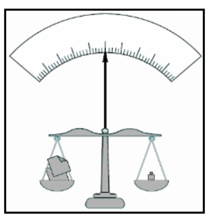
抵偿性：随次数增加，算数平均值趋于零

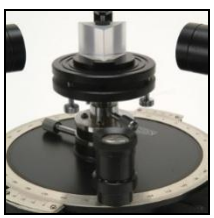
2. 系统误差

定义：在同一条件下，多次重复测量同一值时保持恒定或以可预知方式变化的测量误差分量。

系统误差来源

- 仪器、装置误差
  - 仪器结构
  - 安装调整不当
    - 不水平
    - 不垂直
    - 未调零
- 测量理论或方法误差
  - 理论公式的近似
    - 单摆
    - 测加速度
  - 实验方法不完善
    - 散热
    - 内阻
- 测量环境误差
  - 外界条件与仪器要求不一致
- 人员误差
  - 反应速度
  - 读数习惯





空程误差-齿轮转动

特点：有规律，可再现，可以预测　一经查明就应设法消除其影响

3. 系统误差分析的重要性

系统误差分量对测量结果的影响常常显著地大于随机误差分量的影响，因此要重视对系统误差的分析，尽量减小它对测量结果的影响。

4. 减小或消除系统误差

从产生误差的根源上消除系统误差 ----仔细分析误差来源

采取一定的方法消除（如空程误差等），正确调整仪器，

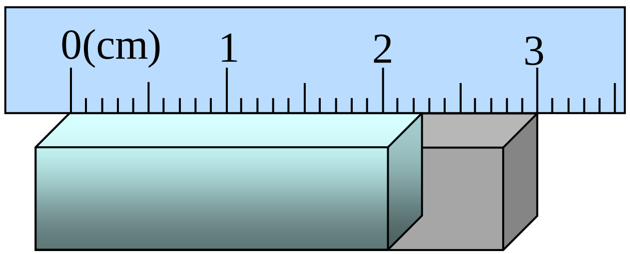
正反方向测量法（正反方向测量，克服由于方向性引起的系统误差，如牛顿环 杨氏模量 表面张力等）

… … … …

- 定值系统误差 — 直接修正（千分尺的零点修正）。
- 未定系统误差 — **B**类不确定度 U_B。

第2章 有效数字及其运算

一、有效数字



2.23cm　　3.000cm

2.24cm　　3.00cm ★

2.25cm　　3.0cm

直接测量量的有效数字 = 仪器刻度数 + 估读数

（直读式仪表、量具）= 准确数字 + 欠准数字

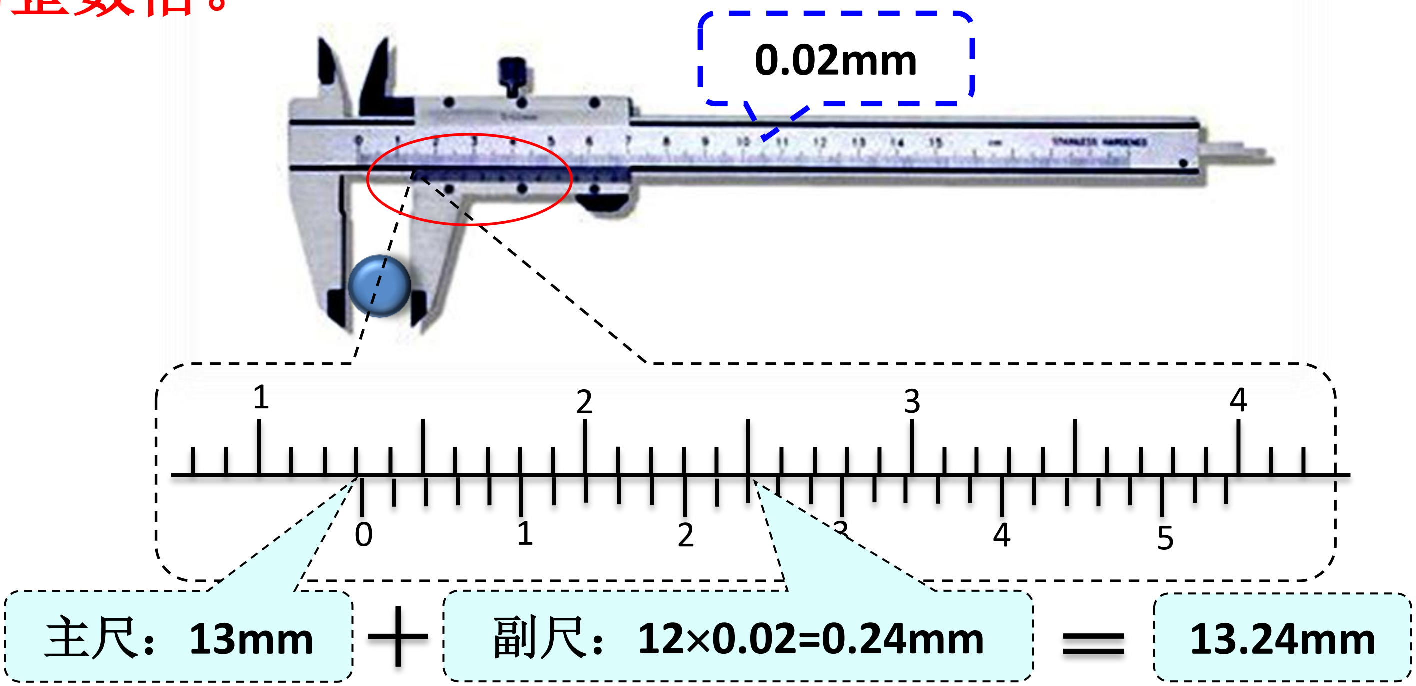
(取1到2位)

测量结果的精度与所用的测量方法及仪器有关，记录或数据运算时，其精度不能超过或低于测量所能达到的精度。

1. 有效数字的读取

有效数字的多少直接反映实验测量的**精度，不能随意取舍!!**

① **游标类量具**，如游标卡尺、分光计方位角的游标度盘、水银大气压力计的读数游标尺等，一般**应读到游标分度值的整数倍。**

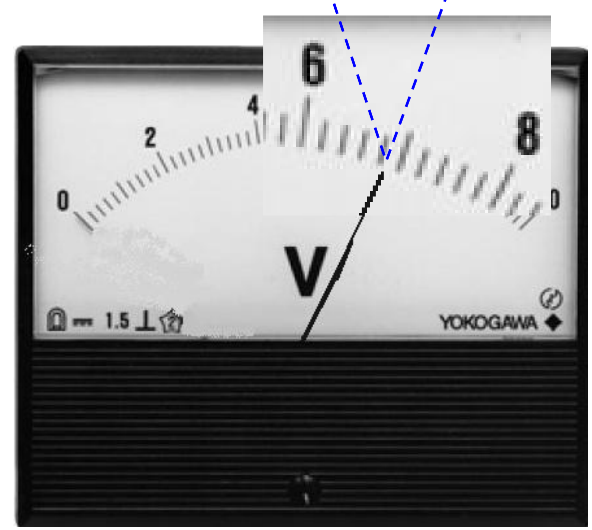


② 数显仪表及有十进步进式标度盘的仪表，如数字电表、电阻箱、电桥等，应直接读取仪表的示值。

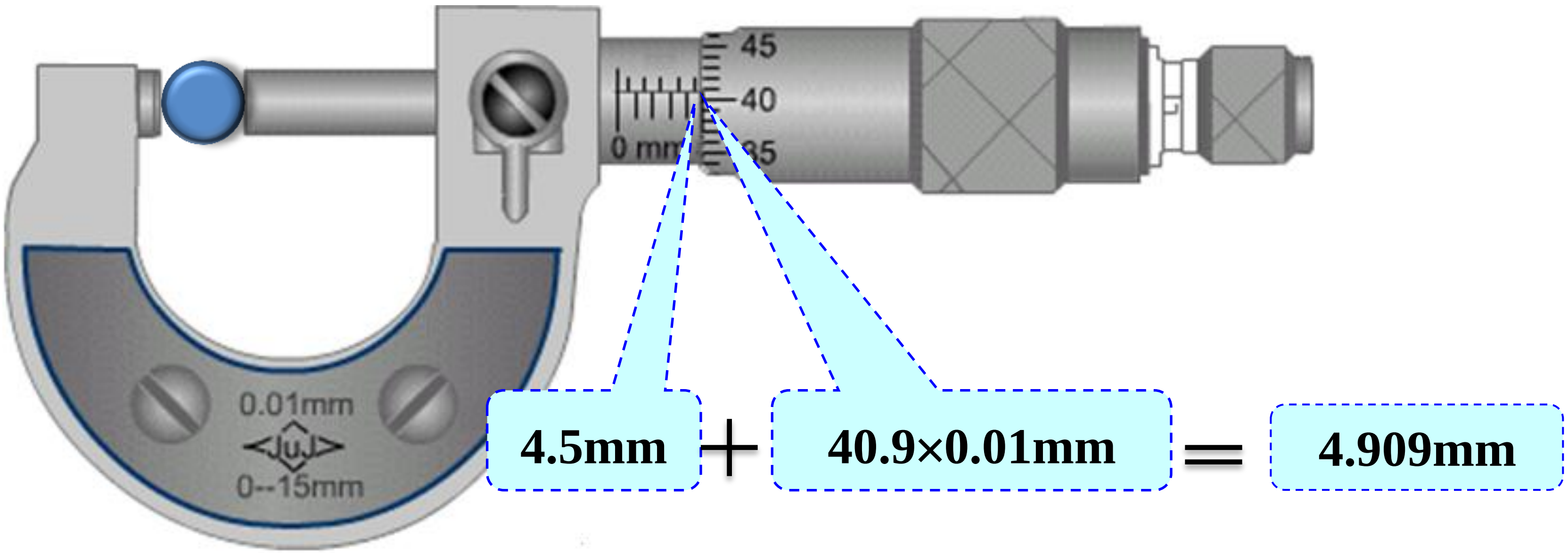
$6.8+0.2\times0.3$

$=6.86$V

③ 指针式仪表，读数时一般要估读到最小分度值的1/4～1/10，由于人眼分辨能力的限制，一般不可能估读到最小分度的1/10以下。



④ 对于可估读到最小分度值以下的计量器具，当最小分度不小于**1mm**时，通常要估读到**0.1**分度，如螺旋测微计和测量显微镜鼓轮的读数，都要估计到**1/10**分度。



2. 有效数字位数 **0.00520m**

数据左起第一位非0数起，到最末一位欠准数的全部数字个数。

二、有效数字的运算法则

1. 加减运算——结果的末位与最高位取齐。

$$\begin{array}{r} 22.34\underline{9} \\ +\ 60.\underline{4} \\ \hline 82.\underline{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22.350\underline{1} \\ +\ 60.\underline{4} \\ \hline 102.\underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22.350\underline{0} \\ +\ 60.\underline{4} \\ \hline 182.\underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22.350\underline{0} \\ +\ 60.\underline{3} \\ \hline 82.\underline{6} \end{array}$$

2. 乘除运算——与有效数字位数最少的相同。

$$16 \times 0.4 = 6 \quad (6.4)$$

$$16 \times 0.8 = 13 \quad (12.8)$$

① 拟舍弃数字的最左一位数字小于**5** 时**----**舍

② 拟舍弃数字的的最左一位数字大于**5**，或等于**5**而其后跟非零数字

③ 拟舍弃数字的的最左一位数字为**5**，其后全为零数字 **----**奇进偶不进

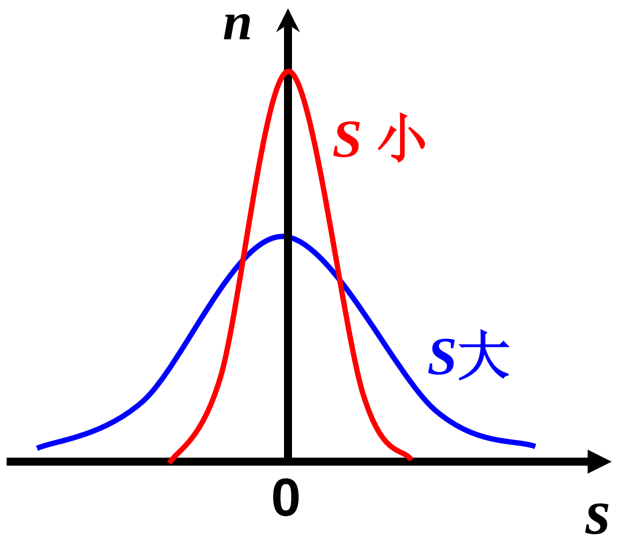
第3章 不确定度与测量结果的评定

一、直接测量数据处理

1. 算术平均值—测量列的最佳值

设对真值为A的物理量x，作n次等精度测量，结果分别为x_1、x_2、……x_n

算术平均值：$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$



2. 标准偏差（贝塞尔公式）

$$\sigma=s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

s反映了随机误差的分布特征

s小：测量值密集，随机误差分布范围窄，精密度高

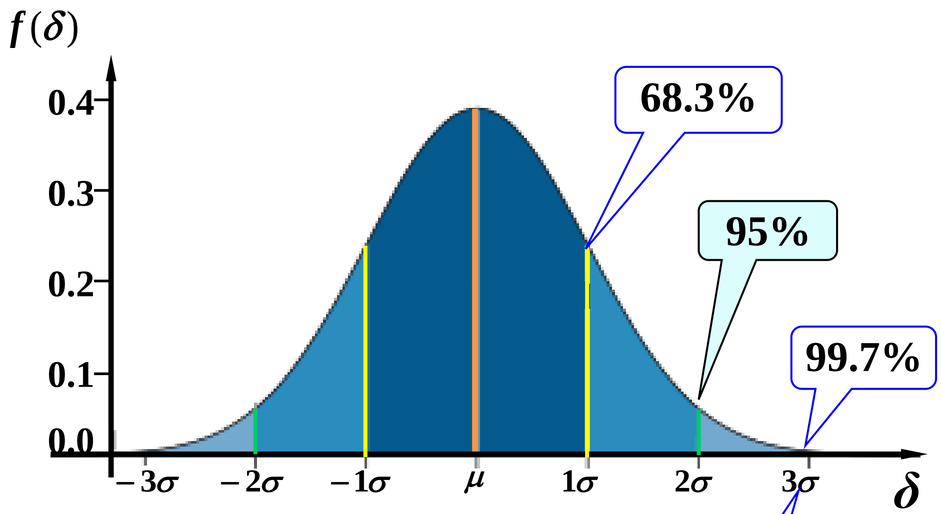
s大：测量值分散，随机误差分布范围宽，精密度低

正态分布

$$f(\delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\delta^2/2\sigma^2}$$

$$\delta = x_i-\mu$$

期望值(均值)



测量数据出现在某一区间的概率计算

$$P=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=1$$

$$P=\int_{-\sigma}^{+\sigma} f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=0.6826$$

$$P=\int_{-2\sigma}^{+2\sigma} f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=0.9544$$

$$P=\int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(\delta)\,\mathrm{d}\delta=0.9973$$

$$x_i-\bar{x}>3\sigma$$

粗大误差--剔除

3. 算术平均值的标准差 —— 测量结果离散程度

相同条件下，对同一测量量进行若干组测量（每组均为 n次测量）

算数平均值列：$\overline{x}_1$、$\overline{x}_2$、$\overline{x}_3$、$\overline{x}_4$ ……

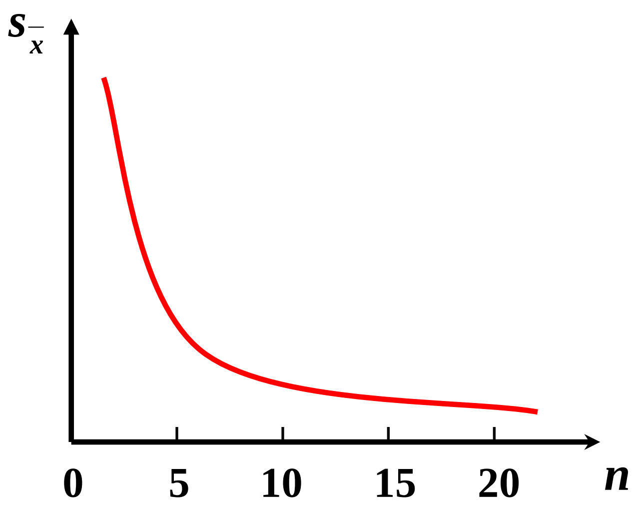
$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

是表征同一被测量的各个独立测量列算数平均值（测量结果）的分散性参数

① 增加测量次数n，可提高测量精度

② n>10时， $s_{\overline{x}}$ 变缓，增加n对精度提高效果有限。

6≤n≤10



要提高测量精度，选取适当的测量次数，应采用更高级精度的仪器。

二、不确定度的估算

1. 不确定度的概念

它表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度。

以测量结果作为被测量真值的估计值时，可能存在的误差范围以及在这个范围内测量结果为真值的概率大小。

$$\boxed{X = x \pm U}$$ （单位）

待测物理量　测量值　不确定度

不确定度反映了可能存在的误差分布范围，即随机误差分量和未定系统误差分量的联合分布范围。

A类不确定度

B类不确定度

2. 不确定度与误差的区别

误　　差	不确定度
测量值与真值的差	是真值所处的量值分散范围的评定，是对测量值不能确定的程度
是未知的、确定的	可计算（评估）
可正可负	恒为正

凡是涉及到测量结果的定量数值评价时，均应使用不确定度来代替误差。

3. A类分量U_A的计算：设某一物理量的重复测量次数为n

$$\boxed{U_A = t_{v(P)} s_{\bar{x}}}$$

置信因子

算数平均值的标准差

n次重复测量，由于平均值与n个测量值之间存在1个约束条件，所以自由度为 $\boxed{v = n - 1}$

自由度v：n次重复测量的物理量之间互相是独立的，那么自由度为n，如果存在k个独立的线性约束条件，则独立变量的个数变为 n-k，即自由度为 n-k。

置信因子$t_{v(P)}$可以查国家标准的数表得到

n / P	2	3	4	5	6	7	8	9	15	20	∞
0.683	1.32	1.2	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03	1
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.89	1.86	1.83	1.76	1.73	1.65
0.95	4.30	3.18	2.78	2.56	2.45	2.37	2.31	2.26	2.13	2.09	1.96
0.997	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.98	2.86	2.58

但概率P = 0.95 的因子t由下式算出更为方便，式中v =n-1

$$t_{v(0.95)} \approx 1.959 + \frac{2.406}{v - 1.064} \qquad (v \geq 3)$$

4. B类分量U_B的计算 — 未定系统误差引起

U_B：一般取仪表、器具的示值误差限或基本误差限，它的大小由实验室近似给出。$\boxed{U_B \approx \Delta_I}$

5. 直接测量的不确定度

合成标准不确定度、扩展不确定度来评定。

本教材采用扩展不确定度U的评定方法。

两类分量用方、和、根合成：

$$\boxed{U = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}} = \sqrt{U_A^2 + \sum_j \left(U_{jB}\right)^2}$$

U是概率约等于0.95的扩展不确定度。

6. 普通物理实验常用测量仪器的误差限

① 钢直尺(米尺)(分度值为1mm).

取其误差限为0.3mm，实验中也可以约定取0.5mm.

② 游标卡尺

分度值		误差限
0.02mm	→	0.02mm
0.05mm	→	0.05mm
0.1mm	→	0.1mm

③ 螺旋测微计（千分尺，精度为一级）

误差限与测量范围（量程）有关 (0.004 ~ 0.006 mm)

本课程约定为：0.005mm.

④ 机械停表和数字毫秒表：一般分度值即为仪器误差限

机械停表分度值为0.1s → 误差限为0.1s

数字秒表时基值为

- 0.1ms → 0.1ms
- 1ms → 1ms
- 10ms → 10ms

误差限

⑤ 水银-玻璃温度计：误差限为0.5℃

⑥ 电磁式测量指示表 (0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5、5.0)

误差限

$$\Delta_I = \underbrace{x_m}_{\text{仪表量程}} \cdot N\% = \frac{x_m}{100} \times \underbrace{N}_{\text{准确度级别}}$$

⑦ 旋钮式电阻箱 (0.02、0.05、0.1、0.2四个级别)

电阻箱误差 = 箱内电阻器的阻值误差 + 旋钮的接触误差

$$\frac{\Delta_I}{R} = \left(a + b\frac{m}{R}\right)\%$$

旋钮个数

所用电阻值

级别

级别常数

电阻箱级别与对应常数

级别 (*a*)	0.02	0.05	0.1	0.2
常数 (*b*)	0.1	0.1	0.2	0.5

三、直接测量结果的完整表示

$$X = \bar{x} \pm U$$ （单位）

概率约等于95%的扩展不确定度

单次测量值或多次测量的算术平均值(修正)

U一般只取一位有效数字

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= 20.422\text{cm}\\ U &= 0.72\text{cm}\end{aligned}\right\} \Rightarrow X = (20.4 \pm 0.7)\text{cm}$$ （p=95%）

根据扩展不确定度进行有效数字修约，末位数字对齐

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= 180.4005\text{m}\\ U &= 0.018\text{m}\end{aligned}\right\} \Rightarrow X = (180.400 \pm 0.018)\text{m}$$ （p=95%）

修约前首位数字较小时（如1、2等）一般取2位

真值在区间 $[\bar{x} - U, \bar{x} + U]$ 内的概率约为 95%。

➢ 相对扩展不确定度

判断下列哪个测量结果的准确度高

$$X = (20.4 \pm 0.7)\mathrm{cm} \qquad X = (120.4 \pm 0.9)\mathrm{cm}$$

$$U_r = \frac{0.7}{20.4} = 0.034 \qquad U_r = \frac{0.9}{120.4} = 0.0075$$

相对不确定度一般取两位有效数字

为更直观地评价测量结果的准确度，引入相对扩展不确定度U_r的概念，它是扩展不确定度U与量值x之比。

$$U_r = \frac{U}{x}$$

从零到满偏，电表的相对不确定度越来越小。

- 单次测量的不确定度 U

① 因条件限制，仅测一次数据

② s显著小于仪器的误差限 $s < \dfrac{\Delta_I}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{① 因条件限制，仅测一次数据}\\ \text{② } s\text{显著小于仪器的误差限 } s<\dfrac{\Delta_I}{2}\end{array}\right\} \boxed{U \approx \Delta_I}$$

- 科学记数法

$$\left.\begin{array}{l} m = (3.6 \pm 0.7)\ \text{kg} \\ m \cancel{=} (3600 \pm 700)\ \text{g} \end{array}\right\} m = (3.6 \pm 0.7) \times 10^3\,\text{g}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = (2800 \pm 7)\ \text{kg} \\ m = (2.800 \pm 0.007) \times 10^3\ \text{kg} \ \bigstar \end{array}\right.$$

例1：用0.2级，量程为20kΩ的万用表测量某个电阻的阻值，测量结果单位为 (kΩ) : 3.92，3.89，3.88，3.86，3.88，3.87，3.86，3.85，3.87，3.89 给出最终结果表示 。

解：
$$\bar{R} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 3.877\ \text{k}\Omega$$

用计算器进行统计运算

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - 3.877)^2}{10-1}} \approx 0.020\ \text{k}\Omega$$

$$U_A = \left(t_{\nu(P)}\big/\sqrt{n}\right)s = \left(2.26\big/\sqrt{10}\right)\times 0.020 = 0.014\ \text{k}\Omega$$

$$U_B = \Delta_I = \frac{N}{100}\times \text{量程} = \frac{0.2}{100}\times 20 = 0.04\ \text{k}\Omega$$

N 精度等级

$$U = \sqrt{U_A{}^2 + U_B{}^2} = \sqrt{0.014^2 + 0.04^2} \approx 0.042\ \text{k}\Omega = 0.04\ \text{k}\Omega$$

$$\boxed{R = \left(3.88 \pm 0.04\right)\ \text{k}\Omega}$$

最终结果

四、间接测量结果与不确定度的估算

$$N = f(x, y, z, \ldots)$$

$$\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) \Rightarrow \begin{cases} x = \bar{x} \pm U_x \\ y = \bar{y} \pm U_y \\ z = \bar{z} \pm U_z \end{cases}$$

绝对不确定度

$$\mathrm{d}N = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots$$

$$U_N = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 \cdot U_x^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 \cdot U_y^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2 \cdot U_z^2 + \cdots}$$

方、和、根

相对不确定度 $\ln N = \ln f(x, y, z \ldots)$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{N}} = \frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z + \cdots$$

$$\frac{U_N}{N} = \sqrt{(\frac{\partial \ln f}{\partial x})^2 \cdot U_x^2 + (\frac{\partial \ln f}{\partial f})^2 \cdot U_y^2 + (\frac{\partial \ln f}{\partial z})^2 \cdot U_z^2 + \cdots}$$

绝对不确定度

$$N = x \pm y^2 \Rightarrow U_N = \sqrt{U_x^2 + (2y)^2 U_y^2}$$

相对不确定度

$$N = \frac{x \cdot y^2}{z^3} \Rightarrow \ln N = \ln x + 2\ln y - 3\ln z$$

$$\frac{U_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{U_x}{x}\right)^2 + 2^2\left(\frac{U_y}{y}\right)^2 + 3^2\left(\frac{U_z}{z}\right)^2}$$

$$U_N = \bar{N}\sqrt{\left(\frac{U_x}{\bar{x}}\right)^2 + 2^2\left(\frac{U_y}{\bar{y}}\right)^2 + 3^2\left(\frac{U_z}{\bar{z}}\right)^2}$$

间接测量的实验结果 $\boxed{N = (\bar{N} \pm U_N)}$

例2： 铜圆柱体的 $m=(213.04\pm0.05)$ g，用精度为0.02mm的游标卡尺测得其高度h(mm)为：80.38，80.36，80.36，80.38，80.36，80.38；一级千分尺测得其直径d(mm)为：19.465，19.466, 19.465, 19.464, 19.467, 19.466；求该铜柱体的密度。

解：① 求高度的算术平均值及不确定度

$$\bar{h}=80.37\ \text{mm}\qquad s=0.0089\ \text{mm}$$

h的A类不确定度： $t_{\nu(0.95)}=2.57$

$$U_A=t_{\nu(0.95)}\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{2.57\times0.0089}{\sqrt{6}}=0.0093\ \text{mm}$$

h的B类不确定度为：$U_B=\Delta_I=0.02\ \text{mm}$

$$U_h=\sqrt{{U_A}^2+{U_B}^2}=0.02205=0.02\ \text{mm}$$

h的最终结果：$h=(80.37\pm0.02)$ mm

② 求直径的算术平均值及不确定度

$$\bar{d} = 19.4655 \text{ mm} \qquad s = 0.00105 \text{ mm}$$

d 的A类不确定度为：

$$U_A = t_{\nu(0.95)} \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2.57 \times 0.00105}{\sqrt{6}} = 0.001102 \text{ mm}$$

d 的B类不确定度为：$U_B = \Delta_I = 0.005 \text{ mm}$

d 的扩展不确定度为：

$$U_d = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} = 0.00512 = 0.005 \text{ mm}$$

d 的最终测量结果：

$$d = (19.466 \pm 0.005) \text{ mm}$$

③ 求密度及其不确定度

$$\bar{\rho}=\frac{4\bar{m}}{\pi\bar{d}^2\bar{h}}=\frac{4\times 213.04}{\pi\times 19.466^2\times 80.37}=8.9068\ \mathrm{g/cm^3}$$

$$\frac{U_\rho}{\bar{\rho}}=\sqrt{\left(\frac{U_m}{\bar{m}}\right)^2+2^2\times\left(\frac{U_d}{\bar{d}}\right)^2+\left(\frac{U_h}{\bar{h}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.05}{213.04}\right)^2+4\times\left(\frac{0.005}{19.466}\right)^2+\left(\frac{0.022}{80.37}\right)^2}=0.063\%$$

$$U_\rho=8.9068\times 0.063\%=0.0056=0.006\ \ \mathrm{g/cm^3}$$

$$\boxed{\rho=(8.907\pm 0.006)\ \ \mathrm{g/cm^3}}$$

第4章 常用的数据处理方法

一、列表法--记录和处理数据时，把数据列成表

写明表中各符号的意义、单位（不许写在各数字后面）

在表格上方中间写表的内容（表名）

表1 伏安法测电阻

测量次数*n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
电压U/V	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00
电流I/mA	2.00	4.01	6.05	7.85	9.70	11.83	13.75	16.02	17.86
电阻 $R=(U/I)/\Omega$	500	499	496	510	515	507	509	499	504

注：伏特计：1.0级，量程15V，内阻15KΩ 毫安计：1.0级，量程20mA，内阻1.2Ω

注明测量仪器的型号、量程、级别；环境参数、常量等

注意有效数字，零不能随意舍弃

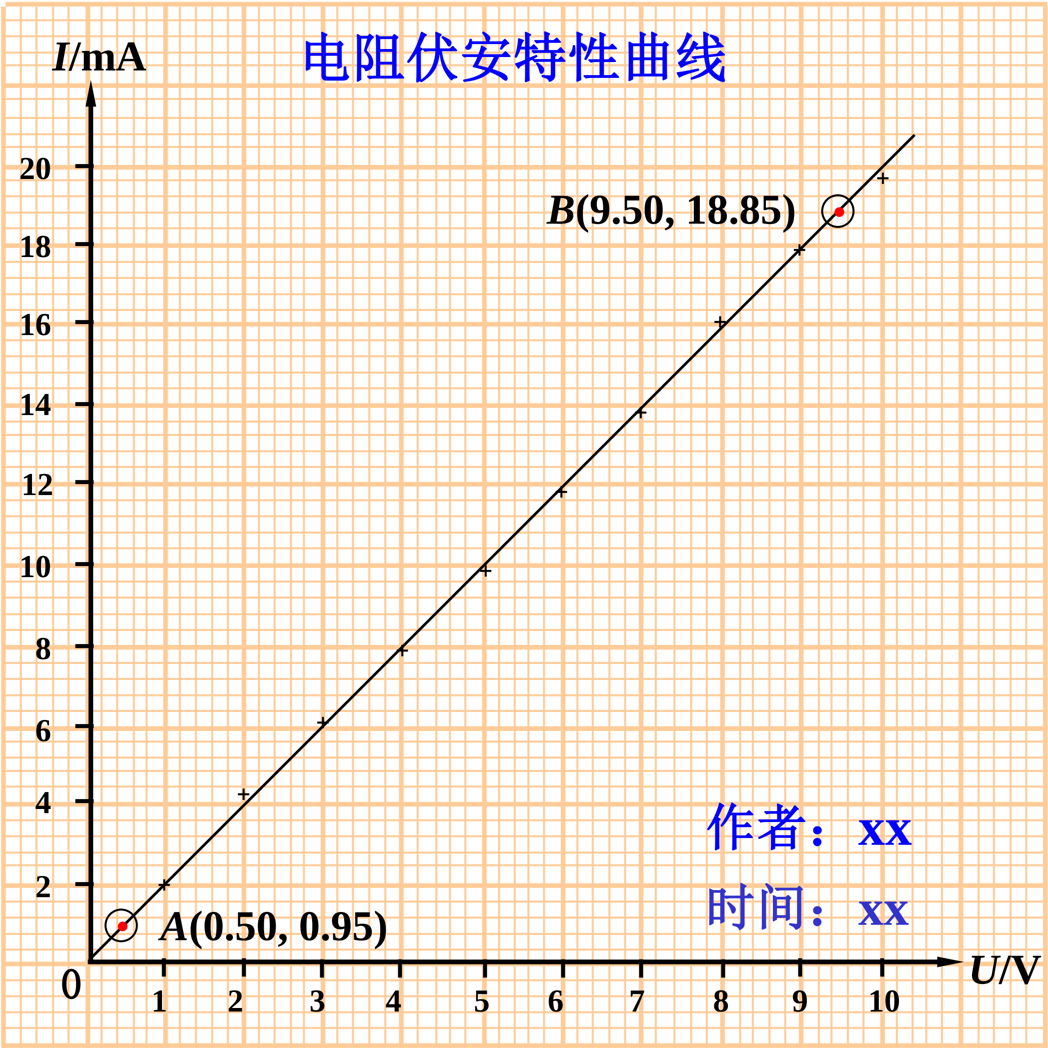
二、作图法

1.坐标纸的大小合适，图线位置合适。

2. 坐标轴刻度合适、箭头规范、 标明物理量及单位.

3.数据点准确标出，用尺连成光滑的直线或曲线。

4. 取用点 —— 符号



$$R=\frac{1}{k}=\frac{U_B-U_A}{I_B-I_A}=\frac{9.50-0.50}{18.85-0.95}=503(\Omega)$$

三、逐差法

自变量x：	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
测量值y：	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8

逐差伸长量　Δy_1　Δy_2　Δy_3　Δy_4

逐差伸长量的定义(分两组)：$\Delta y_i = y_{i+4} - y_i$

$$\boxed{\overline{\Delta y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\Delta y_i = \frac{1}{4}\left[\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4\right]}$$

优点：可以充分利用实验数据，减小误差，数据处理简单。

适用条件：函数成线性关系，自变量x为等间距变化时，

数据是偶数对。

四、直线拟合方法（最小二乘法）

1. 函数关系 $y = b\,x$ 测量精度较高的作为自变量

$$\begin{pmatrix} x_1, & \cdots\cdots, & x_n \\ y_1, & \cdots\cdots, & y_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$ 找到一个最佳的b值，

最佳 $\hat{y} = b\,x_i$ 　　则 $(y_i - bx_i)$ 称为残差

使 $$\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i)^2 = \min$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i)^2 = 0 \Longrightarrow b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\boxed{\nu = n - 1}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - bx_i)^2}{n-1}} \qquad s_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum x_i^2}} \qquad n \geq 7$$

2. 函数关系 $y=a+bx$

找到最佳的a、b值，使 $\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2=\min$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sum\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2}{\partial a}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sum\left(y_i-(a+bx_i)\right)^2}{\partial b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{\overline{x\cdot y}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}\\[2ex]a=\overline{y}-b\cdot\overline{x}\end{cases}$$

$$\boxed{\nu=n-2}$$

$$\begin{cases}s_y=\sqrt{\dfrac{\sum(y_i-a-bx_i)^2}{n-2}}\\[2ex]s_a=s_y\sqrt{\dfrac{\overline{x^2}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}+\dfrac{1}{n}}\\[2ex]s_b=\dfrac{s_y}{\sqrt{\sum(x_i-\overline{x})^2}}\end{cases}$$

$$U_{a/b\mathrm{A}}=t_{\nu(P)}s_{a/b}$$

$$a=a\pm U_{a\mathrm{A}}$$

$$b=b\pm U_{b\mathrm{A}}$$

$$\boxed{y=3.91+1.51x}$$

3. EXCEL程序中直线拟合的两种方法

表4　EXCEL程序中的LINEST函数

参　　量	EXCEL的函数
斜 率 b	= INDEX(LINEST($y_1:y_n$, $x_1:x_n$, 1, 1), 1, 1)
截 距 a	= INDEX(LINEST($y_1:y_n$, $x_1:x_n$, 1, 1), 1, 2)
应变量标准差s_y	= INDEX(LINEST($y_1:y_n$, $x_1:x_n$, 1, 1), 3, 2)
斜率标准差s_b	= INDEX(LINEST($y_1:y_n$, $x_1:x_n$, 1, 1), 2, 1)
截距标准差s_a	= INDEX(LINEST($y_1:y_n$, $x_1:x_n$, 1, 1), 2, 2)
残差平方和*RSS*	= INDEX(LINEST($y_1:y_n$, $x_1:x_n$, 1, 1), 5, 2)

x	y		
2.00	6.90		1.511607143
4.00	10.00		
6.00	13.05		
8.00	15.95		
10.00	19.00		
12.00	22.05		
14.00	25.10		

例4：某同学测量弹簧倔强系数的数据如下：

F (g)	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00
y (cm)	6.90	10.00	13.05	15.95	19.00	22.05	25.10

F为弹簧所受作用力，y为弹簧伸长后的位置示值，已知：

$$F = k\,(y - y_0)$$

试用最小二乘法处理数据，求弹簧的倔强系数k及弹簧的初始位置 y_0

解：$y = y_0 + \left(\dfrac{1}{k}\right)F$　　$x = F$　　$a = y_0$　　$b = \dfrac{1}{k}$

a = 3.914285714 = 3.9143　(计算过程多取一位有效数字)

b = 1.511607143 = 1.5116　(计算过程多取一位有效数字)

s_y =0.049099025 (计算过程多取一位有效数字)

$s_b = 0.0046$ cm/g　　$s_a = 0.041$ cm

$$y_0 = a = 3.9143 \ \text{cm}$$

$$k = \frac{1}{b} = \frac{1}{1.5116} = 0.66155 \ \text{g/cm}$$

变量替换

$$U_{y_0} = t_\nu s_a = 2.57 \times 0.041 = 0.11 \ \text{cm}$$

$$U_b = t_\nu s_b = 2.57 \times 0.046 = 0.12 \ \text{cm}$$

$$\frac{U_k}{k} = \frac{U_b}{b} = \frac{0.12}{1.5116} = 7.9\%$$

$$U_k = 7.9\% \times 0.66155 = 0.05 \ \text{g/cm}$$

$$\nu = n - 2 = 5$$

不确定度

$$\frac{U_k}{k} = \sqrt{\left(\frac{U_b}{b}\right)^2}$$

$$b = (1.51 \pm 0.12) \ \text{cm/g}$$

$$k = (0.66 \pm 0.05) \ \text{g/cm}$$

$$y_0 = (3.91 \pm 0.11) \ \text{cm}$$

$$y = 3.91 + 1.51F$$

最终结果