一、填空题 (每题6分,共30分)

1．由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 dz =____; 设 $z=xyf(\frac{y}{x})$ ，f 可导，则 xz_x+yz_y =____.

$$yz+xyz_x+\frac{x+zz_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0,$$

$$z_x=-\frac{x+yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z+xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$xz + xyz_y + \frac{y + zz_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0 ,$$

$$z_y = -\frac{y + xz\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z + xy\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

$$dz = dx - \sqrt{2}dy$$

$$z_x = yf(\frac{y}{x}) - \frac{y^2}{x} f' \qquad z_y = xf(\frac{y}{x}) + yf'$$

$$xz_x + yz_y = 2z$$

2．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$ 收敛，则 a 的取值范围是

______________；函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\frac{y}{\sin(x^2y)}=$______.

$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$ 收敛；$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；所以a=0，

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{y}{\sin(x^2y)}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{1}{x^2}\frac{x^2y}{\sin(x^2y)}=\frac{1}{4}$$

3．设 $f(x)=x^2$，而 $0\le x\le 1$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,6$，则 $S(-\frac{1}{2})=$____；设

$x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$，$-\pi\le x\le\pi$，则 $a_2=$ ____.

$S(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$，$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2 d\frac{\sin 2x}{2}$

$=\frac{1}{\pi}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xd\cos 2x$

$=\frac{1}{\pi}x\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2xdx=1$

4. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$

是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，则此微分

方程为 ________；此微分方程的通解为 ________.

$y_3 - y_1 = -e^{-x}$ ， $y_3 - y_2 = e^{2x}$

故齐次方程通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

非齐次方程通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + xe^x + e^{2x}$

$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} + xe^x + e^x + 2e^{2x}$

$$y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} + xe^x + 2e^x + 4e^{2x}$$

$$y' + 2y = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} + 3xe^x + e^x + 4e^{2x}$$

微分方程为 $y'' - y' - 2y = -2xe^x + e^x$

5. 函数 $u = 2xy - z^2$ 在点 $(2,-1,-1)$ 处沿 x 轴负向的方向导数为______;在该点处方向导数的最大值为______.

$u_x = 2y, u_y = 2x, u_z = -2z$ $\dfrac{\partial u}{\partial(-x)} = 2$ $\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$

二、单项选择题 (每题4分,共20分)

1、下列条件成立时能够推出 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且全微分 $dz=0$ 的是______.

A．在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x=0$ ，$f'_y=0$

B．$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

C．$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

D．$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量

$$\Delta z=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

A偏导数为零，未必可微。

B.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\Delta z=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \qquad \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\text{不存在}$$

C. $\dfrac{\Delta z}{\rho}\to 1$

D.

D对

$$\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$$

2、设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 均为可微函数，且 $g'_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是__.

A．若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

B．若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

C．若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$

D．若 $f'_y(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

D对 $L_x = f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) = 0$,当

$f_x(x_0, y_0) \neq 0$ ，必有 $\lambda \neq 0$

$L_y = f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) = 0$

从而必有 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$

3、设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，则在点(0,1,1)

的一个邻域内，该方程______.

A．只能确定一个具有连续偏导数的隐函数

$z = z(x, y)$

B．可确定两个具有连续偏导数的隐函数

$y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

C．可确定两个具有连续偏导数的隐函数

$x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

D．可确定两个具有连续偏导数的隐函数

$x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

$$F_x=y+ze^{xz},F_y=x-\frac{z}{y},F_z=-\ln y+xe^{xz},F_x(0,1,1)=2,F_y(0,1,1)=-1,F_z(0,1,1)=0$$

C对

4、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{6}$ 与 $x=\sqrt{10}$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的______.

A．收敛点，收敛点　　B．收敛点，发散点

C．发散点，收敛点　　D．发散点，发散点

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1， 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛

间为（1，3），所以$x=\sqrt{6}$为收敛点，$x=\sqrt{10}$发散点。

B对

5、下列数项级数中收敛的个数为______.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\cos\frac{2}{n})$　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx, 0<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}}$$ 故收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$$ 由莱布尼兹收敛法收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-\cos\frac{2}{n})|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{2}{n})\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$$ 收敛

$$0<\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}<\frac{n^3\frac{5^n}{2^n}}{3^n}=\frac{n^3 5^n}{6^n}$$ 故级数收敛

D对

三、（10分）已知 $y=e^{2x}+(x+1)e^{x}$ 是微分方程

$y''+ay'+by=ce^{x}$ 的解,求 a,b,c 及该方程通解。

由 $y=e^{2x}+(x+1)e^{x}$ 可知 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ 是齐次

方程的特征根，故特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ 即

$\lambda^2-3\lambda+2=0$ 所以齐次方程的为 $y''-3y'+2y=0$

非齐次方程为 $y''-3y'+2y=ce^{x}$ 将 $y=e^{2x}+(x+1)e^{x}$

$y'=2e^{2x}+(x+2)e^{x}$ ， $y''=4e^{2x}+(x+3)e^{x}$

将 y''，y'，y 得 $-e^x = ce^x$ 故

$$\mathrm{c} = -1，a = -3，b = 2$$

故通解为 $y = c_1e^{2x} + c_2e^x + xe^x$

四、设变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a ，其中 $z = z(x, y)$ 有二阶连续偏导数，说明需要该条件的原因。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2(-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}) + a(-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})$$

$$= 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+6\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=5(a+2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$6+a-a^2=0, a=-2, a=3$，但 $a\neq -2$ 所以 $a=3$

五、（10分）将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

$$a_0 = 2\int_0^1 (2+x)dx = 2(2x+\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = 5$$

$$a_n = 2\int_0^1 (2+x)\cos n\pi x dx = 2[\frac{2+x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx] = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = 0, n = 1,2,6$$

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

六、（10分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点 $(0,0)$ 处是否连续、偏导数是否存在，是否可微。

$$0 \le \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{(xy)^2}{(2xy)^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{2}}\sqrt{xy},$$

$$\lim_{x\to 0, y\to 0}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = f(0,0) \text{ 连续}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$，同理

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta z-(f_x dx+f_y dy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

不存在，不可微

七、（10分）设 $z=f(x,y)$ ，是由方程

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$$

所确定的二元函数，求 $z=f(x,y)$ 的极值和极值点。

$$2x-6y-2yz_x-2zz_x=0,$$

$$-6x+20y-2z-2yz_y-2zz_y=0$$

解 $z_x=0, z_y=0$ 得 $x=3y, y=z$

带入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$

得 $9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0$

即 $y_1=3$，$x_1=9$，$z_1=3$， $y_2=-3$，$x_2=-9$， $z_2=-3$，

$$2-2yz_{xx}-2z_x^{\,2}-2zz_{xx}=0,$$

$$-6-2z_x-2yz_{xy}-2z_xz_y-2z_{xy}=0$$

$$20-4z_y-2yz_{yy}-2z_y^{\,2}-2zz_{yy}=0\quad,$$

再利用充分条件，对$P_1(9,3)A=\dfrac{1}{6}>0, B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0,$

所以$P_1(9,3)$ 为极小值点，3为极小值。对 $P_2(-9,-3)$，

$A=-\dfrac{1}{6}<0, B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0,$ 所以 $P_2(-9,-3)$ ，

为极大值点，-3为极大值。