机器人运动学

StuLiMing

1 运动学

1.1 位置

1.1.1 点的相对位置

点 B 相对于点A 的位置可以写成

$$\mathbf{r_{AB}} \tag{1}$$

1.1.2 点在坐标系中的位置

点在坐标系下的位置其实就是相对于坐标系 $\mathcal{A}$ 的原点 A 的向量，表示为 $\mathcal{A}\mathbf{r}$

笛卡尔坐标系

$$_{\mathcal{A}}\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x^{\mathcal{A}} + y\mathbf{e}_y^{\mathcal{A}} + z\mathbf{e}_z^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

柱坐标

$$\mathcal{A}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

球坐标

球坐标系统使用三个坐标：径向距离(r)、极角(ϕ)和方位角(θ)来描述一个点的位置。

径向距离(r): 表示点到原点的直线距离。

极角(ϕ): 是从正z轴向下到点所在位置的射线与z轴之间的角度。$\phi \in (0, \pi)$.

方位角(θ): 是从正x轴到点在xy平面上的投影与x轴之间的角度。

$$\mathcal{A}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

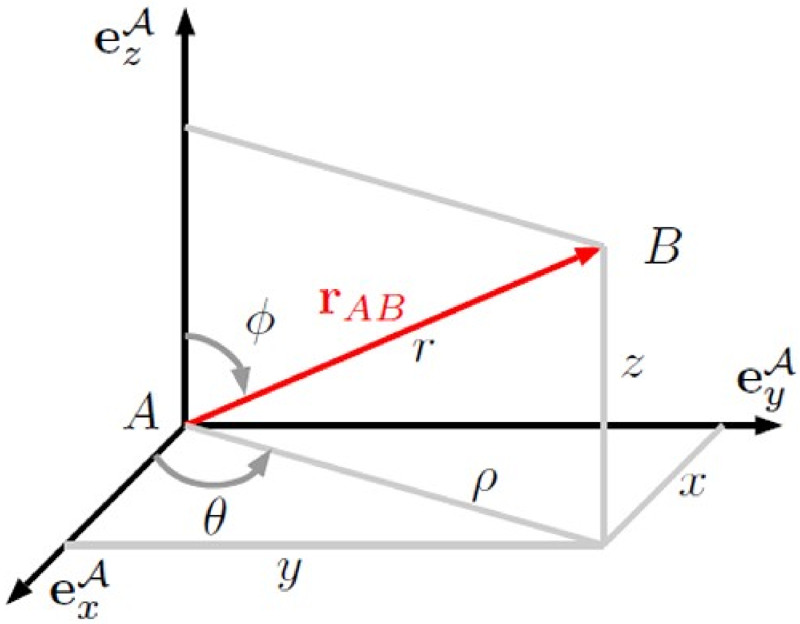

图 1: 使用笛卡尔、柱坐标和球坐标来表示位置

1.2 线速度

1.2.1 相对速度

点 B 相对于点 A 的速度为:

$$\dot{r}_{AB} \tag{5}$$

这里加点表示对时间的导数。
在三维空间中，速度由向量 $\dot{r} \in \mathbb{R}^3$ 表示。

1.2.2 线速度的表示

χ_P 表示位置的堆积参数。即，在笛卡尔坐标系下

$$\chi_{P_c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

在柱坐标系下

$$\chi_{P_z} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$$

在球坐标系下

$$\chi_{P_s} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

速度 $\dot{r}$ 和当前形式下位置的导数 $\dot{\chi}_P$ 之间存在线性映射关系 $E_P(\chi)$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{E}_P(\chi_P)\,\dot{\chi}_P \tag{6}$$

$$\dot{\chi}_P = \mathbf{E}_P^{-1}(\chi_P)\,\dot{\mathbf{r}} \tag{7}$$

笛卡尔坐标系

如果采样笛卡尔坐标系,映射关系 $\mathbf{E}_P(\chi)$ 只是简单的单位矩阵

$$\mathbf{E}_{P_c}\left(\boldsymbol{\chi}_{P_c}\right) = \mathbf{E}_{P_c}^{-1}\left(\boldsymbol{\chi}_{P_c}\right) = \mathbb{I} \tag{8}$$

柱坐标

$$\chi_{P_c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

从而

$$\dot{\chi}_{P_c} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbf{E}_P(\chi_P)\,\dot{\chi}_{Pz}$$

从而

$$\mathbf{E}_P^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta/\rho & cos\theta/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

球坐标

类似地

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{P_c} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\theta\sin\phi - r\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi \\ \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\ \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix}$$

从而

$$\mathbf{E}_{Ps} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\theta\sin\phi & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{Ps}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi \\ -\sin\theta/(r\sin\phi) & \cos\theta/(r\sin\phi) & 0 \\ (\cos\phi\cos\theta)/r & (\cos\phi\sin\theta)/r & -\sin\phi/r \end{pmatrix}$$