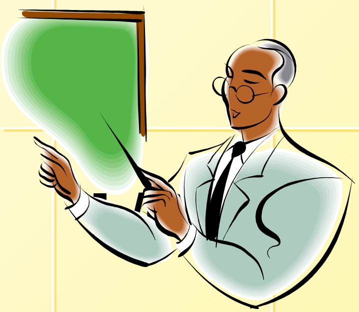
# 第六章

# 多元函数微分学

主讲教师：王玉兰

办公室：图书馆B626



高等数学（下）

# 第一节 多元函数的基本概念

**一、多元函数的概念**

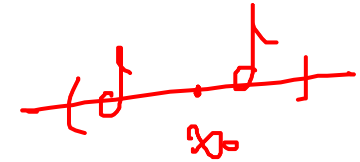
二、多元函数的极限

三、多元函数的连续性

四、小结　思考题

# 一、多元函数的概念

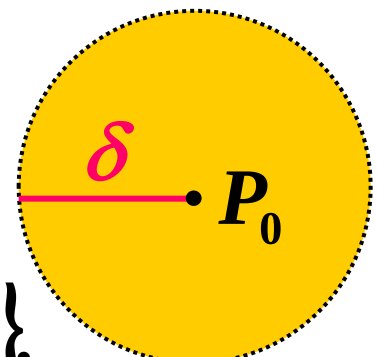
回忆一元函数




## （1）邻域

设$P_0(x_0, y_0)$是$xoy$平面上的一个点，$\delta$是某一正数，与点$P_0(x_0, y_0)$距离小于$\delta$的点$P(x, y)$的全体，称为点$P_0$的$\delta$邻域，记为$U(P_0, \delta)$.

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$




$$= \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}.$$

一元函数 $y=f(x)$

二元函数 $z=f(x,y)$

## （2）二元函数的定义

设$D$是平面上的一个点集，如果对于每个点$P(x,y)\in D$，变量$z$按照一定的法则总有确定的值和它相对应，则称$z$是变量$x,y$的二元函数，记为$z=f(x,y)$（或记为$z=f(P)$）.

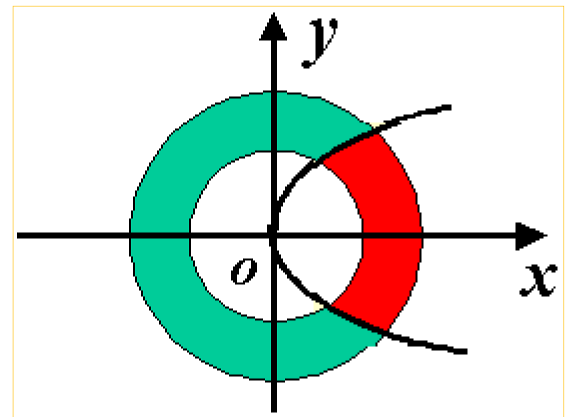
**类似地可定义三元及三元以上函数.**

当$n\geq 2$时，$n$元函数统称为多元函数.

多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.

**例1** 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域．

**解** $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$




$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

$x=y^2$

自变量

所求定义域为 $D=\{\underline{(x,y)}\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

(3) 二元函数的$z = f(x, y)$图形

设函数$z = f(x, y)$的定义域为$D$，对于任意取定的

$P(x, y) \in D$,对应的函数值为$z = f(x, y)$，这样，

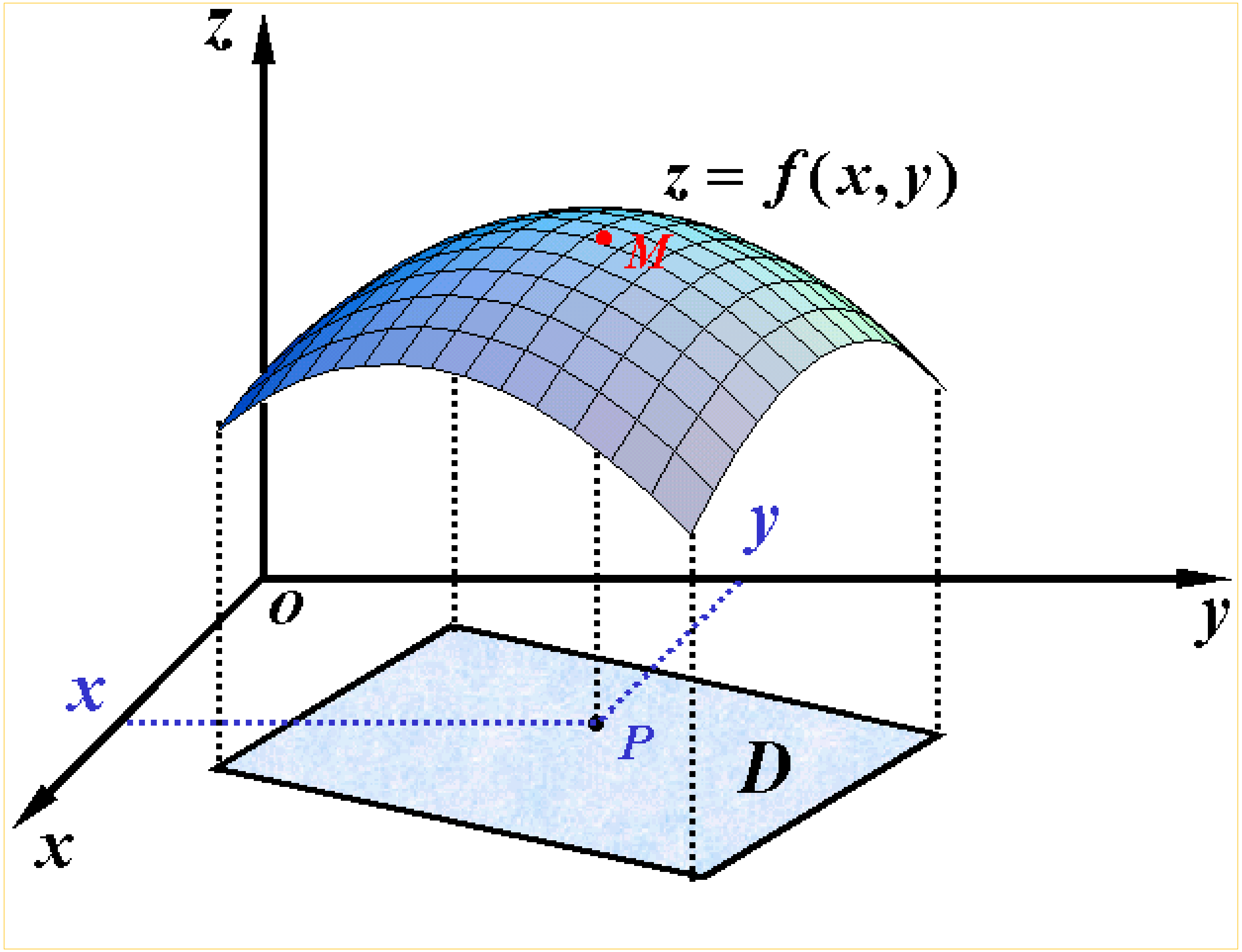
以$x$为横坐标，$y$为纵坐标，$z$为竖坐标在空间

就确定一点$M(x, y, z)$，当$x$取遍上$D$的一切点时，

得一个空间点集$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，

这个点集称为二元函数的图形。

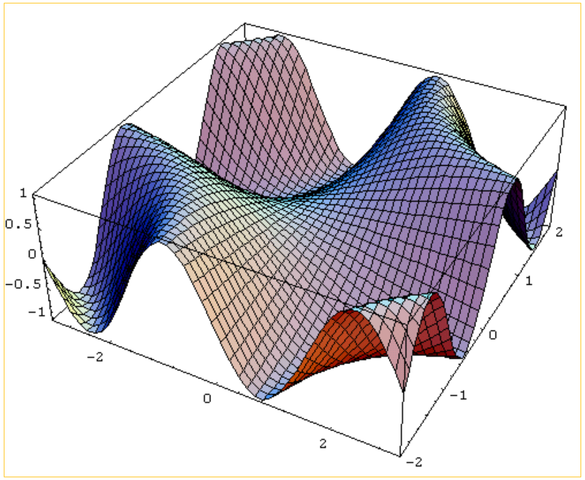
**（如下页图）**




二元函数的图形通常是一张曲面.

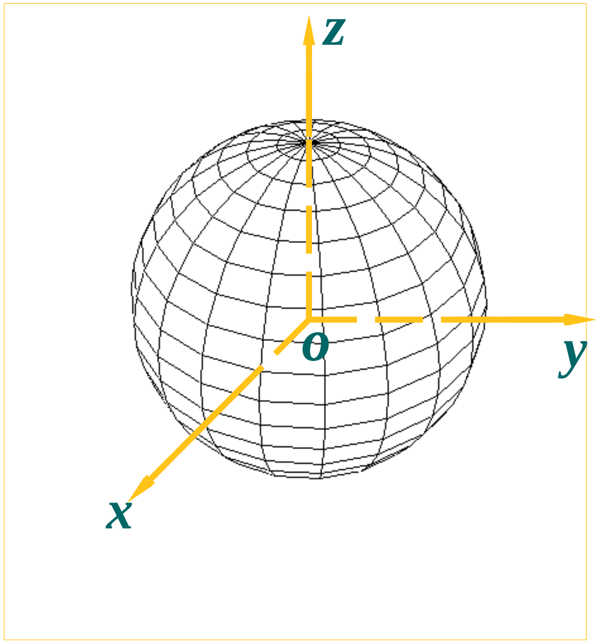
例如，$z=\sin xy$

图形如右图.




例如，$x^2+y^2+z^2=a^2$

左图球面.




$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}.$$

单值分支: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

# 二、多元函数的极限

## 定义1

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一去心领域内有定义，$P(x,y)$为该领域内任意一点，当$P(x,y)$为改领域内任意一点，当$P(x,y)$以任意方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$的值趋于一个确定的常数A，则称A是函数$z=f(x,y)$当$P(x,y)$趋于点$P_0(x_0,y_0)$的极限，记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)$

（或$f(x,y)\to A(\rho\to 0)$这里$\rho=|PP_0|$）。

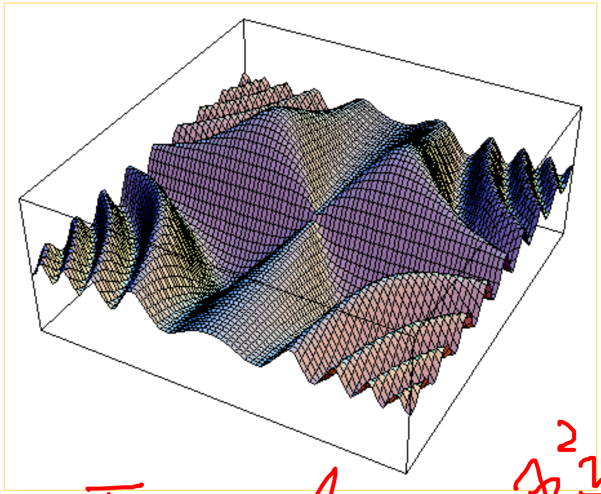
## 说明:

（1）定义中$P \to P_0$的方式是任意的;

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$;

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.



原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

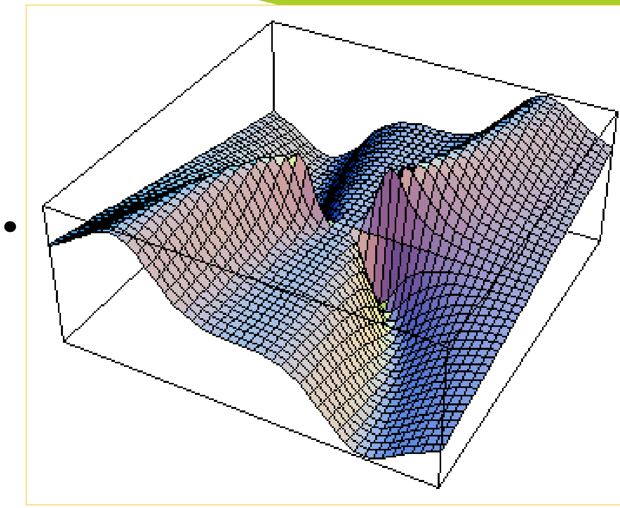
其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \xlongequal{u = x^2 y} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1,$

$$\underline{\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le \frac{1}{2}|x|} \xrightarrow{x\to 0} 0, \quad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$$

任意方式

"$\frac{0}{0}$"

例4 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$ 不存在．



证 取 $y = kx^3$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6} = \frac{k}{1+k^2},$$

其值随$k$的不同而变化，

故极限不存在．

令 $y = x^3$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6}{x^6+x^6} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

令 $y = 2x^3$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^6}{x^6+4x^6} = \dfrac{2}{5}$

# 确定极限不存在的方法：

(1) 令$P(x,y)$沿$y=kx$趋向于$P_0(x_0,y_0)$，

若极限值与$k$有关，则可断言极限不存在；

（2）找两种不同的趋近方式，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$存在，

但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点

$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在。

# 三、多元函数的连续性

**定义2** 设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一领域内有定义，当该领域内的点P$(x,y)$以任意方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$z=f(x,y)$的极限存在，且等于该函数在点$P_0(x_0,y_0)$处的函数值，即

极限值 = 函数值

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处连续。

# 闭区域上连续函数的性质

## （1）最大值和最小值定理

在有界闭区域D上的多元连续函数，
在D上至少取得它的最大值和最小值各一次.

## （2）介值定理

在有界闭区域D上的多元连续函数，
如果在D上取得两个不同的函数值，
则它在D上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

## （3）一致连续性定理

在有界闭区域D上的多元连续函数必定在D上一致连续.

多元初等函数：由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫多元初等函数.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

$(1+\square)^{\alpha}-1 \sim \alpha\square, \quad \square\to 0$

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 $P_0$ 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 $P_0$ 处连续，于是 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$. 替换公式

**例7** 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

$\sqrt{xy+1}-1=(1+xy)^{\frac{1}{2}}-1$

$\sim \frac{1}{2}xy$

**解** 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$

$=\dfrac{1}{2}$.

解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\frac{1}{2}xy}{xy}=\dfrac{1}{2}$

# 四、小结

1. 多元函数的定义
2. 多元函数极限的概念

（注意趋近方式的任意性）

3. 多元函数连续的概念
4. 闭区域上连续函数的性质

# 练 习 题

$t^2x^2+t^2y^2-t^2xy\tan\frac{x}{y}$

一、填空题:

1、若 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$，则 $f(tx,ty)=$ $t^2f(x,y)$

2、若 $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$，则 $f(2,-3)=$ $-\frac{13}{12}$；

$f(1,\frac{y}{x})=$ $f(x,y)$.

$\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2\cdot1\cdot\frac{y}{x}}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$

3. 令 $\frac{y}{x}=t$

3、若 $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}(y>0)$，则 $f(x)=$ $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

$=\frac{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$

4、若 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$ $x^2\frac{1-y}{1+y}$.

4. $\begin{cases}x+y=u\\ \frac{y}{x}=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=u\\ y=v\cdot x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{u}{1+v}\\ y=\frac{uv}{1+v}\end{cases}$

则 $f(u,v)=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\cdots$

5. 函数 $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1,\ y^2\le4x\}$.

6、函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域是$\{(x,y) \mid x\ge 0, y\ge 0, x^2\ge y\}$.

7、函数$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$的定义域是$\{(x,y) \mid -1\le \frac{y}{x}\le 1\}$.

$-1\le \frac{y}{x} \le 1$

8、函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$的间断点是$\{(x,y) \mid y^2=2x\}$.

二、求下列各极限:

1、$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

2、$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

3、$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

1. 解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{-xy}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}$

$= -\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{2+\sqrt{xy+4}}$

$= -\frac{1}{4}$

2 解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} y$

$=0$

$1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$

$\square\to0$

3. 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2y^2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2y^2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{xy}$

$=\infty$

# 练习题答案

一、 1、 $t^2 f(x,y)$；　　2、$-\frac{13}{12}$， $f(x,y)$；

3、 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$；　　4、 $x^2\frac{1-y}{1+y}$；

5、$\{(x,y)|0<x^2+y^2<1, y^2\le 4x\}$；

6、$\{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, x^2\ge y\}$；

7、$\{(x,y)|x>0, -x\le y\le x\}$

$\cup\{(x,y)|x<0, x\le y\le -x\}$；

8、$\{(x,y)|y^2-2x=0\}$.

二、1、$-\frac{1}{4}$；　　2、0；　　3、$+\infty$.

# 第二节　偏导数

0

**一、偏导数的定义及其计算法**

二、高阶偏导数

三、小结　思考题

# 一、偏导数的定义及其计算法

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

**定义：** 设函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$的某一领域内有定义

当$y$固定在$y_0$而$x$在$x_0$处有增量$\Delta x$时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$存在，

则称此极限为函数$z = f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$处对$x$的偏导数，

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或 } f_x(x_0,y_0).$$

同理可定义函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$y$的偏导数，为 固定不变 加有偏量

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

如果函数$z = f(x, y)$在区域内$D$任一点$(x, y)$处

对$x$的偏导数都存在，那么这个偏导数就是$x, y$的函数，

它就称为函数$z = f(x, y)$对自变量$x$的偏导数，

记作：$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x$或$f_x(x, y)$。 $z_x$ $\frac{\partial z}{\partial y}$

同理可定义函数$z = f(x, y)$对自变量$y$的偏导数，

记作：$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y$或$f_y(x, y)$。 $f_y$ $\frac{\partial z}{\partial x}$

偏导数的概念可以推广到二元以上函数

如 $u=f(x,y,z)$ 在 $(x,y,z)$ 处

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

例 1　求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$;　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$.

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times1+3\times2=8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\times1+2\times2=7.$$

例 2　设$z=x^{y}(x>0, x\neq 1)$，

求证 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$,　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{y}\ln x$,

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^{y}\ln x$$

$$=x^{y}+x^{y}=2z.$$

原结论成立.

**例 3** 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$（$R$为常数），求证：$\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p} = -1.$