无锡科技职业学院 基础部

高等数学

（一元微积分学讲义）

数学课程组

主编　师涛　边亚明

-

前　　言

近年来，发展现代职业教育，加快高素质、高技能人才培养已经成为增强我国核心竞争力和自主创新能力的重要举措。随着国家对高职教育重视程度的提高，社会对职业教育的认可度和接受度也在稳步提升，越来越多不同层次的学生走入了高职院校的课堂，这固然为高职教育的发展提供了新的机遇，但是，前所未有的多样化生源同时也对高职院校的教育教学提出了挑战。

高等数学作为高职院校一门重要的公共基础课程，同时也是社会众多行业所必需的一门工具课程。为了适应高职学生不同的学习水平和学习需求，我校数学课程组对教材和教法做了很多探索和研究。目前，高职学生根据学习基础和学习水平可以大致划分为三种类型：第一类学生初等数学知识储备不足，缺乏必备的数学技能；第二类学生以一般普高毕业学生为主，这部分学生具备基本的初等数学知识和数学技能，逻辑思维能力、抽象归纳能力有所欠缺；第三类学生则是少部分普高毕业生，他们初等数学知识扎实，数学技能熟练，具备一定的逻辑思维能力和抽象归纳能力。本讲义旨在面向这三类学生分别提供适合的学习内容。为此作了如下设置：

1. 在第一章中总结了高等数学学习所必备的初等数学内容和运算技巧，第一类学生可以先学习这部分内容，为后续高等数学的学习做好准备，第二类学生可根据情况选择性学习，第三类学生则可以将这部分内容作为资料库，查询所需公式定理。

2. 每一章内容均可按照学生需求选择不同的内容和教法。如作为工具性学习，可直接记忆公式和定理，进行习题训练；作为深入学习，可完整学习公式和定理来源和推导过程，这部分内容均采用楷体字，易于分辨。

3. 本讲义配备练习册一本，学生可在练习册完成后再选择性学习课后习题。部分课后习题有难度，均以“*”号标注，便于学生选择。

4. 部分内容为高等数学的经济应用，供经济类学生选择学习。

5. 本讲义涵盖一元微积分全部内容，亦可作为“专转本”教材使用。

-

讲义由师涛编写，边亚明参编并审校，毛圆洁负责配套练习册编写，吴群妹负责整理。无锡科技职业学院软件 2001 班张驰同学为本讲义提供了有价值的意见和建议，特此致谢！

由于时间仓促，编者水平有限，不可避免地存在不足之处，敬请读者指正！

编者

2021 年 9 月

-

目 录

-

第一章 基础知识

函数是高等数学的研究对象.本章总结性地回顾了一些初等数学知识，再以此为基础复习并扩充了函数的概念和性质，讨论了反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数.本章既是从初等数学到高等数学的过渡和衔接，也是高等数学学习的必备基础.

【学习建议】

1. 从“第一节集合”开始学习，复习中学初等数学知识，为高等数学学习打下坚实基础.
2. 如初等数学基础良好，亦可从“第三节 函数”开始学习.

【学习目标】

1. 会用集合、区间、邻域表示各种数集的方法,
2. 会化简和计算指数、对数、幂、三角等式子.
3. 会化简和计算简单代数式.
4. 理解函数的概念，会求函数的定义域，了解基本初等函数和初等函数的概念.
5. 熟悉五类基本初等函数的性质和图形.

第一节 集合

一. 集合的概念

集合，简称集，是数学中最原始的概念之一.在现实世界中常会遇到一些集合，例如某学校的全体学生、所有自然数的全体等等.

一般地，集合是具有某种共同属性的事物的全体，或者一些确定的具体的对象的汇总.构成集合的这些事物或对象称为**元素**.

集合通常用大写字母A、B、C……表示；

元素通常用小写字母：a、b、c……表示.

若元素a是集合A中的元素，则称a属于A，记作：$a \in A$；否则，若元素a不是集合A中的元素，则称a不属于A，记作：$a \notin A$.

有限个元素构成的集合称为**有限集**；无限多个元素构成的集合称为**无限集**.

一个给定的集合，其元素必须是确定的.也就是说，某个元素是否属于某个集合，这是可以确定的，“是”或“不是”，二者必居其一且仅居其一.

一个给定的集合，其元素必然是互不相同的.也就是说，集合中的元素不会重复出现.

集合中的元素之间没有顺序的区别，例如$\{a,b,c,d\}$与$\{a,c,b,d\}$是同一个集合.

所有研究对象构成的集合称为**全集**，也称为相对全集，记为U.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

二．集合的表示

1. 列举法：将集合的所有元素一一列举出来，用“{ }”括起来.

例如：小于 5 的正整数构成的集合可以用列举法表示为：$\{1,2,3,4,5\}$.

2. 描述法：将具有共同属性$P(x)$的所有元素x构成的集合表示为：$\{x|P(x)\}$.

例如：全体偶数构成的集合 A，用描述法表示为：$A=\{x|x=2n,n\text{是整数}\}$.

三．常见数学集合

1. 数集

在数学中，自然数集记为$\mathbf{N}$；正整数集记为$\mathbf{N}^+$；整数集记为$\mathbf{Z}$；有理数集记为$\mathbf{Q}$；实数集记为$\mathbf{R}$.

数集的几何直观是数轴上的点集，有序实数对组成的集合的几何直观是直角坐标平面内的点集.

2. 区间

数集也可以用区间表示.

区间是数学中常用的术语和符号. 设a,b是两个实数，且$a<b$，规定

区间		表示集合
有限区间	闭区间$[a,b]$	$\{x\|a\le x\le b\}$
	开区间(a,b)	$\{x\|a<x<b\}$
	左开区间$(a,b]$	$\{x\|a<x\le b\}$
	右开区间$[a,b)$	$\{x\|a\le x<b\}$
无限区间	$(a,+\infty)$	$\{x\|x>a\}$
	$[a,+\infty)$	$\{x\|x\ge a\}$
	$(-\infty,b)$	$\{x\|x<b\}$
	$(-\infty,b]$	$\{x\|x\le b\}$
	$(-\infty,+\infty)$	$\mathbf{R}$

3. 邻域

邻域是一个特殊的小的开区间，其特殊之处在于它以某点x_0为中心左右对称. 区间端点到中心x_0的距离称为**半径**，记作δ.

如图 1-1，以x_0为中心，以δ为半径的**邻域**，记作$U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$.其中$(x_0-\delta,x_0)$称为$x_0$的**左邻域**，$(x_0,x_0+\delta)$称为$x_0$的**右邻域**.

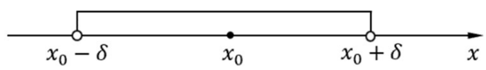


图 1-1

邻域主要用来刻画点x_0的左右“附近”区域. 有时我们并不关注“近”的程度，也就是说，δ的具体数值并不重要，则邻域$U(x_0,\delta)$简记作$U(x_0)$，表示以x_0为中心的某个邻域.

在$U(x_0)$中挖去中心x_0，就得到了x_0的**去心邻域**$\mathring{U}(x_0)$，即

$$\mathring{U}(x_0)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

四．集合间的关系

若集合A的每个元素都是集合B的元素，则称A为B的**子集**. 记作$A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作“A包含于B”（或“B包含于A”）.

特别地，若$A\subseteq B$，且存在元素$b\in B$且$b\notin A$，则称集合A是集合B的**真子集**，记作$A\subset B$（或 $B\supset A$）, 读作“A真包含于B”（或“B真包含于A”）.

若$A\subseteq B$ 且$B\subseteq A$ ，则集合A的任一元素都是集合B的元素，集合B的任一元素也都是集合A的元素，称**集合A与集合B相等**，记作$A=B$.

以下结论是明显的：空集是任一集合的子集；空集是任一非空集合的真子集. 任一集合都是全集的子集；任一集合（不是全集）都是全集的真子集.

五．集合的基本运算

1. 集合的并

由所有属于集合A或属于集合B的元素构成的集合，称为集合A和集合B的**并集**，记作$A\cup B$，读作“A并B”，即$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$.

集合的并有如下运算性质：

（1） $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$

（2） 对任一集合A，有$A\cup\varnothing=A$，$A\cup \mathrm{U}=U$，$A\cup \mathrm{A}=A$

2. 集合的交

由所有属于集合A且属于集合B的元素构成的集合，称为集合A和集合B的**交集**，记作$A\cap B$，读作“A交B”，即$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$.

集合的交有如下运算性质：

（1） $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

（2） 对任一集合A，有$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap \mathrm{U}=A$，$A\cap \mathrm{A}=A$

3. 集合的差

由所有属于集合A且不属于集合B的元素构成的集合，称为集合A和集合B的**差集**，记作$A-B$，即$A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}$.

例如：设集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，集合$B=\{2,4,6\}$，则集合$A-B=\{1,3,5\}$.

4. 集合的补

全集U中所有不属于A的元素构成的集合称为A的**补集**，记作$\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x|x\in U且x\notin A\}.$$

集合的补有运算性质：$A\cup\complement_U A=U$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$.

-

习题 1.1

1.分别用区间和邻域表示：

(1)以1为中心，以0.1为半径的邻域.　　(2)以0为中心，2为半径的去心邻域.

2.设$A=\{x|1<x<4, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x|x<0\ \text{或} x>2, x\in\mathbf{R}\right\}$，求$A\cup B, A\cap B, A-B$.

3. 用区间表示下列数集：

(1) $\{x|-\infty<x<2, x\in\mathbf{R}\}$.　　(2)$\{x|2\le x<-\infty, x\in\mathbf{R}\}$.

(3)$\{x|-3<x\le 3, x\in\mathbf{R}\}$.　　(4)$\{x|1\le x\le 2, x\in\mathbf{R}\}$.

第二节 代数运算和三角运算

一．多项式运算

1. 常用公式

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ，　　　　$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$，

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ ．

2. 多项式的因式分解

（1）提取公因式法

若一个多项式的各项含有公因式，可以把公因式提取出来，将多项式化为两个因式的乘积.

例 分解因式 $x - 2x^2 + 3x^3 - 6x^4$．

解　$x - 2x^2 + 3x^3 - 6x^4 = x(1-2x) + 3x^3(1-2x) = (x+3x^2)(1-2x)$．

（2）公式法

逆用完全平方公式、平方差公式，以及立方和与立方差公式，可以将一些多项公式分解因式.

例 分解因式 $x^4 - 16$．

解　$x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)(x+2)(x-2)$．

例 分解因式 $-x^2 - a^2 + 2ax + 4$．

解　
$$-x^2 - a^2 + 2ax + 4 = 4 - (x^2 - 2ax + a^2) = 4 - (x-a)^2 = (2+x-a)(2-x+a).$$

（3）十字相乘法

多项式$mx^2 + px + q$，若$ab = m$，$cd = q$，且$ac + bd = p$，则多项式可因式分解为$(ax+d)(bx+c)$.

例 分解因式 $x^2 + 3x - 4$．

解 $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$．

例 分解因式 $2x^2 + 3x - 2$．

解 $2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)(x+2)$．

（4）求根法

令多项式$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$，根据求根公式得$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，则

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2).$$

例 分解因式 $x^2 + \sqrt{3}x - 6$．

解 令$x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$，则

$$x_1=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\sqrt{3}，x_2=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{3}^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=-2\sqrt{3}.$$

因此，$x^2+\sqrt{3}x-6=\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)$.

二. 分式运算

1. 裂项相消

公式：$\dfrac{1}{n(n+m)}=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+m}\right)$.

例 化简$\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}$.

解 $$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)=\frac{2}{x(x+4)}.$$

2. 拆项凑整

例 化简$\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}-\dfrac{x^2-5x+5}{x^2-5x+6}$.

解 $$\frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}-\frac{x^2-5x+7}{x^2-5x+6}=\frac{(x^2-3x+2)+1}{x^2-3x+2}-\frac{(x^2-5x+6)-1}{x^2-5x+6}$$
$$=\left[1+\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right]-\left[1-\frac{1}{(x-2)(x-3)}\right]$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{(x-1)(x-3)}.$$

3. 无理分式有理化

例 化简$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$.

解 $$\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{(x+1)-x}=x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$$

三. 指数运算

1. 规定

(1) $a^0=1\ (a\neq 0)$.

(2)当$a\neq 0$时，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\quad(n\in\mathbf{N}^+)$.

(3)当$a>0$时，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad\left(m、n\in\mathbf{N}_+，且\dfrac{m}{n}为既约真分数\right)$.

2. 指数运算法则

(1) $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.　　(2) $(a^\alpha)^\beta=(a^\beta)^\alpha=a^{\alpha\beta}$.　　(3) $(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$.

例 计算或化简(a，b都是正数)：

(1) $8^{\frac{2}{3}}$.　　(2) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.　　(3) $\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^6$.　　(4) $\sqrt[3]{\left(\frac{27a^{-3}}{125b^3}\right)^2}$.

解 (1)$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$.　　(2) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}$.

(3) $\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^6=\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^6\left(b^{\frac{5}{6}}\right)^6=a^{-2}b^5$.

(4) $\sqrt[3]{\left(\frac{27a^{-3}}{125b^3}\right)^2}=\left(\frac{3^3a^{-3}}{5^3b^3}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{(3^3)^{\frac{2}{3}}\cdot(a^{-3})^{\frac{2}{3}}}{(5)^{\frac{2}{3}\cdot}(b^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2^2\cdot a^{-2}}{5^2\cdot b^2}=\frac{4}{25a^2b^2}$.

四．对数运算

1. 定义

若$a^b=N(a>0,a\neq1)$，那么称b是以a为底的对数，记作$\log_aN=b$ $(a>0,a\neq1,N>0)$，其中a称为**底数**（简称底），正数N称为**真数**.

$a^b=N$称为指数式，$\log_aN=b$称为对数式.

特别地，$\log_eN$记作$\ln N$，称为**自然对数**.

【请注意】

根据对数的定义，显然有结论$(a>0,a\neq1)$：

① 0和负数没有对数.　② $\log_a1=0$.　③$\log_aa=1$.　④ $a=b^{\log_ba}$.

例 将下列指数式写成对数式，对数式写成指数式：

(1) $5^{-3}=\frac{1}{125.}$　　(2) $8^{\frac{1}{3}}=2$.　　(3) $\log_216=4$.　　(4) $\lg\frac{1}{100}=-2$.

解 (1) $\log_5\frac{1}{125}=-3$.　　(3) $\log_82=\frac{1}{3}$.　　(4) $2^4=16$.　　(5) $10^{-2}=\frac{1}{100}$.

2. 对数运算法则

当$a>0,a\neq1,M>0,N>0$时，有

(1) $\log_a(M\cdot N)=\log_aM+\log_aN$.　　$\ln(M\cdot N)=\ln M+\ln N$.

(2) $\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$.　　$\ln\frac{M}{N}=\ln M-\ln N$.

(3) $\log_aM^n=n\log_aM$.　　$\ln M^n=n\ln M$.

3. 换底公式

(1)当$a>0,b>0,a\neq1,b\neq1,N>0$ 时，$\log_aN=\frac{\log_bN}{\log_ba}$.

(2) $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$.

这一公式在高等数学中经常用到，例如：$2^{f(x)}=e^{f(x)\ln2}$.

-

例 计算

(1) $\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.　　　　　(2) $\ln3+\ln\dfrac{1}{27}+\ln3^3-\ln e$.

解 (1) $\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}\ln e=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\ln3+\ln\dfrac{1}{27}+\ln3^2-\ln e=\ln\left(3\cdot\dfrac{1}{27}\cdot3^2\right)-1=\ln1-1=0-1=-1$.

五．三角运算

1. 认识六种三角运算

如图 1-2，α是从Ox到OP的任意角，$\boldsymbol{P(x,y)}$是α终边上不与原点重合的任意一点，P与原点的距离 $|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，则

正弦 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$ ，　余弦 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，

正切 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$，　余切 $\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$，

正割 $\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$ ，　余割 $\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$.

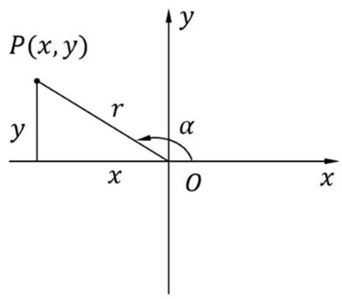


图 1-2

2. 特殊角的三角函数值

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$\cot x$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

2. 常用公式

平方关系：$\sin^2x+\cos^2x=1$.　$1+\tan^2x=\sec^2x$.　$1+\cot^2x=\csc^2x$.

倒数关系：$\tan x\cdot\cot x=1$.　$\sin x\cdot\csc x=1$.　$\cos x\cdot\sec x=1$.

商的关系：$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ，　$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

诱导公式：$\sin(-x)=-\sin x.$　　$\cos(-x)=\cos x.$

$\tan(-x)=-\tan x.$　　$\cot(-x)=-\cot x$.

半角公式：$\sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$ ，　　$\cos^2x=\dfrac{1+\cos2x}{2}$.

倍角公式：$\sin 2x = 2\sin x\cos x$． $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

积化和差：$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$．

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)].$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)].$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

例 证明$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$.

证 $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos^2 x}{(1-\sin x)\cos x} = \frac{1-\sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$.

例 已知 $\sin x = \frac{2}{3}$，$0 < x < \frac{\pi}{2}$，求 $\cos x$、$\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 的值.

解 因为 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，所以 $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$，则

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3\sqrt{5}}{5}. \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{3}{2}.$$

六．绝对值

1. 绝对值的性质：

(1) $|a| = \sqrt{a^2}$.　(2) $|a| \geq 0$，仅当$a = 0$ 时$|a| = 0$.　(3) $|-a| = |a|$.

(4) $-|a| \leq a \leq |a|$.　(5) $|a+b| \leq |a| + |b|$.　(6) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

(7) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.　(8) $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$ $(a \neq 0)$.

2. 绝对值不等式

若$a > 0$，那么

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{或} x < -a.$$

例 解不等式$|3x+2| < 1$

解 原不等式等价于$-1 < 3x+2 < 1$，解得

$$-1 < x < -\frac{1}{3}.$$

故原不等式的解集为$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

-

例 解不等式$|x-3|\geq 2$

解　原不等式等价于$x-3\geq 2$.　　①

或　　$x-3\leq -2$.　　②

解不等式①得　　$x\geq 5$.

解不等式②得　　$x\leq 1$.

因此原不等式的解集为　　$(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$.

习题 1.2

1.　分解因式：

(1) x^2-6x+9.　　(2) x^2-x-2.

(3)x^3-2x^2-8x.　　(4) $x^2+3x-10$.

2.化简下列式子：

(1)$\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.　　(2) $\dfrac{b^2}{2a-b}+\dfrac{4a^2}{b-2a}$.　　(3)$\dfrac{x^4}{x^2+1}$.

3.分母（分子）有理化：

(1)$\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$.　　(2)$\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x}}{x-1}$.　　(3)$\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

4.化简或计算：

(1) $9^{-\frac{3}{2}}$.　　(2) $\log_{16}4$.　　(3) $\log_4 16$.

(4) $\left(\dfrac{2a^{-3}b^3}{4a^{-2}b^2}\right)^{-2}\cdot(2ab)^2$.　　(5) $a\sqrt{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a}$.　　(6) $\ln2+\ln\dfrac{1}{8}+\ln4$.

5.将下列指数式换为以e为底的指数式：

(1) 3^{2x}.　　(2)　x^x.　　(3) $f(x)^{g(x)}$.

6. 已知 $\cos x=\dfrac{1}{3}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 求 $\cos x$、$\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 的值.

7. 证明：(1) $\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\csc^2 x-\sec^2 x$.　　(2)$\dfrac{1}{1+\cos 2x}=\dfrac{1}{2}\sec^2 x$.

8.解不等式：　(1)　$|2x-1|<3$.　　(2)$|x+2|\geq -1$.

第三节 函数

一．函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1 设x和y是两个变量，D是一个给定的非空数集，若对于D中每个数x，变量y按照对应法则f总有唯一确定的数值与x对应，则称y是数集D上的x的**函数**，记作$y=f(x)$. 数集D称为这个函数的**定义域**. x称为**自变量**，y称为**因变量**.

当x取遍D中一切数时，与x相对应的y的值组成的数集$M=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**.

当自变量x在其定义域D内取一个确定的值x_0时，对应的$f(x_0)$称为**函数值**，记作

$$f(x_0)\text{或}f(x)|_{x=x_0}.$$

【请注意】

①在函数定义中，对每一个x的值，若总有唯一确定的y值与x对应，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数. 在本书中，如无特别说明，函数均指单值函数.

②函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素. 定义域和对应法则相同的两个函数，是相同的函数.

例如：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$和函数$g(x)=x+1$ 定义域不同，所以它们是两个不同的函数.

又如：$f(x)=\sqrt[3]{x^3}$和$g(x)=x$定义域都是$\mathbf{R}$，且对应法则相同，它们是两个相同的函数.

又如：函数$f(x)=x^3+1$和函数$g(t)=t^3+1$的定义域都是$\mathbf{R}$，对应法则也相同，它们是两个相同的函数.

③求函数定义域是高等数学学习最基本的运算技能之一. 一般地，函数的定义域是使函数解析式有意义的所有实数组成的集合. 但在实际问题中，函数的定义域则由实际意义确定.

例如：函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1,1]$.

又如：圆面积函数$A(r)=\pi r^2$的定义域是$(0,+\infty)$.

2. 函数的图形

平面上的点集(x,y)构成函数$y=f(x)$的图形.

函数的图形是函数的一种直观表达，有助于帮助我们理解和把握函数性态. 数学家华罗庚曾经说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，割裂分家万分休。”在高等数学的学习中，尤其应当重视对一些基本的函数图形的记忆和理解.

二．函数的性质

1. 单调性

定义 1.2 设函数$y=f(x)$在区间I内有定义，对于I内任意两点x_1、x_2，$x_1<x_2$，若有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在I内**单调增加**，称区间I为函数$f(x)$的**单调递增区间**；若有$f(x_1)>f(x_2)$. 则称$f(x)$在I内**单调减少**，称区间I为函数$f(x)$的**单调递减区间**.

几何特征：在区间I内的单调增函数图形沿x轴正向不断上升，单调减函数的图形沿x轴正向不断下降.

2. 奇偶性

定义 1.3 函数$y=f(x)$的定义域D_f关于坐标原点对称，对于任意的$x\in D_f$，若有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**；若有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**.

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数.

几何特征：奇函数的图像关于坐标原点对称，偶函数的图像关于y轴对称.

3. 周期性

定义 1.4 设函数$y=f(x)$定义域为D，若存在一个不为零的正数L，使得任意$x\in D$，有$x+L\in D$，且$f(x+L)=f(x)$恒成立. 则称$f(x)$为**周期函数**，称L为$f(x)$的一个周期.

周期函数的周期有无穷多个，若其中存在一个最小的正数T，则称T为这个周期函数的**最小正周期**，简称**周期**.

例如：函数$y=\sin x$的周期是2π，函数$y=\tan x$的周期是π.

4. 有界性

定义 1.5 设函数$y=f(x)$在区间Ｉ上有定义，若存在一个正数M，对任意$x\in I$，函数值$f(x)$均满足$|f(x)|\le M$，则称函数$y=f(x)$是I上的**有界函数**. 若不存在这样的正数M，则称函数$y=f(x)$是Ｉ上的**无界函数**.

例如：$y=\sin x$在整个定义域$\mathbf{R}$上是有界的，因为存在正数$M=1$，对任意$x\in\mathbf{R}$, 都有$|\sin x\le 1|$.

几何特征：区间I上的有界函数的图形，在I上的部分介于两条平行线$y=\pm M$之间.

例如：如图 1-3，$y=\sin x$的图形介于$y=1$和$y=-1$之间.

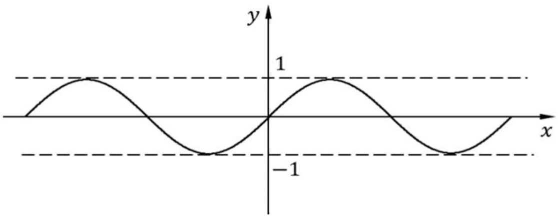


图 1-3

【请注意】

有的函数在定义域上无界，但是可能在某个区间上有界.

例如：$y=x^2$在定义域$\mathbf{R}$上是无界的，但是在区间$(0,1)$是有界的.

三. 反函数

1. 反函数的定义

定义 1.6 设$y=f(x)$的定义域D，值域为M，若对于任意$y\in M$，都可以找到唯一一个$x\in D$，按照关系式$f(x)=y$与y对应，那么就确定了一个将x看作因变量，y看作自变量的新函数，称为直接函数$y=f(x)$的**反函数**，记作$x=f^{-1}(y)$，其定义域为M，值域为D.

习惯上以x表示函数的自变量，y表示函数的因变量，所以，习惯上将函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$记作$y=f^{-1}(x)$.

例如：指数函数$y=a^x(a>0,a\neq 1)$与对数函数$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$互为反函数.

几何特征：直接函数与它的反函数的图像关于直线$y=x$对称（如图 1-3）.

事实上，直接函数$y=f(x)$和它的反函数$x=f^{-1}(y)$表示的是变量x和y之间的同一关系，因此，他们的图形是同一条曲线. 而$y=f^{-1}(x)$是$x=f^{-1}(y)$交换x、y得到的，因此$y=f^{-1}(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图形关于直线$y=x$对称，也就是说，$y=f^{-1}(x)$与$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$对称.

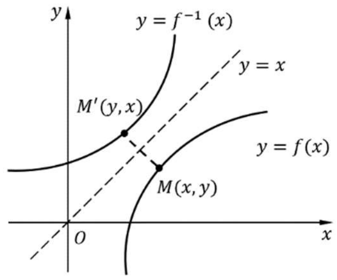


图 1-4

【想一想】

若某函数在区间I上是单调增加（或减少）的，则它在区间I上存在反函数，且反函数也是单调增加（减少）的.为什么？

例 求$y=\dfrac{2x-1}{2}$的反函数.

解 因为$y=\dfrac{2x-1}{2}$在其定义域 R 内是单调函数，所以存在反函数. 由$y=\dfrac{2x-1}{2}$解得$x=\dfrac{2y+1}{2}$，$y\in \mathrm{R}$，于是$y=\dfrac{2x-1}{2}$的反函数是$y=\dfrac{2x+1}{2},x\in R$.

2. 反三角函数

根据反函数的定义，若函数有反函数，则x和y的取值一定是一一对应的. 有些函数虽然不满足这一条件，但是可以通过限制函数定义域，保证自变量和因变量之间的一一对应.

例如：正弦函数$y=\sin x$定义域为$\mathbf{R}$，值域为$[-1,1]$，对于任意$x\in R$，都有唯一的$y\in[-1,1]$与之对应，但是对于任意$y\in[-1,1]$，却有无穷多个$x\in R$与之对应. 因此，$y=\sin x$在定义域 **R**上没有反函数. 若限制正弦函数$y=\sin x$的定义域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，则$y=\sin x$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$存在反函数.

类似地，我们定义正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数在指定区间上的反函数：

(1)正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$存在反函数，称为**反正弦函数**，记作$y=\arcsin x$. 其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)余弦函数$y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数称为**反余弦函数**，记作$y=\arccos x$. 其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$.

(3)正切函数$y=\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的反函数称**为反正切函数**，记作$y=\arctan x$. 其定义域为$\mathbf{R}$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(4)余切函数$y=\cot x$在$(0,\pi)$内的反函数称为**反余切函数**，记作$y=\operatorname{arccot} x$. 其定义域为$\mathbf{R}$，值域为$(0,\pi)$.

根据反函数的定义和几何特征可以作出反三角函数的图形并推测其性质（见表 1-1 基本初等函数）.

例 计算

(1)$\arcsin\frac{1}{2}$.　　　　(2)$\operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

解 (1)在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，故 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

(2)在$(0,\pi)$内，$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

四. 复合函数

定义 1.7 设函数$y=f(u)$以y为因变量，u为自变量，函数$u=g(x)$以u为因变量，x为自变量，且$y=f(u)$的定义域和$u=g(x)$的值域的交集非空，那么通过**中间变量**u，y与x建立了函数关系，称为函数$y=f(u)$和$u=g(x)$的复合函数，记作

$$y=f[g(x)]\quad x\in D\ .$$

例如：函数$y=\ln u$和函数$u=1+x^2$可以复合成函数$y=\ln(1+x^2)$.

有的复合函数可能有不止一个中间变量. 例如： 函数$y=2^u$和函数$u=\sqrt{v}$、$v=x^2-1$可以复合成函数$y=2^{\sqrt{x^2-1}}$.

【请注意】

① 复合函数并非一种新的函数类型，而是函数的一种构成方式.

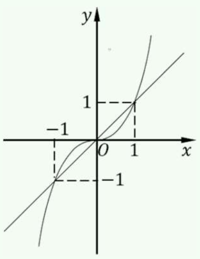
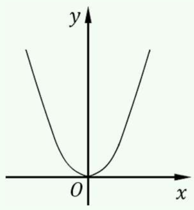
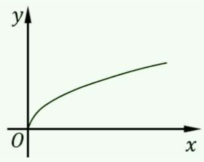
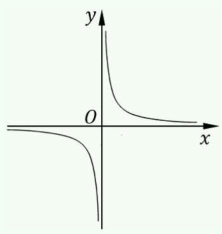
②不是任意两个函数都可以复合的.

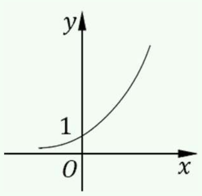
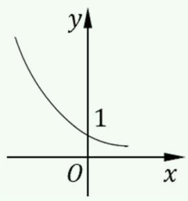
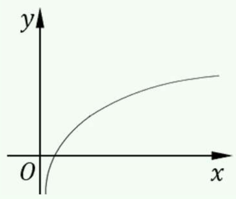
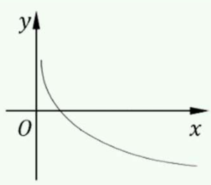
例如：$y=\arcsin u$和$u=x^2+3$，因为函数$y=\arcsin u$的定义域是$-1\le u\le 1$，而$x^2+3\ge 3$，超出了函数$y=\arcsin u$的定义域.

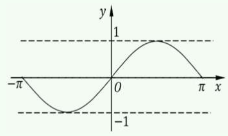
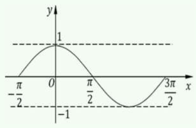
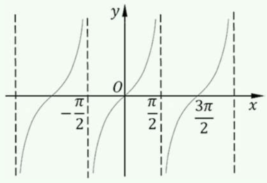
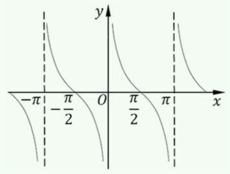
五. 基本初等函数

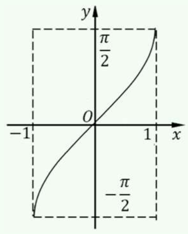
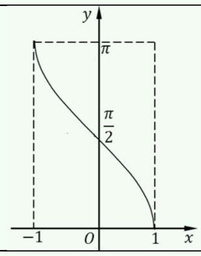
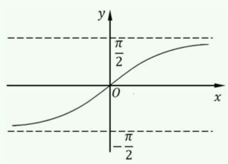
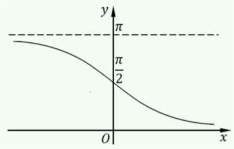
幂函数$y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbf{R})$、指数函数$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$、对数函数$y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$、三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x$，$y=\csc x$和反三角函数$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot}x$.统称为**基本初等函数**. 高等数学以函数为研究对象，而基本初等函数又是构成函数的最基本的因素，因此，一定要熟练掌握五种基本初等函数的定义域、值域、性质及图形（见表 1-1）.

表 1-1　基本初等函数

类型	幂函数$y=x^{\mu}$			
函数	$y=x$ $y=x^3$	$y=x^2$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图形				
定义域	**R**	**R**	**R**	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	**R**	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
单调性	单调增	在$(-\infty,0)$单调减 在$[0,+\infty)$单调增	单调增	在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内分别单调减
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶函数	奇函数

类型	指数函数$y=a^{x}$		对数函数$y=\log_{a}x$	
函数	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图形				
定义域	**R**	**R**	$(\mathbf{0},+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	**R**	$[0,+\infty)$	**R**	**R**
单调性	单调增	在$(-\infty,0)$单调减 在$[0,+\infty)$单调增	单调增	在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内分别单调减

类型		三角函数			
函数		$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图形					
定义域		$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\left(\mathrm{k}\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $k\in\mathbf{Z}$	$(\mathrm{k}\pi,(k+1)\pi)$ $k\in\mathbf{Z}$
值域		$[-1,1]$	$[-1,1)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
单调性	单调增	$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ $k\in\mathbf{Z}$	$(2k\pi-\pi,2k\pi)$ $k\in\mathbf{Z}$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $k\in\mathbf{Z}$	无
	单调减	$(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ $k\in\mathbf{Z}$	$(2k\pi,2k\pi+\pi)$ $k\in\mathbf{Z}$	无	$(k\pi,k\pi+\pi)$ $k\in\mathbf{Z}$
奇偶性		奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性		$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
有界性		有界	有界		

类型	反三角函数			
函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\mathrm{arccot}\, x$
图形				
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
奇偶性	奇函数 $\sin(\arcsin x)=x$, $\arcsin(-x)=\arcsin x$.	非奇非偶函数 $\cos(\arccos x)=x$. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.	奇函数 $\tan(\arctan x)=x$, $\arctan(-x)=\arctan x$.	非奇非偶函数 $\cot(\mathrm{arccot} x)=x$, $\mathrm{arccot}(-x)=\pi-\mathrm{arccot} x$.

六. 初等函数

定义 1.8 常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合构成的、能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如：$y=\sqrt{\sin x}$、$y=\arctan(x^2+1)$ 、$y=\dfrac{\ln x-x}{x^2+1}$ …… 都是初等函数.

高等数学中讨论的大多数函数都是初等函数. 不是初等函数的函数，称为非初等函数. 大多数**分段函数**（用多个式子分段表示的函数）都是非初等函数.

【请注意】

分段函数是一个函数，不是几个函数. 分段函数的定义域，等于各段定义区间的并集.

例如：符号函数$sgnx=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$, 定义域$D=\mathbf{R}$, 值域$M=\{-1,0,1\}$, 符号函数不是初等函数 .

又如：函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$也不是初等函数.

习题 1. 3

1.求下列函数的定义域：

(1)$y=\arcsin(x-1)$.　　(2) $y=\arctan\dfrac{1}{x-1}+\ln x$.

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.　　(4) $y=\begin{cases}2x & -2\le x<1\\ \sqrt{x-1} & 1\le x<2\end{cases}$.

2.判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=(1-x^2)\cos x$.　　(2)$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.　　(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$.

3.计算：

(1)arctan1.　　(2)$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.　　(3) $\arcsin(-1)$.　　(4) $\operatorname{arccot}0$.

4. 已知$f(x)=\begin{cases}\arcsin x & -1\le x<0\\ x+1 & 0\le x<2\end{cases}$，求$f(0)$、$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$f(1)$、$f(x^2)$.

5. 已知$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求$f(x^2)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

6*. 求$y=\dfrac{1+x}{1-x}$的反函数.

第二章 极限与连续

极限是高等数学研究函数的重要工具和基本方法.极限理论是微积分学的基本理论，为微积分学奠定了严密的逻辑基础，使微积分学形成了完整的体系.本章介绍函数极限的概念以及极限运算方法，并运用极限方法讨论了函数的连续性.

【学习建议】

若仅将极限作为运算工具，可以先记忆基本极限公式，直接从“第二节极限的计算”开始学习.

【学习目标】

1.理解函数极限和数列极限的概念.

2.会用极限的四则运算法则计算极限.

3.理解无穷小和无穷大的概念，会用无穷小的性质、无穷小和无穷大的关系计算函数极限.

4.会用两个重要极限计算函数极限.

5.会用等价无穷小的替换计算极限.函数.

6.理解函数连续的概念.

7.会使用函数的连续性求解函数极限.

第一节 极限的概念

一. 函数极限

1. 自变量$x \to a$时，函数$f(x)$的极限

为考察函数$f(x)=x-1$在点$x=1$附近函数值的变化情况，在表 2-1 中列出自变量x的取值和相应的函数值：

x	0.9	1.1	0.99	1.01	0.999	1.001	0.9999	1.0001	⋯
y	-0.1	0.1	-0.01	0.01	-0.001	0.001	-0.0001	0.0001	⋯

表 2-1

观察$f(x)=x-1$的自变量和函数值，我们发现当自变量x的值无限接近1时，函数值y随之向常数0无限趋近.用数学语言将这种变化趋势描述为：当$x \to 1$时，函数$x-1 \to 0$.称为“当x无限趋近于1时，函数$x-1$的极限为0”，记作$\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$.

定义2.1 设函数$f(x)$在点a的某个去心邻域有定义，当自变量x无限接近于常数a，即$x \to a$时，若函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x \to a$时的**极限**，

记作$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

在上述定义中，$x\to a$表示x从大于a的方向和小于a的方向无限接近于a，若x仅从大于a的方向趋近于a，记作$x\to a^{+}$，若x仅从小于a的方向无限接近于a，记作$x\to a^{-}$.

定义 2.2 设函数$f(x)$在点a的某个左邻域有定义，当$x\to a^{-}$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to a^{-}$(或$x\to a^{+}$)时的**左极限**（或**右极限**），记作

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=A. \quad 或f(a-0)=A.$$

定义 2.3 设函数$f(x)$在点a的右侧邻近有定义，当$x\to a^{+}$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to a^{+}$时的右极限，记作

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=A. \quad 或f(a+0)=A.$$

定理 2.1 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)$和$\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)$都存在并且相等，即

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to a^{-}} f(x)=\lim_{x\to a^{+}} f(x)=A.$$

【请注意】

函数$f(x)$当$x\to a$时的极限，是指自变量x充分接近a时函数值$f(x)$的变化趋势，与函数在点a的函数值无关.

2. 自变量$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

定义 2.4 当自变量x的绝对值$|x|$无限接增大，即$x\to\infty$时，若函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

定义 2.5 当$x\to-\infty$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to-\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

定义 2.6 当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

定理 2.2 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在并且相等，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.,$$

二．一些基本初等函数的极限

与列表观察函数值相比，观察函数图形可以更加方便地判断出函数值的变化趋势，从而判断函数的极限.

例如：如图 2-1，当 x 从 0 的右侧沿着 x 轴向 0 无限趋近时，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$的图形沿同向不断上升. 可见，函数值有无限增大的趋势，但是并没有向某个确定常数不断靠近.

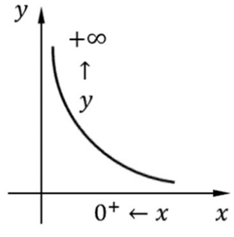


图 2-1

因此，当$x \to 0^+$时$\frac{1}{x}$的极限是不存在的.但是习惯上仍然沿用极限的用语和符号，称$x \to 0^+$时$\frac{1}{x}$的极限是∞，记作$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.这仅仅是为了体现函数这种无限增大的趋势，而不是说$x \to 0^+$时$\frac{1}{x}$的极限是存在的.

类似地：

当x从 0 的左侧沿着x轴向 0 无限趋近时，有$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

当x从 0 的两侧沿着x轴向 0 无限趋近时，函数$\frac{1}{x}$的绝对值无限增大，记作$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

【划重点】

以下列出基本初等函数的部分常用极限式，这些极限式都可以通过观察函数的图形得到. 它们是今后进行各种复杂极限计算的基础，必须熟练掌握：

(1) $\lim\limits_{x \to a} C = C$，$\lim\limits_{x \to \infty} C = C$.

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$，$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(3)当$a > 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$，$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$.

当 $0 < a < 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$，$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$.

(4)当$x \to \infty$时，$y = \sin x$、$y = \cos x$、$y = \tan x$、$y = \cot x$不存在极限.

(5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$，$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$，$\lim\limits_{x \to 0^-} \cot x = -\infty$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \cot x = +\infty$.

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$.

三. 数列极限

无穷数列$\{x_n\}$： x_1，x_2，x_3，……，x_n，……，其每一项的值都与正整数n依次对应，因此也称为整标函数，自变量为项数n，因变量为各项的值x_n，定义域为$\mathbf{Z}^+$. 即：

$$f(n) = x_n .$$

定义 2.7 若无穷数列$f(n) = x_n$的项数n无限增大时，x_n无限趋近于一个确定的常数A，则称**数列$f(n) = x_n$收敛于A**，或称A为数列$f(n) = x_n$的**极限**，记作$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$.

若数列$f(n) = x_n$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**.

无穷数列是一种特殊的函数，因此，函数极限的计算方法也同样适用于无穷数列极限的计算. 与一般函数不同的是，无穷数列作为函数的自变量n具有实际意义，即无穷数列的

项数，这一实际意义决定了n只能取正整数，因此，自变量n的变化过程只有一种：$n \to +\infty$，通常简写为$n \to \infty$.

例 观察下列数列在$n \to \infty$时的变化趋势，若极限存在，推测其极限：

(1) $1，\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{3}，\ldots，\dfrac{1}{n}，\ldots$.　　(2) $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\ldots,(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n},\ldots$.

(3) $1，-1，1，-1,\ldots，(-1)^{n+1}，\ldots$.　　(4) $1，1，1，\ldots，1，\ldots$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=0$.

(3)数列$\{(-1)^{n+1}\}$发散 .　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

习题 2. 1

1.观察函数图形判断极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(x+1)$.　(2) $\lim\limits_{x\to0}x^2$.　(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x$.

2.根据基本极限公式判断：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x$.　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.　(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$.　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\pi$.　(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.　(7)* $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}$.　(8)* $\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}$.

3.观察下列数列在$n \to \infty$时的变化趋势，若极限存在，求出极限：

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$　　(2) $1,-2,\dfrac{1}{3},-4,\cdots,\dfrac{1}{2n-1},-2n,\cdots$

(3) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$　　(4) $3,5,5,5,5,5,\cdots$

4.作出函数$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le0\\ x+1 & x>0\end{cases}$的图形，观察图形判断$f(0-0)$和$f(0+0)$的值.

第二节 极限的计算

一．初等函数在定义区间内一点x_0处的极限

定理 2.3 若$y=f(x)$是定义在区间I上的初等函数，且$x_0\in I$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

【请注意】

①定理 2.3 在学习了函数的连续性以后才能得到证明，现在我们先利用这一结论解决一些求极限问题.

②即使今后学习了更多求极限的方法，对于初等函数$f(x)$的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，仍应首先试求函数值$f(x_0)$，若能求出，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，若无法求出，也能够判断出极限类型以便采取合适的方法解决.

例 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2-1}$.　(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x$.　(3) $\lim\limits_{x\to -1}\arccos x$.　(4) $\lim\limits_{x\to 1}e^{2x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2-1}=\sqrt[3]{3^2-1}=2$.　(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\arccos x=\arccos(-1)=\pi$.　(4) $\lim\limits_{x\to 1}e^{2x}=e^2$.

二. 分段函数在分段点的极限

1.分段点两侧函数表达式不同的分段函数.

这种分段函数的自变量通常以”>”、”<”、“=”，或”⩾”、”⩽”分段. 计算它在分段点的极限时，应先分别计算分段点的左极限和右极限，再根据定理 2.1 判断分段点处极限是否存在.

例 设函数$f(x)=\begin{cases}x-1 & x>1\\ \ln x & x\le 1\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=\ln 1=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$，即

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=0.$$

所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

例 已知符号函数$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，即

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x\ne\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x.$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$不存在.

2.分段点两侧表达式相同的分段函数.

这种分段函数的自变量通常以“≠”和“=”分段，计算函数在分段点处的极限时不需要分别讨论左极限和右极限.

例 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，$f(x)$在点$x=0$是否存在极限？

解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.所以$f(x)$在点$x=0$不存在极限.

三．极限的四则运算法则

为方便起见，我们引入记号$\lim f(x)$，表示自变量的任意变化过程下的极限，且在同一问题中出现的所有极限式，都在同样的自变量变化过程之下.

定理 2.4 若$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

推论 1 $\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$.

推论 2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

(3)$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

极限的四则运算法则表明，极限运算可以和四则运算交换运算次序.

例 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+1)$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.　　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x+1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=\lim\limits_{x\to 2}(2x^2)-\lim\limits_{x\to 2}(3x)+\lim\limits_{x\to 2}1$

$$=2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-3\cdot 2+1=3.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right)=(2-0)\cdot(1+0)=2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x}x+\lim\limits_{x\to 1}1}=\dfrac{5}{2}$.

例 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

分析 这两个极限的共同点是：在自变量的变化过程下分母和分子的极限都为零，因此不能直接用极限的四则运算法则求解，应当先消去零因子，再用极限的四则运算法则.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=2.$$

四. 无穷小和无穷大

1. 无穷小

（1）无穷小的定义

定义 2.8 若在自变量的某一变化过程中，函数$f(x)$的极限为 0，则称函数$f(x)$是这一自变量变化过程中的无穷小.

例如：$\lim\limits_{x\to -\infty}2^x=0$，故函数$2^x$是当$x\to -\infty$时的无穷小.

又如：$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，故函数$x-1$当$x\to 1$时是无穷小.

【请注意】

① 判断某函数是否无穷小的前提是指明函数自变量的变化过程.

② 无穷小是函数，而不是“很小的数”.

③ 常数 0 是唯一可以作为无穷小的常数.

（2）无穷小的性质

同一自变量变化过程中的无穷小具有如下性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和是无穷小；

性质 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1　常数和无穷小的乘积时无穷小

推论 2　有限个无穷小的乘积是无穷小.

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，且 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$，　　故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

【请注意】

两个无穷小的商不一定是无穷小. 两个无穷小的商的极限，可能是零，可能是非零数，也可能不存在，因此称之为“$\dfrac{0}{0}$”型未定式.

【想一想】

我们前面已经见过一些“$\frac{0}{0}$”型未定式，还记得它们是如何计算的吗？

2. 无穷大

（1）无穷大的定义

定义 2.9 若在自变量的某一变化过程中，函数$f(x)$的极限为∞（或$+\infty$、$-\infty$），则称函数$f(x)$是这一自变量变化过程中的**无穷大**（或**正无穷大**、**负无穷大**）.

例如：$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$，故函数$2^x$是当$x\to+\infty$时的正无穷大.

又如：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$，故函数 $\tan x$当$x\to\frac{\pi^+}{2}$时是负无穷大.

又如：$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，故函数$\frac{1}{x}$是当$x\to0$时的无穷大.

【请注意】

① 判断某函数是否无穷大的前提是指明函数自变量的变化过程；

② 无穷大是函数，而不是“很大的数”.

③ 任何常数都不是无穷大.

（2）无穷大的性质

同一自变量变化过程中的无穷大具有如下性质：

性质 1 有限个无穷大的乘积是无穷大；

性质 2 有界函数与无穷大的和是无穷大.

推论 常数与无穷大的和是无穷大.

3. 无穷大和无穷小的关系

定理2.5 若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim\frac{1}{f(x)}=0$. 反之，若 $\lim f(x)=0$，且$f(x)\neq0$，则

$$\lim\frac{1}{f(x)}=0.$$

利用无穷小和无穷大的概念、性质，以及二者之间的关系可以求解极限问题.

例 求极限$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x^2-2x+1}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+1)=0$，所以$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x^2-2x+1}=\infty$.

例 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x+3)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x+3}=\infty$.

例 求极限 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3+1}\right)$.

分析 这是两个无穷大的差的极限，称为“$\infty-\infty$”型未定式.

解 $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{(x-1)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1.$$

例 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{2x^2+x+1}$.　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-2}{3x^2-2x-1}$.　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-3}{2x^2-x+1}$.

分析 这是两个无穷大的商的极限，称为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式.

解 (1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=0.$$

(3)因为 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to1}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-3}{2x^2-x+1}=\infty$.

【划重点】

一般地，当$a_0\neq0$，$b_0\neq0$，$m\in\mathbf{N}^+$，$n\in\mathbf{N}^+$时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n.\\ 0\ , & m<n.\\ \infty\ , & m>n.\end{cases}$$

4.函数极限和无穷小的关系

定理 2.6 在自变量的同一变化过程中，

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,$$

其中A为常数，α是同一自变量变化过程中的无穷小，即$\lim\alpha=0$.

这一定理是函数极限的重要结论之一，具有重要的理论意义，例如极限四则运算法则等定理，都以该定理作为主要依据.

5. 无穷小的比较

自变量同一变化过程中，无穷小的和、差、积都是无穷小，但是两个无穷小的商却不

一定，因此，两个无穷小的商的极限称为$\frac{0}{0}$**型未定式**，其结果反映了作为分子和分母的无穷小趋近于 0 的“快慢”程度不同.

例如：当$x\to 0$时，函数$f(x)=2x$、$f(x)=3x$、$f(x)=x^2$都是无穷小， 则

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty$，说明分子 $2x$比分母x^2趋向于 0 的速度“慢”.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0$，说明分子$x^2$比分母 $3x$趋向于 0 的速度“快”.

定义 2.10 设α、β是同一自变量变化过程中的无穷小，即$\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$，$\beta\neq 0$.

(1)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称在此自变量变化过程中$\alpha$是$\beta$的**高阶无穷小**，或称$\beta$是$\alpha$的低阶无穷小，记作$\alpha=o(\beta)$.

(2)若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\left(A\neq 0，A为常数\right)$，则称在此自变量变化过程中$\alpha$与$\beta$是**同阶无穷小**.

特别地，若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，则称在此自变量变化过程中$\alpha$与$\beta$是**等价无穷小**，记作$\alpha\sim\beta$.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0$, 即当$x\to 0$ 时, x^2是比 $2x$高阶的无穷小, 或 $2x$是比x^2低阶的无穷小.

又如：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，即当$x\to 1$ 时，x^2-1 和$x-1$ 是同阶无穷小.

又如：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=1$, 即当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n(n+1)}$和$\frac{1}{n^2}$是等价无穷小.

6．等价无穷小的替换

定理 2.7（等价无穷小替换） 设α、β、α'、β'是自变量同一变化过程中的无穷小，$\alpha\sim\beta$，$\alpha'\sim\beta'$，且自变量同一变化过程中的极限 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

【划重点】

①等价无穷小只能用于替换乘积的因子部分，不能替换加减的项的部分.

②用等价无穷小的替换求极限简捷高效，熟练掌握这种方法的前提是熟记以下常用等价无穷小（α是自变量某个变化过程中的无穷小，即$\lim\alpha=0$）：

$\sin\alpha\sim\alpha$，$\tan\alpha\sim\alpha$，$\arcsin\alpha\sim\alpha$，$\arctan\alpha\sim\alpha$，$1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$，$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$，

$e^{\alpha}-1\sim\alpha$，$(1+\alpha)^{\mu}-1\sim\mu\alpha$.

例 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$.

解 因为当$x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$\tan 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}.$$

例 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

解 因为当$x\to\infty$时，$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$，所以

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}=1.$$

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)^2}$.

解 因为当$x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\ln(1+x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\frac{1}{4}.$$

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$

五．两个重要极限

1. 第一个重要极限.

观察函数$\frac{\sin x}{x}$的图像发现，随着自变量x从 0 的两侧向 0 充分接近，函数无限趋近于常数 1（如图 2-2），即

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

这个极限式称为**第一个重要极限.**

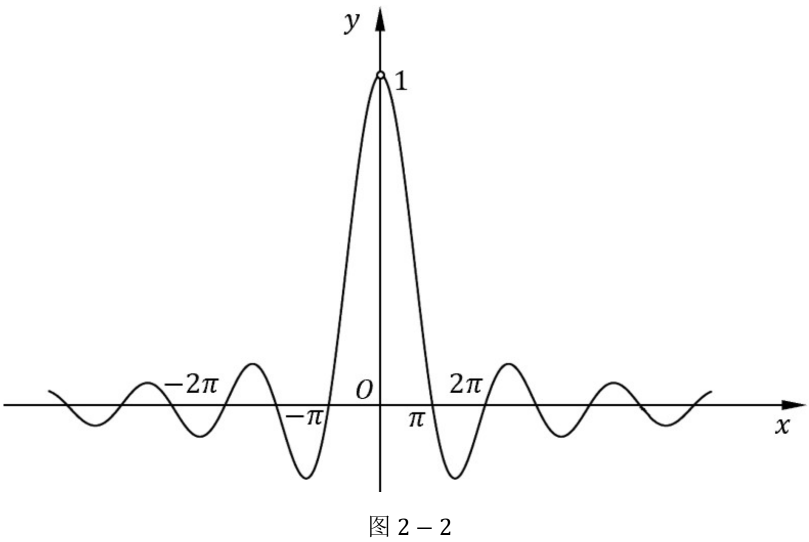


图 2－2

第一个重要极限在形式上具有特点：

①极限式是$\frac{0}{0}$型未定式.

② 极限式中出现三角函数.

根据这两个特点，可以将第一个重要极限推广为：若 $\lim\varphi(x)=0$，则

$$\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$$

例 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$

例 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$

例 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$.

解 设 $\arctan x=t$，则$x=\tan t$，当$x\to0$时，$t\to0$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to0}\cos t=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot1=1.$$

2. 第二个重要极限

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}.$$

第二个重要极限形式上具有如下特点：

① 极限式中的函数是幂指函数(形如$f(x)^{g(x)}$).

② 极限是1^∞型未定式.

③ 括号内是两项之和，第一项是 1，第二项和括号外的指数互为倒数.

求极限的式子若满足这三个特点，通常都可以用第二个重要极限求解.

根据这三个特点，还可以得到第二个重要极限的变形：

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e},$$

以及第二个重要极限的推广形式：

$$\lim\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e\ \ (\lim\varphi(x)=\infty).$$

$$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e\ \ (\lim\varphi(x)=0).$$

例 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^{2}$.

例 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$.

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=e^{2}$.

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{-1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-1}=e\cdot 1=e.$$

习题 2.2

1.已知$f(x)=\begin{cases}\cos x & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，当$x\to 0$时$f(x)$的极限是否存在？

2. 已知$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x) & x<0\\ \dfrac{1}{x}\sin x & x\geq 0\end{cases}$，当$x\to 0$ 时$f(x)$的极限是否存在？

3. 判断下列各题是无穷小还是无穷大：

(1) $x\sin x\ (x\to 0)$.　(2) $2^{x-1}\ (x\to\infty)$.　(3) $\ln|x|\ (x\to 0)$.

(4) $\dfrac{x^2+1}{x-1}\ (x\to 1)$.　(5)* $3^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$.　(6)* $\dfrac{\sin n}{n+1}\ (n\to+\infty)$.

4.计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-1}{x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{3x^3-1}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-1}$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{10}(2x+1)^{15}}{(4x-3)^{25}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x}}{x-1}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

(11) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x\sin x-\sec x)$.

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$.

(14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{2x-4}$.

(15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan^2 x}{\sin x^2}$.

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n}$.

(17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

(19) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

(20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x}$.

(21) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\sec x+1}$.

(22) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t-1}\right)^{t}$.

(23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\arctan x}$.

(24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{e^{x-1}-1}$.

(25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\tan x}-1\right)}{\ln(1+x^2)}$.

(26)* $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\tan\dfrac{x}{2^n}\,(x\neq0)$.

(27)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x+1}$.

(28)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+x^2}{\tan 3x}$.

(29)* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$.

(30)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$.

5*. 已知$f(x)=x^3$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

第三节　函数的连续性

现实世界中很多运动变化都是连续的，如气温随着昼夜更替的波动，生物随着岁月流逝的成熟，车辆随着道路延伸的行进……用数学语言描述出这些变化，就是函数的连续性.

一．函数在点$x=x_0$处的连续和间断

1．函数$y=f(x)$在点$x=x_0$连续的定义

例 如图 2-3,观察函数的图形，判断它们在点x_0处是否连续.

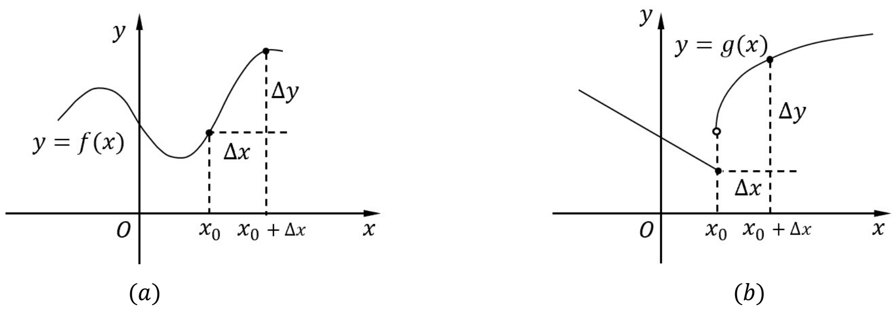


图 2-3

从几何直观上看，在图(a)中，函数$f(x)$在点x_0是连续的，图(b)中函数$g(x)$在点x_0处不连续.为了探究这种区别的原因，我们分别考察这两个函数在点x_0附近的变化情况.

若$f(x)$在点x_0取得一个微小的改变量——通俗地说，就是函数的自变量从x_0变成了$x_0+\Delta x$，其中Δx就是自变量的改变量，称为自变量增量，而自变量的改变又必然会引起函数值的改变，称为**函数增量**，记作Δy. 观察图 2-3 就会发现，在图(a)中，当Δx趋于 0时，相应的Δy也趋于 0. 在图(b)中，Δy则不能趋于 0.

定义 2.11 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域有定义，若当自变量x在点x_0的增量Δx趋于 0 时，函数增量Δy也趋于 0，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$连续.

定义 2.11 表明，变量的连续变化是一种“渐变”：当自变量的变化很微小时，函数值的变化也很微小.

【请注意】

自变量增量是一个变量，可以为正也可以为负.

若记$x=x_0+\Delta x$，则$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$. 于是$\Delta x\to 0$即$x\to x_0$，$\Delta y\to 0$即$f(x)-f(x_0)\to 0$，亦即$f(x)\to f(x_0)$.因此，函数$f(x)$在点$x_0$处连续的定义也可叙述为：

定义 2. 12 设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$**连续**.

特别地，设函数$y=f(x)$在点x_0的某左邻域（或右邻域）有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称函数$y=f(x)$在点$x_0$**左连续**（或**右连续**）.

若函数$f(x)$在点x_0连续，则称x_0为函数$f(x)$的连续点. 否则称x_0为$f(x)$的**间断点**.

【想一想】

左连续和右连续也可用定义 2.11 的形式写出，应该怎么写?

根据定义 2.12，若函数$f(x)$在点$x = x_0$处连续，则$f(x)$在点$x = x_0$处的极限一定存在，反之则不然.

【划重点】

判断函数$f(x)$在一点x_0处的连续性，通常分为三个步骤：

①求函数值$f(x_0)$.

②求极限值$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$（若$f(x)$是分段函数，应分别求$f(x)$在点$x_0$的左极限和右极限）.

③比较$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$和$f(x_0)$是否相等.

例　讨论函数$f(x) = |x|$在点$x = 0$的连续性.

解　$f(x) = |x|$即$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \le 0 \end{cases}$，因为$f(0) = 0$，且$f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0^-}(-x) = 0$，$f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$，即$f(0-0) = f(0+0) = f(0)$，所以$f(x) = |x|$在点$x = 0$处连续.

例 讨论函数$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$在点$x = 1$ 的连续性.

解 因为$\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$，但$f(0)$不存在，所以$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$在点$x = 1$处不连续.

2. 函数的间断点

函数$f(x)$在点x_0连续需要同时满足三个条件：函数在点x_0的某邻域有定义、极限值存在，函数值和极限值相等。如果三个条件中的任意一条不满足，点x_0就是$f(x)$的间断点.

例 讨论函数$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在点$x = 0$ 的连续性.

解 因为$f(0) = 0$，且$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$，即$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \ne f(0)$，所以$x = 0$ 是函数$f(x)$的间断点（如图 2-4）.

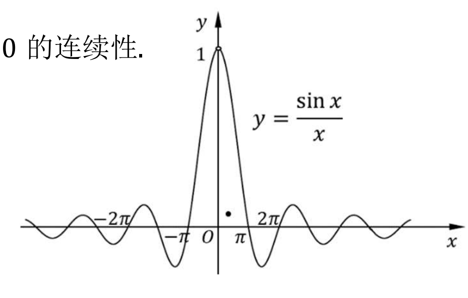


图 2-4

像这样，$f(x)$在点$x = x_0$处的左极限和右极限都存在，但是因为极限值和函数值不相等，所以$x = x_0$是函数$f(x)$的间断点，称$x = x_0$为$f(x)$的**第一类间断点**.

若$x = x_0$是$f(x)$的**第一类间断点**，且$f(x)$在点$x = x_0$处左极限和右极限相等，称$x = x_0$为$f(x)$的为**可去间断点**.

例 函数$f(x)=\begin{cases}\ln x & x\geq 1\\ x+1 & x<1\end{cases}$ 在点$x=1$的连续性.

解 因为$f(1)=\ln 1=0$，且

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\ln x=0,$$

所以点$x=1$是函数$f(x)$的第一类间断点（如图 2-5）.

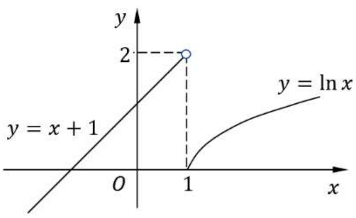


图 2-5

像这样，$x=x_0$是$f(x)$的第一类间断点，即$f(x)$在点$x=x_0$处的左极限和右极限都存在但是不相等，则称$x=x_0$为$f(x)$的为**跳跃间断点**.

例 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在点$x=0$ 的连续性.

解 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以函数$f(x)$在点$x=1$ 是间断的.

像这样，$f(x)$在点$x=x_0$处的左极限和右极限至少有一个不存在，则称$x=x_0$为$f(x)$的**第二类间断点**，上例中当$x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$，这样的第二类间断点称为**无穷间断点**.

例 讨论函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在点$x=0$ 的连续性.

解 $f(x)$在$x=0$ 无定义，当$x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以在点$x=1$ 是函数$f(x)$的第二类间断点.

当$x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$在 1 和 -1 之间无限次振荡.像这样的第二类间断点称为**振荡间断点**.

【划重点】

判断函数$f(x)$间断点类型的流程如图 2-6 所示：

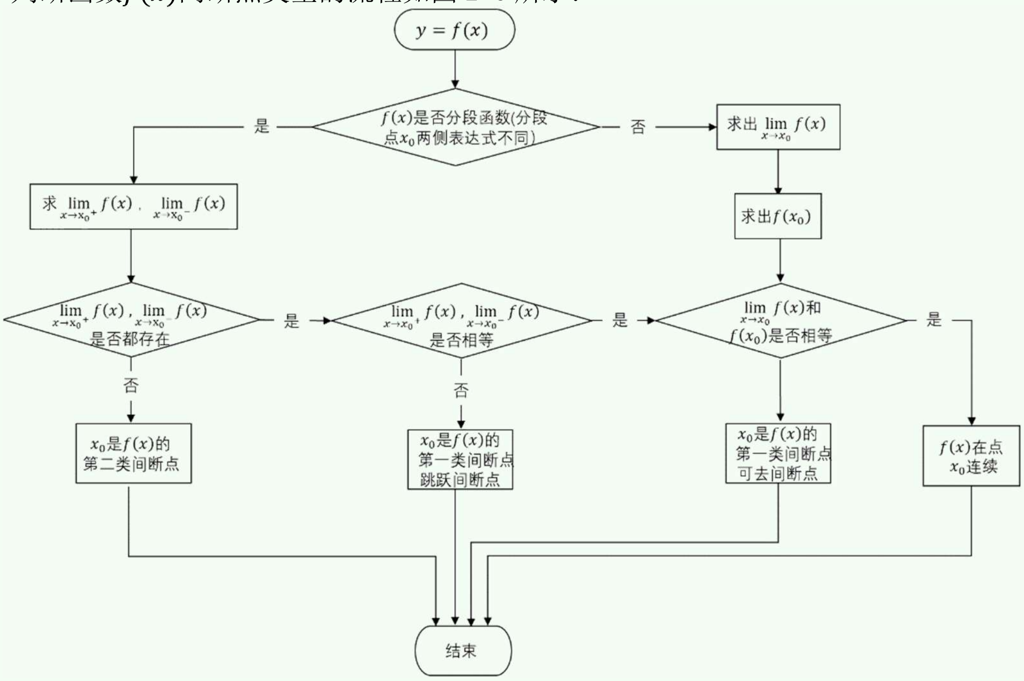


图 2-6

二．连续函数及其运算

1. 函数在区间的连续

定义 2.13 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续，则称函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，或称函数$f(x)$为区间(a,b)内的连续函数. 称(a,b)为函数$f(x)$的连续区间.

若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在左端点a处右连续，在右端点a处左连续，则称函数$f(x)$闭区间$[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续不间断的曲线. 基本初等函数在其定义域内的图形都是一条连续不间断的曲线，所以**基本初等函数和常数函数在其定义域内都是连续的**，基本初等函数的连续区间就是它们的定义域.

例如：函数$y=\ln x$的连续区间是$(0,+\infty)$.

又如：函数$y=\tan x$的连续区间是$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\ \ (k\in\mathbf{Z})$.

利用连续性的定义可以证明，**有限个连续函数的和、差、积、商（分母不为零）、复合仍然是连续函数**，而初等函数就是由基本初等函数和常数函数经过有限次四则运算和复合运算得到的，因此，**初等函数在其定义区间内都是连续的**.

讨论函数的连续性，应指出函数的连续区间，若函数有间断点，还应指出间断点的类型. 一般来说，初等函数的间断点是函数没有定义的点，分段函数的间断点有可能是分段点.

例 讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$的连续性.

解 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$，其定义域为$(-\infty,-3)\cup(-3,2)\cup(2,+\infty)$，所以$f(x)$在区间$(-\infty,-3)$、$(-3,2)$、$(2,+\infty)$连续，$x=-3$，$x=2$ 是它的间断点.

在点$x=-3$ 处，因为$\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\infty$，所以$x=-3$ 是$f(x)$的第二类间断点.

在点$x=2$ 处，因为$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{4}{5}$，且$f(2)$不存在，所以$x=2$ 是$f(x)$的第一类间断点，是可去间断点.

2．利用函数连续性计算函数极限

在初等函数连续性的讨论过程中，可以得到两个极限计算的重要方法.

1. **复合函数的极限运算和函数运算可以交换顺序**，即$\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]$.

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

2. **初等函数在定义区间内任一点处的极限值等于该点处的函数值.** 即：

若函数$y=f(x)$是初等函数，且点x_0是其定义区间内的一点，那么$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(x_0)$.

我们已经多次应用这一结论求初等函数的极限，现在我们知道，其理论依据就是初等函数在定义区间内的连续性.

三．闭区间上连续函数的性质

在纸上画出两个高度不同的点：A和B，现在，由A点出发，“笔不离纸“地画一条曲线，笔尖可以在纸上任意“行走”，但是画出来的曲线最终必须结束于B点. 想象一下，这条曲线能画多高？又能画多低？能不能无限地高上去？或者无限地低下去？显然是不行的，无论这条曲线画到多高或者多低，因为必须结束于B点，所以它一定存在着一个最高点和一个最低点.

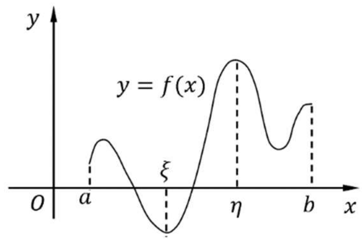


图 2-7

如图 2-7，将上述结论数学化，就得到了闭区间上的最大值和最小值定理.

定理 2.8 (最大值和最小值定理) 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，那么$f(x)$在$[a,b]$上一定能取到最大值和最小值.

注意，定理中“闭区间”和“连续”这两个条件缺一不可.

例如：如图 2-8，函数$y=x$在开区间$(0,1)$内连续，但是不存在最大值和最小值；在开区间$(-1,1)$内连续，在$x=0$取得最小值，但是无法在$(-1,1)$内取得最大值.

又如：如图 2-9，函数$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 0 & x=1\\ x-2 & 1<x\le 2\end{cases}$，在闭区间$[a,b]$上有间断点$x=0$，不存在最大值和最小值.

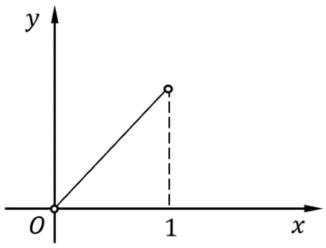


图 2-8

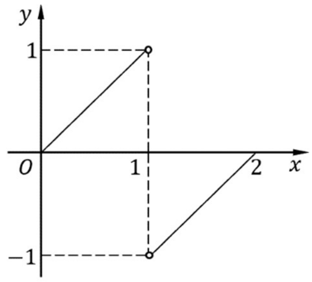


图 2-9

接下来，我们做另外一个画线游戏：在纸上画出两个高度不同的点：A和B，然后在A、B之间画一条水平直线，现在，画一条曲线将A、B两点连接起来，这条曲线是任意的，但是在画的过程中必须做到“笔不离纸“，你会发现，这条曲线和水平直线之间必然至少相交一次——这就是介值定理的几何直观（如图 2-10）.

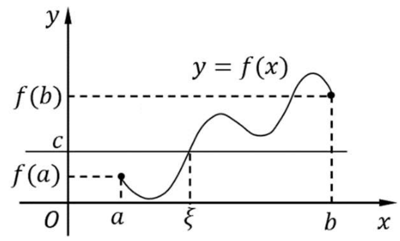


图 2-10

定理 2.9 (**介值定理**) 若函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\neq f(b)$，则对介于$f(a)$和$f(b)$之间的任意实数c，在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=c$.

若介值定理中的水平直线恰好是x轴，那么介值定理就成为了根的存在定理：

推论（根的存在定理） 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$.

使$f(x_0)=0$成立的点x_0称为函数$f(x)$的零点，因此，根的存在定理也称为**零点定理**.

例 证明方程$x^4-3x^2+1=0$在区间$(1,2)$内至少有一个实根.

证 设$f(x)=x^4-3x^2+1$，则$f(x)$在$[1,2]$上连续，且$f(1)=-1<0$，$f(2)=5>0$，即$f(1)\cdot f(2)<0$，根据零点定理，至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使$f(\xi)=\xi^4-3\xi^2+1=0$，即方程$x^4-3x^2+1=0$在区间$(1,2)$内至少有一个实根.

推论 在闭区间上连续的函数一定可以取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

不妨设$m=f(x_1)$，$M=f(x_2)$，在区间$[x_2,x_2]$上利用介值定理即可得到上述推论.

习题 2.3

1.判断下列说法是否正确：

(1) 若$f(x)$在x_0连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则$f(x)$在x_0连续.

(3) 分段函数的间断点就是它的分段点.

(4) 初等函数的连续区间就是它的定义域.

2. 求下列函数的间断点，并指出间断点的类型：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ -x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

(3) $f(x)=\begin{cases} x & x\le 1 \\ e^{x-1} & x<1 \end{cases}$.

(4) $f(x)=\begin{cases} \ln x & x>0 \\ 1-x & x\le 0 \end{cases}$.

3.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin 2x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\sin\frac{1}{x}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{3x}{x^3+1}\right)\right]$.

(4)* $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n-1)-\ln n]$

4. 讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$的连续性.

5. 已知函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}sin(x-1) & x<1 \\ 0 & x=1 \\ \dfrac{ax^2+2x-1}{3x^2-2} & x>1 \end{cases}$，常数$a$为何值时，$f(x)$在点$x$连续？

6*. 已知 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax-x+4}{x+1}=k$，求 a 和 k 的值 .

7*.证明方程$x^3-3x+1=0$在区间(1,2)内至少存在一个实数根.