函数的微分

(differential)

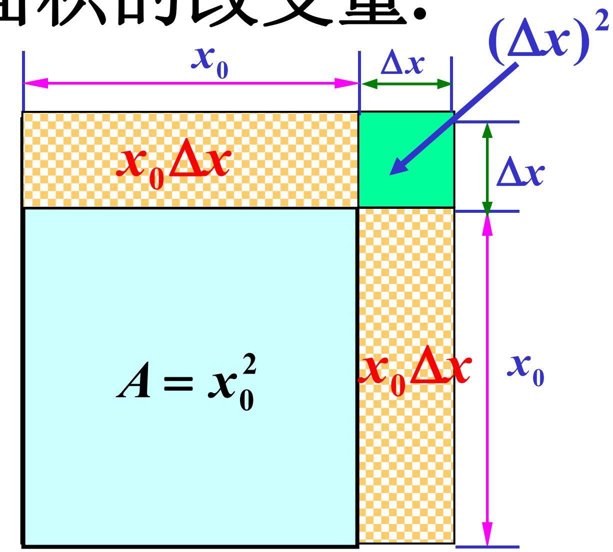
- 微分的定义
- 微分的几何意义
- 微分公式与运算法则
- 微分在近似计算中的应用
- 小结　思考题　作业

一、微分的定义

线性函数(linear function)

1.问题的引出

实例 正方形金属薄片受热后面积的改变量.



设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A = x_0^2$,

$$\therefore \Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$

(1) Δx的线性(一次)函数,且为ΔA的主要部分;

(2) Δx的高阶无穷小,且为ΔA的次要部

很小时可忽略.

当$|\Delta x|$很小时,

$\Delta A \approx 2x_0\Delta x.$

即 $\Delta A = 2x_0\Delta x + o(\Delta x).$

对一般函数$y=f(x)$,如果$y=f(x)$满足一定条件,则函数的增量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

其中A是不依赖于Δx的常数,因此$A\Delta x$是Δx的线性函数,且它与Δy之差

$$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$$

当$A\neq 0$,且$|\Delta x|$很小时, $A\Delta x \approx \Delta y$

对一般函数 $y=f(x)$,如果存在这样的近似公式,则无论在理论分析上还是在实际应用中都是十分重要的.

2. 微分的定义

定义 设函数 $y = f(x)$在某区间内有定义，x_0及 $x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

A为微分系数

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数 $y = f(x)$在点 x_0 **可微(differentiable)**，并称 $A \cdot \Delta x$为函数 $y = f(x)$在点 x_0相应于自变量增量Δx的**微分(differential)**，记作

$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)$，即 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$.

3.

满足什么条件的函数是可微的呢?
微分的系数A如何确定呢?
微分与导数有何关系呢?
下面的定理回答了这些问题.

定 ... $x)$

在 ...

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x.$$

证 (1) 必要性 $\because f(x)$在点x_0可微,

$$\therefore \Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = A.$$

即函数$f(x)$在点x_0可导,且$A = f'(x_0)$.

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$，即有 $dy = f'(x_0)\Delta x$.

(2) 充分性 $\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0), \text{ 即 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\alpha, \quad (\Delta x\to 0, \alpha\to 0)$$

从而 $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot(\Delta x)$,

$$= f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，且 $f'(x_0) = A$.

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微. 其微分一定是 $dy = f'(x_0)\Delta x$.

求导法又叫微分法

结论 在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，以 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 近似代替增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 时，其误差为 $o(\mathrm{d}y)$. 因此，在 $|\Delta x|$ 很小时，有精确度较好的近似等式 $\Delta y\approx dy$.

- 自变量的增量就是自变量的微分：$\Delta x = \mathrm{d}\, x$

- 函数的微分可以写成:

$$\mathrm{d}\, y = f'(x)\,\mathrm{d}\, x \quad \text{或} \quad \mathrm{d}\, f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}\, x$$

- 当 $\mathrm{d}\, y = f'(x)\,\mathrm{d}\, x$ 时，有 $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}$.

即函数 $f(x)$ 在点 x 处的导数等于函数的微分 $\mathrm{d}\, y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}\, x$ 的商，**故导数也称为微商.**

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

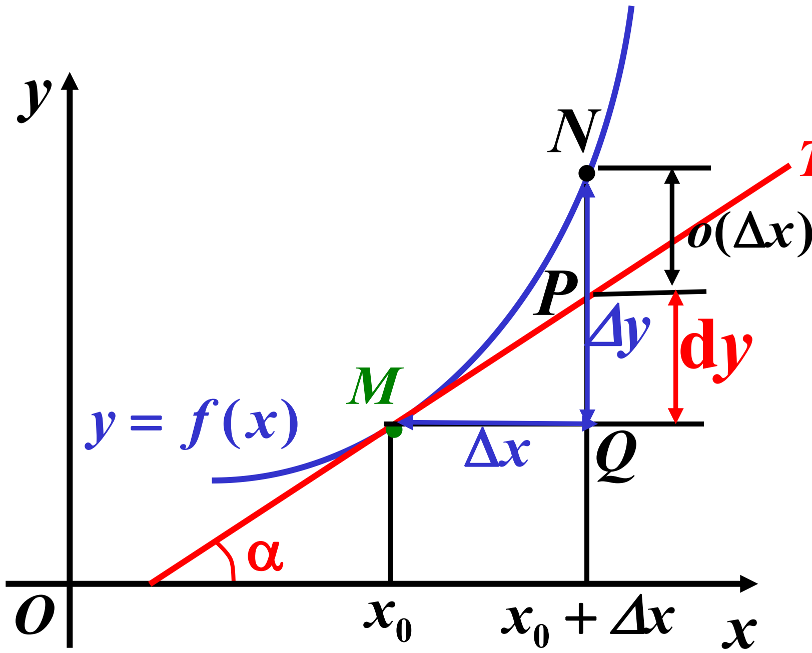
二、微分的几何意义

$$\boxed{\tan\alpha \cdot \Delta x = PQ = \mathrm{d}y}$$

几何意义(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时;

$\mathrm{d}y$就是切线纵坐标对应的增量,



当$|\Delta x|$很小时,在点M的附近,

线段PQ可近似代替线段NQ.

三、微分公式与运算法则

1. 微分的基本公式

可微 $\Longleftrightarrow$ 可导

微分的基本公式与导数的基本公式相似

微分公式一目了然, 不必讲了.

基本求法

计算函数的导数, 乘以自变量的微分.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

1. 基本微分公式

$$\mathrm{d}(C) = 0 \qquad \mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sec x) = \sec x\tan x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\csc x) = -\csc x\cot x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(e^x) = e^x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arc\,cot}\, x) = -\frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

2. 运算法则 ($u = u(x), v = v(x)$均为可导函数)

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

例1 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解 $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$，$\therefore \mathrm{d}y=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}\mathrm{d}x.$

例2 设 $y=e^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$.

$\boxed{\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v}$

解 $\mathrm{d}y=\cos x\cdot \mathrm{d}(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot \mathrm{d}(\cos x)$

$\because (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x}$, $(\cos x)'=-\sin x.$

$\therefore \mathrm{d}y=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})\mathrm{d}x+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)\mathrm{d}x$

$$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\mathrm{d}x.$$

例2 设 $\boldsymbol{y = e^{1-3x}\cos x}$, 求 $\mathbf{d}\boldsymbol{y}$.

解 $\because y' = e^{1-3x}(-3)\cos x + e^{1-3x}(-\sin x)$

$$= -e^{1-3x}(3\cos x + \sin x)$$

$$\therefore dy = -e^{1-3x}(3\cos x + \sin x)dx$$

3. 复合函数的微分法

此结论用于求复合函数的导数,有时能简化运算.

设函数 $y=f(x)$有导数 $f'(x)$,

(1) 若x是自变量时, $dy=f'(x)dx$;

(2) 若x是中间变量时,即另一变量 t的可微

函数 $x=\varphi(t)$,则 $dy=f'(x)\cdot\underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}$

$$dy=f'(x)dx.$$

结论 无论x是自变量还是中间变量, 函数 $y=f(x)$的微分形式总是 $\boxed{dy=f'(x)dx}$

一阶微分形式的不变性

例3 设 $y = e^{ax+bx^2}$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 法一 用复合函数求导公式

$$\mathrm{d}y = (e^{ax+bx^2})'\mathrm{d}x = e^{ax+bx^2} \cdot (a + 2bx)\mathrm{d}x$$

法二 用微分形式不变性

$$y = e^u, \quad u = ax + bx^2.$$

$$\mathrm{d}y = (e^u)'\mathrm{d}u = e^u\mathrm{d}u = e^{ax+bx^2}\mathrm{d}(ax + bx^2)$$

$$= e^{ax+bx^2} \cdot (a + 2bx)\mathrm{d}x$$

在计算中也可以不写中间变量,直接利用微分形式不变性.

练习求

$$\mathrm{d}(x\arctan 2x)$$

$$= \arctan 2x\,\mathrm{d}x + x\cdot \mathrm{d}(\arctan 2x)$$

$$= \arctan 2x\mathrm{d}x + x\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\mathrm{d}(2x)$$

$$= [\arctan 2x + \frac{2x}{1+(2x)^2}]\mathrm{d}x$$

或 $\because\ y' = \arctan 2x + x\dfrac{1}{1+4x^2}\cdot 2 = \arctan 2x + \dfrac{2x}{1+4x^2}$

$\therefore\ dy = (\arctan 2x + \dfrac{2x}{1+4x^2})dx$

例4 设 $x^2y+xy^2=1$ 求$\mathrm{d}y$.

解一 $\mathrm{d}(x^2y+xy^2)=0$

$$x^2\mathrm{d}y+y2x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$$

$$\mathrm{d}y=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}\mathrm{d}x.$$

解二 将方程两边x对求导得

$$x^2y'+y2x+y^2+2xyy'=0$$

$$y'=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}.\qquad \mathrm{d}y=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}\mathrm{d}x.$$

例5 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$, 求 $\mathrm{d}y$.

解: 方程两边对x求导得

$$\sin x\, y'+y\cos x+\sin(x-y)\ (1-y')=0$$

$$y'=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\mathrm{d}x$$

例6 求方程 $x^2+2xy-y^2=a^2$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的微分 dy .

解:

$$\left(x^2+2xy-y^2\right)'=\left(a^2\right)'$$

$$2x+\left(2y+2xy'\right)-2y\cdot y'=0$$

$$x+y+xy'-yy'=0$$

$$y'=\frac{-(x+y)}{x-y}=\frac{y+x}{y-x}$$

$$dy=y'dx=\frac{y+x}{y-x}dx$$

例7 已知 $y=\ln\left(\arctan 5x\right)$，求 dy .

解： $y'=\left[\ln\left(\arctan 5x\right)\right]'=\dfrac{1}{\left(\arctan 5x\right)}\cdot\left(\arctan \boxed{5x}\right)'$

$$=\frac{1}{\arctan 5x}\cdot\frac{1}{1+\left(5x\right)^2}\cdot\left(5x\right)'$$

$$=\frac{1}{\arctan 5x}\cdot\frac{5}{1+25x^2}$$

$$dy=\left(\frac{1}{\arctan 5x}\cdot\frac{5}{1+25x^2}\right)dx$$

例8 求函数 $y = x^2 \ln 3x$ 的微分.

解:

$$y' = \left(x^2 \ln 3x\right)' = \left(x^2\right)' \ln 3x + x^2 \left(\ln \boxed{3x}\right)'$$

$$= 2x \ln 3x + x^2 \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3$$

$$= 2x \ln 3x + x$$

$$dy = \left(2x \ln 3x + x\right) dx$$

例9 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t$; (2) $\mathrm{d}(\sin x^2) = (\quad)\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

解 (1) $\mathrm{d}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t\,\mathrm{d}t$,

$$\therefore \cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right);$$

$$\therefore \mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C\right) = \cos\omega t\,\mathrm{d}t.$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})} = \frac{2x\cos x^2\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore \mathrm{d}(\sin x^2) = (4x\sqrt{x}\cos x^2)\mathrm{d}(\sqrt{x}).$$

说明：上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

四、微分在近似计算中的应用

1. 计算函数增量的近似值

$f'(x_0) \neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时,

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

用来近似计算 Δy.

例10 半径10cm的金属圆片加热后,半径伸长了0.05cm,问面积增大了多少?

解 设 $A = \pi r^2, r = 10cm, \Delta r = 0.05cm.$

$$\therefore \Delta A \approx \mathrm{d}A = A'_r \cdot \Delta r = 2\pi r \cdot \Delta r$$

$$= 2\pi \times 10 \times 0.05 = \pi \ (cm^2).$$

2. 计算函数的近似值

(1) 求$f(x)$在点$x = x_0$附近的近似值

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (|\Delta x|\text{很小时})$$

曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线的表达式.

函数的末值 $\approx$ 函数的原值 + 微分.

通常称为函数 $y = f(x)$的一次近似或线性近似.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

例11 计算 $\cos 60^0 30'$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\cos x$, $\therefore f'(x)=-\sin x$, (x为弧度)

故 $\cos 60^0 30'=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360})$ 就是函数

$f(x)=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360}$ 处的值.

令 $x_0=\frac{\pi}{3}$, $\Delta x=\frac{\pi}{360}$

$f(x_0)$与$f'(x_0)$要容易算,
$|\Delta x|$要很小.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\therefore \cos 60^0 30' = \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360})$$

$$\approx \cos x\Big|_{x_0=\frac{\pi}{3}} + (\cos x)'\Big|_{x_0=\frac{\pi}{3}} \cdot \Delta x\Big|_{\Delta x=\frac{\pi}{360}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$\approx 0.4924.$$

练习. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解: 设 $f(x)=\sin x$, 则 $f'(x)=\cos x$

取 $x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $\quad x=29^\circ=\frac{29}{180}\pi$

则 $\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{180}$

$$\sin 29^\circ=\sin\frac{29}{180}\pi \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

2. 计算函数的近似值

(2) 求$f(x)$在点$x=0$附近的近似值

令 $x_0=0,\ \Delta x=x.$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

$$\therefore\ f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

常用的几个一次近似式 ($|x|$很小时)

(1) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$; (2) $\sin x\approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x\approx x$ (x为弧度); (4) $e^x\approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x)\approx x$.

$$(1)\ \sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x;$$

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

证 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $\quad f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x=1+\frac{x}{n}.$$

例12 求$\sqrt[3]{1.021}$的近似值.

解 由公式 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$ $\qquad 1.021=1+x$

知 $\sqrt[3]{1.021}=\sqrt[3]{1+0.021} \approx 1+\frac{1}{3}\times 0.021$

$$=1.007$$

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$$

$(|x|$很小时$)$

例13 计算下列各数的近似值.

(1) $\sqrt[3]{998.5}$;　　(2) $e^{-0.03}$.

解 (1) $\sqrt[3]{998.5} = \sqrt[3]{1000-1.5}$

$$= \sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)} = 10\cdot\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right) = 9.995.$$

(2) $e^{-0.03} \approx 1-0.03 = 0.97.$

$$e^x \approx 1+x$$

$(|x|$很小时$)$

五、小结

微分概念　微分的基本思想

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$$ 以直代曲

微分的几何意义

$\mathrm{d}y$ 就是切线纵坐标对应的增量

微分公式与运算法则

熟记微分公式、用一阶微分形式不变性求微分

导数与微分的关系 可导 $\Leftrightarrow$ 可微

微分在近似计算中的应用

当$|\Delta x|$很小时，

$$\Delta y\big|_{x=x_0} \approx \mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot \Delta x$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

当$x = 0$时，

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x$$

练习题

1. 填空

$\mathrm{d}(\arctan e^{-x}) =$ ____________ $\mathrm{d}e^{-x} =$ ____________ $\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}($ ____________ $) = \sin 2x \,\mathrm{d}x$

2. 设 $a > 0$，且 $|b| << a^n$，则 $\sqrt[n]{a^n + b} \approx$ ____________

3. 已知 $xy = e^{x+y}$，求 $\mathrm{d}y$.

4. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 确定，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

1. 填空

$$\mathrm{d}(\arctan e^{-x}) = \underline{\frac{1}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}e^{-x} = \underline{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\ -\frac{1}{2}\cos 2x + C\ ) = \sin 2x\,\mathrm{d}\,x$$

2. 设 $a > 0$, 且 $|b| << a^n$, 则

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx \underline{a + \frac{b}{n\,a^{n-1}}}$$

3. 已知 $xy = e^{x+y}$，求 $\mathrm{d}\,y$.

解：利用微分形式不变性，得

$$x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x = e^{x+y}(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore\quad \mathrm{d}\,y = \frac{y - e^{x+y}}{-x + e^{x+y}}\mathrm{d}\,x$$

另解：利用隐函数求导法则。

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^{x+y}(1 + \frac{dy}{dx}) \quad \Rightarrow y' = \frac{y - e^{x+y}}{-x + e^{x+y}}$$

$$\therefore dy = \frac{y - e^{x+y}}{-x + e^{x+y}}dx$$

4. 设 $y = y(x)$ **由方程** $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ **确定,**

求 $\mathrm{d}\, y\big|_{x=0}$.

解: 方程两边求导, 得

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3\cos 3x + 6y' = 0$$

$$y' = \frac{\cos 3x - x^2}{2 + y^2}$$

当 $x = 0$ 时 $y = 0$, $\quad y'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore \mathrm{d}\, y\big|_{x=0} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\, x$$