2.3 几类特殊函数的求导运算

主讲教师：王玉兰

高等数学

内容概要

一、隐函数求导

二、对数求导法

三、参数方程求导

四、思考与练习

回顾　求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(3x^2)$ ；

(2) $y=(\arctan\frac{x}{2})^3$.

解　$(1)y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\cdot(3x^2)'=\dfrac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$.

$(2)\ y'=3(\arctan\frac{x}{2})^2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}=\dfrac{6}{4+x^2}(\arctan\frac{x}{2})^2$.

练习 求下列函数的导数:

(1) $y=(\arcsin x)^5$ $\quad y'=\dfrac{5(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $y=\arccos(2x^2+7)$ $\quad y'=-\dfrac{4x}{\sqrt{1-(2x^2+7)^2}}$

(3) $y=\arctan 2x^2$ $\quad y'=\dfrac{4x}{1+4x^4}$

一、隐函数的求导

我们称由未解出因变量的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 之间的关系为隐函数.

$x^2+y^2=4$，$xy=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，$\sin(x^2y)-5x=0$，

$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y-xy=0$，$2x^2-y+4=0$

隐函数求导数的**方法**是：方程两端同时对 x 求导，遇到含有 y 的项，先对 y 求导，再乘以 y 对 x 的导数 y'，得到一个含有 y' 的方程式，然后从中解出 y' 即可.

例1（1） 求由方程 $\tan x+\tan y=xy$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

解：

$$(\tan x+\tan y)'=(xy)'$$

$$\sec^2 x+\sec^2 y\cdot y'=1\times y+x\cdot y'$$

$$\sec^2 y\cdot y'-x\cdot y'=y-\sec^2 x$$

$$y'=\frac{y-\sec^2 x}{\sec^2 y-x}$$

（2）求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上一点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线方程.

解: $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)'=(1)'$

$$\frac{1}{4}\cdot 2x+\frac{1}{3}\cdot 2y\cdot y'=0 \qquad y'=-\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{3}y}=-\frac{3x}{4y}$$

$$k=y'\Big|_{\substack{x=1\\ y=\frac{3}{2}}}=-\frac{3\cdot 1}{4\cdot\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$$

切线方程: $y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$

（3）设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $xy+\ln y=e^x$

所确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：

$$(xy+\ln y)'=(e^x)'$$

$$x'\cdot y+x\cdot y'+\frac{1}{y}\cdot y'=e^x$$

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=e^x$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{e^x-y}{x+\dfrac{1}{y}}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{x+\dfrac{1}{y}}$$

又因为函数由方程 $xy+\ln y=e^x$ 所确定，

当 $x=0$ 时，代入方程 $0+\ln y=e^0$

得到 $\ln y=1 \quad \Rightarrow \quad y=e$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\ y=e}}=\frac{e^0-e}{0+\dfrac{1}{e}}=e(1-e)$$

（4）设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+2xy-3x^2=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$$(y^3+2xy-3x^2)'=(0)'$$

$$3y^2y'+(2y+2xy')-6x=0$$

$$3y^2y'+2xy'=6x-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{6x-2y}{3y^2+2x}$$

练习题

1、设隐函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解:
$$\left(x^3+y^3-3xy\right)'=\left(0\right)'$$

$$3x^2+3y^2\cdot y'-3\left(x'y+xy'\right)=0$$

$$3x^2+3y^2\cdot y'-3y-3xy'=0$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{3y-3x^2}{3y^2-3x}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

2、设隐函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{xy}+y^3-5x=0$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：$\left(e^{xy}+y^3-5x\right)'=(0)'$

$$e^{xy}(xy)'+3y^2\cdot y'-5=0$$

$$e^{xy}(y+xy')+3y^2y'-5=0$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{5-y\cdot e^{xy}}{x\cdot e^{xy}+3y^2}$$

函数由方程 $e^{xy}+y^3-5x=0$ 确定

当 $x=0$ 时，代入方程 $e^0+y^3-0=0$

得到 $y^3=-1 \Rightarrow y=-1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\ y=-1}}=\frac{5-(-1)e^0}{0+3\cdot(-1)^2}=\frac{6}{3}=2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{5-y\cdot e^{xy}}{x\cdot e^{xy}+3y^2}}$$

二、对数求导法

幂指函数

例2（1）已知 $y = x^x \ (x > 0)$，求 y'.

解：$\ln y = \ln x^x$

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

（2）已知 $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$，求 y'.

解：$\ln y=\ln\left(1+x^2\right)^{\sin x}$

$$(\ln y)'=\left(\sin x\cdot\ln\left(1+x^2\right)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln\left(1+x^2\right)+\sin x\cdot\frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}$$

$$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln\left(1+x^2\right)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}$$

$$y'=y\left[\cos x\cdot\ln\left(1+x^2\right)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$$

（3）已知 $y=x^{\sin x}\,(x>0)$，求 y' .

解： $\ln y=\ln x^{\sin x}$

$$(\ln y)'=(\sin x\ln x)'$$

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

（4）已知 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\ (x>4)$，求 y'.

解：

$$\ln y=\ln\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right]$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right]$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right]\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)'}{x-1}+\frac{(x-2)'}{x-2}-\frac{(x-3)'}{x-3}-\frac{(x-4)'}{x-4}\right]$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

$$y' = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

（5）已知 $y=(2x-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{x-4}{x-2}}$ ，求 y' .

解：

$$\ln y = \ln\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\ln y = \ln(2x-1)^{\frac{3}{2}} + \ln\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \frac{3}{2}\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-4}{x-2}\right)$$

$$\ln y = \frac{3}{2}\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\left[\ln(x-4) - \ln(x-2)\right]$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{3}{2}\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\left[\ln(x-4) - \ln(x-2)\right] \right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{2}\cdot\frac{(2x-1)'}{2x-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{(x-4)'}{x-4} - \frac{(x-2)'}{x-2}\right]$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$y' = y\left[\frac{3}{2x-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right)\right]$$

练习题

（1）已知 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{(x-2)(x-3)}}\,(x>3)$，求 y'．

解：

$$\ln y=\ln\left[\frac{(x-1)(x+1)^3}{(x-2)(x-3)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x-1)(x+1)^3}{(x-2)(x-3)}\right]$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x+1)^3-\ln(x-2)-\ln(x-3)\right]$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+3\ln(x+1)-\ln(x-2)-\ln(x-3)\right]$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+3\ln(x+1)-\ln(x-2)-\ln(x-3)\right]\right)'$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right]$$

$$y' = \frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)$$

三、参数方程求导

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$ 求 y' .

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例3（1）已知 $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：（方法一）

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \left(x^2\right)' = \boxed{2x}$$

相 $\Updownarrow$ 等

（方法二）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\left(4t^2\right)'}{\left(2t\right)'} = \frac{8t}{2} = \boxed{4t}$$

（2）已知 $\begin{cases} x = 1 + \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{(t\cos t)'}{(1+\sin t)'} = \frac{\cos t - t\sin t}{\cos t}$$

（3）已知 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(\sin t)'}{(\ln t)'} = \frac{\cos t}{\frac{1}{t}} = t\cos t$$

（4）求由参数方程 $\begin{cases} x = te^{-t} \\ y = e^{t} \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\left(e^{t}\right)'}{\left(te^{-t}\right)'} = \frac{e^{t}}{t'e^{-t} + t\left(e^{-t}\right)'}$$

$$= \frac{e^{t}}{e^{-t} - te^{-t}}$$

（5）求曲线 $\begin{cases} x=1+te^{t} \\ y=t^{3} \end{cases}$ 在 $t=0$ 的对应点 M 处的切线方程.

解： $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(t^{3}\right)'}{\left(1+te^{t}\right)'}=\frac{3t^{2}}{e^{t}+te^{t}}$$

$t=0$ 时 $\quad x=1,\ y=0 \quad M(1,0)$

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{3\cdot 0}{e^{0}+0}=0$$

切线： $y-0=0(x-1)$

$y=0$

内容概要

一、高阶导数的概念

二、高阶导数的运算法则

一、高阶导数的概念

引例： 变速直线运动 $S = S(t)$

速度 $v = \dfrac{dS}{dt}$， 即 $v = S'$,

加速度 $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{dS}{dt})$,

即 $a = (S')'$

定义. 若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 可导，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y'' 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 即

$$y''=(y')' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，依次类推，$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，分别记作

$$y''',\quad y^{(4)},\quad \cdots, y^{(n)},$$

或 $$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\quad \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

函数	$y=f(x)$			
一阶导数	y' ,	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{df(x)}{dx}$
二阶导数	y'' ,	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$
三阶导数	y''' ,	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3f(x)}{dx^3}$
四阶导数	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4f(x)}{dx^4}$
⋮				
n阶导数	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\frac{d^ny}{dx^n}$,	$\frac{d^nf(x)}{dx^n}$

高阶导数

例1 已知 $y=x^2\cdot\ln x$，求 y''.

解： $y'=\left(x^2\right)'\cdot\ln x+x^2\cdot(\ln x)'$

$=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}$

$y'=2x\cdot\ln x+x$

$y''=\left(2x\cdot\ln x+x\right)'$

$=\left(2x\right)'\cdot\ln x+2x\cdot\left(\ln x\right)'+x'$

$y''=2\cdot\ln x+2x\cdot\dfrac{1}{x}+1=2\ln x+3$

例2 已知$f(x)=2x^3-3x+5$，求$f^{(4)}(x)$.

解：

$$f'(x)=\left(2x^3-3x+5\right)'=6x^2-3$$

$$f''(x)=\left(6x^2-3\right)'=12x$$

$$f'''(x)=(12x)'=12$$

$$f^{(4)}(x)=(12)'=0$$

例3. 设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 求 $y^{(n)}$.

解:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \cdots + n \cdot (n-1) a_n x^{n-2}$$

依次类推，可得

$$y^{(n)} = n! a_n$$

思考: 设 $y = x^\mu$(μ为任意常数), 问 $y^{(n)} = ?$

$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

例4. 设 $y = e^{ax}$ 求 $y^{(n)}$

解: $y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2e^{ax}, \quad y''' = a^3e^{ax}, \cdots,$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax},$$

特别有: $\boxed{\left(e^x\right)^{(n)} = e^x}$

例5 求 $f(x)=a^x\left(a>0\text{且}a\neq 1\right)$ 的 n 阶导数.

解： $f'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a$

$f''(x)=\left(a^x\ln a\right)'=\ln a\left(a^x\right)'=a^x(\ln a)^2$

$f'''(x)=\left[a^x(\ln a)^2\right]'=(\ln a)^2\left(a^x\right)'=a^x(\ln a)^3$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$

例6 求 $f(x)=e^{2x}$ 的 4阶导数.

解:

$$f'(x)=\left(e^{2x}\right)'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$$

$$f''(x)=\left(2e^{2x}\right)'=2\left(e^{2x}\right)'=2^{2}e^{2x}$$

$$f'''(x)=\left(2^{2}e^{2x}\right)'=2^{2}\left(e^{2x}\right)'=2^{3}e^{2x}$$

$$f^{(4)}(x)=\left(2^{3}e^{2x}\right)'=2^{3}\left(e^{2x}\right)'=2^{4}e^{2x}$$

例7. 设 $y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x}$，$y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$y'''=(-1)^2\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$，

$\cdots$，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

规定 $0!=1$

思考: $y=\ln(1-x)$，$y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

$$y'=-\frac{1}{1-x}$$
$$y''=\frac{1}{(1-x)^2},$$
$$y'''=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3},$$

例8. 设 $y=\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

一般地，$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

类似可证: $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

例9. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ **2**

分析: $f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

又 $$f_+''(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2-0}{x}=0$$

$$f_-''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2-0}{x}=0$$

$$\therefore f''(x)=\begin{cases}24x, & x\ge 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

但是 $f_+'''(0)=24,\ f_-'''(0)=24,\ \therefore f'''(0)$ 不存在 .

例10. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定,

求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\dfrac{dx}{dt} = 2t + 2,\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1+t},$ 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2} = \frac{1}{2(t+1)^2}$$

例10. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定,

求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(t+1)^2}}$$

续:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{1}{2(1+t)^2}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-2\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+t)^3}}{2t+2} = -\frac{1}{2(t+1)^4}$$

思考题

1、设 $y=\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$，求$y^{(n)}$.

分析： $$y=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

解： $$y=\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2}$$

$$y^{(n)}=6[(x-3)^{-1}]^{(n)}-5[(x-2)^{-1}]^{(n)}$$

$$=6\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}-5\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n\cdot n![\frac{6}{(x-3)^{n+1}}-\frac{5}{(x-2)^{n+1}}](n=1,2,\cdots).$$

练习

（1）设 $y = xe^x$ ，求 y'' .

解： $y' = \left(xe^x\right)' = x' \cdot e^x + x \cdot \left(e^x\right)' = e^x + xe^x$

$$y'' = \left(e^x + xe^x\right)'$$

$$= e^x + e^x + xe^x$$

$$= 2e^x + xe^x$$

练习

（2）设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$.

解： $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

$$y'=(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x)'=\frac{1}{4}(-4\sin 4x)=-\sin 4x$$

$$=\cos(4x+\frac{\pi}{2})$$

$$y''=(\cos(4x+\frac{\pi}{2}))'=-4\sin(4x+\frac{\pi}{2})=4\cos(4x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})\quad(n=1,2,\cdots)$$