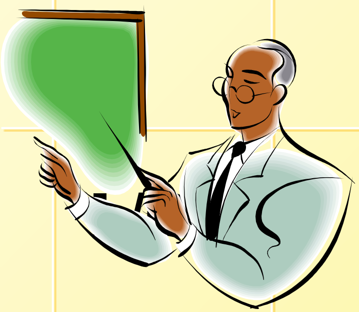
高等数学（下）

第六章 常微分方程

主讲教师：王玉兰



办公室：图书馆B626

第三节

可降阶的高阶微分方程的解法

一、 $y'' = f(x)$ 型的微分方程

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

本节考虑二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y')$$

中的如下的三种特殊类型:

一、 $y'' = f(x)$ 型的微分方程

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

特点： 右端仅含有自变量 x。

令 $z = y^{(n-1)}$， 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$，因此

$$z = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

即

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 n 次积分， 可得含 n 个任意常数的通解.

例1. 求解 $y'' = \cos\dfrac{x}{2} + e^{3x}$.　　仅含有自变量x

解:

$$y' = \int\left(\cos\frac{x}{2} + e^{3x}\right)\mathrm{d}x + C_1$$

$$= 2\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}e^{3x} + C_1$$

$$y = \int\left(2\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{3}e^{3x} + C_1\right)dx + C_2$$

$$y = -4\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{9}e^{3x} + C_1'x + C_2$$

例2. 求解 $y''' = \mathrm{e}^{2x} - \cos x$.

解: $$y'' = \int \left(\mathrm{e}^{2x} - \cos x \right) \mathrm{d}x + C_1'$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2}C_1'$）

二、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

特点：右端不含有变量y。

设 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶方程

$$p'_{(x)} = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分，得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

例3. **求解** $y'' - y' = 2e^x$

解： 设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 代入方程得

$$p' - p = 2e^x \xrightarrow{\text{一阶线性微分方程}}$$

积分得 $p = e^{\int dx}\left[C_1 + \int 2e^x \cdot e^{-\int dx} dx\right]$,

y'

即 $\cancel{p} = \underline{2xe^x + C_1 e^x}$ 仍含有x

两端再积分得 $y = \int (C_1 e^x + 2xe^x) dx + C_2$

$$y = 2(x-1)e^x + C_1 e^x + C_2$$

例4. **求解** $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y\big|_{x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 3 \end{cases}$

解: 设 $y' = p(x)$,则 $y'' = p'$,代入方程得

$$(1+x^2)p' = 2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0} = 3$, 得 $C_1 = 3$,于是有 $y' = 3(1+x^2)$

两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$

利用 $y\big|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 难一点

特点： 右端不含有自变量 x。

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分，得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例5. **求解** $yy''-y'^2=0$.

解: 设 $y'=p(y)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|$，即 $p=C_1y$,

$$\therefore \quad y'=C_1y$$ （一阶线性齐次方程）

故所求通解为 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$

例6. **求解** $\begin{cases} yy'' + \dfrac{1}{y^2} e^{y^2} y' - 2y(y')^2 = 0. \\ y\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = 1,\ y'\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = e \end{cases}$

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $p(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \dfrac{1}{y^2} e^{y^2} - 2yp) = 0,$

即 $p = 0$(不满足初始条件，舍)或 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \dfrac{1}{y^2} e^{y^2} - 2yp = 0$

(一阶线性非齐次方程)

$$p = e^{\int 2y dy}[C_1 + \int -\frac{1}{y^2} e^{y^2} \cdot e^{-\int 2y dy} dy],$$

$$= e^{y^2}(\frac{1}{y} + C_1),$$

例6. 求解 $\begin{cases} yy'' + \dfrac{1}{y^2} e^{y^2} y' - 2y(y')^2 = 0. \\ y\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = 1,\ y'\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = e \end{cases}$

$$p = e^{y^2}\left(\frac{1}{y} + C_1\right),$$

续： 代入初值条件： $y\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = 1,\ y'\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = e$

得： $C_1 = 0$ 　　即： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y} e^{y^2}$, 　可分离变量方程

$$-\frac{1}{2} e^{-y^2} = x + C_2$$

代入初值条件： $y'\Big|_{x=-\frac{1}{2e}} = e$ 　　得： $C_2 = 0$

故所求特解为 $x = -\dfrac{1}{2} e^{-y^2}$

例7. **求解** $y''=1+(y')^2$.

解: 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\cancel{x}\,y}=1+p^2$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=d\cancel{x}\,y$

两边积分得 $\arctan p = x + C_1$

$$即\ \frac{dy}{dx}=p=\tan(x+C_1),$$

两边积分，得通解为 $y=-\ln\left|\cos(x+C_1)\right|+C_2$

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

令 $y' = p(x)$， 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

令 $y' = p(y)$， 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

思考与练习

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解 ?

答: 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便 . 例如, $y'' = \mathrm{e}^{-(y')^2}$

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题 ?

答: (1) 一般情况 , 边解边定常数计算简便.

(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

第四节 二阶常系数线性微分方程

小知识点，概念性强，
难记

一、二阶线性微分方程解的结构

二、二阶常系数线性微分方程的解法

一、二阶线性微分方程解的结构

二阶微分方程的如下形式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

称为二阶线性微分方程，简称二阶线性方程.

$f(x)$ 称为自由项。

当 $f(x) \neq 0$ 时，称为二阶线性非齐次微分方程，简称二阶线性非齐次方程.

当 $f(x)$ 恒为 0 时，称为二阶线性齐次微分方程，简称二阶线性齐次方程.

方程中 $p(x)$、 $q(x)$ 和 $f(x)$ 都是自变量的已知连续函数.

这类方程的特点是：右边是已知函数或零，左边每一项含 y'' 或 y' 或 y，且每项均为 y'' 或 y' 或 y 的一次项。

二阶微分方程的如下形式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

方程中 $p(x)$、 $q(x)$ 和 $f(x)$ 都是自变量的已知连续函数.

这类方程的**特点**是：右边是已知函数或零，左边每一项含 y'' 或 y' 或 y，且每项均为 y'' 或 y' 或 y 的一次项，

$p(x)$ $q(x)$ $f(x)$

例如: $y'' + xy' + y = x^2$ 就是二阶线性非齐次方程.

$y'' + x(y')^2 + y = x^2$ 就不是二阶线性方程.

$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$

定理 1 如果函数 y_1 与 y_2 是线性齐次方程的两个解，则函数

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

仍为该方程的解，其中 C_1， C_2 是任意常数.

证 因为 y_1 与 y_2 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，所以有

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

与

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

又因为$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$，$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$，于是有

$$y'' + p(x)y' + q(x)y$$

$$= (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

$$= C_1(\cancel{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)}y_1) + C_2(\cancel{y_2'' + p(x)y_2' + q(x)}y_2)$$

$$= 0$$

所以 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解.

定义 设函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是定义在某区间 I 上的两个函数，如果存在两个不全为 0 的常数 k_1和 k_2，使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$$

在区间 I 上恒成立. 则称函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在区间 上是**线性相关**的，否则称为**线性无关**.

考察两个函数是否线性相关，我们往往采用另一种简单易行的方法，即看它们的比是否为常数，事实上，当 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关时，有 $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$，其中 k_1, k_2 不全为 0，不失一般性，设 $k_1 \neq 0$，则 $\dfrac{y_1}{y_2} = -\dfrac{k_2}{k_1}$，

即 y_1 与 y_2 之比为常数. 反之，若y_1 与 y_2 之比为常数，设 $\dfrac{y_1}{y_2}=\lambda$，则 $y_1=\lambda y_2$，即 $y_1-\lambda y_2=0$. 所以 y_1 与 y_2 线性相关. 因此，如果两个函数的比是常数，则它们线性相关；如果不是常数，则它们线性无关. 例如函数 $y_1=e^x$，$y_2=e^{-x}$，而 $\dfrac{y_1}{y_2}\neq$ 常数，所以，它们是线性无关的.

定理 2 如果函数 y_1 与 y_2 是二阶线性齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关的特解， 则

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

是该方程的通解，其中 C_1, C_2为任意常数.

证 因为 y_1 与 y_2 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解，所以，由定理 1 知 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是该方程的解.

又因为 y_1 与 y_2 线性无关，即 y_1 与 y_2 之比不为常数，所以它们中任一个都不能用另一个（ 形如 $y_1 = ky_2$ 或 $y_2 = k_1 y$）来表示. 故C_1 与C_2不能合并为一个任意常数，因此 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是二阶线性齐次方程的通解.

$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$ 齐次

$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$ 非齐次

定理 3 如果函数 y^* 是线性非齐次方程的一个特解, Y 是该方程所对应的线性齐次方程的通解，则

$$y = Y + y^*,$$

齐次通解 + 非齐次特解

是线性非齐次方程的通解.

= 非齐次通解

证 因为 y^* 与 Y 分别是线性非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 和线性齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解，所以有

$$y^{*\prime\prime} + p(x)y^{*\prime} + q(x)y^* = f(x),$$

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = 0 .$$

又因为 $y' = Y' + y^{*\prime}$， $y'' = Y'' + y^{*\prime\prime}$，所以

$$y'' + p(x)y' + q(x)y$$

$$= (Y'' + y^{*\prime\prime}) + p(x)(Y' + y^{*\prime}) + q(x)(Y + y^{*})$$

$$= (Y'' + p(x)\,Y' + q(x)Y) + (y^{*\prime\prime} + p(x)\,y^{*\prime} + q(x)y^{*})$$

$$= f(x).$$

这说明函数 $y = Y + y^*$ 是线性非齐次方程的解，又 Y 是二阶线性齐次方程的通解，它含有两个任意常数，故 $y = Y + y^*$ 中含有两个任意常数. 即 $y = Y + y^*$ 是线性非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解.

求二阶线性非齐次方程通解的一般步骤为:

（1）求线性齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的线性无关的两个特解 y_1 与 y_2, 得该方程的通解 $Y=C_1y_1 + C_2y_2$.

（2）求线性非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的一个特解 y^*.那么，线性非齐次方程的通解为 $y = Y + y^*$.

二、二阶常系数线性微分方程的解法

如果二阶线性微分方程为

$$y'' + py' + qy = f(x)\,,$$

其中 p、 q 均为常数，则称该方程为二阶常系数线性微分方程.

1.二阶常系数线性齐次方程的解法

设二阶常系数线性齐次方程为

$$y'' + py' + qy = 0 . \qquad ④$$

考虑到左边 p，q 均为常数， 我们可以猜想该方程具有 $y = e^{rx}$ 形式的解，其中 r 为待定常数．将 $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$ 及 $y = e^{rx}$ 代入上式，得

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0 .$$

$r^2+3r+2=0$

$r_1=2,\ r_2=1$

由于$e^{rx} \neq 0$，因此，只要 r 满足方程

$$r^2 + pr + q = 0, \qquad ⑤$$

即 r 是上述一元二次方程的根时，$y = e^{rx}$ 就是④式的解. 方程⑤称为方程④的特征方程．特征方程根称为特征根.

$y'' + py' + q = 0$

1° 特征方程具有两个不相等的实根 r_1 与 r_2，即 $r_1 \neq r_2$. 那么，这时函数 $y_1 = e^{r_1 x}$ 和 $y_2 = e^{r_2 x}$ 都是 ④ 的解，且 $\frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq$ 常数，所以 y_1 与 y_2 线性无关，因而它的通解为 $y_1 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$. $r^2 + pr + q = 0$

2° 特征方程具有两个相等的实根，即 $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$. 这时，由特征根可得到常系数线性齐次方程的一个特解 $y_1 = e^{rx}$. 还需再找一个与 y_1 线性无关的特解 y_2，为此，设 $y_2 = u(x)y_1$，其中 $u(x)$ 为待定函数. 将 y_2 及其一阶、二阶~~导~~数 $y'_2 = (ue^{rx})' = e^{rx}(u'(x) + ru(x))$，$y''_2 = e^{rx}(u''(x) + 2ru'(x) + r^2u(x))$，代入方程 $y'' + py' + qy = 0$ 中，得

$$e^{rx}[u'' + (2r + p)u' + (r^2 + pr + q)u] = 0.$$

注意到 $r = \dfrac{-p}{2}$ 是特征方程的重根，所以有 $r^2 + pr + q = 0$ 及 $2r + p = 0$. 且 $e^{rx} \neq 0$，因此只要 $u(x)$ 满足

$$u''(x) = 0,$$

则 $y_2 = ue^{rx}$就是④式的解，为简便起见，取方程 $u''(x) = 0$ 的一个解 $u = x$， 于是得到方程④且与 $y_1 = e^{rx}$ 线性无关的解 $y_2 = xe^{rx}$. 因此，④式的通解为

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = (C_1 + C_2 x)e^{rx}.$$

3° 特征方程具有一对共轭复根 $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 与 $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$. 这时有两个线性无关的特解 $y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$ 与 $y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}$. 这是两个复数解，为了便于在实数范围内讨论问题， 我们再找两个线性无关的实数解.

由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

(这公式我们将在无穷级数章中补证)，可得

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x),$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x)$$

于是有

$y'' + py' + q = 0$

仅有的 另的

去除掉

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

由定理 1 知，以上两个函数 $e^{\alpha x}\cos\beta x$ 与 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 均为 ④ 式的解，且它们线性无关. 因此，这时方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

上述求二阶常系数线性齐次方程通解的方法称为特征根法，其步骤是：

（1）写出所给方程的特征方程；

（2）求出特征根；

（3）根据特征根的三种不同情况，写出对应的特解，并写出其通解.

$y'' + py + q = 0$

例 1 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 它有两个不等的实根 $r_1 = -1$， $r_2 = 3$, 其对应的两个线性无关的特解为 $y_1 = e^{-x}$ 与 $y_2 = e^{3x}$，所以方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

例 2 求方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的满足初始条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = 4$ 的特解.

解 该方程的特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$，它有重根 $r = 2$. 其对应的两个线性无关的特解为 $y_1 = e^{2x}$ 与 $y_2 = xe^{2x}$，所以通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x},$$

求得

$$y' = C_2 e^{2x} + 2(C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

将 $y(0) = 1$，$y'(0) = 4$ 代入上两式，得 $C_1 = 1$，$C_2 = 2$，因此，所求特解为

$$y = (1 + 2x)e^{2x}.$$

例 3 求方程 $2y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为 $2r^2 + 2r + 3 = 0$，它有共轭复根

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-24}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\mathrm{i}.$$

即 $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, 对应的两个线性无关的解为

$y_1 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{5}}{2} x$, $y_2 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{5}}{2} x$, 所以方程的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{5}x + C_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{5}x\right).$$

例 4　求方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解.

解　该方程的特征方程为 $r^2 + 4 = 0$，它有共轭复根 $r_{1,2} = \pm 2i$. 即 $\alpha = 0$，$\beta = 2$. 对应的两个线性无关的解 $y_1 = \cos 2x$. $y_2 = \sin 2x$. 所以方程的通解为

$$y = \cancel{e^{\alpha x}}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$