3.1 中值定理

主讲教师：王玉兰

高等数学

内容概要

一、罗尔中值定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西中值定理

四、小结

费马(Fermat)

1601 ~ 1665

法国数学家。1601年8月17日生于法国南部博蒙德洛马涅，1665年1月12日卒于卡斯特尔。他利用公务之余钻研数学，在数论、解析几何学、概率论等方面都有重大贡献，被誉为“业余数学家之王”

费马最初学习法律，但后来却以图卢兹议会议员的身份终其一生。费马博览群书，精通数国文字，掌握多门自然科学。虽然年近三十才认真注意数学，但成果累累。

费马大定理：当整数$n > 2$时，关于x, y, z的不定方程

$$x^n + y^n = z^n$$

无正整数解 。

拉格朗日(Lagrange)

1735~1813

法国数学家、物理学家。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出。

柯西(Cauchy) 1789 ～ 1857

正统的数学家

柯西在代数学、几何学、误差理论以及天体力学、光学、弹性力学诸方面都有出色的工作. 特别是，他弄清了弹性理论的基本数学结构，为弹性力学奠定了严格的理论基础

柯西对数学的最大贡献是在微积分中引进了清晰和严格的表述与证明方法. 柯西的另一个重要贡献，是发展了复变函数的理论。

柯西积分、柯西公式、柯西不等式、柯西定理、柯西函数、柯西矩阵、柯西分布、柯西变换、柯西准则、柯西柯西主值以他的姓名命名的定理、公式、方程、准则等有多种.

中值定理

- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 推广 → 泰勒公式（第三节）
- 柯西中值定理

应用

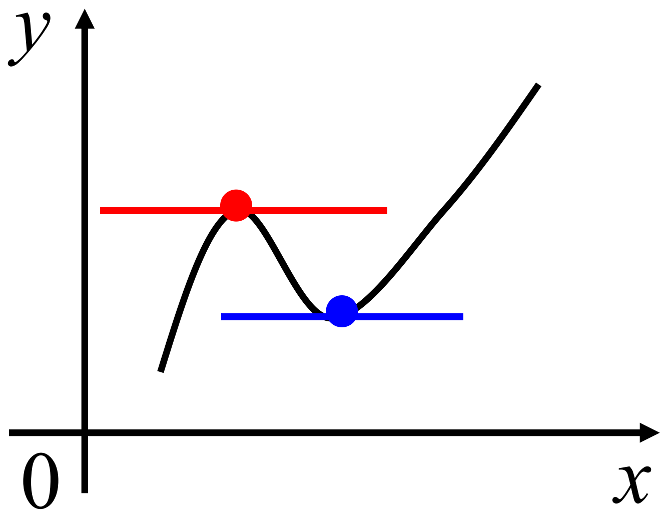
- 研究函数性质及曲线性态
- 利用导数解决实际问题

我们常常需要从函数的导数所给出的局部的或“小范围”性质，推出其整体的或“大范围”性质．为此，我们需要建立函数的差商与函数的导数间的基本关系式，这些关系式称为“微分学中值定理”．

这些中值定理的创建要归功于费马、拉格朗日、柯西等数学家．

一、费马（Fermat）引理

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 的某领域内恒有 $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$，则必有 $f'(x_0)=0$.



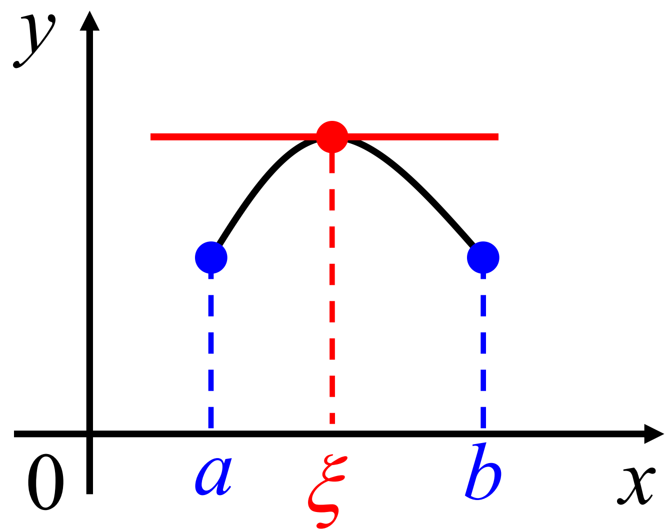
二、罗尔（Rolle）定理

若函数 $f(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 上可导；

（3）$f(a)=f(b)$ ；



则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi\,(a<\xi<b)$ ；

使得 $f'(\xi)=0$.

例1 验证 $f(x)=x^2-3x-4$ 在 $[-1,4]$ 上满足罗尔定理的条件，并求 ξ .

解： $f(x)=x^2-3x-4$ 在 $[-1,4]$ 上连续；

$f(x)=x^2-3x-4$ 在 $(-1,4)$ 上可导；

$$f(-1)=(-1)^2-3(-1)-4=0$$

$$f(4)=4^2-3\times4-4=0$$

$$f(-1)=f(4)$$

则 $f(x)=x^2-3x-4$ 在 $[-1,4]$ 上满足罗尔定理.

$$f'(x)=\left(x^2-3x-4\right)'=2x-3$$

$$f'(\xi)=2\xi-3=0$$

则 $\xi=\dfrac{3}{2}$

例2 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根.

证　设 $f(x)=x^5-5x+1$,　则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,

且 $f(0)=1, f(1)=-3.$　　由零点定理，至少

$\exists x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0.$　即方程至少有一个小于1的正实根.

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$，使 $f(x_1)=0.$

$\because f(x)$ 在 x_0,x_1 之间满足罗尔定理的条件,

$\therefore$ 至少存在一个 ξ (在 x_0,x_1 之间), 使得 $f'(\xi)=0.$

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x\in(0,1))$ 矛盾，$\therefore$ 为唯一实根.

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日(Lagrange)中值定理 函数$y=f(x)$满足：

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

在(a,b)内至少存在一点ξ， s.t.

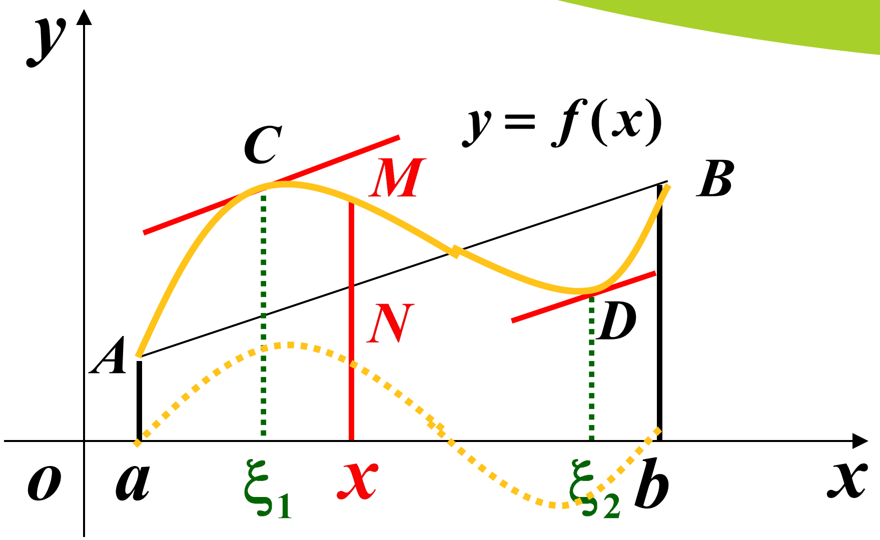
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

注意：与Rolle中值定理相比去掉了$f(a)=f(b)$.

结论也可写成：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

几何解释:在曲线AB上至少有一点C,该点的切线平行于弦AB



分析:与Rolle中值定理相比相差$f(a)=f(b)$.

弦AB方程为

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

曲线$f(x)$减去弦AB为所得曲线a,b两端点的函数相等

证：作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)],$$

满足Rolle中值定理条件，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,s.t.

$$F'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

拉格朗日中值公式

注意: 拉氏公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

例3 已知 $f(x)=x^2+2x$ 在 $[0,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，求 ξ .

解： $a=0$ ， $b=2$

$$f(0)=0+0=0; \qquad f(2)=4+4=8;$$

$$f'(x)=\left(x^2+2x\right)'=2x+2$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(\xi)=2\xi+2=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{8-0}{2-0}=4$$

得到 $\xi=1$

例4 **证明** $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1).$

证： 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x,\quad x\in[-1,1]$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0\quad\Rightarrow f(x)\equiv C, x\in[-1,1]$$

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

例5 证明：当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

解： 令 $f(x)=\ln x$；

在区间$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，

$$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

则存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ 即 $$\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$$

$$\frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$$

得到 $$\boxed{\ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{\xi}}$$

因为 $$a<\xi<b$$

则 $$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a}$$

得到 $$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

例6 证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

解：令 $f(t)=\ln(1+t)$；设置讨论区间 $[0,x]$，

函数在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\quad \xi\in(0,x)$$

$$f'(\xi)=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+\xi}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi} \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}$$

因为 $0 < \xi < x$

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < \frac{x}{1+0}$$

得到 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

例7 证明：当 $x \geq 0$ 时，$\arctan x \leq x$

解： ①当 $x=0$ 时；

$$\arctan x = \arctan 0 = 0$$

即 $\arctan x = x$

②当 $x>0$ 时；

令 $f(t)=\arctan t$ ；设置讨论区间 $[0,x]$ ，

函数在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \xi\in(a,b)$$

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\arctan x-\arctan 0}{x}=\frac{\arctan x}{x}$$

$$f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\arctan x}{x}<1$$

即 $\arctan x<x$

综合①②得到 $\arctan x\le x$

四、柯西（Cauchy）中值定理

$f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$

则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$ ；

使得 $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

有人想：分子分母分别用拉格朗日中值定理，

就可证明柯西中值定理了.

$f(x), F(x) \in C([a, b])$,

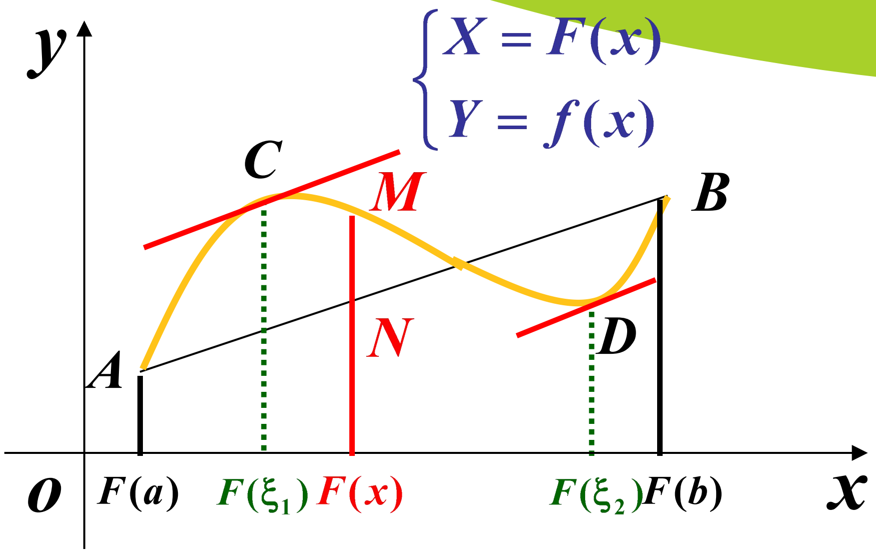
$f(x), F(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $F'(x) \neq 0$,

$f(x), F(x)$ 在 $[a, b]$ 上，满足拉格朗日定理

故 $$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

两个 ξ 相同吗？

几何解释:在曲线AB上至少有一点$C(F(\xi),f(\xi))$,该点的切线平行于弦AB



证　作辅助函数

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

满足Rolle中值定理条件,则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,s.t.

$$G'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} \cdot F'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

$$\left.\begin{array}{r} F(x) = x \Rightarrow F(b)-F(a) = b-a,\ F'(x) = 1 \\ \dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

例8 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证：**分析：结论可变形为**

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$ 设 $g(x) = x^2$,

则 $f(x), g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件，

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点ξ，有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$ 即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

四、小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系；

注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.