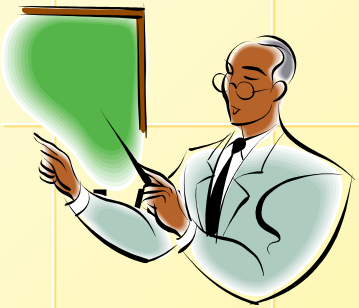
复习不定积分

主讲教师：王玉兰



高等数学

一、原函数的定义

若在区间 I 上，函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 存在关系

$F'(x)=f(x)$ 或 $d\left[F(x)\right]=f(x)dx$，则称 $F(x)$ 是

$f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

例如： $(\sin x)'=\cos x \quad , \quad x\in(-\infty,+\infty)$

则称 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数.

二、关于原函数的几个问题

1、原函数的存在定理

如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在该区间上一定存在 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$.

连续函数一定存在原函数.

2、如果 $f(x)$ 在 I 上有原函数，那么它有多有个原函数？（无数个）

令 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$

同时 $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$

$$\left[F(x)+C\right]'=f(x)$$

则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数

$F(x)+C$ 有无数种可能性.

3、$F(x)+C$ 能否表示 $f(x)$ 的全体原函数？ （能）

设 $F(x), G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数

则 $F'(x)=f(x)$ ， $G'(x)=f(x)$

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

$$[G(x)-F(x)]'=0$$

得到 $G(x)-F(x)=C$ ， 即 $G(x)=F(x)+C$

两个原函数之间仅相差一个常数，

当 C 为任意常数时 $F(x)+C$ 可表示 $f(x)$ 的全体原函数.

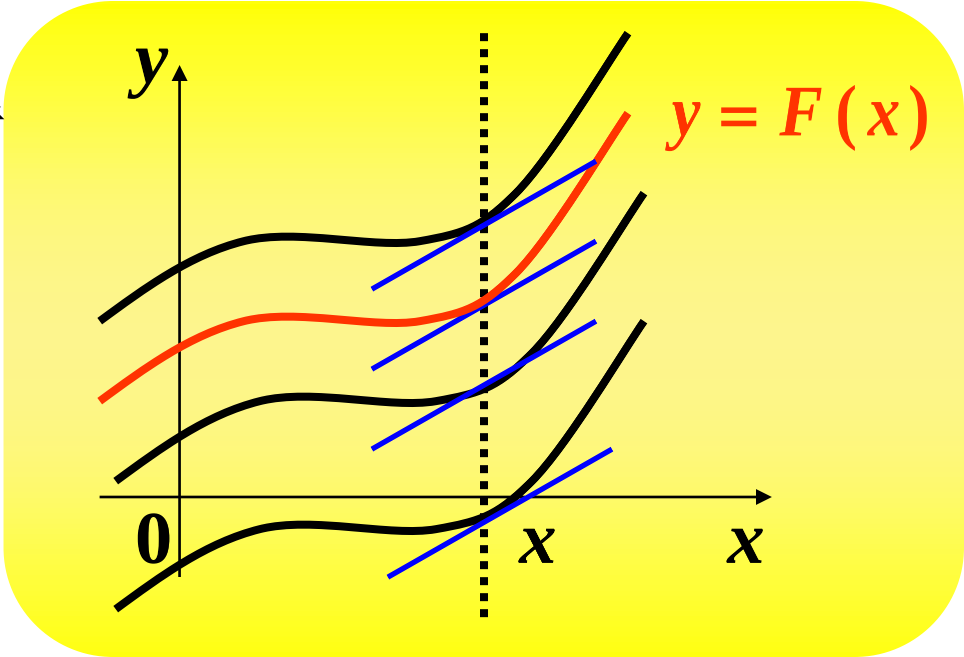
不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的一个原函数$F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**,方程为$y = F(x)$.

则 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

就表示了一族积分曲线 $y = F(x) + C$.

它们相互平行，即在横坐标相同的点处有相同的切线斜率。



三、不定积分的定义

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为

$f(x)$ 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$.

$\int$ **--积分号**　　$f(x)$**--被积函数**　　x**--积分变量**

若 $F'(x)=f(x)$ ，　则 $\int f(x)dx=F(x)+C$

C **--积分常数**

微分运算“ d ”与不定积分运算“ $\int$ ”就像加法与减法、乘法与除法，指数与对数那样，构成了一对互逆运算.

具体写成：（1）$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$ ；

（2）$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ ；

（3）$\int f'(x)dx=f(x)+C$ ；

如 $\int\left(e^{2x+1}\cdot\cos 5x\right)'dx=e^{2x+1}\cdot\cos 5x+C$

四、基本积分公式

（1） $(kx)' = k$ ；

$$\boxed{\int k dx = kx + C}$$

如 $\int 5dx = 5x + C$

（2） $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n \ (n \neq -1)$；

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)}$$

如 $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

（3） $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C}$$

（4） $(e^x)' = e^x$；

$$\int e^x dx = e^x + C$$

（5） $\left(\frac{1}{\ln a} a^x\right)' = a^x$；

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

（6） $(\sin x)' = \cos x$；

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

（7） $(\cos x)' = -\sin x$；

$(-\cos x)' = \sin x$；

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

基本积分公式（书本P138）

（1） $\int k dx = kx + C$

（2） $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ （其中 $n \neq -1$）

（3） $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

（4） $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

（5） $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\quad \int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

（6） $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

五、不定积分的性质

性质1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （ k 是常数且 $k \neq 0$）

性质2 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

例1 $$\int\left(e^x-2\cos x+3x^2\right)dx$$

$$=\int e^x dx-\int 2\cos x dx+\int 3x^2 dx$$

$$=\int e^x dx-2\int \cos x dx+3\int x^2 dx$$

$$=e^x+C_1-2(\sin x+C_2)+3\left(\frac{1}{3}x^3+C_3\right)$$

$$=e^x-2\sin x+x^3+\boxed{C_1-2C_2+3C_3}$$

$$=e^x-2\sin x+x^3+C$$

例2 $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}+2x}{x^2}dx$

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}+\frac{2x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int\left(x^{-2}-x^{-\frac{5}{3}}+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$=-x^{-1}-\left(\frac{1}{-\frac{5}{3}+1}x^{-\frac{5}{3}+1}\right)+2\ln|x|+C$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}+2\ln|x|+C$$

例3 $\int 2^x \cdot 3^x \cdot e^x dx$

$$= \int (2 \cdot 3 \cdot e)^x dx$$

$$= \int (6e)^x dx$$

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

$$= \frac{(6e)^x}{\ln 6e} + C$$

例4 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

$$\boxed{2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x}$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (1+\cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$$

例5 $\int \tan^2 x dx$

$$\boxed{1+\tan^2 x = \sec^2 x}$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

例6 $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{3}\right)^2dx$

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$$

$$=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{9}+2\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{9}+\frac{4}{3}\right)dx$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x+C$$

$$=-\frac{4}{x}+\frac{1}{27}x^3+\frac{4}{3}x+C$$

例7 $\int \frac{(1+x)^3}{x^2}dx$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2}$$

$$= \int \frac{1+x^3+3x+3x^2}{x^2}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + x + \frac{3}{x} + 3\right)dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3\ln|x| + 3x + C$$

例8 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

例9 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\left(2\cos^2 x - 1\right)}dx$$

$$= \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx \quad = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\sec^2 x + 1\right)dx = \frac{1}{2}\left(\tan x + x\right) + C$$

例10 $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$$

$$= \tan x - \cot x + C$$

一、第一类换元积分法（凑微分法）

$y=\sin 2x$ 是复合函数　　$\int \sin 2x\,dx$ 如何积分？

设 $f(t)$ 具有原函数 $F(t)$，即

$$F'(t)=f(t)\quad,\quad \int f(t)dt=F(t)+C$$

如果 $t=\varphi(x)$，　则　$dt=d\left[\varphi(x)\right]=\varphi'(x)dx$

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\boxed{\cdot\varphi'(x)dx}=\int f\left[\varphi(x)\right]d\left[\left(\varphi(x)\right)\right]=\int f(t)dt$$

$$=F(t)+C=F\left[\varphi(x)\right]+C$$

例1

(1) $\int e^{\boxed{\frac{1}{3}x}}dx = 3\cdot\int e^{\frac{1}{3}x}d\left(\frac{1}{3}x\right)$

$$\int e^{\boxed{x}}d\boxed{x} = e^{x}+C$$

$= 3\int e^{t}dt = 3e^{t}+C$

$= 3e^{\frac{x}{3}}+C$

(2) $\int \frac{1}{x-3}dx = \int \frac{1}{x-3}d(x-3)$

$$\int \frac{1}{\boxed{x}}d\boxed{x} = \ln|x|+C$$

$= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C$

$= \ln|x-3|+C$

$$dx = \frac{1}{k} d\left(kx+1\right)$$

(3) $\int (2x+1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{10} d\left(2x+1\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} \left(2x+1\right)^{11} + C$$

$$= \frac{1}{22} \left(2x+1\right)^{11} + C$$

$$\int \boxed{x}^{10} \, d\boxed{x} = \frac{1}{11} x^{11} + C$$

例2 (1) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$

$= \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \boxed{x\,dx}$

$$xdx = d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$= \int \frac{1}{1+x^2} d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} d\left(x^2\right)$

$$\int \frac{1}{\boxed{x}}d\boxed{x} = \ln|x| + C$$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} d\left(x^2+1\right)$

$$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C$$

$= \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C \quad = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$

(2) $\int x^3 \cdot e^{x^4}\,dx$

$$= \int e^{x^4} \cdot \boxed{x^3\,dx}$$

$$x^3 dx = d\left(\frac{1}{4}x^4\right)$$

$$= \int e^{x^4}\,d\left(\frac{1}{4}x^4\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{x^4}\,d\left(x^4\right)$$

$$\int e^t\,dt = e^t + C$$

$$= \frac{1}{4}e^{x^4} + C$$

例3

$$\int \sin\frac{1}{x}\cdot\boxed{\frac{1}{x^2}dx}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^2}dx = d\left(-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\int \sin\frac{1}{x}\,d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\int \sin\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\int \sin t\,dt = -\cos t + C}$$

$$=-\left(-\cos\frac{1}{x}\right)+C \;=\cos\frac{1}{x}+C$$

例4 (1) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

$$=\int \sin\sqrt{x}\cdot\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}dx}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}dx=d\left(2\sqrt{x}\right)}$$

$$=\int \sin\sqrt{x}d\left(2\sqrt{x}\right)$$

$$=2\int \sin\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\boxed{\int \sin t\,dt=-\cos t+C}$$

$$=2\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)+C$$

$$=-2\cos\sqrt{x}+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d\left(2\sqrt{x}\right)$$

(2) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}dx = \int \frac{1}{(1+x)}\cdot \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}dx}$$

$$= \int \frac{1}{(1+x)} d\left(2\sqrt{x}\right)$$

$$= 2\int \frac{1}{(1+\boxed{x})} d\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t + C$$

$$= 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} d\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= 2\arctan\sqrt{x} + C$$

例5

$$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$$

$$e^x dx = d\left(e^x + C\right)$$

$$=\int \frac{1}{e^x+2}\cdot \boxed{e^x\, dx}$$

$$=\int \frac{1}{e^x+2}d\left(e^x+2\right)$$

$$\boxed{\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C}$$

$$=\ln\left|e^x+2\right|+C$$

$$=\ln\left(e^x+2\right)+C$$

例6 $\int \frac{1-2\ln x}{x}dx$

$$=\int(1-2\ln x)\cdot\boxed{\frac{1}{x}dx}$$

$$\boxed{\frac{1}{x}dx=d(\ln x)}$$

$$=\int(1-2\ln x)d(\ln x)$$

令 $\ln x=t$

$$==\int(1-2t)dt$$

$$=t-t^2+C$$

$$=\ln x-\ln^2 x+C$$

例7 (1) $\int \tan x\,dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos x}\boxed{\cdot \sin x\,dx}$$

$$\boxed{\sin x dx = d(-\cos x)}$$

$$= \int \frac{1}{\cos x}\,d(-\cos x)$$

$$= -\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x)$$

$$\boxed{\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C}$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$(2)\quad \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \tan x \cdot \boxed{\sec^2 x\,dx}$$

$$\boxed{\sec^2 x dx = d(\tan x)}$$

$$= \int \tan x\, d(\tan x)$$

$$\boxed{\int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

(3) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

$$= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \boxed{\cos x \, dx}$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

$$= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, d(\sin x)$$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$\int (t^2 - t^4) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C$$

(4) $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x}{1} dx$

$$= \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C}$$

$$= \int \frac{1}{\sec x + \tan x} d(\sec x + \tan x)$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

例8

(1) $$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C}$$

$$= \int \frac{1}{x+1}d(x+1) - \int \frac{1}{x+2}d(x+2)$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

$$(2)\quad \int \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{1}{\left(x^2+4x+4\right)+1}dx$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(x+2\right)^2}dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t + C}$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(x+2\right)^2}d\left(x+2\right)$$

$$= \arctan\left(x+2\right)+C$$

$$(3)\quad \int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{1}{x^2+3x+2}\cdot \boxed{(2x+3)dx}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C}$$

$$= \int \frac{1}{x^2+3x+2}d\left(x^2+3x+2\right)$$

$$= \ln\left|x^2+3x+2\right| + C$$

二、第二类换元积分法

讨论 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

例1 求 $\int \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}dx$

解: 令 $\sqrt{x-1}=t$，得到 $x-1=t^2$，即 $x=t^2+1$，

$$d(x)=d(t^2+1) \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

$$\text{原积分} = \int \frac{1}{2+t} 2t\,dt = 2\int \frac{t}{2+t}dt$$

$$= 2\int \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int \left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt$$

$$=2\int 1dt-2\int\frac{2}{t+2}dt$$

$$=2\int 1dt-4\int\frac{1}{t+2}d(t+2)$$

$$=2t-4\ln|t+2|+C$$

$$\boxed{t=\sqrt{x-1}}$$

$$=2\sqrt{x-1}-4\ln\left(\sqrt{x-1}+2\right)+C$$

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$ **三角代换**

分析： 目的：消去根式。

利用三角恒等式：$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

若令 $x = a\sin t$， 取 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则有反函数

$t=\arcsin\frac{x}{a}$, 且 $\cos t>0$

被积函数 $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$

例2: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,(a > 0)$

解：令 $x = a\sin t$，$dx = a\cos t\,dt$，

$$\text{原始} = \int a^2\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt$$

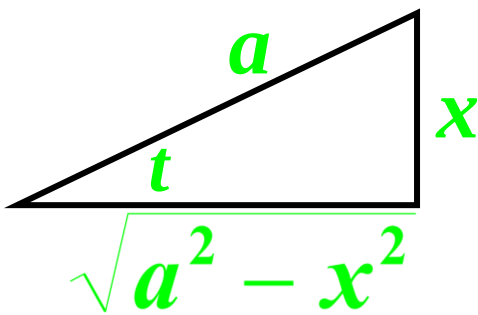
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \sin t\cos t\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C$$

$\because \sin t = \dfrac{x}{a}$

$\therefore t = \arcsin\dfrac{x}{a}$



例3: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\qquad(a>0)$

分析: 利用公式 $\tan^2 t+1=\sec^2 t$ 化去根式。

若令 $x=a\tan t$， 取 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{\tan^2 t+1}\quad=a\sec t.$

解: 令 $x=a\tan t$， $dx=a\sec^2 t\,dt.$

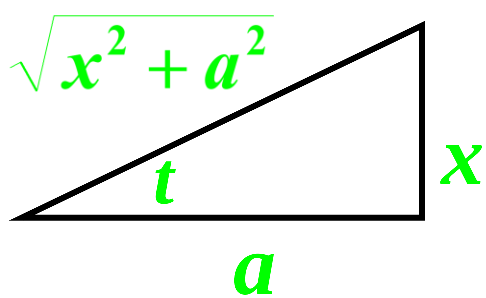
$$原式=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,dt=\int\sec t\,dt$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|+C.$$

$\because \tan t=\dfrac{x}{a}$



例4: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$

分析: 利用公式 $\sec^2 t-1=\tan^2 t$ 化去根式。

若令 $x=a\sec t$, 取 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$

则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\sec^2 t-1}=a\tan t.$

解: 令 $x=a\tan t$, $\quad dx=a\sec\tan dt.$

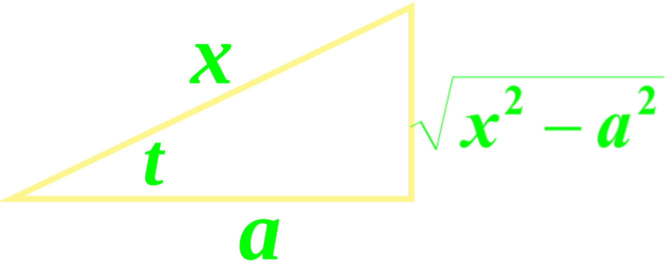
$$\text{原式}=\int \frac{a\sec t\ \tan t}{a\ \tan\ t}\,dt=\int \sec t\,dt$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan\ t\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

$\because \cos t=\frac{a}{x}$



小结：

当被积函数含有因子：

$\sqrt{a^2-x^2}$， 令 $x=a\sin t$. 或 $x=a\cos t$.

$\sqrt{a^2+x^2}$， 令 $x=a\tan t$. 或 $x=a\cot t$.

$\sqrt{x^2-a^2}$， 令 $x=a\sec t$. 或 $x=a\csc t$.

目的： 去根号。

分部积分法

设函数 $u=u(x)$ ， $v=v(x)$ 可导，

导数为 $u'(x)$ 和 $v'(x)$ ，则 $(uv)'=u'v+uv'$.

$$d(uv)=vdu+\boxed{udv} \quad \Longrightarrow \quad udv=d(uv)-vdu$$

等式左右两边同时求积分，

$$\int udv=\int 1d(uv)-\int vdu \quad \Longrightarrow \quad \int udv=uv-\int vdu$$

得到分部积分公式

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

例1 （1） $\int \underline{x} d\left(\boxed{e^x}\right) = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + C$$

(2) $\int x \cdot \boxed{e^x dx} = \int x d\left(e^x\right)$

$$= xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

例2（1） $\int x \cdot \boxed{\sin x dx} = \int x d(-\cos x)$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

选择函数移动的优先级顺序

e^{x}, e^{2x}, e^{-x} ……

$\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ ……

x, x^{2} ……

(2) $\int x\cdot\boxed{\sin 2x dx} = \frac{1}{2}\int xd\left(-\cos 2x\right)$

$= -\frac{1}{2}\int xd\left(\cos 2x\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(x\cdot\cos 2x - \int\cos 2x dx\right)$

$= -\frac{1}{2}\left[x\cdot\cos 2x - \frac{1}{2}\int\cos\boxed{2x}d(2x)\right]$

$= -\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

例3 $\int x\cdot\ln x dx=\int \ln x\cdot \boxed{xdx}$

$$=\int \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2 d(\ln x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

思考题

(1) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

解: 令 $\sqrt{x}=t$ ， 得到 $\boxed{x=t^2}$，

$d(x)=d(t^2) \quad \Longrightarrow \quad dx = 2t\,dt$

原积分 $=\int \arctan t \boxed{\cdot 2tdt}$

$=\int \arctan t d(\ t^2\ )$

$$\boxed{\int \arctan t\, d\left(t^2\right)}$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \int t^2 d\left(\arctan t\right)$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \int t^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

$$\boxed{t = \sqrt{x}}$$

$$= t^2 \cdot \arctan t - \left(t - \arctan t\right) + C$$

$$= x \cdot \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C$$

$$(2)\quad \int \boxed{e^x} \cdot \sin x\,dx = \int \sin x\,d(\ e^x\ )$$

$$= e^x \sin x - \int e^x\,d(\sin x)$$

$$= e^x \sin x - \int \boxed{e^x} \cdot \cos x dx$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x d(\ e^x\ )$$

$$= e^x \sin x - [\ e^x \cos x - \int e^x d(\cos x)\ ]$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x)\,dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$$

$$2\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x \quad + C$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + C$$