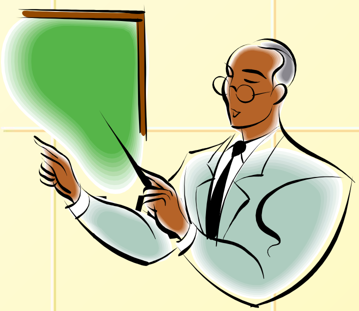
3.2　洛必达法则

主讲教师：王玉兰



高等数学

内容概要

一、$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型未定式解法：洛必达法则

二、$0\cdot\infty \quad \infty-\infty \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$型未定式解法

三、小结　思考题

一、$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型未定式解法：洛必达法则

【定义】如果当 $x \to a$（或 $x \to \infty$）时，两个函数 $f(x)$与$F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在。

通常把这种极限称为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。

【例如】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$, $\frac{0}{0}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, $\frac{\infty}{\infty}$

【定理1】设

（1）当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

（2）在 a 点的某去心领域内 $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大）

那么 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

【定义】这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

【注】(1) 如果 $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理的条件，可以继续 使用洛必达法则，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\cdots.$$

（2）当$x\to a$时，该法则仍然成立。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

（即定理2）

（3）当时$x\to a, x\to\infty$的未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$ ，也有相应的洛必达法则。

一、“$\frac{0}{0}$” 型

例1（1） $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 3x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)(2x)'}{\cos(3x)(3x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{2}{3}$$

第一类重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

等价无穷小替换

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \boxed{2x}}{\sin \boxed{3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)(2x)'}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin \boxed{2x}}{\boxed{2x}}=2\times 1=2$$

等价无穷小替换

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos \boxed{2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

用二倍角公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\times 1=2$$

（3） $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-9\right)'}{\left(x^2-4x+3\right)'}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{2x-4}=\frac{6}{2}=3$$

因式分解

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}=\frac{6}{2}=3$$

（4） 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\dfrac{0}{0}$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

【注意】（1） 上式中 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$ 已不是未定式，不能再使用洛必达法则，否则导致错误的结果.

（2） 由此可见，在使用洛必达法则时应步步整理、步步判别。如果不是未定式就坚决不能用洛必达法则。

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-x\cdot\cos x}$ $\boxed{\left(“\dfrac{0}{0}”\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-(\cos x-x\cdot\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+x\cdot\sin x}\quad \boxed{\left(“\frac{0}{0}”\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+(\sin x+x\cdot\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cdot\cos x}\quad \boxed{\left(“\frac{0}{0}”\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x+(\cos x-x\cdot\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\cdot\sin x}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 1-0}=\frac{1}{3}$$

二、“$\frac{\infty}{\infty}$” 型

例2（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\boxed{x^2}-4x-1}{2\boxed{x^2}-3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-1}{2x^2-3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2-4x-1\right)'}{\left(2x^2-3\right)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{4x} \qquad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+x^2} \qquad \left(“\frac{\infty}{\infty}”\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} \qquad \left(“\frac{\infty}{\infty}”\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}$$

$$=+\infty$$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}$ $\left(\text{“}\dfrac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}} \quad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2^2\cdot e^{2x}} \quad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^3\cdot e^{2x}}$$

$$=\frac{6}{8}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}} = 0$$

（4） $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{2x}} \qquad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{2e^{2x}} \qquad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot(n-1)x^{n-2}}{2^2\cdot e^{2x}} \qquad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$\vdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdots1\cdot x^0}{2^n\cdot e^{2x}}=\frac{n!}{2^n}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}=0$$

(5) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{e^{-x}} \qquad \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln(\arctan x)}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-e^{-x}}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{e^x}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+x^2} \qquad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=-\infty$$

（6） $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$ $\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 3x}}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} \qquad \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'}{2\cos x\cdot(\cos x)'}$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(\cos 3x)'}{2\cos x\cdot(\cos x)'}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x\cdot 3)}{2\cos x\cdot(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot\sin 3x}{2\cos x\cdot\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}\qquad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 6x}{\cos 2x}$$

$$=3\times\frac{\cos 3\pi}{\cos\pi}=3\times\frac{-1}{-1}=3$$

三、其他未定式

例3 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ （“$\infty-\infty$”）

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\quad\left(“\frac{0}{0}”\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\dfrac{x \cdot \ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \ln x}{x \cdot \ln x + x - 1} \qquad \left(\text{“} \frac{0}{0} \text{”} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

【$0^0, 1^\infty, \infty^0$】型——幂指函数类

【步骤】

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty$$

【实质】 先化为复合函数：$u^v = e^{v\cdot\ln u}$

利用复合函数的外层函数的连续性：极限符号与函数符号交换位置，结合洛必达法则求极限.

例4 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$ $\left(\text{“}\infty\cdot 0\text{”}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}} \qquad \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{x^2}}{1+\boxed{x^2}}=1$$

例5 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x \quad (n>0)$ $\qquad$ (“$0\cdot\infty$”)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} \qquad \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-nx^{-n-1}}$$

$$= -\frac{1}{n}\lim_{x\to 0^+} x^n = 0$$

例6 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x \quad (x>0)$ $\quad$ (“0^0”)

$$=\lim_{x\to0^+} e^{\ln x^x}$$

$$a=e^{\ln a}$$

$$=\lim_{x\to0^+} e^{\boxed{x\ln x}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^{∞})

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}$$

$$= e^{-1}.$$

例8　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

【解】　取对数得 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1,\qquad \therefore 原式 = e^{-1}.$$

例9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ $\left(“\dfrac{\infty}{\infty}”\right)$

若使用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

不能求出极限值.

正确做法:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x+\sin x}{x}}{\dfrac{x-\sin x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$$

练习题

（1） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x\cdot 3}{\sec^2 5x\cdot 5}$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x}{\frac{1}{\cos^2 5x}}$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to0}\cos 3x\cdot\cos^2 5x$$

$$= \frac{3}{5}\times1\times1 = \frac{3}{5}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ $\left(“\dfrac{0}{0}”\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$ $\left(“\dfrac{0}{0}”\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ $\left(“\dfrac{0}{0}”\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}$

$=\dfrac{2}{1}=2$

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\frac{1}{x}}$ $\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=1\cdot 1=1$$

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sin x} \qquad \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x} \qquad \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\cos x+(\cos x-x\cdot\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{1}{2\times1-0}=\frac{1}{2}$$

三、小结

洛必达法则

$\boxed{0^0, 1^\infty, \infty^0}$

取对数 $u^v = e^{v\cdot\ln u}$

$0\cdot\infty$型

$f\cdot g = \dfrac{f}{1/g}$

$\infty-\infty$型

$f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/g\cdot 1/f}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\dfrac{0}{0}$型

$\dfrac{\infty}{\infty}$型

【思考题】

设 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是未定型极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也一定不存在？举例说明.

【思考题解答】

不一定.

例 $f(x) = x + \sin x, \qquad g(x) = x$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$ 极限不存在.

但 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = 1$ 极限存在.