

高等数学

# 第五章 定积分

主讲教师:王玉兰

办公室: 图书馆B618



# 第五章 定积分

---

**5.1 定积分的概念及性质**

**5.2 定积分基本公式**

**5.3 定积分的计算法**

**5.4 反常积分初步**

**5.5 定积分的应用**

高等数学

# 5.1 定积分的概念

主讲教师：王玉兰



# 5.1 定积分的概念及性质

一、定积分问题举例

二、定积分的定义

三、定积分的性质



# 一、定积分问题举例

$$\text{矩形面积} = ah$$

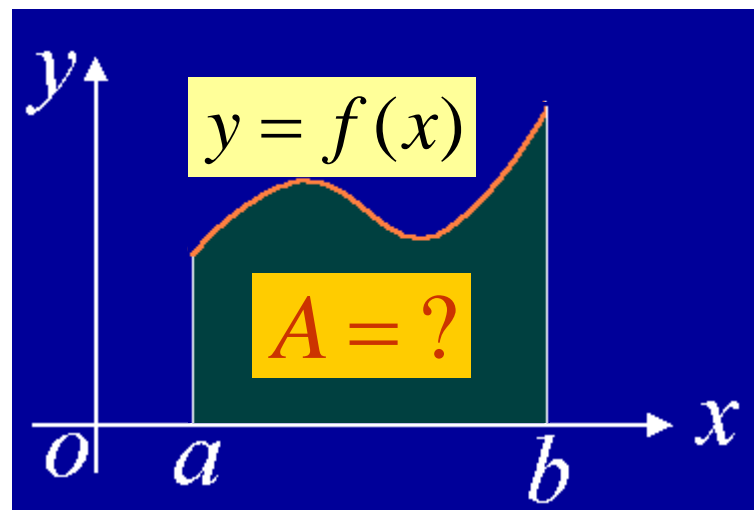
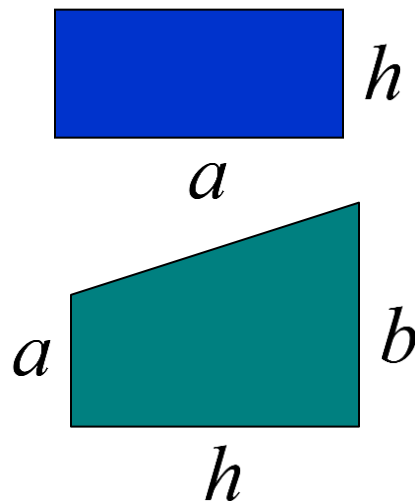
$$\text{梯形面积} = \frac{h}{2}(a+b)$$

## 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及  $x$  轴, 以及两直线  $x = a, x = b$  所围成, 求其面积  $A$ .



## 解决步骤：

1) **分割.** 在区间  $[a, b]$  中任意插入  $n-1$  个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线  $x = x_i$  将曲边梯形分成  $n$  个小曲边梯形;

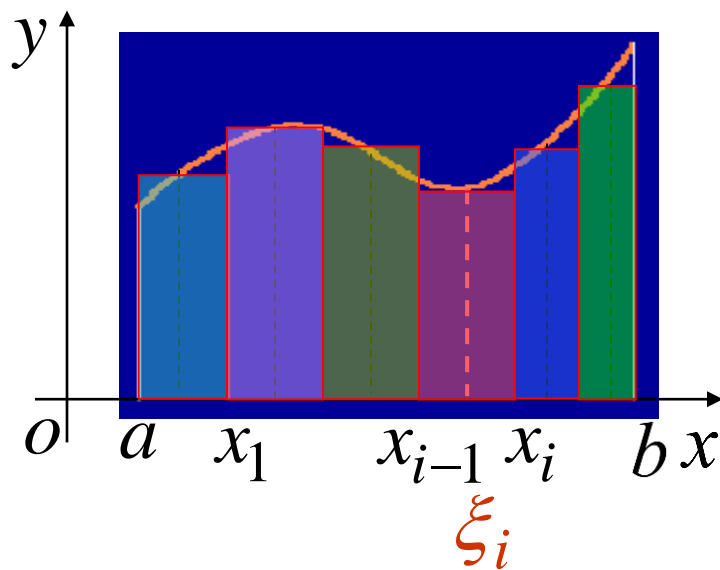
2) **取近似.** 在第  $i$  个小曲边梯形上任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以  $[x_{i-1}, x_i]$  为底,  $f(\xi_i)$

为高的小矩形, 并以此小矩形面积近似代替相应

窄曲边梯形面积  $\Delta A_i$ , 得

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n)$$

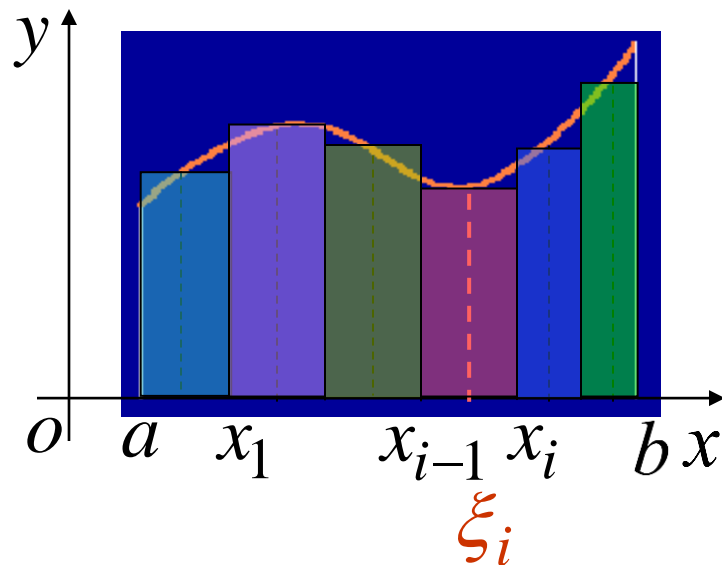


### 3) 求和.

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

4) 取极限. 令  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ , 则曲边梯形面积

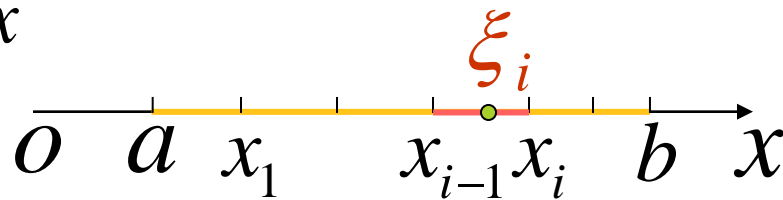
$$\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \end{aligned}$$



## 二、定积分的定义

设函数  $f(x)$  定义在  $[a, b]$  上, 若对  $[a, b]$  的任意分法  
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ , 令  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , 任取  
 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 只要  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$  时  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$   
总趋于确定的极限  $I$ , 则称此极限  $I$  为函数  $f(x)$  在区间  
 $[a, b]$  上的**定积分**, 记作  $\int_a^b f(x) dx$

即 
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



此时称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上**可积**.



积分上限

$[a, b]$  称为积分区间

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

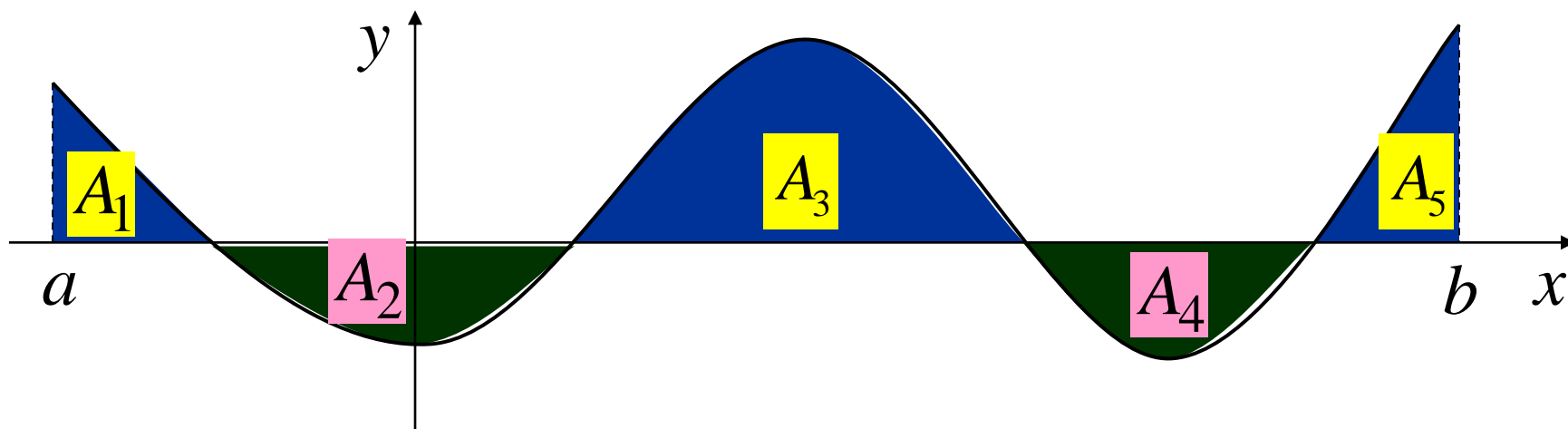
定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

# 定积分的几何意义:

$$f(x) > 0, \int_a^b f(x) dx = A \quad \text{曲边梯形面积}$$

$$f(x) < 0, \int_a^b f(x) dx = -A \quad \text{曲边梯形面积的负值}$$



$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

# 可积的充分条件:

函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续

→  $f(x)$  在  $[a, b]$  可积.

### 三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

$$1. \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \longrightarrow \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b dx = b - a$$

$$3. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数})$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

6. 若在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**推论1.** 若在  $[a, b]$  上  $f(x) \leq g(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

7. 设  $M = \max_{[a, b]} f(x)$ ,  $m = \min_{[a, b]} f(x)$ , 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b)$$

8. 积分中值定理

若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

# 5.2 定积分基本公式

主讲教师：王玉兰



高等数学

## 5.2 微积分基本公式

一、变上限积分函数

二、牛顿－莱布尼兹公式



# 一、变上限积分函数

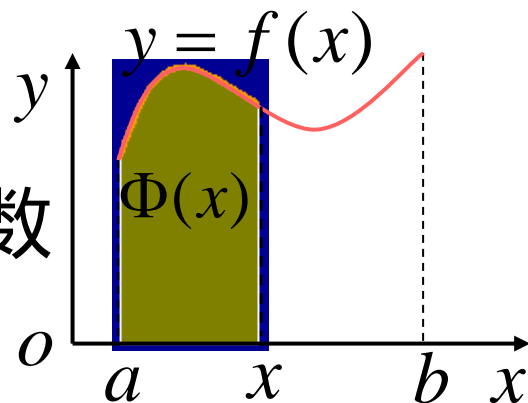
**定理1.** 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) \mathrm{d}t$$

是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

即

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \mathrm{d}t = f(x)$$





**证明：** 任取  $x \in [a, b]$ ，改变量  $\Delta x$  满足  $x + \Delta x \in [a, b]$ ，

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \left[ \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right] - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\end{aligned}$$

**由积分中值定理**

$$\Delta\Phi = f(\xi) \cdot \Delta x, \quad \text{即} \quad \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi) \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 和 } x + \Delta x \text{ 之间})$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时， $\xi \rightarrow x$ ；而  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x), \quad \text{于是 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x)$$

即  $\Phi(x)$  在  $x$  处可导，且  $\Phi'(x) = f(x), x \in [a, b]$ .

## 变限积分求导公式:(重点)

$$(1) \frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x)$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

**例1** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$ .

**解** 这属于  $\frac{0}{0}$  型的极限问题, 利用洛必达法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \arctan t dt \right]}{(x^2)'} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x)'}{(x)'} \\&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例2:** 求  $\left[ \int_{-1}^x \ln(1+t^2) dt \right]'$  .

**解:** 原式  $= \left[ \int_{-1}^x \ln(1+t^2) dt \right]' = \ln(1+x^2)$ .

**例3.** 求  $\left( \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \right)'$

**解:** 原式  $= e^{-\cos^2 x} \cdot (\cos x)' = e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x)$

**例4:** 求  $\left[ \int_{\cos x}^{\sin x} e^t dt \right]'$  .

**解:** 原式  $= e^{\sin x} \cdot (\sin x)' - e^{\cos x} (\cos x)'$   
 $= e^{\sin x} \cdot (\cos x) - e^{\cos x} (-\sin x)$ .

# 练习一

1: 求  $\left[ \int_{x^2}^{e^x} \sin t \, dt \right]'$ .

2: 设  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 \, dt$ , 求  $f'(\pi)$ .

3:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t \, dt}{x^4}$

$$\left[ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

1: 求  $\left[ \int_{x^2}^{e^x} \sin t dt \right]'$  .

解: 
$$\begin{aligned} \left[ \int_{x^2}^{e^x} \sin t dt \right]' &= \sin(e^x) \cdot (e^x)' - \sin(x^2) \cdot (x^2)' \\ &= e^x \cdot \sin e^x - 2x \cdot \sin x^2 \end{aligned}$$

$$\left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$$

2: 设  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$ , 求  $f'(\pi)$ .

**解:** 
$$f'(x) = \left( \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \right)' = \cos x \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x$$

$$f'(\pi) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

解：3、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^{x^2} \sin t dt \right)'}{(x^4)'} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \cdot (x^2)'}{4x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{4x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} \\&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



## 二、牛顿 – 莱布尼兹公式

**定理2.** 设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 则 
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

( 牛顿 - 莱布尼兹公式)

证明：由定理1可知，

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数，

设  $F(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的原函数，由原函数的性质：

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad (a \leq x \leq b, C \text{ 为常数})$$

在上式中，分别以  $x = b, x = a$  代入后相减，得

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**例1**

$$(1) \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{7}{3}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \boxed{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d(\textcolor{red}{2}x)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

**例2. 计算**  $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx.$

**解:**

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi$$

**例3. (1)**  $\int_a^a f(x) dx = F(x) \Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$

**(2)**  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$\int_b^a f(x) dx = F(x) \Big|_b^a = F(a) - F(b)$$

**即**

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

**(3)**  $\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = x \Big|_a^b = b - a$

# 练习二

---

1: 求下列定积分

$$(1) \int_0^1 5^x dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin x dx$$

$$(3) \int_{-2}^1 x^2 |x| dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 5^x dx &= \left. \frac{5^x}{\ln 5} \right|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5} \\ &= \frac{5}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \\ &= \frac{4}{\ln 5} \end{aligned}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin x \, dx &= -3 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left( -3 \cos \frac{\pi}{2} \right) - (-3 \cos 0) \\ &= (-3 \times 0) - (-3 \times 1) \\ &= 0 - (-3) = 3 \end{aligned}$$



$$|x| = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -x & , \quad -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-2}^1 x^2 |x| dx &= \int_{-2}^0 x^2 |x| dx + \int_0^1 x^2 |x| dx \\ &= \int_{-2}^0 x^2 \cdot (-x) dx + \int_0^1 x^2 \cdot x dx \\ &= \int_{-2}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx \\ &= -\frac{1}{4} x^4 \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} (0 - 16) + \frac{1}{4} (1 - 0) = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

# 5.3 定积分的计算法

主讲教师：王玉兰

高等数学



# 一、定积分的换元法 (重点)

**定理1.** 设函数  $f(x) \in C[a, b]$ , 单值函数  $x = \varphi(t)$  满足:

1)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有连续导数,  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ ;

2) 在  $[\alpha, \beta]$  上  $a \leq \varphi(t) \leq b$ ,

则 
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

**注意:**

1) 定积分的换元法在换元后, 积分上, 下限也要作相应的变换, 即“换元必换限”.

2) 换元公式也可反过来使用，即

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元  $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \, d\varphi(t)$

**例1** 求  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ .

**解:** 令  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2, dx = 2t dt$ ,

当  $x = 4$  时,  $t = 2$ , 当  $x = 9$  时,  $t = 3$ ,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx &= \int_2^3 \frac{t}{t-1} 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt \\ &= 2 \int_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left( t+1+\frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= 2 \times \left[ \left( \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) \right]_2^3 = 7 + \ln 4. \end{aligned}$$

**例2:** 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d(\sin x)$$

**解:** 令  $\sin x = t$ , 则  $\cos x dx = d(\sin x) = dt$ ,

当  $x = 0$  时,  $t = 0$ , 当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $t = 1$ , 则

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d(\sin x) = \int_0^1 t^4 dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

## 方法二：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x d(\sin x) \\&= \frac{1}{5} \sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{1}{5} \left( \sin \frac{\pi}{2} \right)^5 - \frac{1}{5} (\sin 0)^5 \\&= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

## 二、定积分的分部积分法

□ □ □

(重点)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**定理2.** 设  $u'(x), v'(x) \in C[a, b]$ , 则

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

或

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

易漏.



例3: 求  $\int_0^1 x e^x dx$ . 或记:  $\int x e^x dx$

$$= \int x d(e^x)$$

解:  $\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x d(e^x)$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= (e - 0) - \int_0^1 e^x dx$$
$$= e - e^x \Big|_0^1$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

$$= 1$$

例4: 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ .

解:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin x)$

$$= x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

分部积分

$$= \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right] - \left( -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[ \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

**例5.** 计算  $\int_1^2 \ln x dx$ .

**解:** 原式 =  $x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x d(\ln x)$

$$= (2 \cdot \ln 2 - 1 \cdot \ln 1) - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \ln 2 - \int_1^2 1 dx$$

$$= 2 \ln 2 - x \Big|_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - (2 - 1)$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

**例6.** 计算  $\int_0^1 \arctan x \, dx$ .

**解:** 原式 =  $x \cdot \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d(\arctan x)$

$$= (\arctan 1 - 0) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

## 练习三

求下列积分：

$$(1) \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

$$(2) \int_0^1 t e^{-t^2} dt$$

$$(3) \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$$

$$(4) \int_0^1 t e^{-t} dt$$

解:

$$\frac{1}{x} dx = d(1 + \ln x)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$\begin{aligned} (1) \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx &= \int_1^{e^3} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} d(1+\ln x) \\ &= \left( 2\sqrt{1+\ln x} \right) \Big|_1^{e^3} \\ &= \left( 2\sqrt{1+\ln e^3} \right) - \left( 2\sqrt{1+\ln 1} \right) \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_0^1 t \cdot e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t^2} d(-t^2)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$$

$$(3) \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx = \int_0^{\pi} x^2 d(\sin x)$$

$$\text{④} = \underline{x^2 \sin x} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, d(\underline{x^2}) \quad \text{⑤}$$

$$= (\pi^2 \cdot \sin \pi - 0) - \int_0^{\pi} 2x \sin x \, dx$$

两边同时分部积分

$$= -\int_0^{\pi} 2x \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2x \, d(\cos x)$$

$$= 2x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

$$= (2\pi \cos \pi - 0) - 2 \sin x \Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi - 2(\sin \pi - \sin 0) = -2\pi$$



$$(4) \int_0^1 t e^{-t} dt = - \int_0^1 t d(e^{-t})$$

$$= - \left[ t e^{-t} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-t} dt \right]$$

$$= - \left[ \left( 1 \times e^{-1} - 0 \times e^0 \right) + e^{-t} \Big|_0^1 \right]$$

$$= - \left[ e^{-1} + \left( e^{-1} - e^0 \right) \right]$$

$$= - \left( 2e^{-1} - 1 \right) = 1 - 2e^{-1}$$

# 5.4 反常积分 (广义积分)

主讲教师：王玉兰



高等数学

# 一、无穷限的反常积分

**定义1.** 设  $f(x) \in C[a, +\infty)$ , 取  $b > a$ , 若

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在, 则称此极限为  $f(x)$  的无穷限**反常积分**, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

这时称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  **收敛**; 如果上述极限不存在,

就称反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  **发散**.

类似地,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

若  $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ , 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

(  $c$  为任意取定的常数 )

只要有一个极限不存在, 就称  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  发散.

无穷限的反常积分也称为**第一类反常积分**.

若  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 引入记号

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x); \quad F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

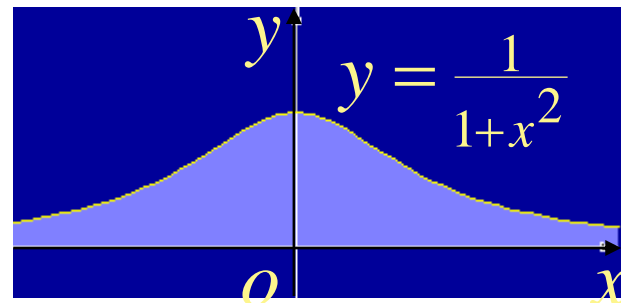
则有类似牛顿 – 莱布尼兹公式的计算表达式:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \text{数值} \Rightarrow \text{收敛}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

**例1.** 计算反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$



**解:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \text{(收敛)}$$

## 练习四

1: 求  $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$

2: 求  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

3: 求  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

**解:**

$$1: \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \cos \frac{1}{x} \bigg|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 - 0 = 1 \quad \textbf{(收敛)}$$



**解:** 2: 
$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} d(\ln x)$$

$$= -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right) - \left(-\frac{1}{\ln e}\right)$$

$$= 0 + 1 = 1 \quad \textbf{(收敛)}$$

解:

$$\begin{aligned} 3: \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx &= -\int_0^{+\infty} x d(e^{-x}) \\ &= -\left[ x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right] \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) - (-e^0) \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

(收敛)

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(3) \int_0^2 |1-x| dx$$

$$= \int_0^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx$$

$$= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= \left( x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_1^2$$

$$= \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left[ 0 - \left( -\frac{1}{2} \right) \right] = 1$$

# 5.5 定积分的应用

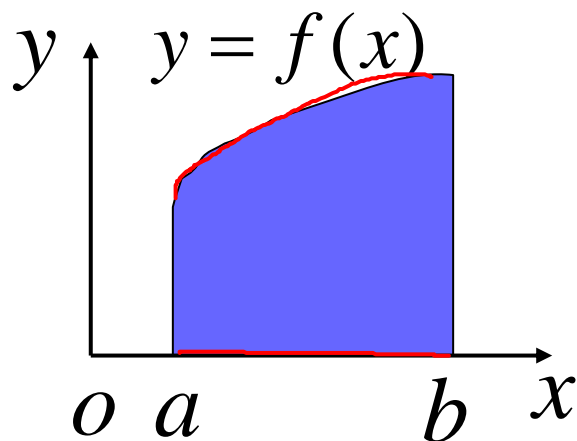
主讲教师：王玉兰



高等数学

# 一、平面图形的面积 (重点)

(1)

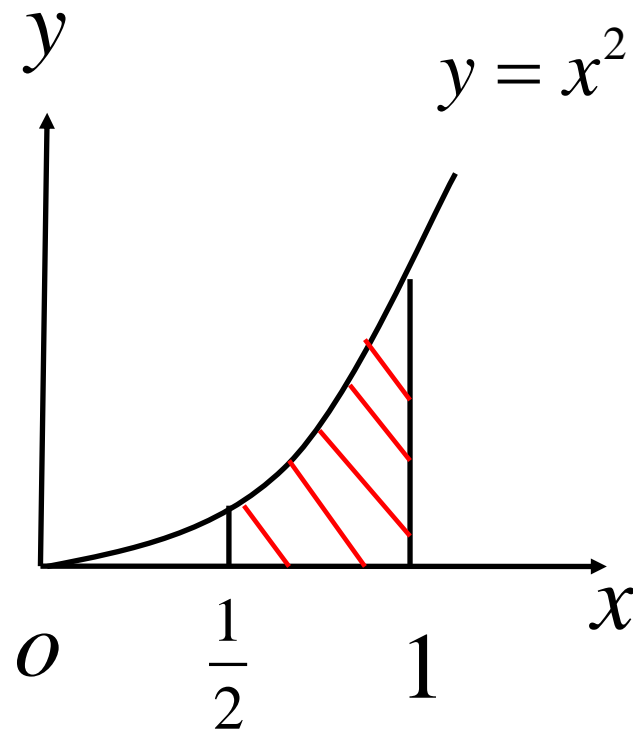


$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) - 0) dx$$

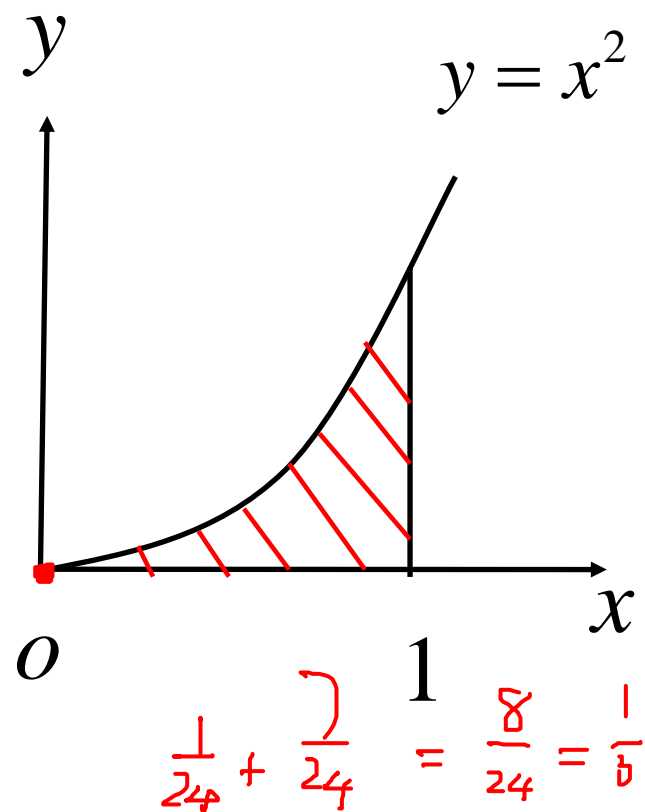
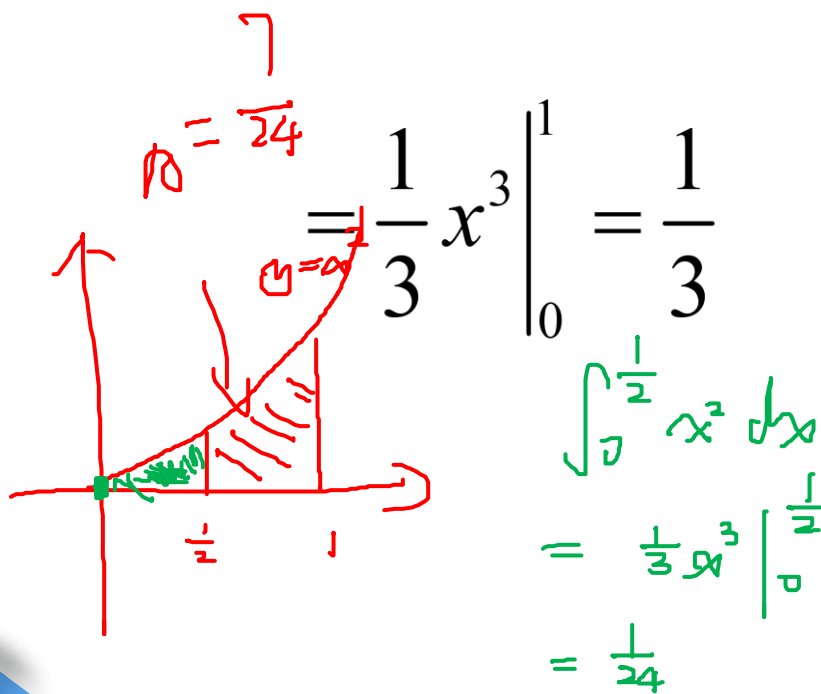
**例1. 计算曲线**  $y = x^2$ 、 $x = \frac{1}{2}$ 、 $x = 1$ 、 $y = 0$   
**所围图形的面积.**

**解:** 
$$A = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{24}$$

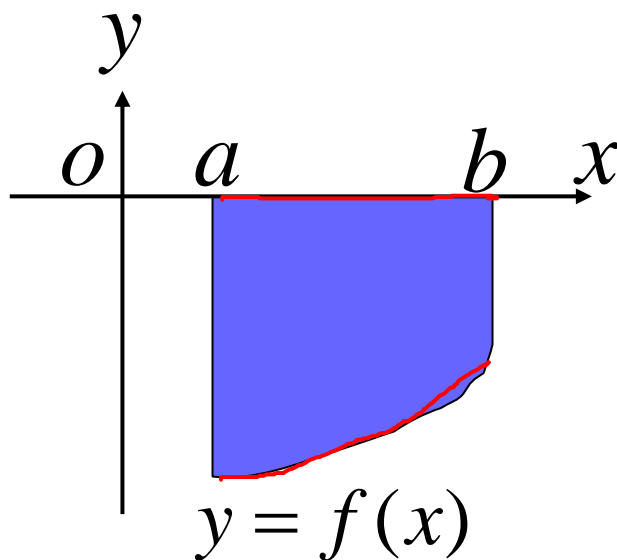


**例2. 计算曲线  $y = x^2$ 、 $x = 1$ 、 $y = 0$  所围图形的面积.**

**解:**  $A = \int_0^1 x^2 dx$



(2)



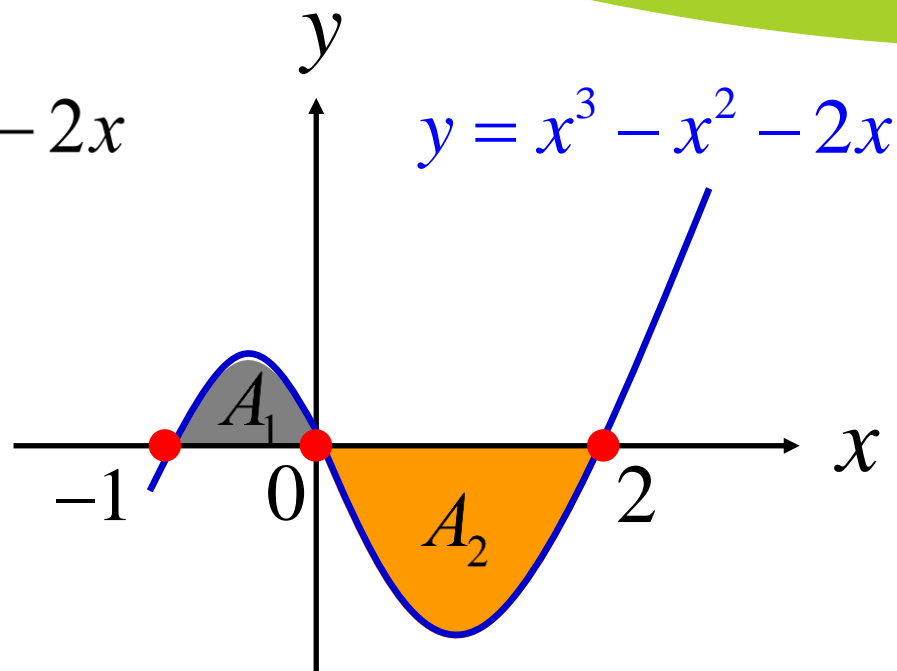
$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b [0 - f(x)] dx$



**例3. 计算曲线  $y = x^3 - x^2 - 2x$**   
**与  $x$  轴所围图形的面积。**

**解:**



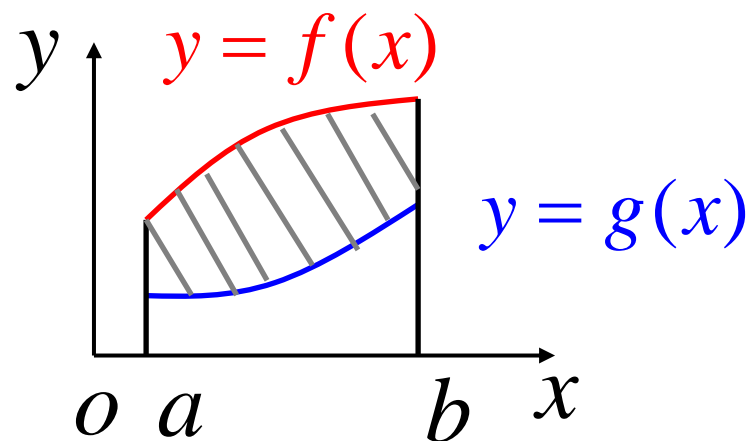
$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx$$

$$= \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 - \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

**(3)**



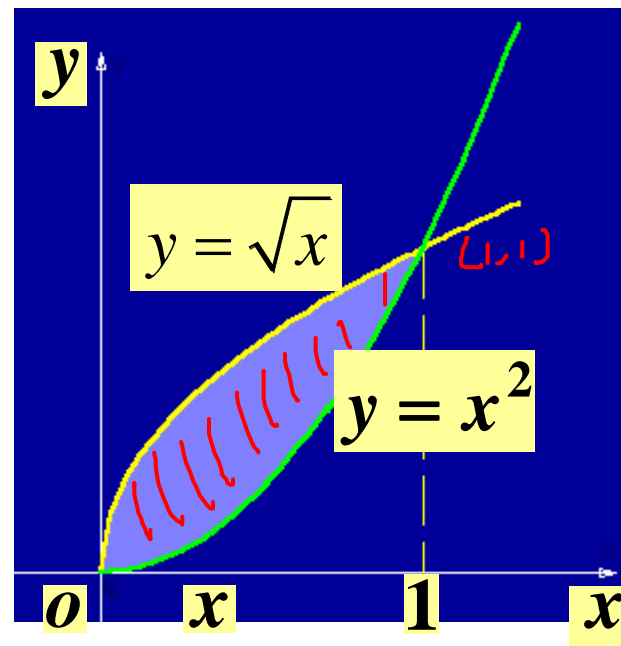
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx \end{aligned}$$

**例4. 计算两条抛物线  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$  在第一象限**  
**所围图形的面积.**

**解:** 由  $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}$

**得交点  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$**

$$\begin{aligned} \therefore A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

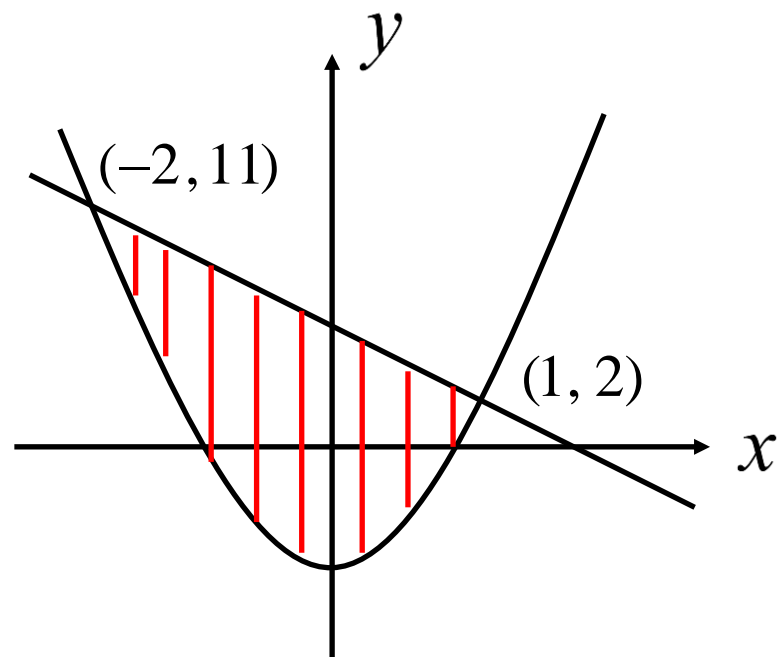


**例5.** 求由曲线  $y = 3x^2 - 1$  和直线  $y = 5 - 3x$

围成的平面图形面积。

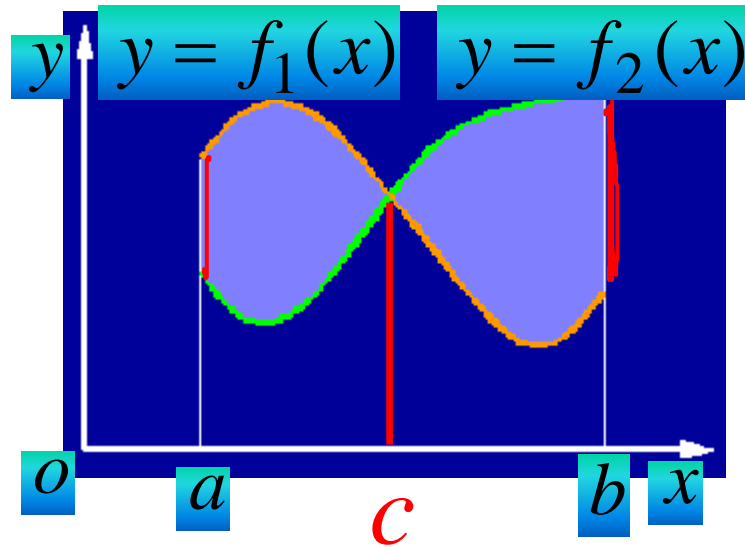
**解:** 由 
$$\begin{cases} y = 3x^2 - 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

得交点  $(-2, 11), (1, 2)$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 \left[ (5 - 3x) - (3x^2 - 1) \right] dx = \int_{-2}^1 (-3x^2 - 3x + 6) dx \\ &= \left( -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

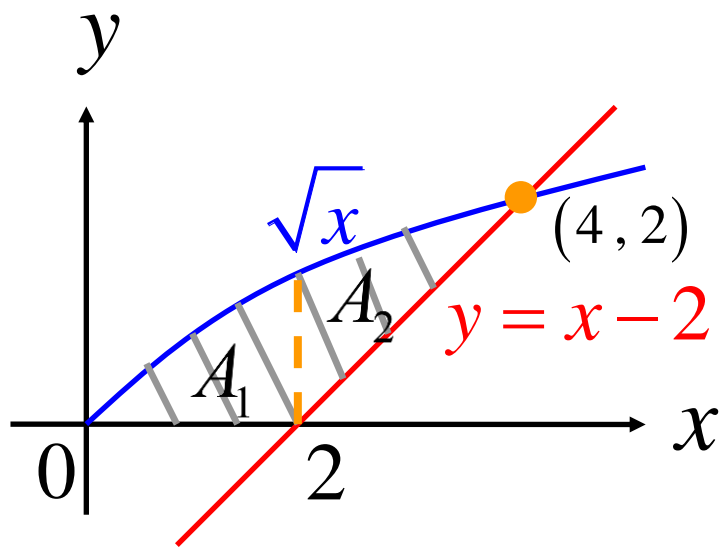
(4)



$$A = \int_a^c [f_1(x) - f_2(x)] dx + \int_c^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

**例6.** 求由曲线  $y = \sqrt{x}$  和直线  $y = x - 2$

以及  $x$  轴围成的平面图形面积。



**解:**  $A = A_1 + A_2$

$$= \int_0^2 (\sqrt{x}) dx + \int_2^4 [\sqrt{x} - (x - 2)] dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_2^4$$

$$= \frac{10}{3}$$

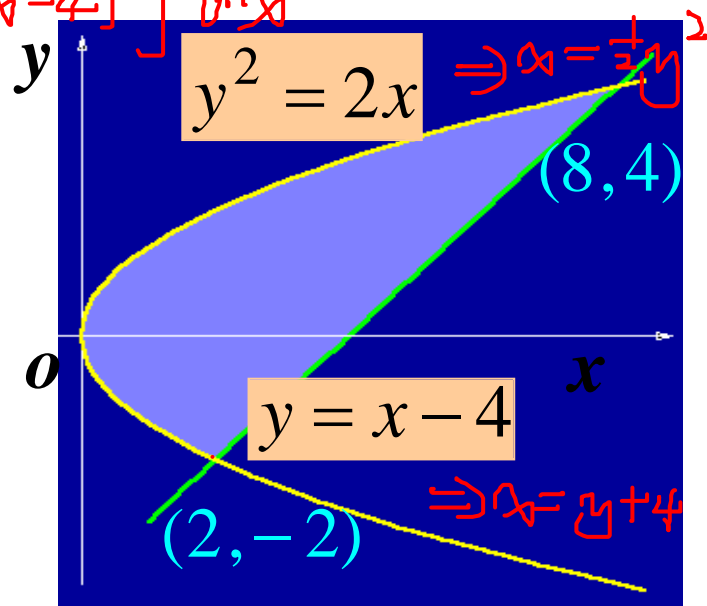
**例7. 计算抛物线  $y^2 = 2x$  与直线  $y = x - 4$  所围图形的面积.**

**解:** 由  $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$  得交点  $\int_2^8 [\sqrt{2x} - (x-4)] dx$

$$(2, -2), (8, 4)$$

为简便计算, 选取  $y$  作积分变量, 则有

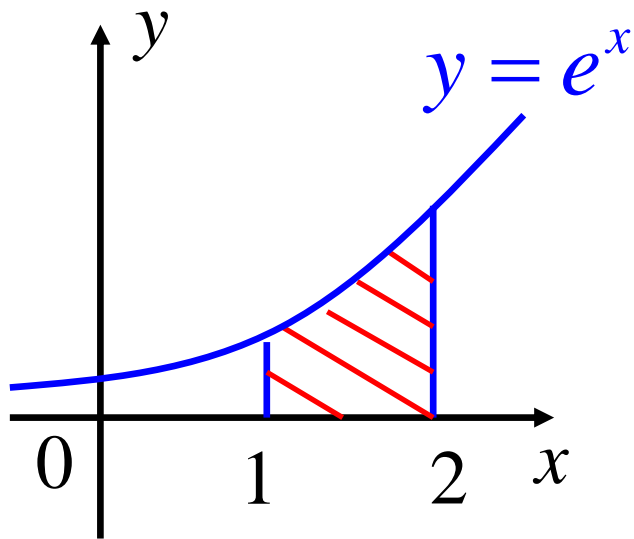
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \left( \underbrace{y+4}_{\text{右}} - \underbrace{\frac{1}{2}y^2}_{\text{左}} \right) dy \\ &= \left[ \frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{6}y^3 \right]_{-2}^4 = 18 \end{aligned}$$



## 习题课

### 二、求由下列曲线所围成的平面图形的面积

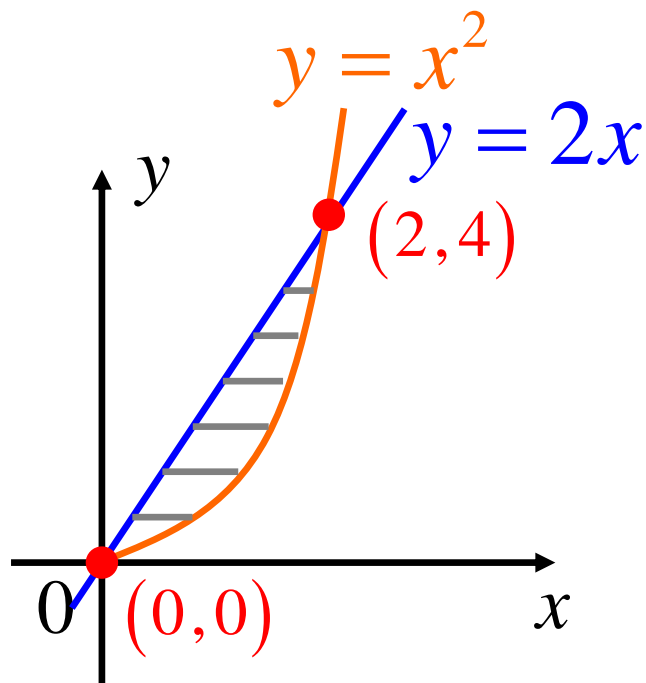
(1)  $y = e^x, y = 0, x = 1, x = 2$



解: 
$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 e^x dx \\ &= e^x \Big|_1^2 \\ &= e^2 - e \\ &= e(e-1) \end{aligned}$$



(2)  $y = x^2$ ,  $y = 2x$



解:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

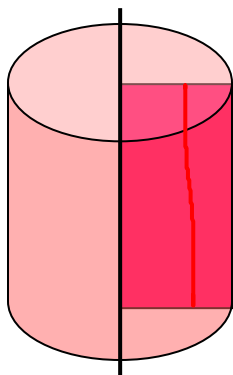
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

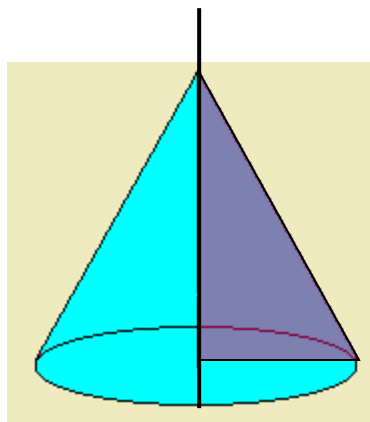
$$= \left( x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

## 二、旋转体的体积

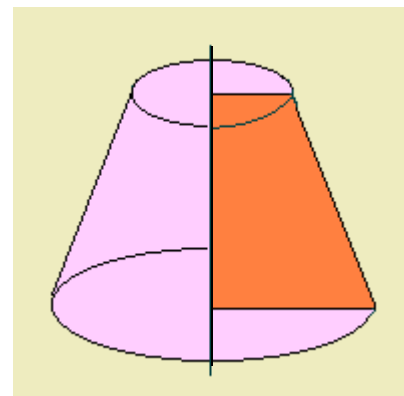
**旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴．**



圆柱



圆锥



圆台

**问题1：** 连续曲线段  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) 绕  $x$  轴  
轴旋转一周围成的立体体积时, 有

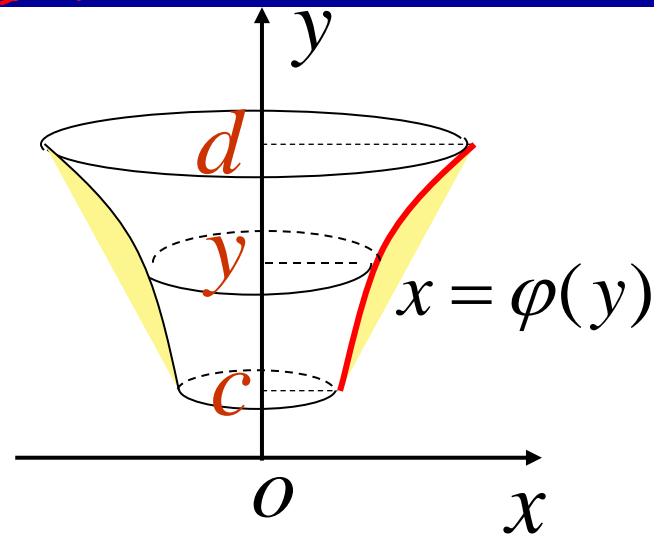
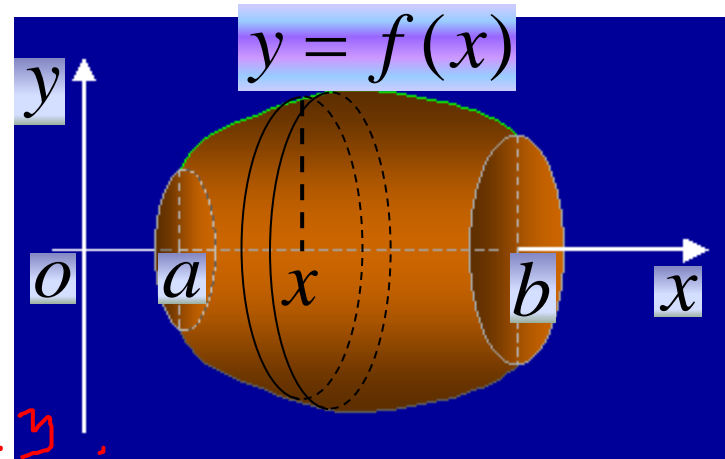
$$V_x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

**问题2：** 连续曲线段

$$x = \varphi(y) \quad (c \leq y \leq d) \quad \text{自变量是 } y$$

绕  $y$  轴旋转一周围成的立体体积时,  
有

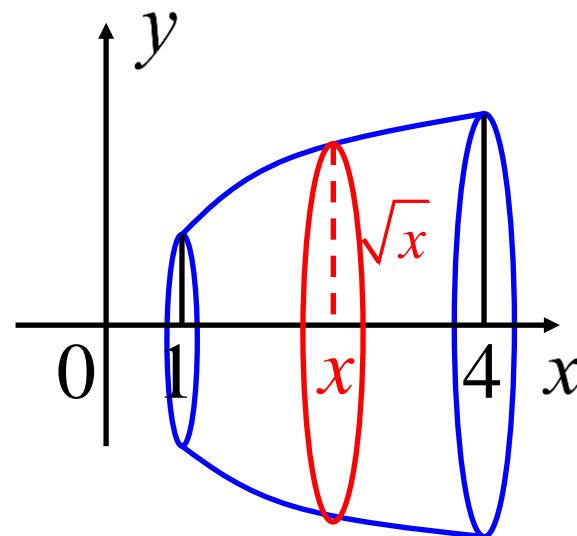
$$V_y = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$



**例8.** 求由  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积。

**解:**

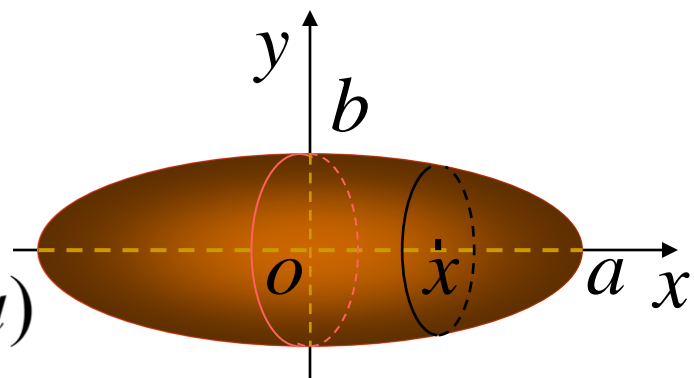
$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi x dx \quad \text{底面圆面积} \\ &= \frac{1}{2} \pi x^2 \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{2} \pi (16 - 1) = \frac{15}{2} \pi \end{aligned}$$



**例9.** 计算由椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围图形绕  $x$  轴旋转而成的椭球体的体积.

**解:**

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$



则

$$V = 2 \int_0^a \pi y^2 dx$$

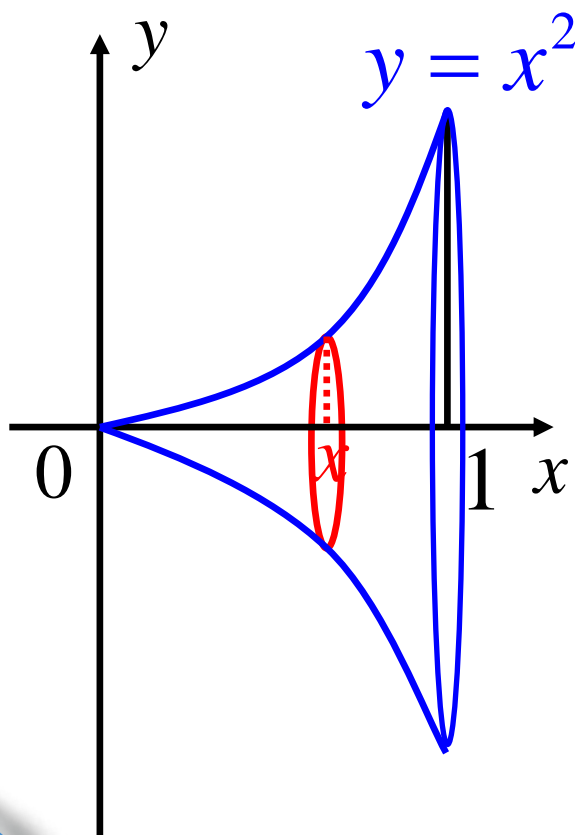
(利用对称性)

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left[ a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

### 三、求下列旋转体的体积

1、求由曲线  $y = x^2, x = 1, y = 0$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体体积。



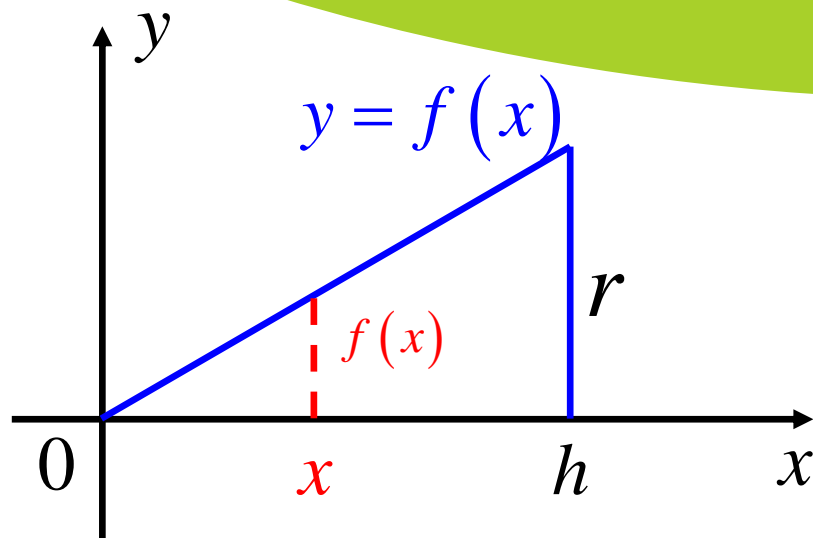
解：

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi [x^2]^2 dx \\ &= \int_0^1 \pi x^4 dx \\ &= \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

## 2、利用定积分求旋转体体积

的方法证明:

圆锥体积公式  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$



解:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi [f(x)]^2 dx = \int_0^h \pi \left[ \frac{r}{h} x \right]^2 dx \\ &= \int_0^h \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \times \left( \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^h \right) = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \times \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$