期末复习要求

一、函数的极限

1、熟知基本初等函数的定义域与值域

1、$y=\sin x$的定义域与值域

定义域$(-\infty,+\infty)$与值域为$[-1，1]$

2、$y=\arcsin x$的定义域与值域

定义域$[-1，1]$　值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

3、$y=\arccos\dfrac{x+1}{2}$的定义域与值域

$-1\le\dfrac{x+1}{2}\le 1,-3\le x\le 1,$定义域$[-3，1]$　值域$[0，\pi]$

二、特殊角的三角函数值与反三角函数值π

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\tan\frac{\pi}{4}=1,\sin\frac{\pi}{2}=1.\cos 0=1\cos\pi=-1$$

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4},\arcsin 1=\frac{\pi}{2},\arccos(-1)=\pi$$

$arcsin\frac{1}{2}$的含义：

1、表示一个弧度制的角度

2、其正弦值是$\frac{1}{2}$

3、这个角度在反正弦函数的值域$\left[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right]$内

设$\arcsin\frac{1}{2}=\alpha$, 则$\sin\alpha=\frac{1}{2}, \in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$$

$\arcsin(-x)=-\arcsin x, x\geq 0$

$arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$的含义：

1、表示一个弧度制的角度

2、其余弦值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3、这个角度在反正弦函数的值域$[0，\pi]$内

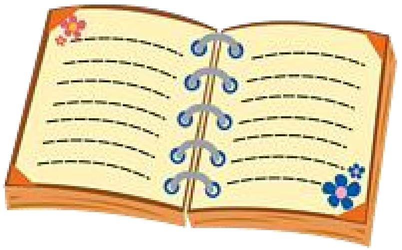
设$\mathrm{arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha$，则$cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha\in[0,\pi]$

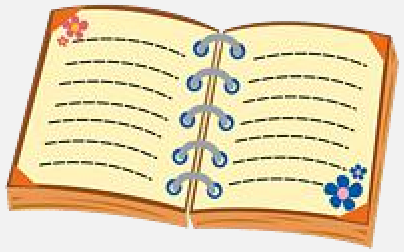
$\therefore arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

$arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

$\mathrm{arc}cos(-x)=\pi-\mathrm{arc}cosx,x\geq 0$





$arctan1$的含义：

1、表示一个弧度制的角度

2、其正切值是1

3、这个角度在反正弦函数的值域内$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore arctan1=\frac{\pi}{4}$

$arctan(-1)=-arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$

设$\mathrm{arctan}1=\alpha$，则$tan\alpha=1,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arctan}(-x)=-\mathrm{arctan}x, x\geq 0$

$arc\mathrm{cot}\sqrt{3}$的含义：

1、表示一个弧度制的角度

2、其余切值是$\sqrt{3}$

3、这个角度在反正弦函数的值域$(0,\pi)$内

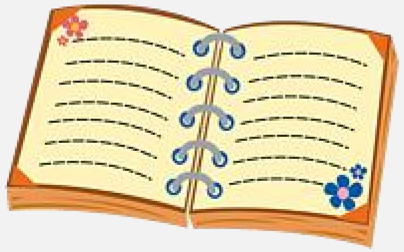
$\therefore arc\mathrm{cot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$

$arc\mathrm{cot}(-\sqrt{3})=\pi-arc\mathrm{tan}(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

设$\mathrm{arccot}\sqrt{3}=\alpha$，则$cot\alpha=\sqrt{3},\alpha\in(0,\pi)$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

$\mathrm{arc}cot(-x)=\pi-\mathrm{arccot}x, x\geq 0$



$arctan1$的含义：

1、表示一个弧度制的角度

2、其正切值是1

3、这个角度在反正弦函数的值域内 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore arctan1=\frac{\pi}{4}$

$arctan(-1)=-arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$

设$\mathrm{arctan}1=\alpha$，则$tan\alpha=1,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$

$\mathrm{arctan}(-x)=-\mathrm{arctan}x, x\geq 0$

$arc\mathrm{cot}\sqrt{3}$的含义：

1、表示一个弧度制的角度

2、其余切值是$\sqrt{3}$

3、这个角度在反正弦函数的值域$(0,\pi)$内

$\therefore arc\mathrm{cot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$

$arc\mathrm{cot}(-\sqrt{3})=\pi-arctan(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

设$\mathrm{arccot}\sqrt{3}=\alpha$，则$cot\alpha=\sqrt{3},\alpha\in(0,\pi)$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

$\mathrm{arc}cot(-x)=\pi-\mathrm{arccot}x, x\geq 0$

2、$\frac{0}{0}$型极限可用因式分解或用洛必达法则求解

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

洛必达解

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{1}=2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)=3$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-x-2)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to2}\frac{2x-1}{1}=3$$

3、用无穷小于有界函数的积仍是无穷小求极限

(1)、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$

(2)、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\cos x=0$

4、等价无穷小的替换求极限(熟记8个等价式及推广)

$$(1)、\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x}=-2$$

$$(2)、\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$$

$$(3)、\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x}=4$$

5、$\frac{\infty}{\infty}$型用有理分式函数极限的结论求

$$(1)、\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty\left(\text{分子的最高次幂高于分母的最高次幂：结论为}\infty\right)$$

$$(2)、\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{5x^2}=\frac{2}{5}\left(\begin{array}{l}\text{分子的最高次幂=分母的最高次幂：}\\\text{结论为分子与分母最高次项的系数比}\end{array}\right)$$

$$(3)、\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{3x^6}=0\left(\text{分子的最高次幂小于分母的最高次幂；结论为}0\right)$$

6、利用等价无穷小与有界函数的积仍是无穷小求极限

$$(1)、\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\sin x=0,$$

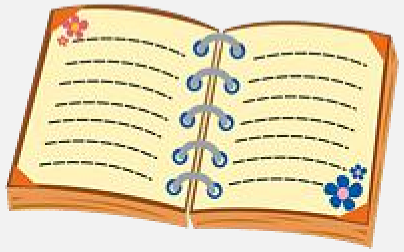
$$(2)、\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

$$(3),\lim_{x\to 0}x^2\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\cos x=0$$

$$\lim$$



7、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ =e、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ =e或它们的推广形式求极限

$$(1)、\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

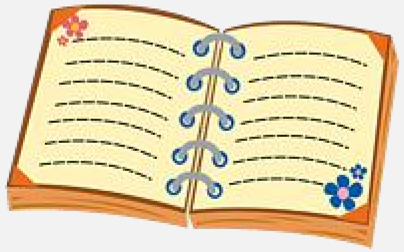
$$(2)、\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{x}\right)^{\frac{-x}{4}}\right]^{-8}=e^{-8}$$

$$(3)、\lim_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-6x)^{\frac{1}{-6x}}\right]^{-6}=e^{-6}$$

$$(4)、\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+3x}{2+3x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{3x}}{1+\frac{2}{3x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]^{3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}}=\frac{e^{3}}{e^{\frac{2}{3}}}=e^{3-\frac{2}{3}}=e^{\frac{7}{3}}$$

8、简单的分段函数在分断点处的极限



$$f(x)=\begin{cases}1, x \prec 0\\ 3x-1, x \succ 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

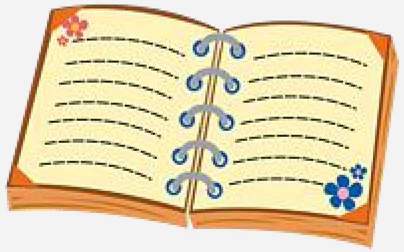
$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) \cancel{=\infty}$$ 不存在

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}1+2x, x \succ 0\\ 3x+1, x \prec 0\end{cases}$$，求 $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+1) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x+1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$



9、判断函数是无穷大还是无穷小

(1)、$f(x)=2x-1$,在$x\to 0$时

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1$,$\therefore$在$x\to 0$时$f(x)$不是无穷小也不是无穷大

$(2)\ f(x)=3x-1$,x取何值是无穷大与无穷小

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}(3x\text{-}1)=0$,$\therefore x\to \frac{1}{3}$时$f(x)$是无穷小

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty}(3x+1)=\infty$

$\therefore$ 在$x\to \infty$ $f(x)$是无穷大

(3)、$f(x)=\dfrac{1}{x}$,在$x\to 0$,为无穷大，$x\to \infty$,为无穷小

9、判断函数间断点的类型

(1)、$f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$,

$\therefore \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1}{(2x-1)}=\infty$,$\therefore$ 在$x=\dfrac{1}{2}$是$f(x)$的第二类无穷间断点

(2)、$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, $x=0$是第二类振荡间断点

$(3)\, f(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{(3x\text{-}1)(3x+1)}{(3x\text{-}1)}=2$,$\therefore x=\dfrac{1}{3}$时$f(x)$的第一类可去间断点

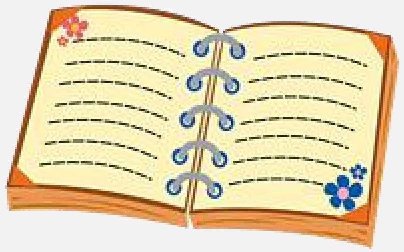
(4)、$=\begin{cases} x+1, x\geq 0 \\ 2x, x\prec 0 \end{cases}$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0$

$\therefore x=0$是第一类跳跃间断点

二、导数



1、导数公式 （每一个导数公式均是考点，请同学们注意）

$$\left(x^{5}\right)'=5x^{5\text{-}1}=5x^{4},\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x},\left(\sin x\right)'=\cos x$$

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{1+x^{2}}$$

$$\left(2^{x}\right)'=2^{x}\ln 2$$

2、导数的四则运算法则 熟 记所有导数四则运算法则（此内容不含复合函数的运算）

和差导数公式： $(u\pm v)'=u'\pm v'$

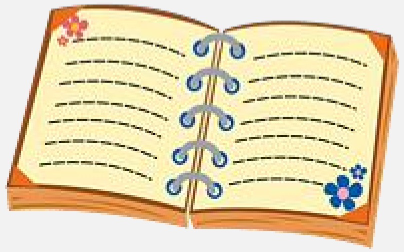
(1)、$\left(2x^{2}+3x-5\right)'=4x+3$

例：求下列函数的导数

$y=e^{x}+2x$ $y=e^{x}\pm 2^{x}$ $y=e^{x}-\sin x$ $y=x^{3}\pm\ln x$ $y=\sin x\pm\cos x$

$y=\arcsin x\pm\arccos x$ $y=\arctan x\pm\operatorname{arc}\cot x$ $y=\sec x\pm\tan x$

导数的四则运算法则



乘积导数公式： $(uv)' = u'v + uv'$

$$(2)、\left(x^2e^x\right)' = \left(x^2\right)' e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x$$

例：求下列函数的导数

$y = x^2 \sin x$ $\quad y = x^2 \cos x$ $\quad y = x^3 \ln x$ $\quad y = x^2 \arcsin x$ $\quad y = 3x \ln x$

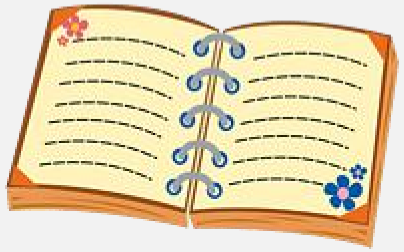
$y = x^2 \arccos x$ $\quad y = x^2 \arctan x$ $\quad y = e^x \sin x$

商的导数公式： $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$(3)、\left(\frac{2x^2+3x-1}{x+2}\right)' = \frac{\left(2x^2+3x-1\right)'(x+2)-\left(2x^2+3x-1\right)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(4x+3)(x+2)-\left(2x^2+3x-1\right)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+11x+6-\left(2x^2+3x-1\right)\times 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$



商的导数公式： $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

例：求下列函数的导数

$y = \frac{2x}{\ln x}$ $\quad y = \frac{e^x}{\cos x}$ $\quad y = \frac{4}{x}$

$y = \frac{2}{x+1}$ $\quad y = \frac{3}{x-1}$ $\quad y = \frac{e^x}{x}$

3、导数的几何意义

曲线上点$\left(x_0, y_0\right)$在曲线y=$f\left(x\right)$上

则$f'\left(x_0\right)$是过曲线上点$\left(x_0, y_0\right)$切线的斜率

已知曲线上点$\left(1,2\right)$在曲线y=$2x^2$上，求过此点的切线方程与法线方程

$$k_{切}=f'\left(1\right)=\left(4x\right)\Big|_{x=1}=4$$

切线方程为 $y-2=4\left(x-1\right)$

$$k_{法}=-\frac{1}{k_{切}}=-\frac{1}{4}$$

法线方程为 $y-2=-\frac{1}{4}\left(x-1\right)$

例：

求曲线 $y=x^2$ 在$(1,1)$ 处的切线方程和法线方程。

求曲线 $y=x^3$ 在$(1,1)$ 处的切线方程。

求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在$(2,\frac{1}{2})$处的切线方程。

求曲线$y=3x^2$ 在$(1,3)$ 处的切线方程。

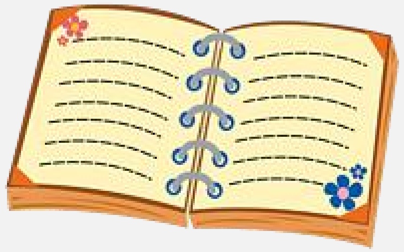
求曲 线 $y=x^2+2$ 在$(1,3)$处的切线方程。

求曲 线$y=x^2+x+1$ 在$(1,3)$ 处的切线方程。

求曲 线 $y=x^3-1$ 在$(1,0)$ 处的切线方程。

求曲 线 $y=\sin x$ 在 $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 处的切线方程。

复合函数



4、复合函数的求导，以2次复合为主

求下列函数的导数

(1)、$y=\sin\left(2x^2+3x-1\right)$,

$y=\sin u, u=2x^2+3x-1$

$$y'=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\cdot(4x+3)=(4x+3)\cos\left(2x^2+3x-1\right)$$

$(2)\ y=\ln\left(3x^3+5x^2-3\right)$

$y=\ln u, u=3x^3+5x^2-3$

$$y'=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left(9x^2+10x\right)=\frac{9x^2+10x}{3x^3+5x^2-3}$$

(2)、$y=(2x+1)^5$

$y=u^5, u=2x+1$

$$y'=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=5(2x+1)^4\cdot 2=10(2x+1)^4$$

5、隐函数求导

求下列隐函数的导数x

(1)、$x^2+3y^3-2xy-2=0$

解:$\left(x^2+3y^3-2xy-2\right)'=0$

$2x+9y^2y'-2\left(x'y+xy'\right)=0$

$9y^2y'-2xy'=2y-2x$

$$y'=\frac{2y-2x}{9y^2-2x}$$

(2)、$\mathrm{e}^{x^2}+\sin y^3-x^3+2y-2=0$

解:$\left(e^{x^2}+\sin y^3-x^3+2y-2\right)'=0$

$2xe^{x^2}+3y^2\cos y^3y'-3x^2+2y'=0$

$\left(3y^2\cos y^3+2\right)y'=3x^2-2xe^{x^2}$

$$y'=\frac{3x^2-2xe^{x^2}}{\left(3y^2\cos y^3+2\right)}$$

6、幂指函数求导

求幂指函数的导数x

(1)、$y = x^{\cos x}$

解：$\ln y = \cos x \ln x$

$$(\ln y)' = (\cos x \ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = (\cos x)' \ln x + \cos x (\ln x)'$$

$$y' = y\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) = x^{\cos x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

7、高阶导数二阶为主

求函数的二阶导数x

(1)、$\mathrm{y}=2x^{3}+3x^{2}+1$

解：$\mathrm{y}'=\left(2x^{3}+3x^{2}+1\right)'=6x^{2}+6x$

$y''=\left(6x^{2}+6x\right)'=12x+6$

(2)、$y=\dfrac{1}{x-1}$

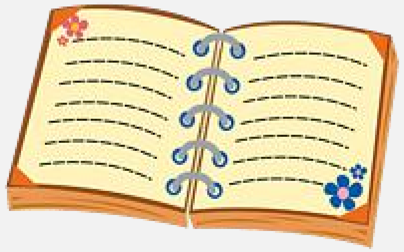
$\mathrm{y}'=\dfrac{-1}{(x-1)^{2}},y''=-\dfrac{-2(x-1)}{(x-1)^{4}}=\dfrac{2}{(x-1)^{3}}$

(3)求$y=x^{5}$的4阶导数与6阶导数

$y'=5x^{4},y''=20x^{3},y'''=60x^{2},y^{(4)}=120x$，$y^{(6)}=0$

(4)、求$y=e^{x}$的n阶导数

$\mathrm{y}^{(n)}=e^{x}$



8、求微分 此类的所有类型的微分均转化为先求导数，再$dy = y'dx$

求微分

(1)、$y = x^2 \sin x$

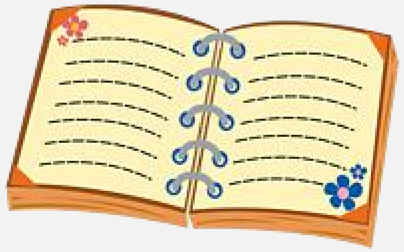
$y' = 2x\sin x + x^2 \cos x, dy = \left(2x\sin x + x^2 \cos x\right)dx$

$(2)\ x^2 + 2xy - y^3 + 1 = 0$确定函数$y = f(x)$

$2x + 2\left(x'y + xy'\right) - 3y^2 y' = 0$

$\left(2x - 3y^2\right)y' = -2x - 2y, y' = \dfrac{-2x - 2y}{2x - 3y^2}$

$dy = y'dx = \dfrac{-2x - 2y}{2x - 3y^2}dx$



三、导数的应用

1、求函数$y=x^3-3x+1$的单调区间与极值、驻点x

$y'=3x^3-3=3(x+1)(x-1)$

令$y'=0$,解得驻点为$x_1=-1, x_2=1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

$$f_{极大值}(-1)=(-1)^3-3\times(-1)+1=3$$

$$f_{极小值}(1)=(1)^3-3\times(1)+1=-1$$

单调增区间为$(-\infty,-1]$、$[1,+\infty)$

单调减区间为$[-1,+1]$

函数在驻点$x_1=-1$处取得极大值3，

函数在驻点$x_2=1$处取得极小值-1，函数的驻点为$x_1=-1$，$x_2=1$

1、函数 $y=2x$在区间$[-1,1]$上的最大值是

A、1

B、0

C、2

D、3

答案：C

$$y'=2,\therefore y'=0\text{无解}$$

$$f(-1)=-2,f(1)=2,\therefore \text{函数的最大值是}2\text{，最小值是}-2$$

2、求函数$y=x^2+2x-1$在$x\in[0,1]$区间上的最值

$$y'=2x+2,\text{令}y'=0,\text{解得}x=-1\notin[0,1]\text{舍去}$$

$$f(0)=-1,f(1)=2$$

$$\therefore \text{函数的最大值是}2\text{，最小值是}-1$$

函数 $y=2x$ 的单调增区间为 （ ）

A、$(-\infty,+\infty)$

B、$[0,+\infty)$

C、$(-\infty,0]$

D、3

答案：A

3、洛必达法则求极限

(1)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}$

解1：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

解2用洛必达法则：　　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x}{2}=\dfrac{3}{2}$

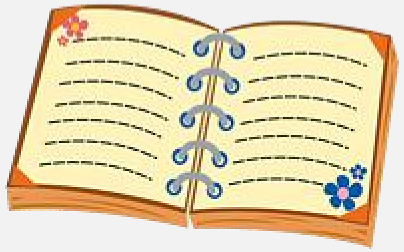
题目要求用洛必达法则但此次考试没有过程，

只要答案所以可以用任何会的方法解答，不必一定用洛必达法则

(2)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

解1：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

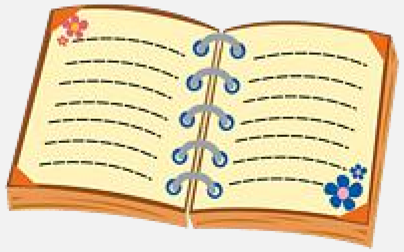


$$(3)、\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{1}=0$$

$$(4)、\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{1}=2$$



四、不定积分

1、所有积分公式及其推广

$$\int dx = x + c$$

$$\int -2dx = -2x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

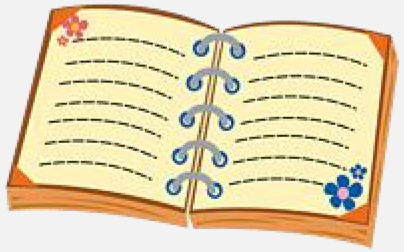
$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c = \int x^{-2}dx$$

$$\int \sqrt[4]{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{1+\frac{3}{4}}x^{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$$

2、不定积分得个性质



(1)直接积分法求不定积分

$$\int\left(2x+\sin x+\frac{1}{x}\right)dx=\int 2xdx+\int \sin xdx+\int \frac{1}{x}dx$$

$$x^2-\cos x+\ln|x|+c$$

(2)、

$$\int \frac{x^2-1}{x+1}dx=\int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx$$

$$=\int (x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+c$$

(3)、$\int \frac{(1+2x)^2}{x}dx$

$$=\int \frac{4x^2+4x+1}{x}dx=\int 4x^2dx+\int 4dx+\int \frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{4}{3}x^3-4x+\ln|x|+c$$

(1)直接积分法求不定积分

$$\int\left(2x+\sin x+\frac{1}{x}\right)dx=\int 2xdx+\int \sin xdx+\int \frac{1}{x}dx$$

$$x^2-\cos x+\ln|x|+c$$

(2)、

$$\int \frac{x^2-1}{x+1}dx=\int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx$$

$$=\int (x-1)dx=\frac{1}{2}x^2-x+c$$

$$(3)、\int \frac{(1+2x)^2}{x}dx$$

$$=\int \frac{4x^2+4x+1}{x}dx=\int 4x^2dx+\int 4dx+\int \frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{4}{3}x^3-4x+\ln|x|+c$$

$$(4)、\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx+\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$

$$=\int \sec^2 xdx+\int \csc^2 xdx=\tan x-\cot x+c$$

2、凑微分法

$$(5)、\int (1+2x)^7 dx$$

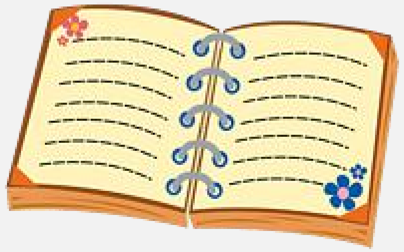
$$=\frac{1}{2}\int (1+2x)^7 d(1+2x)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{7+1}(1+2x)^8+c=\frac{1}{16}(1+2x)^8+c$$

$$(6)、\int \frac{1}{3x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{3x+1}d(3x)=\int \frac{1}{3x+1}d(3x+1)$$

$$=\ln|3x+1|+c$$



$$(7)、\int xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

$$(8)、\int \sin^2 x\cos xdx$$

$$=\int \sin^2 xd\sin x=\frac{1}{3}\sin^3 x+c$$

$$(9)、\int \frac{1}{x^2+1}\arctan^2 xdx$$

$$=\int \arctan^2 xd\frac{1}{x^2+1}$$

$$=\int \arctan^2 xd\arctan x$$

$$=\frac{1}{3}\arctan^3 x+c$$

3、第二类换元积分法

$$(10)、\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$$

令$\sqrt{x}=t, x=t^2, dx=2tdt$

$$原式=\int \frac{1}{t+1}2tdt = 2\int \frac{t}{t+1}dt$$

$$=2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int \frac{(t+1)}{t+1}dt - 2\int \frac{1}{t+1}dt$$

$$=2t-2\ln|1+t|+c$$

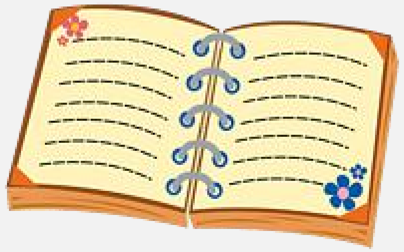
$$=2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

4、分部积分法

分部积分公式$\int udv = uv - \int vdu$

分部积分公式$\int udv = uv - \int vdu$

$$\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$



$$xdx = dv$$

$$\int x\ln xdx = \int \ln xd\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2 d\ln x,$$

$$v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2\left(令c=0\right)$$

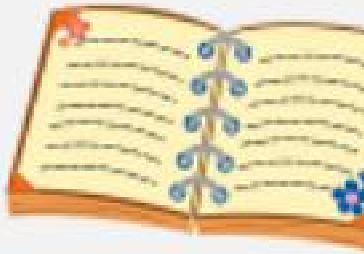
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2(\ln x)'dx$$

$$d\ln x = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx$$

用过分部积分法得到的积分要算出微分并化简后才可以知道新积分是否易积

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$



$$\int xe^x dx = \int e^x (xdx) = \frac{1}{2}\int e^x dx^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x x^2\right) - \frac{1}{2}\int x^2 de^x$$

de^x 继续微分出来才能知道积分是否能够积出

$= \frac{1}{2}\left(e^x x^2\right) - \frac{1}{2}\int e^x x^2 dx$这样积分越来越难积出，

说明我们选的u、v不合适再重新选，共有两种选法

若重选的u、v还是积分难以积出则选择其它积分方法

$$(23)\quad \int x^2 \ln x\, dx = \int \ln x \cdot \boxed{x^2\, dx} = \int \ln x\, d\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

基本积分公式

（1）$\int k dx = kx + C$ （2）$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ （其中 $n \neq -1$ ）

（3）$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ （4）$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

（5）$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

（6）$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(1) $\int 5dx = 5x + C$

(2) $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$

(3) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

直接积分法

(1) $$\int\left(e^x-2\cos x+3x^2\right)dx=\int e^x dx-\int 2\cos x dx+\int 3x^2 dx$$

$$=\int e^x dx-2\int \cos x dx+3\int x^2 dx$$

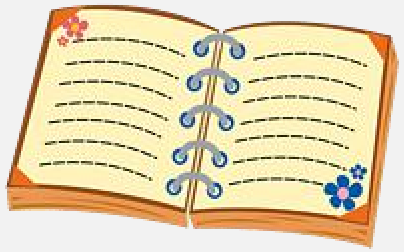
$$=e^x-2\sin x+x^3+C$$

(2) $$\int 2^x\cdot 3^x\cdot e^x dx=\int(2\cdot 3\cdot e)^x dx=\int(6e)^x dx=\frac{(6e)^x}{\ln 6e}+C$$

(3) $\int\left(\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\right)dx=\int\left(2-5\cdot\frac{2^x}{3^x}\right)dx=\int\left[2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx$

$$=2x-5\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C$$

(4) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan x+C$



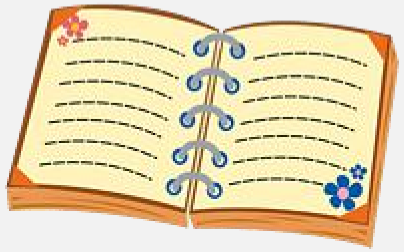
$$(5)\quad \int \frac{3x+5}{x}dx = \int\left(3+\frac{5}{x}\right)dx = 3x+5\ln|x|+C$$

$$(6)\quad \int \frac{3x^4+3x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{3x^2\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx = \int 3x^2\,dx = x^3+C$$

$$(7)\quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{\left(e^x\right)^2-1}{e^x+1}dx = \int \frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{e^x+1}dx = \int\left(e^x-1\right)dx$$

$$= e^x - x + C$$

凑微分法

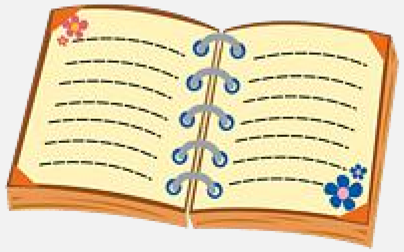


(1) $$\int (3x-1)^2 dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^2 d(3x-1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x-1)^3 + C$$

$$= \frac{1}{9}(3x-1)^3 + C$$

(2) $$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \boxed{\cdot\, xdx} = \int e^{x^2} d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d\left(x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$



$$(3)\quad \int \cos x \cdot \sin^3 x\, dx = \int \sin^3 x \cdot \boxed{\cos x\, dx} = \int \sin^3 x\, d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

$$(4)\quad \int \frac{2x-3}{x^2-3x+4}\, dx = \int \frac{1}{x^2-3x+4} \cdot \boxed{(2x-3)\, dx}$$

$$= \int \frac{1}{x^2-3x+4}\, d(x^2-3x+4)$$

$$= \ln\left|x^2-3x+4\right| + C$$

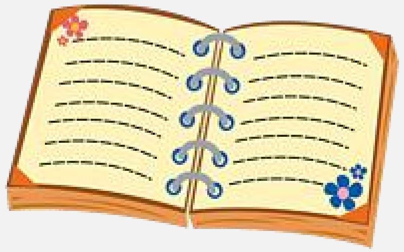
$$(5)\quad \int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(3x)^2}d(3x)$$

$$=\frac{1}{3}\arctan 3x + C$$

$$(6)\quad \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+e^x}\cdot \boxed{e^x\,dx} = \int \frac{1}{1+e^x}d\left(e^x+1\right)$$

$$=\ln\left|e^x+1\right|+C$$

$$=\ln\left(e^x+1\right)+C$$

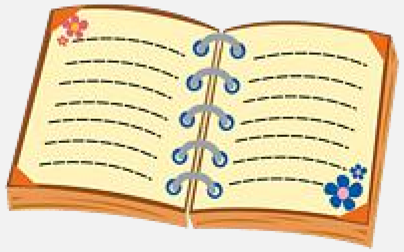


$$(7)\quad \int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^{x}}{1+\left(e^{x}\right)^{2}}dx = \int \frac{1}{1+\left(e^{x}\right)^{2}} \boxed{\cdot e^{x}dx}$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(e^{x}\right)^{2}} d\left(e^{x}\right)$$

$$= \arctan e^{x} + C$$

第二类换元积分法



(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

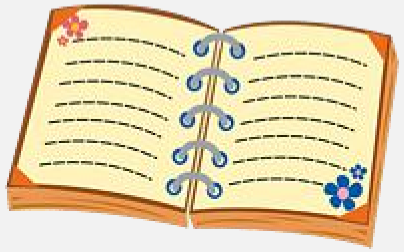
解： 令 $\sqrt{x}=t$ ， 得到 $x=t^2$ ， $d(x)=d(t^2) \Rightarrow dx = 2t\,dt$

原积分 $= \int \frac{t}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t}dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 2\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$

$= 2\left(\frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1|\right) + C = t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C$

$= x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$

$\boxed{t=\sqrt{x}}$



(2) $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

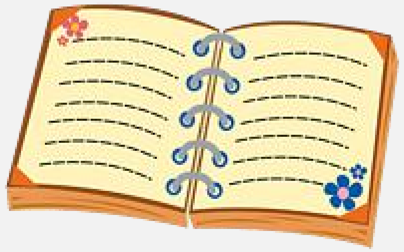
解： 令 $\sqrt{1+x}=t$， 得到 $x=t^2-1$，$d(x)=d(t^2-1) \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$原积分 = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\int t^2(t^2-1)dt = 2\int (t^4-t^2)dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C = \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$

$$= \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$$

分部积分法



(1) $\int x \cdot \boxed{e^x dx} = \int x d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

(2) $\int x \cdot \boxed{\sin x dx} = \int x d(-\cos x) = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx$

$= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx$

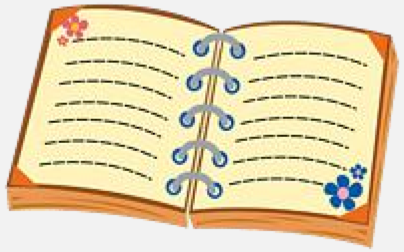
$= -x \cdot \cos x + \sin x + C$

$$(3)\quad \int x\boxed{\cos x\,dx} = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C$$

$$(4)\quad \int x\boxed{e^{2x}dx} = \frac{1}{2}\int x d(e^{2x}) = \frac{1}{2}\left[\, xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{\boxed{2x}} d(2x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$



$$(5)\quad \int x\boxed{\cdot \sin 2xdx} = \frac{1}{2}\int xd\left(-\cos 2x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int xd\left(\cos 2x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\cdot\cos 2x - \int \cos 2xdx \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x\cdot\cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos\boxed{2x}d\left(2x\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

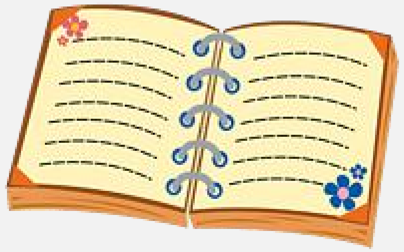
$$(6)\quad \int x\cdot\ln x dx = \int \ln x\cdot \boxed{xdx} = \int \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2 d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$



$$(7)\quad \int \underline{\ln x}\, d\boxed{x} = x\ln x - \int x d(\ln x)$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x - \int 1dx$$

$$= x\ln x - x + C$$