第六讲 无穷小的比较

- 内容概要
- 一、无穷小的比较
- 二、等价无穷小替换
- 三、小结 思考题

一、无穷小的比较

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2\sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,$ x^2比$3x$要快得多；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$ $\sin x$与x大致相同；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义：设α,β是同一过程中的两个无穷小，且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，

记作$\beta = o(\alpha)$；

(2) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小；

特殊地 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小；

记作$\alpha \sim \beta$；

(3) 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C (C \neq 0, k > 0)$，就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶的

无穷小.

例1

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\quad$ (当$x\to 0$时, $\sin x\sim x$)

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ $\quad$ (当$x\to 0$时, $\arcsin x\sim x$)

令$\arcsin x=t$, 则$\sin t=x$,

当$x\to 0$时, $t\to 0$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

$$(3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \left(当x\to 0时,\tan x\sim x\right)$$

$$(4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \qquad \left(当x\to 0时,\arctan x\sim x\right)$$

$$(5)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

$$\left(当x\to 0时,\ln(1+x)\sim x\right)$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

令$e^x-1=t$，则$e^x=1+t \Rightarrow x=\ln(1+t)$

当$x\to 0$时，$t\to 0$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$

$$\boxed{(5)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

(当$x\to 0$时，$e^x-1\sim x$)

$$(7)\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{当}x\to0\text{时，}\\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\end{array}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}$ （当$x\to 0$时，$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$）

令$(1+x)^{\alpha}-1=t$， 当$x\to 0$时， $t\to 0$

且$(1+x)^{\alpha}=t+1$， $\ln\left[(1+x)^{\alpha}\right]=\ln(t+1)$

$\alpha\ln(1+x)=\ln(t+1)$， $\ln(1+x)=\dfrac{1}{\alpha}\ln(t+1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha\ln(1+x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{当}x\to 0\text{时}\\ \ln(1+x)\sim x\end{array}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\alpha\quad\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$$

常用等价无穷小:

当$x \to 0$时,

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$,

$\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$,

$\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0)$

推广成一般形式

当$\square \to 0$时,

$$\sin\square \sim \square, \qquad \arcsin\square \sim \square,$$

$$\tan\square \sim \square, \qquad \arctan\square \sim \square,$$

$$\ln(1+\square) \sim \square, \qquad e^{\square}-1 \sim \square,$$

$$1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2, \qquad (1+\square)^{\alpha}-1 \sim \alpha\square \quad (\alpha \neq 0).$$

二、等价无穷小替换

定理(等价无穷小替换定理)

设$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在, 则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'} \cdot \dfrac{\beta'}{\alpha'} \cdot \dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例2 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)\left(e^x-1\right)}{\left(1-\cos x\right)\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{\frac{1}{2}x^2\cdot 4x}=\frac{1}{2}$$

思考： $x\to 0$时,

$$\ln\left(1+\boxed{x^2}\right)\sim x^2 \qquad e^{\boxed{x}}-1\sim x$$

$$1-\cos\boxed{x}\sim\frac{1}{2}x^2 \qquad \sin\boxed{4x}\sim 4x$$

当$\square\to 0$时

$\sin\square\sim\square$, $\arcsin\square\sim\square$, $\tan\square\sim\square$, $\arctan\square\sim\square$,

$\ln(1+\square)\sim\square$, $e^{\square}-1\sim\square$, $1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^2$,

$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square\quad(\alpha\neq 0)$.

例3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

解:

方法一（有理化分子）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\times\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

方法二（等价无穷小替换）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\boxed{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

当$\square\to 0$时，$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square\quad(\alpha\neq 0).$

例4 $$\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(x^2-9\right)}{x-3}$$

解:

方法一（构造第一类重要极限）

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(x^2-9\right)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sin\left(x^2-9\right)}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}\cdot\left(x+3\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sin\left(x^2-9\right)}{x^2-9}\times\left(x+3\right)\right]$$

$$=1\times 6=6$$

方法二（等价无穷小替换）

当$\square \to 0$时，$\sin\square \sim \square$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin\boxed{\left(x^2-9\right)}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(x+3\right)$$

$$=6$$

当$\square \to 0$时

$\tan\square \sim \square, \quad 1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解: 当$x\to 0$时, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\tan 2x)^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8$$

注: 只对因子整体代换;

对于代数和中各无穷小不能分别替换。

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x$$

例6 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$\sin x \sim x$.

原式 $\cancel{=} \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - x}{(2x)^3} = 0.$ 错

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \tan x \cdot \cos x}{\sin^3 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x \cdot (1 - \cos x)}{\sin^3 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{(2x)^3} = \frac{1}{16}$$

当 $\square \to 0$ 时， $e^{\square} - 1 \sim \square$

例7 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a}$

解：

$$\text{原式} = \lim_{x \to a} \frac{e^a \cdot (e^{x-a} - 1)}{x - a}$$

$$= e^a \cdot \lim_{x \to a} \frac{e^{\boxed{x-a}} - 1}{x - a}$$

$$= e^a \cdot \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a}$$

$$= e^a \cdot 1 = e^a$$

例8 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$

解: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{x}{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{x}{a}}{a\cdot\left(\dfrac{x}{a}-1\right)}$

令 $\dfrac{x}{a}-1=t$, 则 $\dfrac{x}{a}=t+1$,

当 $x\to a$ 时, $t\to 0$

当 $\square\to 0$ 时,
$\ln(1+\square)\sim\square$

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{a\cdot t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{a\cdot t}=\dfrac{1}{a}$

练习题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^n}{(\sin x)^m}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\cdot\arctan x}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$

当$\square \to 0$时

$\sin\square \sim \square$, $\arcsin\square \sim \square$, $\tan\square \sim \square$, $\arctan\square \sim \square$,

$\ln(1+\square) \sim \square$, $e^{\square}-1 \sim \square$, $1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$,

$(1+\square)^{\alpha}-1 \sim \alpha\square \quad (\alpha \neq 0)$.

解:

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin \boxed{x^n}}{(\sin x)^m} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{(\ x\ )^m} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m} \begin{cases} \mathbf{0}, m < n \\ \mathbf{1}, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}$$

当 $\square \to 0$时

$\sin\square \sim \square$， $\arcsin\square \sim \square$, $\tan\square \sim \square$, $\arctan\square \sim \square$,

$\ln(1+\square) \sim \square$, $e^{\square} - 1 \sim \square$, $1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$,

$(1+\square)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\square \quad (\alpha \neq 0)$.

$$(3) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\boxed{2x})}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$(4) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\cdot\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\boxed{x\sin x})^{\frac{1}{2}}-1}{x\cdot\arctan x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x\cdot x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

当 $\square \to 0$ 时

$\sin\square \sim \square$, $\arcsin\square \sim \square$, $\tan\square \sim \square$, $\arctan\square \sim \square$,

$\ln(1+\square) \sim \square$, $e^{\square} - 1 \sim \square$, $1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$,

$(1+\square)^{\alpha} - 1 \sim \alpha\square \quad (\alpha \neq 0)$.

$$(5) \quad \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\boxed{\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} x = x$$

$$(6) \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+\boxed{ax})^{\frac{1}{n}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{n}\cdot ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{n} = \frac{a}{n}$$

三、小结

1.无穷小的比较:

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

2.等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法，注意适用条件.

思考题

任何两个无穷小量都可以比较吗？

思考题解答

不能．　例当 $x \to +\infty$ 时

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad g(x)=\frac{\sin x}{x}$$ 都是无穷小量

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在且不为无穷大

故当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$和$g(x)$不能比较．

练 习 题

一、填空题：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}=$______________.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^{n}}{(\sin x)^{m}}=$____________.

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=$_____________.

4、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^{2}\arctan x}=$____________.

5、$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n}\sin\dfrac{x}{2^{n}}=$____________.

6、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=$_____________.

7、当 $x \to 0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与 mx^n 等价，则 $m=$ ________, n ________ .

二、求下列各极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；

2、$\lim\limits_{\alpha\to \beta}\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$；

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x-\sin \beta x}{x}$；

4、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$；

练习题答案

一、1、$\frac{3}{2}$; 2、$\begin{cases} 0, m < n \\ 1, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}$; 3、2; 4、$\infty$;

5、x; 6、$\frac{a}{n}$; 7、3; 8、$\frac{1}{2}$, 2.

二、1、$\frac{1}{2}$; 2、e^{β}; 3、$\alpha - \beta$; 4、$\sec^2 a$.