2.二阶常系数线性非齐次方程的解法

1° 自由项 $f(x)$ 为多项式 $P_n(x)$.

$y^* + Y$

设二阶常系数线性非齐次方程为 特解 齐次通解

$$y'' + \cancel{py' + qy} = P_n(x), \qquad ⑥$$

其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式. 因为方程中 p、q 均为常数且多项式的导数仍为多项式, 所以可设 ⑥ 式的特解为

$$y^* = x^k Q_n(x),$$

$x^1 \cdot Q_n(x)$ $n+1$次多项式

其中 $Q_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 是同次多项式, **当原方程 ⑥ 中 y 项的系数 $q \neq 0$ 时, k 取 0; 当 $q = 0$, 但 $p \neq 0$ 时, k 取 1; 当 $p = 0$, $q = 0$ 时, k 取 2.**

$y^* = x^2 \cdot Q_n(x)$

$n+2$ 次多项式

例 5 求方程 $y'' - 2y' + y = x^2$ 的一个特解.

解 因为自由项 $f(x) = x^2$ 是 x 的二次多项式，且 y 的系数 $q = 1 \neq 0$，取 $k = 0$. 所以设特解为

$$y^* = Ax^2 + Bx + C,$$

则

$$y^{*\prime} = 2Ax + B, \quad y^{*\prime\prime} = 2A,$$

待定系数

代入原方程后，有

$$Ax^2 + (-4A + B)x + (2A - 2B + C) = x^2. \quad +0\cdot x+0$$

比较两端 x 同次幂的系数，有

$$\begin{cases} A = 1, \\ -4A + B = 0, \\ 2A - 2B + C = 0. \end{cases}$$

解得

$$A = 1，B = 4，C = 6.$$

故所求特解为

$$y^* = x^2 + 4x + 6.$$

例 6 求方程 $y'' + y' = x^3 - x + 1$ 的一个特解.

解 因为自由项 $f(x) = x^3 - x + 1$ 是一个 x 的三次多项式，且 y 的系数 $q = 0$， $p = 1 \neq 0$，取 $k = 1$.

所以设方程的特解为

$$y^* = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

则

$$y^{*\prime} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D,$$

$$y^{*\prime\prime} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

代入原方程后，有

$$\boxed{4A}x^3 + (12A + 3B)x^2 + (6B + 2C)x + (2C + D) = x^3 - x + 1.$$

$0 \cdot x^2$

比较两端 x 同次幂的系数：

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 12A + 3B = 0, \\ 6B + 2C = -1, \\ 2C + D = 1. \end{cases}$$

解得

$$A = \frac{1}{4}, B = -1, C = \frac{5}{2}, D = -4.$$

故所求特解为

$$y^* = x\left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x - 4\right).$$

2° 自由项 $f(x)$ 为 $Ae^{\alpha x}$ 型

设二阶常系数线性非齐次方程为

$$y'' + py' + qy = Ae^{\alpha x}, \quad ⑦$$

其中 α，A 均为常数.

由于 p，q 为常数，且指数函数的导数仍为指数函数，因此，我们可以设 ⑦ 的特解

$$y^* = Bx^k e^{\alpha x}.$$

其中 B 为待定常数， 当 α 不是 ⑦ 式所对应的线性齐次方程的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根时，取 $k = 0$；当 α 是其特征方程单根时，取 $k = 1$；当 α 是其特征方程重根时，取 $k = 2$.

例 7　求方程 $y'' + y' + y = 2e^{2x}$ 的通解.

解　$\alpha = 2$ 它不是特征方程 $r^2 + r + 1 = 0$ 的根，取 $k = 0$，　所以，设特解为

$$y^* = Be^{2x},$$

则

$$y^{*\prime} = 2Be^{2x},$$

$$y^{*\prime\prime} = 4Be^{2x},$$

代入方程，得 $B = \frac{2}{7}$.

故原方程的特解为

$$y^* = \frac{2}{7}e^{2x}.$$

例 8　求方程 $y'' + 2y' - 3y = e^x$ 的~~特~~通解.

解　$\alpha = 1$ 是特征方程 $r^2 + 2r - 3 = 0$ 的单根，取 $k = 1$，所以，设特解为

$$y^* = Bxe^x,$$

则

$$y^{*\prime} = Be^x + Bxe^x,$$

$$y^{*\prime\prime} = 2Be^x + Bxe^x,$$

代入方程，得 $B = \frac{1}{4}$，故原方程的特解为

$$y^* = \frac{1}{4}xe^x.$$

$r^2+2r-3=0$

$r_1=-3,\ r_2=1$

所以对应齐次通解为

$y=e^{-3x}+e^{x}$

故原方程通解为

$$y=\underbrace{e^{-3x}+e^{x}}_{\text{齐通}}+\underbrace{\frac{1}{4}xe^{x}}_{\text{非齐特}}$$

如果函数 y^* 是线性非齐次方程的一个特解，

Y 是该方程所对应的线性齐次方程的通解，则

$$y = Y + y^*,$$

是线性非齐次方程的通解.

$P_n(x)$

$A \cdot e^{\alpha x}$

（三）二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解

1. 通解结构：$y=\overline{y}+y^*$.

2. 方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解 y^* 的假设方法.

（1）$f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}$ 型

λ 与特征根的关系	$y''+py'+qy=p_n(x)e^{\lambda x}$ 的特解 y^*
λ 不是特征根	$y^*=x^0Q_n(x)e^{\lambda x}$
λ 是特征单根	$y^*=x^1Q_n(x)e^{\lambda x}$
λ 是特征重根	$y^*=x^2Q_n(x)e^{\lambda x}$

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，在下列每个小题中选出一个正确答案，请在答题卡上将所选的字母标号涂黑）

1．微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解是（ C ）

A．$y=c_1\cos x+c_2\sin x$　　B．$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

C．$y=(c_1+c_2x)e^{-x}$　　D．$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$

$r^2+2r+1=0$

$r_1=-1,\ r_2=-1$（重根）

$c_1e^{-x}+c_2x\cdot e^{-x}$

2．微分方程 $y''+y=0$ 满足 $y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1$ 的解是（ B ）

~~A．~~ $y=c_1\cos x+c_2\sin x$　　B．$y=\sin x$

C．$y=\cos x$　　~~D．~~ $y=c\cos x$

初始条件

特解

$r^2+1=0$

$r_1=\pm i$

$\alpha=0,\ \beta=1$

$y=(c_1\cos x+c_2\sin x)$

1 以多项式 $x(Ax+B)e^{2x}$

3. 微分方程 $y''-3y'+2y=\boxed{x}e^{2x}$ 的特解 y^* 的形式应为 (D)

A. ~~Axe^{2x}~~　　B. $(Ax+B)e^{2x}$

C. ~~Ax^2e^{2x}~~　　D. $x(Ax+B)e^{2x}$

$r^2-3r+2=0$

$(r-2)(r-1)=0$

$r_1=2,\ r_2=1$

非齐次

4. 微分方程 $y''+3y'+2y=\underline{1}$ 的通解为 (B)

A. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+1$　　B. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}$

C. ~~$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+1$~~　　D. ~~$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{2}$~~

$r^2+3r+2=0$

$(r+2)(r+1)=0$

$r_1=-2,\ r_2=-1$

$y^*=A$

$y^{*\prime}=0,\ y^{*\prime\prime}=0$

左 $=0+0+2A$
右 $=1$
$\Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$r^2+2r+1=0$

$r_1=r_2=-1$

5. 微分方程 $y''+2y'+y=3x^{\boxed{2}}e^{\boxed{-x}}$ 的特解 y^* 应设为 (C)

A. $(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$　　B. $x(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$

C. $x^2(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$　　D. Ax^2e^{-x}

$x^2e^{-x}\cdot(Ax^2+Bx+c)$

6. 设 $y=C_1e^{\boxed{2}x}+C_2e^{\boxed{3}x}$ 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该微分方程为 (D)

$r_1=2,\ r_2=3$

A. $y''+5y'-6y=0$　　B. $y''+5y'+6y=0$

C. $y''-5y'-6y=0$　　D. $y''-5y'+6y=0$

$$\begin{cases} r_1+r_2=5=-\frac{b}{a} \\ r_1\cdot r_2=6=\frac{c}{a} \end{cases}$$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

7. 微分方程 $y''-6y'+13y=0$ 的通解为 $y=e^{3x}\cdot(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

$r^2-6r+13=0$

$r_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=3\pm 2i$

$e^{\alpha x}\cdot(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

8. 设 $y(x)$ 满足微分方程 $e^x yy'=1$,且 $y(0)=1$,则 $y=$ $\sqrt{-2e^{-x}+3}$.

一阶 分离变量

$e^x y\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$

$y\,dy=e^{-x}dx$

$\frac{1}{2}y^2=-e^{-x}+C$

由 $y(0)=1$ 得

$\frac{1}{2}\cdot 1=-e^0+C$

$C=\frac{3}{2}$

9. 微分方程 $(1+x^2)y\,dx-(2-y)x\,dy=0$ 的通解为 ________.

一阶 分离变量

$\dfrac{1+x^2}{x}=\dfrac{2-y}{y}dy$

$\ln|x|+\frac{1}{2}x^2=2\ln|y|-y+C$

10. 微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$的通解为 $y=x(C+\ln|x|)$

$y'+P(x)y=Q(x)$

一阶 $y'-\frac{1}{x}y=1$

$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[C+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right]$

$P(x)=-\frac{1}{x}$

$Q(x)=1$

$=e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left[C+\int e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx\right]$

$=x\cdot\left[C+\int\frac{1}{x}dx\right]$

11. 微分方程 $y''-y=0$ 的通解为 $C_1e^{x}+C_2e^{-x}$.

二阶 $r^2-1=0$

特征根 $r_{1,2}=\pm1$

12. 微分方程 $xy'-y=x^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解为 $y=x(1+x)$.

一阶 $y'-\frac{1}{x}y=x$

$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot\left[C+\int x\cdot e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx\right]$

$=x\cdot\left[C+\int x\cdot\frac{1}{x}dx\right]$

$=x\left[C+x\right]$ 得 $C=1$

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

13. 求微分方程 $x^2 y' = xy - y^2$ 的通解.

“齐次方程”

解：同除 x^2，$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$

令 $\frac{y}{x} = P(x)$，$y = P(x)\cdot x$，$y' = x\cdot P'(x) + P(x)$

原方程可化为 $xP' + P = P - P^2$

$xP' = -P^2$

分离变量 $-\frac{dp}{p^2} = \frac{1}{x}dx$

两边积分 $\int -\frac{1}{p^2}dp = \int \frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{p} = \ln|x| + C$

故 $y = \frac{x}{\ln|x| + C}$

14. 求微分方程 $xy'=2y+x^2$ 的通解.

解:
$$y'-\frac{2}{x}y=x$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[C+\int Q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$=e^{\int \frac{2}{x}dx}\cdot\left[C+\int x\cdot e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx\right]$$

$$=x^2\cdot\left[C+\int x\cdot x^{-2}dx\right]$$

$$=x^2\cdot\left(C+\int\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=x^2\left(C+\ln|x|\right)$$

一阶. 线性

$$y'+p(x)y=Q(x)$$

$$e^{\ln x^{2}}$$

15. 已知函数 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，试确定常数 p,q 的值，并求微分方程 $y''+py'+qy=e^x$ 的通解.

解. ① 由题意可知 $r_1=1$，$r_2=-2$

$p=-(r_1+r_2)=1$，$q=r_1\cdot r_2=-2$

即 $\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$

② 设 $y^*=Axe^x$

$y^{*\prime}=Ae^x+Axe^x=A(1+x)e^x$

$y^{*\prime\prime}=Ae^x+A(1+x)e^x=A(2+x)e^x$

代入 $A(2+x)e^x+A(1+x)e^x-2\cdot Axe^x$

$=3Ae^x=e^x \Rightarrow A=\frac{1}{3}$

故 所求方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x$

$e^{1\cdot x}$

特征单根

Axe^x

16. 已知函数 $y=(x+1)e^x$ 是一阶线性微分方程 $y'+2y=f(x)$ 的解，求二阶常系数线性微分方程 $y''+3y'+2y=f(x)$ 的通解.

解. 将 $y=(x+1)e^x$ 代入 $y'+2y=f(x)$ 中

$$e^x+(x+1)e^x+2(x+1)e^x=f(x)$$

整理: $f(x)=(3x+4)e^x$

一次多项式

$(Ax+B)\cdot e^x$

特征方程 $r^2+3r+2=0$

特征根 $r_1=-1,\ r_2=-2$

齐次方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

设 $y^*=(Ax+B)e^x$

$y^{*\prime}=$

$y^{*\prime\prime}=$

代入 …

$$\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

所以 $y''+3y'+2y=f(x)$ 的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^x$$

17. 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x，求微分方程 $y''+4y'+4y=f(x)$ 的通解.

解：$f(x) = (xe^x)' = (x+1)e^x$

$(Ax+B)e^x$

特征方程 $r^2+4r+4=0$

特征根 $r_1=r_2=-2$

齐次通解：$y=(C_1x+C_2)e^{-2x}$

设 $y^*=(Ax+B)e^x$

18. 已知函数 $y=f(x)$是一阶微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解. 求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-3y'+2y=f(x)$的通解.

19. 求微分方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的通解.

20. 已知 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^{3x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$的通解，试求该微分方程.

四、综合题(本大题共 2 小题,每小题 10 分,共 20 分)

21. 已知定义在$(-\infty,+\infty)$上的可导函数 $f(x)$满足方程 $xf(x)-4\int_1^x f(t)\mathrm{d}t=x^3-3$,试求:

(1) 函数 $f(x)$的表达式;

(2) 函数 $f(x)$的单调区间与极值;

(3) 曲线 $y=f(x)$的凹凸区间与拐点.

22. 设函数 $f(x)$ 满足微分方程 $xf'(x)-2f(x)=-(a+1)x$（其中 a 为正常数），且 $f(1)=1$，由曲线 $y=f(x)(x\leqslant 1)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成的平面图形记为 D. 已知 D 的面积为 $\frac{2}{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V_x；

(3) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V_y.

五、证明题(本大题共 2 小题,每小题 9 分,共 18 分)

23. 设 $\varphi(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,且满足方程 $\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t = 1-\varphi(x)$,

(1) 求函数 $\varphi(x)$的表达式;

(2) 证明函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-1}{x^2}, & x\neq 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续且可导.

24. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f'(x)+f(x)=2e^x$，且 $f(0)=2$，记由曲线 $y=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 与直线 $y=1$，$x=t(t>0)$ 及 y 轴所围平面图形的面积为 $A(t)$，试证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\ln 2$.