4.1 不定积分的概念与性质

主讲教师：王玉兰

高等数学

4.1 不定积分的概念

一、原函数与不定积分

二、不定积分的基本公式

三、不定积分的性质

引例：

已知某质点的运动规律 $S=S(t)$，速度 $V=\dfrac{dS}{dt}$，

如：初速度为0的匀加速直线运动 $S(t)=\dfrac{1}{2}at^2$，

$$V(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{2}at^2\right)'=at$$

若已知 $V(t)$，如何才能倒推出 $S(t)$ ？

引入原函数的概念。

一、原函数的定义

若在区间 I 上，函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 存在关系

$F'(x)=f(x)$ 或 $d[F(x)]=f(x)dx$ ，则称 $F(x)$ 是

$f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

例如： $(\sin x)'=\cos x$ ， $x\in(-\infty,+\infty)$

则称 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数.

二、关于原函数的几个问题

1、原函数的存在定理

如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在该区间上一定存在 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$.

连续函数一定存在原函数.

2、如果$f(x)$在 I 上有原函数，那么它有多有个原函数？ （无数个）

令 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $F'(x)=f(x)$

同时 $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$

$$\left[F(x)+C\right]'=f(x)$$

则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数

$F(x)+C$ 有无数种可能性.

3、$F(x)+C$ 能否表示$f(x)$ 的全体原函数？ （能）

设 $F(x), G(x)$ 都是$f(x)$ 的原函数

则 $F'(x)=f(x)$ ， $G'(x)=f(x)$

$$\left[G(x)-F(x)\right]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

$$\left[G(x)-F(x)\right]'=0$$

得到 $G(x)-F(x)=C$， 即 $G(x)=F(x)+C$

两个原函数之间仅相差一个常数，

当C为任意常数时$F(x)+C$可表示$f(x)$的全体原函数.

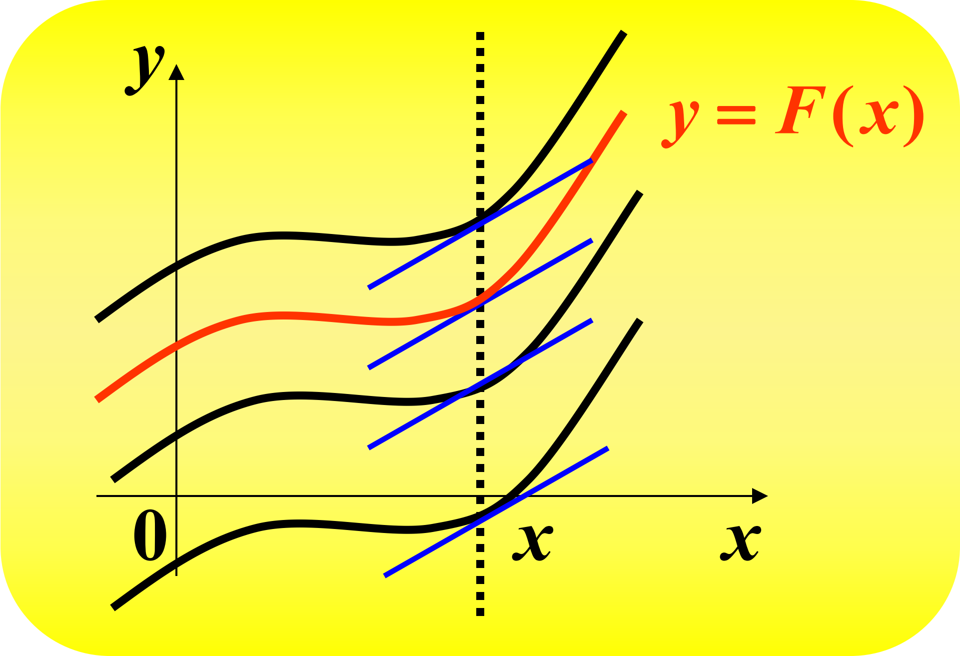
不定积分的几何意义：

$f(x)$ 的一个原函数$F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**，方程为 $y=F(x)$.

则 $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

就表示了一族积分曲线 $y=F(x)+C$.

它们相互平行，即在横坐标相同的点处有相同的切线斜率。



三、不定积分的定义

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$.

$\int$--积分号　　$f(x)$--被积函数　　x--积分变量

若 $F'(x)=f(x)$ ，则 $\int f(x)dx = F(x)+C$.

C--积分常数

微分运算“ d ”与不定积分运算“ $\int$ ”就像加法与减法、乘法与除法，指数与对数那样，构成了一对互逆运算.

具体写成：（1）$d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$ ；

（2）$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$ ；

（3）$\int f'(x)dx=f(x)+C$ ；

如 $\int\left(e^{2x+1}\cdot\cos 5x\right)'dx=e^{2x+1}\cdot\cos 5x+C$

例: 求通过点（1, 2），且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标6倍的一条曲线。

解: 设所求曲线方程为 $y=f(x)$.

由题意，曲线上点(x, y)的切线斜率

$$\frac{dy}{dx}=6x, \text{ 即} y=\int 6x dx=3x^2+C \ ,$$

为一簇积分曲线。

因$y|_{x=1}=2$, 即有$2=3+C \Rightarrow C=-1.$

故所求曲线为：$y=3x^2-1$.

四、基本积分公式

（1） $(kx)'=k$ ；

$$\boxed{\int kdx = kx + C}$$

如 $\int 5dx = 5x + C$

（2） $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n \ (n \neq -1)$ ；

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)}$$

如 $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

（3） $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C}$$

（4） $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;

$$\boxed{\int e^{x}dx = e^{x} + C}$$

（5） $\left(\dfrac{1}{\ln a}a^{x}\right)' = a^{x}$;

$$\boxed{\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C}$$

（6） $(\sin x)' = \cos x$;

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + C}$$

（7） $(\cos x)' = -\sin x$;

$(-\cos x)' = \sin x$;

$$\boxed{\int \sin x\, dx = -\cos x + C}$$

基本积分公式（书本P80）

(1) $\int kdx = kx + C$

(2) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ （其中 $n \neq -1$）

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

(4) $\int e^x dx = e^x + C$　　$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$　　$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$　　$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$　　$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(6) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$　　$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

五、不定积分的性质

性质1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k 是常数且 $k \neq 0$）

性质2 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

例1 $\int\left(e^{x}-2\cos x+3x^{2}\right)dx$

$$=\int e^{x}dx-\int 2\cos x dx+\int 3x^{2}dx$$

$$=\int e^{x}dx-2\int \cos x dx+3\int x^{2}dx$$

$$=e^{x}+C_{1}-2(\sin x+C_{2})+3\left(\frac{1}{3}x^{3}+C_{3}\right)$$

$$=e^{x}-2\sin x+x^{3}+\boxed{C_{1}-2C_{2}+3C_{3}}$$

$$=e^{x}-2\sin x+x^{3}+C$$

例2 $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}+2x}{x^2}dx$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n \neq -1)$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} + \frac{2x}{x^2} \right) dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= \int \left(x^{-2} - x^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= -x^{-1} - \left(\frac{1}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} \right) + 2\ln|x| + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + 2\ln|x| + C$$

例3 $\int 2^x \cdot 3^x \cdot e^x dx$

$$= \int (2 \cdot 3 \cdot e)^x dx$$

$$= \int (6e)^x dx$$

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

$$= \frac{(6e)^x}{\ln 6e} + C$$

例4 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

$$\boxed{2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x}$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (1+\cos x) dx$$

$$= \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$$

例5 $\int \tan^2 x dx$

$$\boxed{1+\tan^2 x = \sec^2 x}$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

例6 $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{3}\right)^2 dx$

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$$

$$=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{9}+2\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{9}+\frac{4}{3}\right)dx$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x+C$$

$$=-\frac{4}{x}+\frac{1}{27}x^3+\frac{4}{3}x+C$$

例7 $\int \frac{(1+x)^3}{x^2}dx$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2}$$

$$= \int \frac{1+x^3+3x+3x^2}{x^2}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + x + \frac{3}{x} + 3\right)dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3\ln|x| + 3x + C$$

例8 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

例9 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1-2\sin^2 x\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

$$=\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\left(2\cos^2 x-1\right)}dx$$

$$=\int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx \quad =\frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx \quad =\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sec^2 x+1\right)dx=\frac{1}{2}\left(\tan x+x\right)+C$$

例10 $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$$

$$= \tan x - \cot x + C$$

练习

$$(1)\quad \int\left(\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\right)dx=\int\left(2-5\cdot\frac{2^x}{3^x}\right)dx$$

$$=\int\left[2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]dx$$

$$=2x-5\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C$$

$$(2)\quad \int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx = \int\left(\frac{x^4-1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

$$(3)\quad \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x - \arctan x + C$$

$$(4)\quad \int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{x^2+\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \arctan x - \frac{1}{x} + C$$

$$(5)\quad \int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int \frac{\left(3x^4+3x^2\right)+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{3x^2\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \left(3x^2+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x^3+\arctan x \; +C$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 x\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

$$(6)\quad \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int \left(2 - \sec^2 x\right)dx = 2x - \tan x + C$$

$$(7)\quad \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x)dx$$

$$= \sin x - \cos x + C$$

$$(8)\quad \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{\left(e^x\right)^2-1}{e^x+1}dx$$

$$= \int \frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{e^x+1}dx$$

$$= \int \left(e^x-1\right)dx$$

$$= e^x - x + C$$