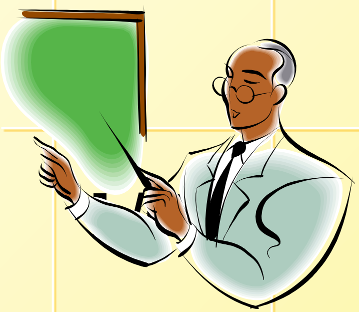
第六章 常微分方程

主讲教师：王玉兰



办公室：图书馆B626

高等数学（下）

- 第一节：微分方程的基本概念
- 第二节：一阶微分方程
- 第三节：可降解的高阶微分方程
- 第四节：二阶线性微分方程解的结构
- 第五节：二阶常系数线性齐次微分方程

第一节
微分方程的基本概念

一、微分方程

二、微分方程的解

一、微分方程

定义 1　凡含有未知函数导数（或微分）的方程，称为**微分方程**，有时**简称为方程**，未知函数是一元函数的微分方程**称做常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程**称做偏微分方程**．本教材仅讨论常微分方程，并简称为微分方程．

例如，下列方程都是微分方程（其中 y, v, θ 均为未知函数）．

（1）$y' = kx$, k 为常数；　一阶

（2）$(y-2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$；　一阶　$(y-2xy) = -x^2 \frac{dy}{dx}$　y'

（3）$mv'(t) = mg - kv(t)$；　一阶

个　个　个

(4) $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$;

(5) $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ (g, l 为常数).

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶. 例如，方程（1）－（3）为一阶微分方程，方程（4）－（5）为二阶微分方程. 通常，n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

其中 x 是自变量， y 是未知函数，$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})$ 是已知函数，而且一定含有 $y^{(n)}$. n阶导数

二、微分方程的解

定义 2 任何代入微分方程后使其成为恒等式的函数，都叫做该方程的解. 若微分方程的解中含有任意常数的个数与方程的阶数相同，且任意常数之间不能合并，则称此解为该方程的**通解**(或一般解). 当通解中的各任意常数都取特定值时所得到的解，称为方程的**特解**.

$2x+3=2x$ 解，常数c有一个

例如方程 $y' = 2x$ 的解 $y = x^2 + C$ 中含有一个任意常数且与该方程的阶数相同，因此，这个解是方程的通解；如果求满足条件 $y(0) = 0$ 的解，代入通解 $y = x^2 + C$ 中，得 $C = 0$，那么 $y = x^2$ 就是方程 $y' = 2x$ 的特解.

$y = x^2+3$

用来确定通解中的任意常数的附加条件一般称为初始条件. 通常一阶微分方程的初始条件是 已有一个

$$y|_{x=x_0}=y_0, \text{即 } y(x_0)=y_0.$$

二阶微分方程的初始条件是 已有两个

$$\underbrace{y|_{x=x_0}=y_0}\ \text{及}\ \underbrace{y'|_{x=x_0}=y'_0}, \text{ 即 } y(x_0)=y_0 \text{ 与 } y'(x_0)=y'_0,$$

一个微分方程与其初始条件构成的问题，称为

初值问题. 求解某初值问题，就是求方程的特解.

例 1 验证函数 $y = 3e^{-x} - xe^{-x}$ 是方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的解.

$-(e^{-x} \mp x \cdot e^{-x})$

解 求 $y = 3e^{-x} - xe^{-x}$ 的导数， 得

$$y' = -4e^{-x} + xe^{-x}, \quad y'' = 5e^{-x} - xe^{-x},$$

将 y，y' 及 y'' 代入原方程的左边, 有

$$(5e^{-x} - xe^{-x}) + 2(-4e^{-x} + xe^{-x}) + 3e^{-x} - xe^{-x} = 0,$$

即函数 $y = 3e^{-x} - xe^{-x}$ 满足原方程，所以该函数是所给二阶微分方程的解.

一阶

例 2 验证方程 $y' = \dfrac{2y}{x}$ 的通解为 $y = Cx^2$（C 为任意常数），并求满足初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解.

解 由 $y = Cx^2$ 得 $\quad y' = 2Cx$,

将 y 及 y' 代入原方程的左、右两边，左边有 $y' = 2Cx$，

而右边 $\dfrac{2y}{x} = 2Cx$，所以函数 $y = Cx^2$ 满足原方程.

又因为该函数含有一个任意常数，所以 $y = Cx^2$ 是一阶微分方程 $y' = \dfrac{2y}{x}$ 的通解.

将初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 代入通解，得 $C = 2$，故所求特解为 $y = 2x^2$.

例 3 设一个物体从 A 点出发作直线运动，在任一时刻的速度大小为运动时间的两倍. 求物体运动规律（或称运动方程）

解 首先建立坐标系：取 A 点为坐标原点，物体运动方向为坐标轴的正方向(如图)， 并设物体在时刻 t 到达 M 点，其坐标为 $s(t)$. 显然，$s(t)$ 是时间 t 的函数，它表示物体的运动规律，是本题中待求的未知函数，$s(t)$ 的导数 $s'(t)$ 就是物体运动的速度 $v(t)$. 由题意，知

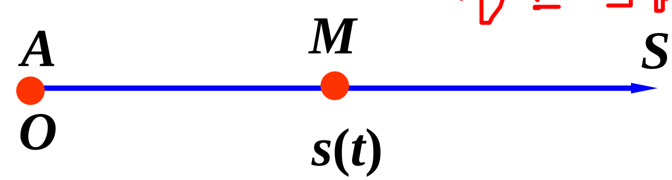
$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

$$v = S'(t)$$

$$v(t) = 2t\ , \qquad ①$$

以及

$$s(0) = 0. \qquad ②$$



因为 $v(t) = s'(t)$，因此，求物体的运动方程已化成了求解初值问题

$$\begin{cases} s'(t) = 2t, \\ s|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

积分后，得通解 $s(t) = t^2 + C$． 再将初始条件 ② 代入通解中，得 $C = 0$，故初值问题的解为 $s(t) = t^2$，也是本题所求的物体的运动方程.

例 4 已知直角坐标系中的一条曲线通过点 $(1, 2)$，且在该曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线斜率等于该点的纵坐标的平方，求此曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y = y(x)$，根据导数的几何意义及本题所给出的条件，得

$$y' = y^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y^2},$$

积分得

$$x = -\frac{1}{y} + C.$$

又由于已知曲线过点 $(1, 2)$，代入上式，得 $C = \frac{3}{2}$.

所以，求此曲线的方程为 $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{y}$.

一般地，微分方程的每一个解都是一个一元函数 $y = y(x)$， 其图形是一条平面曲线，我们称它为微分方程的积分曲线. 通解的图形是平面上的一族曲线，称为积分曲线族， 特解的图形是积分曲线族中的一条确定的曲线. 这就是微分方程的通解与特解的几何意义.

第二节

一阶微分方程

一、可分离变量方程

二、一阶线性微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,\ y,\ \boxed{y'}) = 0.$$

自变量 函数 必需要有

一、可分离变量方程

例如：形如

$$y' = f(x)g(y)$$

的微分方程，称为可分离变量方程.

（1）分离变量

将方程整理为

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$$

的形式，使方程各边都只含有一个变量.

(2) 两边积分

两边同时积分，得

$$\text{左边} = \int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y,$$

$$\text{右边} = \int f(x) \mathrm{d}x.$$

故方程通解为

$$\int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y = \int f(x) \mathrm{d}x + C.$$

我们约定在微分方程这一章中不定积分式表示被积函数的一个原函数，而把积分所带来的任意常数明确地写上.

例 1 求方程 $y' = (\sin x - \cos x)\sqrt{1-y^2}$ 的通解.

解 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\arcsin y = -(\cos x + \sin x) + C,$$

这就是所求方程的通解.

例 2 求方程 $y' = -\frac{y}{x}$ 的通解.

解 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分，得 $$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + C_1,$$

化简得 $$|y| = \mathrm{e}^{C_1} \cdot \left|\frac{1}{x}\right|,$$

$$y = \pm\mathrm{e}^{C_1} \cdot \frac{1}{x},$$

令 $C_2 = \pm\mathrm{e}^{C_1}$, 则 $y = C_2\frac{1}{x}, C_2 \neq 0.$

另外，$y=0$ 也是方程的解，所以 $y=\dfrac{C_2}{x}$ 中的 C_2 可以为 0， 因此 C_2 为任意常数.

这样，方程的通解是

$$y=\frac{C}{x}.$$

求解过程可简化为：

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$ $-\ln x$

两边积分得 $$\ln y=\underbrace{\ln\frac{1}{x}}+\ln C,\quad \ln y=\ln\frac{C}{x},$$

即通解为 $$y=\frac{C}{x},$$ 其中 C 为任意常数.

注意:

- 为了书写方便，可以不必先取绝对值 $\ln|y|$ ，再去绝对值后令C= $\pm e^{C_1}$, 而在积分时写成 $\ln y$ ，
- 常数 C_1 写成 $\ln C$

例 3 求方程 $\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = y^2\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ 满足初始条件 $y(0) = 2$ 的特解.

解 将方程整理为

$$y(x-1)\mathrm{d}y = (y^2-1)\mathrm{d}x.$$

分离变量，得

$$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x-1},$$

$\ln(y^2-1) = \ln(x-1)^2 + \ln c$

$= \ln[(x-1)^2 \cdot c]$

两边积分，有

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln C.$$

化简，得

$$y^2 - 1 = C(x-1)^2,$$

即

$$y^2 = C(x-1)^2 + 1$$

为所求之通解. 将初始条件 $y(0) = 2$ 代入，得 $C = 3.$

故所求特解为

$$y^2 = 3(x-1)^2 + 1.$$

例 4 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-ky(y-a)$ 的通解(其中k与a均是正的常数).

解 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y-a)}=-k\mathrm{d}x,$$

即

$$\left(\frac{1}{y-a}-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=-ka\mathrm{d}x.$$

两边积分，得

$$\ln\frac{y-a}{y}=-kax+\ln C.$$

经整理，得方程的通解为

$$y=\frac{a}{1-C\mathrm{e}^{-kax}},$$

也可写为

$$y=\frac{a}{1+C\mathrm{e}^{-kax}}.$$

二、一阶线性微分方程

一阶微分方程的下列形式

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

称为一阶线性微分方程，简称一阶线性方程. 其中 $P(x)$、$Q(x)$ 都是自变量的已知连续函数. 它的特点是：右边是已知函数，左边的每项中仅含 y 或 y'，且均为 y 或 y' 的一次项.

若 $Q(x) \equiv 0$，则方程成为

$$y' + P(x)y = \underline{0}, \qquad \text{等号右边为零} \quad ②$$

称为一阶线性齐次微分方程，简称**线性齐次方程**，

若 $Q(x) \not\equiv 0$，则称方程 ① 为一阶线性非齐次微分方程，简称**线性非齐次方程**. 通常方程 ② 称为方程 ① 所对应的线性齐次方程.

1.一阶线性齐次方程的解法

一阶线性齐次方程

$$y' + P(x)y = 0$$

是可分离变量方程. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C,$$

所以，方程的通解公式为 $$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

例 6 求方程 $y' + (\sin x)y = 0$ 的通解.

解 所给方程是一阶线性齐次方程，且 $P(x) = \sin x$，则

$$-\int P(x)\mathrm{d}x = -\int \sin x\mathrm{d}x = \cos x,$$

由通解公式即可得到方程的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{\cos x}.$$

例 7　求方程 $(y-2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = \mathrm{e}$ 的特解.

解　将所给方程化为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1-2x}{x^2}y = 0,$$

这是一个线性齐次方程，且 $P(x) = \dfrac{1-2x}{x^2}$,

则 $$-\int P(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln x^2 + \frac{1}{x},$$

由通解公式得该方程的通解

$$y = Cx^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

将初始条件 $y(1) = \mathrm{e}$ 代入通解，得 $C = 1.$

故所求特解为 $$y = x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

2.一阶线性非齐次方程的解法

设 $y = C(x)y_1$ 是非齐次方程的解，将 $y = C(x)y_1$（其中 y_1 是齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的解）及其导数 $y' = C'(x)y_1 + C(x)y'_1$ 代入方程

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

则有

$$C'(x)y_1 + C(x)y_1' + P(x)C(x)y_1 = Q(x),$$

即

$$C'(x)y_1 + C(x)\cancel{(y_1' + P(x)y_1)} = Q(x),$$

因 y_1 是对应的线性齐次方程的解，故 $y_1' + P(x)y_1 = 0$，因此有

$$C'(x)y_1 = Q(x),$$

其中 y_1 与 $Q(x)$ 均为已知函数，所以可以通过积分求得

$$C(x) = \int \frac{Q(x)}{y_1}\mathrm{d}x + C,$$

代入 $y = C(x)y_1$ 中，得

$$y = Cy_1 + y_1\int \frac{Q(x)}{y_1}\mathrm{d}x.$$

容易验证，上式给出的函数满足线性非齐次方程

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

且含有一个任意常数，所以它是一阶线性非齐次方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$ 的通解。

在运算过程中，我们取线性齐次方程的一个解为

$$y_1 = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

于是，一阶线性非齐次方程的通解公式，就可写成：

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right].$$

上述讨论中所用的方法，是将常数 C 变为待定函数 $C(x)$，再通过确定 $C(x)$ 而求得方程解的方法，称为常数变易法.

例 8 求方程 $2y' - y = e^x$ 的通解.

解法一 使用常数变易法求解.

将所给的方程改写成下列形式:

$$y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^x,$$

这是一个线性非齐次方程，它所对应的线性齐次方程的通解为

$y = Ce^{-\int p(x)dx} = C \cdot e^{-\int -\frac{1}{2}dx}$

$$y = Ce^{\frac{x}{2}},$$

设所给线性非齐次方程的解为 $y = C(x)e^{\frac{x}{2}}$,
将 y 及 y' 代入该方程，得

$$C'(x)e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^x,$$

于是，有 $C(x)=\int \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C$,

$y'-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^{x}$

$P(x)=-\frac{1}{2}$

因此，原方程的通解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{x}$.

$Q(x)=\frac{1}{2}e^{x}$

解法二 运用通解公式求解.

$y=e^{-\int P(x)dx}\left[C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$

将所给的方程改写成下列形式：

$$y'-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x},$$

$=e^{\int\frac{1}{2}dx}\cdot\left[C+\int\frac{1}{2}e^{x}\cdot e^{\int -\frac{1}{2}dx}dx\right]$

则 $P(x)=-\frac{1}{2},\ Q(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$,

$=e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left[C+\int\frac{1}{2}e^{x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx\right]$

$=e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left[C+\frac{1}{2}\int e^{\frac{1}{2}x}dx\right]=e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left[C+e^{\frac{1}{2}x}\right]$

则 $$-\int P(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2},$$

$$\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

$$\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},$$

代入通解公式，得原方程的通解为

$$y=(C+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{x}.$$

例 9 求解初值问题. $\begin{cases} xy' + y = \cos x, \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$

$-\int \frac{1}{x}dx = -\ln x$

$e^{-\ln x}$

解 使用常数变易法求解.

将所给的方程改写成下列形式:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\cos x,$$

则与其对应的线性齐次方程 $y' + \frac{1}{x}y = 0$ 的通解为

$y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\left[C + \int Q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx\right]$

$$y = \frac{C}{x}.$$

$= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\cdot\left[C + \int \frac{1}{x}\cos x\, \boxed{e^{\int \frac{1}{x}dx}}\, dx\right]$

$= \frac{1}{x}\cdot\left[C + \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cos x\cdot\cancel{x}\right] = \frac{1}{x}\cdot\left[C + \sin x\right]$

设所给线性非齐次方程的通解为

$$y = C(x)\frac{1}{x}.$$

将 y 及 y' 代入该方程，得

$$C'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\cos x,$$

于是，有 $C(x) = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$

因此，原方程的通解为

$$y=(\sin x+C)\frac{1}{x}=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\sin x.$$

将初始条件 $y(\pi)=1$ 代入，得 $C=\pi$，所以，所求的特解，即初值问题的解为

$$y=\frac{1}{x}(\pi+\sin x).$$

例 10 求方程 $y^2\mathrm{d}x + (x - 2xy - y^2)\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 将原方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1-2y}{y^2}x = 1,$$

这是一个关于未知函数 $x = x(y)$ 的一阶线性非齐次方程，其中 $P(y) = \dfrac{1-2y}{y^2}$，它的自由项 $Q(y) = 1$.

代入一阶线性非齐次方程的通解公式，有

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\left[C + \int \mathrm{e}^{\int \frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]$$

$$= y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}(C + \mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}) = y^2(1 + C\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}),$$

即所求通解为

$$x = y^2(1 + C\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}).$$