第五章　定积分

主讲教师:王玉兰

办公室：图书馆B626

高等数学

第五章 定积分

5.1 定积分的概念及性质

5.2 定积分基本公式

5.3 定积分的计算法

5.4 反常积分初步

5.5 定积分的应用

5.1 定积分的概念

主讲教师：王玉兰

高等数学

5.1　定积分的概念及性质

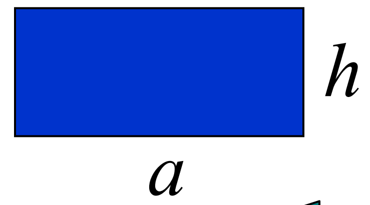
一、定积分问题举例

二、 定积分的定义

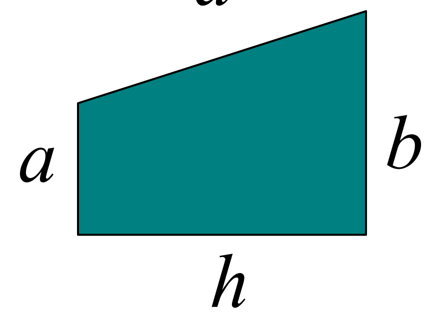
三、 定积分的性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= a h$



梯形面积 $= \frac{h}{2}(a+b)$



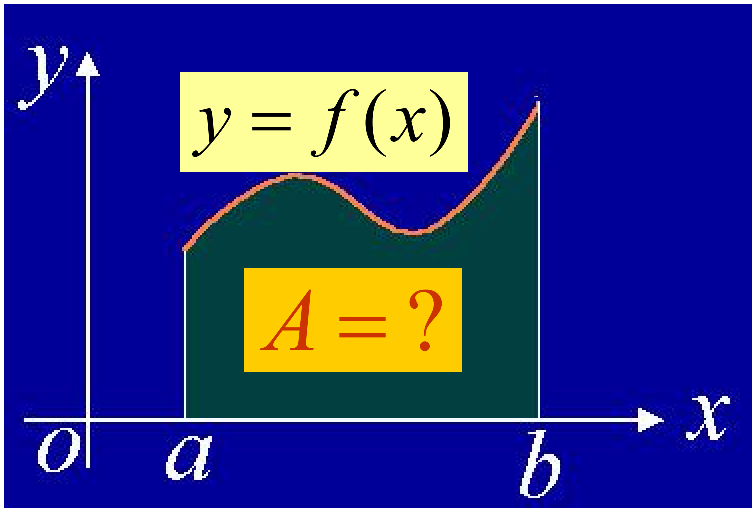
曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \ge 0)$$

及 x 轴, 以及两直线 $x=a, x=b$

所围成，求其面积 A .



解决步骤：

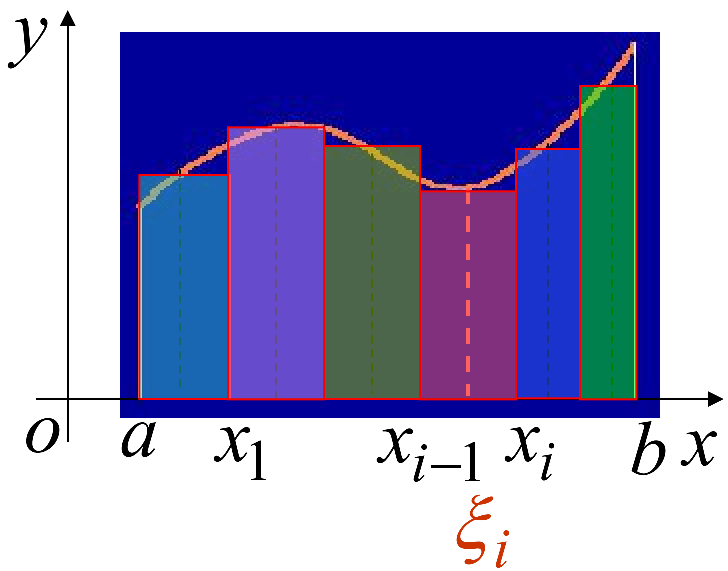
1) 分割. 在区间 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

用直线 $x=x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 取近似. 在第 i 个小曲边梯形上任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

作以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形，并以此小矩形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i，得



$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i\quad(\Delta x_i=x_i-x_{i-1}),\ i=1,2,\cdots,n)$$

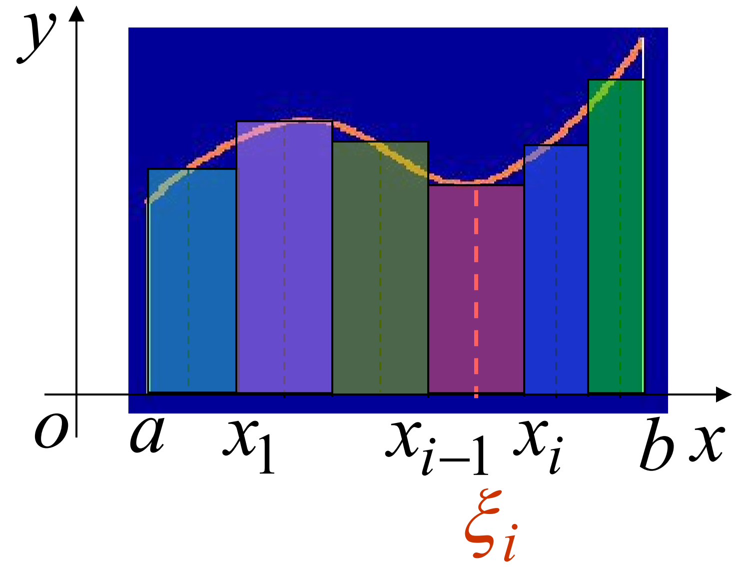
3) 求和.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) 取极限. 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, 则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$



二、定积分的定义

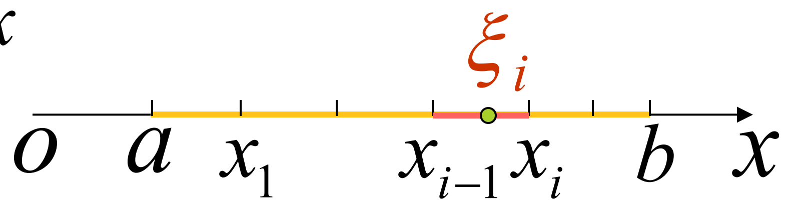
设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若对 $[a,b]$ 的任意分法

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，任取

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$，只要 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\} \to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**.

积分上限

$[a,b]$称为积分区间

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

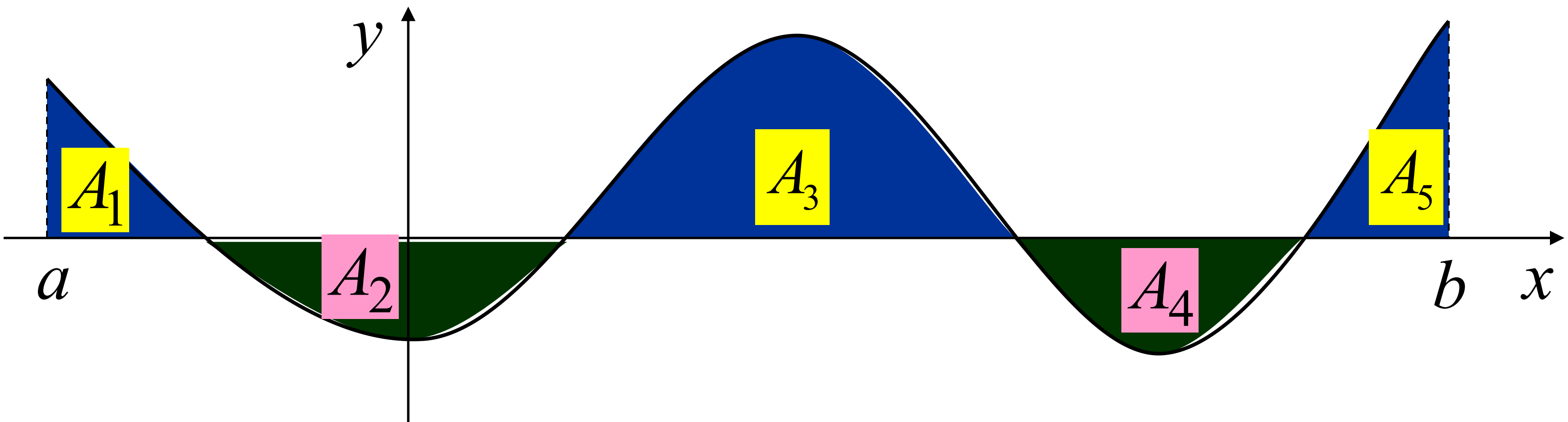
定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

定积分的几何意义：

$f(x) > 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$　　曲边梯形面积

$f(x) < 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$　曲边梯形面积的负值



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

可积的充分条件:

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积 .

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k 为常数)

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

6. 若在 $[a\,,b]$上， $f(x)\ge 0$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$

推论1. 若在 $[a\,,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, 则

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b)$$

8. 积分中值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

5.2 定积分基本公式

主讲教师：王玉兰

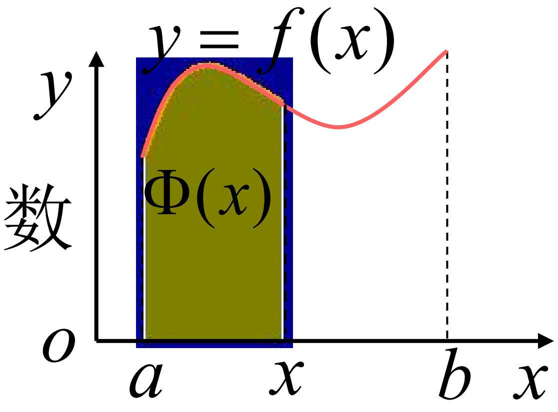
高等数学

5.2　微积分基本公式

一、变上限积分函数

二、牛顿－莱布尼兹公式

一、变上限积分函数



定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 .

即 $$\boxed{\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)}$$

证明： 任取$x\in[a,b]$，改变量Δx满足$x+\Delta x\in[a,b]$,

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=[\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt]-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$$

由积分中值定理

$\Delta\Phi=f(\xi)\cdot\Delta x$, 即 $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$ （ ξ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间）

当$\Delta x\to 0$时，$\xi\to x$； 而$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$， 于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(x)$

即$\Phi(x)$在 x 处可导，且$\Phi'(x)=f(x),x\in[a,b]$.

变限积分求导公式:（重点）

（1）$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$$

（2）$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

（3）$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)}$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

解 这属于$\dfrac{0}{0}$型的极限问题，利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t\right]}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(\arctan x)'}{(x)'}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{2}.$$

例2：求 $\left[\int_{-1}^{x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right]'$.

解： 原式$=\left[\int_{-1}^{x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right]' = \ln(1+x^2)$.

例3. 求 $\left(\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'$

解：原式$= e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)$

例4：求 $\left[\int_{\cos x}^{\sin x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right]'$.

解：原式 $= e^{\sin x}\cdot(\sin x)' - e^{\cos x}(\cos x)'$

$$= e^{\sin x}\cdot(\cos x) - e^{\cos x}(-\sin x).$$

练习一

1：求$\left[\int_{x^2}^{e^x} \sin t\, dt\right]'$.

2：设 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$，求 $f'(\pi)$.

3：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{x^4}$

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

1：求 $\left[\int_{x^2}^{e^x} \sin t\,\mathrm{d}t\right]'$.

解： $\left[\int_{x^2}^{e^x} \sin t\,\mathrm{d}t\right]' = \sin\left(e^x\right)\cdot\left(e^x\right)' - \sin\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)'$

$$= e^x \cdot \sin e^x - 2x \cdot \sin x^2$$

$$\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

2： 设 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2 dt$，求 $f'(\pi)$.

解：

$$f'(x) = \left(\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2 dt\right)' = \cos x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x$$

$$f'(\pi) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

解：3、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^{x^2}\sin t dt\right)'}{\left(x^4\right)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot\left(x^2\right)'}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

二、牛顿 —莱布尼兹公式

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

(牛顿 - 莱布尼兹公式)

证明：由定理1可知，

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数，由原函数的性质：

$$\Phi(x)=F(x)+C,（a\le x\le b, C\ 为常数）$$

在上式中，分别以 $x=b$，$x=a$ 代入后相减，得

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

例1 (1) $\int_1^2 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{7}{3}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \boxed{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, d(2x)$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

例2. 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解:

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{7}{12}\pi$$

例3. （1） $\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$

（2） $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_b^a f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b)$

即 $\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$

（3） $\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = x\Big|_a^b = b - a$

练习二

1：求下列定积分

$(1)\int_0^1 5^x dx$

$(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx$

$(3)\int_{-2}^1 x^2|x|dx$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(1)\ \int_0^1 5^x dx = \left.\frac{5^x}{\ln 5}\right|_0^1 = \frac{5^1}{\ln 5} - \frac{5^0}{\ln 5}$$

$$= \frac{5}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}$$

$$= \frac{4}{\ln 5}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$(2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin x dx \ = -3\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-3\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-3\cos 0\right)$$

$$= \left(-3\times 0\right) - \left(-3\times 1\right)$$

$$= 0 - \left(-3\right) = 3$$

$$|x| = \begin{cases} x \ , & 0 \le x \le 1 \\ -x \ , & -2 \le x \le 0 \end{cases}$$

$$(3)\int_{-2}^{1} x^2 |x| dx = \int_{-2}^{0} x^2 |x| dx + \int_{0}^{1} x^2 |x| dx$$

$$= \int_{-2}^{0} x^2 \cdot (-x) dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot x \, dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^3) dx + \int_{0}^{1} x^3 dx$$

$$= -\frac{1}{4} x^4 \Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{4} x^4 \Big|_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{4}(0-16) + \frac{1}{4}(1-0) = \frac{17}{4}$$

5.3 定积分的计算法

主讲教师：王玉兰

高等数学

一、定积分的换元法 （重点）

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\boldsymbol{\phi(t)}$**在**$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$上具有连续导数, $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

2) 在$[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

注意：

1)定积分的换元法在换元后，积分上，下限也要作相应的变换，即“换元必换限”.

2) 换元公式也可反过来使用 , 即

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元 $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

例1 求 $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x.$

解： 令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t,$

当$x=4$时，$t=2$，当$x=9$时，$t=3$，

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{t}{t-1}2t\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \frac{t^2}{t-1}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2\times\left[\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)\Big|_2^3\right] = 7+\ln 4.$$

例2： 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \mathrm{d}x.$

解： 令 $\sin x = t$，则 $\cos x \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x) = \mathrm{d}t,$

当$x = 0$时，$t = 0,$ 当$x = \frac{\pi}{2}$时，$t = 1,$ 则

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \mathrm{d}(\sin x) = \int_0^1 t^4 \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{5} t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

方法二：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \,\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{5}(\sin 0)^5$$

$$= \frac{1}{5}.$$

二、定积分的分部积分法（重点）

定理2. 设 $u'(x), v'(x) \in C[a, b]$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

或

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

例3： 求 $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$

解：

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_0^1 x de^x$$

$$= xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= (e-0) - \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= e - e^x \Big|_0^1$$

$$= e - (e-1) \; = 1$$

例4： 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\boxed{\cos x}\mathrm{d}x.$

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin x)$

$$= x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0\right] - \left(-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

例5. 计算 $\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}\boxed{x}$.

解: 原式 $= x \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \boxed{d(\ln x)}$

$$= (2 \cdot \ln 2 - 1 \cdot \ln 1) - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 1 dx$$

$$= 2\ln 2 - x \Big|_1^2$$

$$= 2\ln 2 - (2 - 1)$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

例6. **计算** $\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x \cdot \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d\left(\arctan x\right)$

$$= \left(\arctan 1 - 0\right) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d\left(1+x^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times \ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

练习三

求下列积分：

(1) $\int_{1}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$

(2) $\int_{0}^{1} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

(3) $\int_{0}^{\pi} x^2 \cos x\mathrm{d}x$

(4) $\int_{0}^{1} t\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

解:

$$\frac{1}{x}dx = d\left(1+\ln x\right)$$

$$(1)\ \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x = \int_1^{e^3} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}\left(1+\ln x\right)$$

$$=\left(2\sqrt{1+\ln x}\right)\Big|_1^{e^3}$$

$$=\left(2\sqrt{1+\ln e^3}\right)-\left(2\sqrt{1+\ln 1}\right)$$

$$=4-2=2$$

$$(2)\quad \int_0^1 t\cdot e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t^2}d\left(-t^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-1}-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ \int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx &= \int_0^{\pi} x^2 d(\sin x) \\
&= x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, d\left(x^2\right) \\
&= \left(\pi^2 \cdot \sin \pi - 0\right) - \int_0^{\pi} 2x \sin x\, dx \\
&= -\int_0^{\pi} 2x \sin x\, dx \\
&= \int_0^{\pi} 2x\, d(\cos x) \\
&= 2x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \cos x\, dx \\
&= (2\pi \cos \pi - 0) - 2 \sin x \Big|_0^{\pi} \\
&= -2\pi - 2(\sin \pi - \sin 0) = -2\pi
\end{aligned}
$$

$$(4)\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}dt = -\int_0^1 t\,d\left(e^{-t}\right)$$

$$= -\left[te^{-t}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-t}dt\right]$$

$$= -\left[\left(1\times e^{-1} - 0\times e^{0}\right) + e^{-t}\Big|_0^1\right]$$

$$= -\left[e^{-1} + \left(e^{-1} - e^{0}\right)\right]$$

$$= -\left(2e^{-1} - 1\right) = 1 - 2e^{-1}$$

5.4 反常积分
（广义积分）

主讲教师：王玉兰

高等数学

一、无穷限的反常积分

定义1. 设 $f(x) \in C[a, +\infty)$, 取 $b > a$, 若

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在 , 则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限**反常积分**, 记作

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

这时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛** ; 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **发散** .

类似地 ,

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

无穷限的反常积分也称为**第一类反常积分**.

若$F(x)$是$f(x)$的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

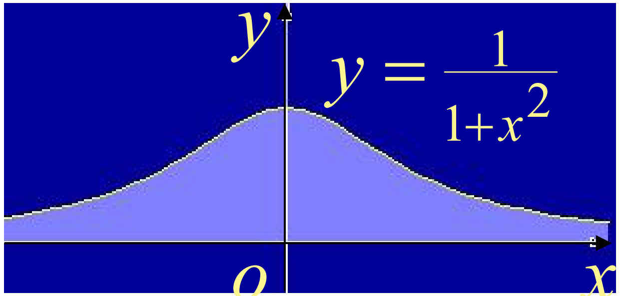
则有类似牛顿–莱布尼兹公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例1. 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$



解: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$

$$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$ （收敛）

练习四

1：求 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

2：求 $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

3：求 $\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx$

解: 1: $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\cos\frac{1}{x}\Bigg|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{\pi}{2}$$

$$=1-0=1$$ （收敛）

解： 2：$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int_e^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^2}d(\ln x)$

$$= -\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{\ln x}) - (-\frac{1}{\ln e})$$

$$= 0 + 1 \quad = 1$$

（收敛）

解: 3： $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xd\left(e^{-x}\right)$

$$= -\left[xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \right]$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= -e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left(-e^{-x}\right) - \left(-e^{0}\right)$$

$$= 0 + 1 = 1$$ （收敛）

习题课

一、计算下列定积分

（1）$\int_0^1 x^{100}\,dx = \frac{1}{101}x^{101}\Big|_0^1 = \frac{1}{101}\times 1 - \frac{1}{101}\times 0 = \frac{1}{101}$

（2）$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

（3）$\int_0^2 |1-x|\,dx$

$$= \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1$$

(4) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= [-(-1)-(-1)] + [1-(-1)] = 4$$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d(-\cos x)$

$$= x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}\times\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - 0\times(-\cos 0)\right] + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$(6)\int_0^1 xe^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,d\left(e^{2x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x\cdot e^{2x}\right)\Big|_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ \left(e^2-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d\left(2x\right)\ \right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ e^2-\frac{1}{2}\ e^{2x}\Big|_0^1\ \right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ e^2-\frac{1}{2}\left(e^2-e^0\right)\right]=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

$$(7)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)-(-1)$$

$$=0-(-1)=1$$ （收敛）

$$(8)\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1-x}dx=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x-1}dx=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x-1}d(x-1)$$

$$=-\ln|x-1|\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=-\ln 1-\lim_{x\to-\infty}\left(-\ln|x-1|\right)$$

$$=0+(+\infty)=+\infty$$ （发散）

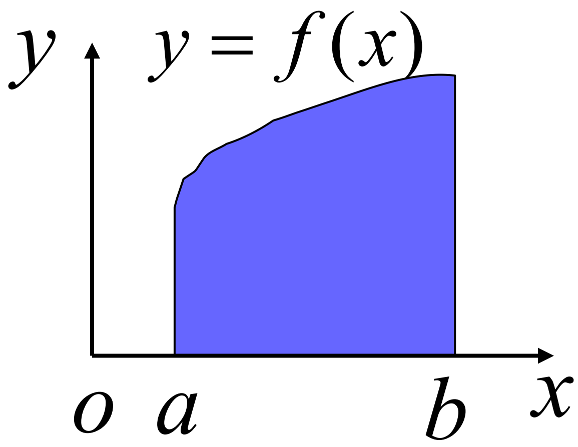
5.5 定积分的应用

主讲教师：王玉兰

高等数学

一、平面图形的面积（重点）

（1）



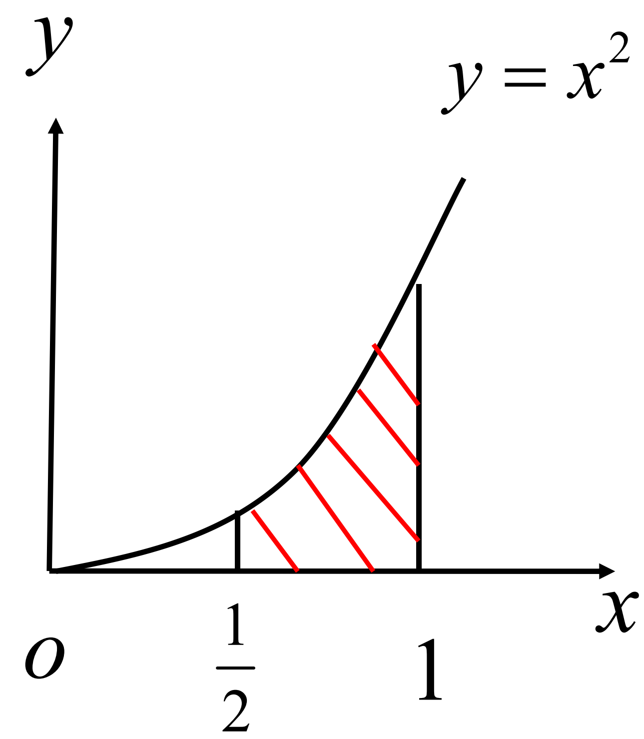
$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例1.　计算曲线 $y=x^2$、$x=\dfrac{1}{2}$、$x=1$、$y=0$

所围图形的面积 .

解: $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx$

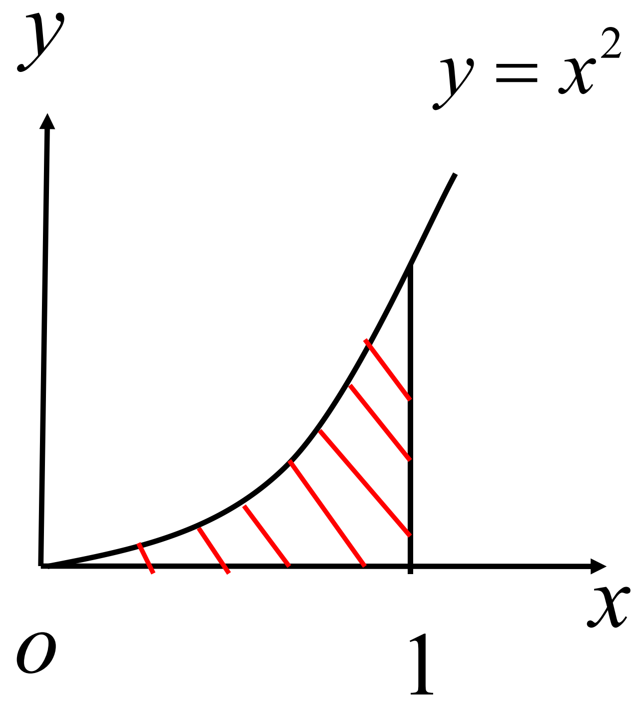
$=\dfrac{1}{3}x^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\dfrac{7}{24}$



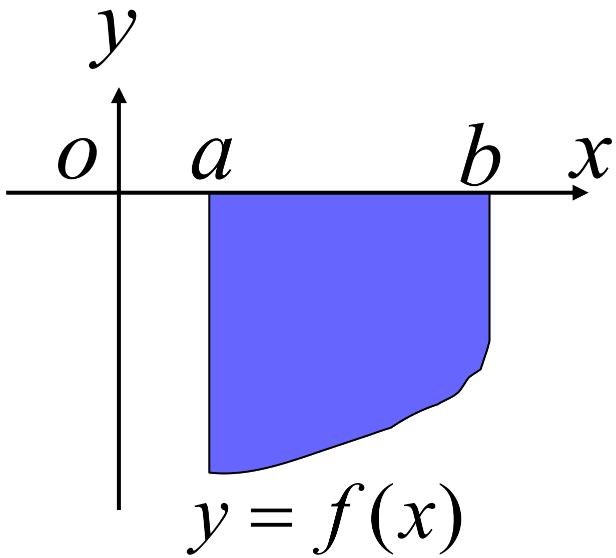
例2. 计算曲线 $y=x^2$、$x=1$、$y=0$ 所围图形的面积.

解: $$A=\int_0^1 x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

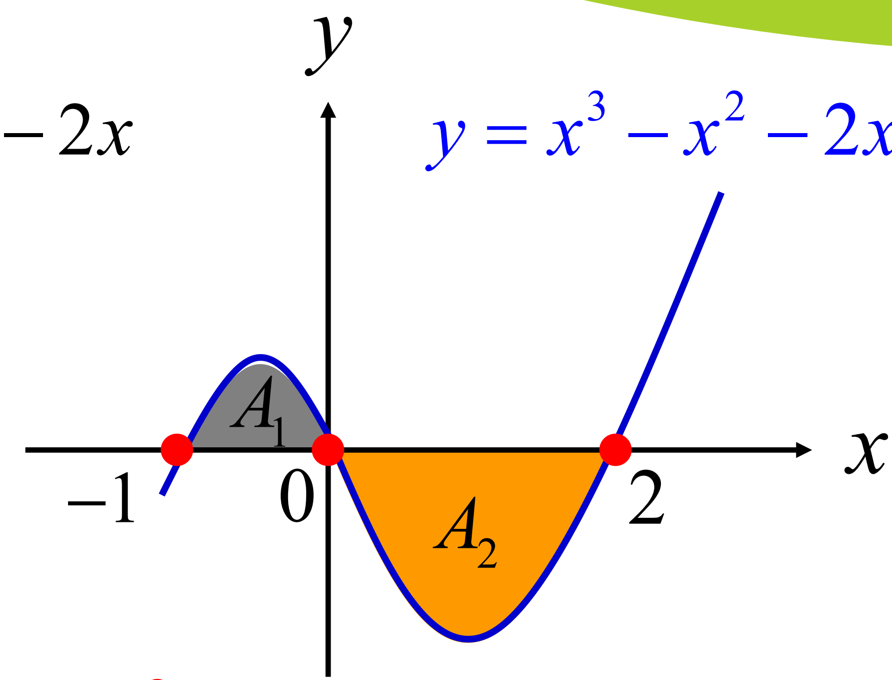


（2）



$$A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

例3. 计算曲线 $y=x^3-x^2-2x$ 与 x 轴所围图形的面积。



解:

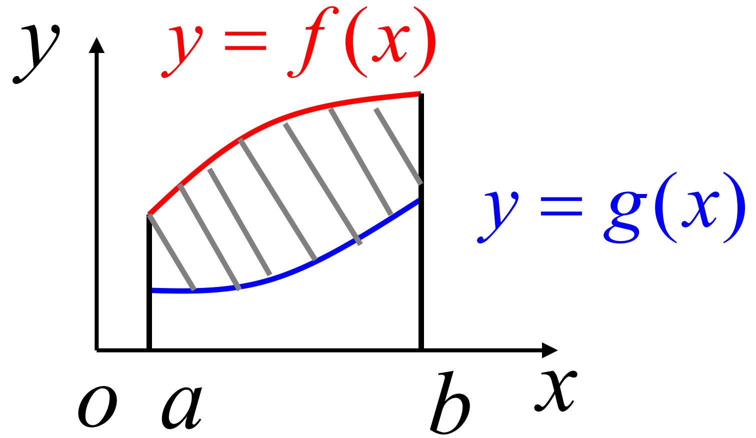
$$A=A_1+A_2$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{-1}^{0}\right)-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{0}^{2}\right)$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

（3）



$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$

例4. 计算两条抛物线 $y=\sqrt{x}\,,\ y=x^2$ 在第一象限所围图形的面积 .

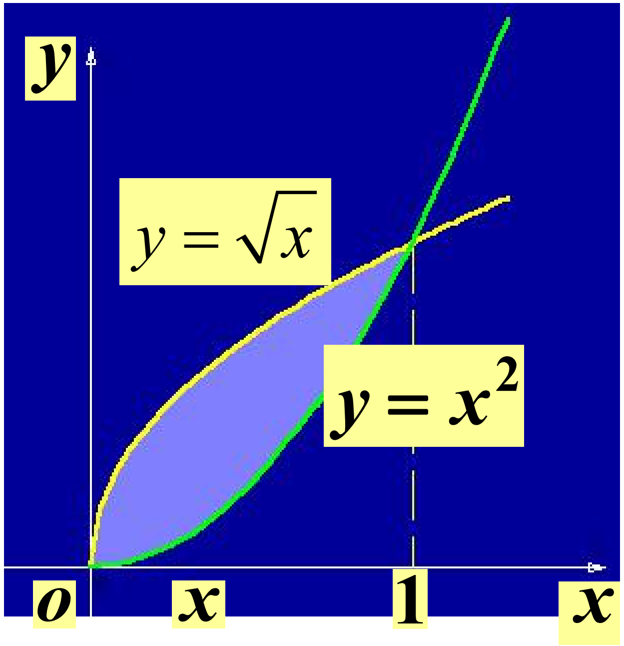
解: 由 $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$

得交点 $(0,0)\,,\,(1,1)$

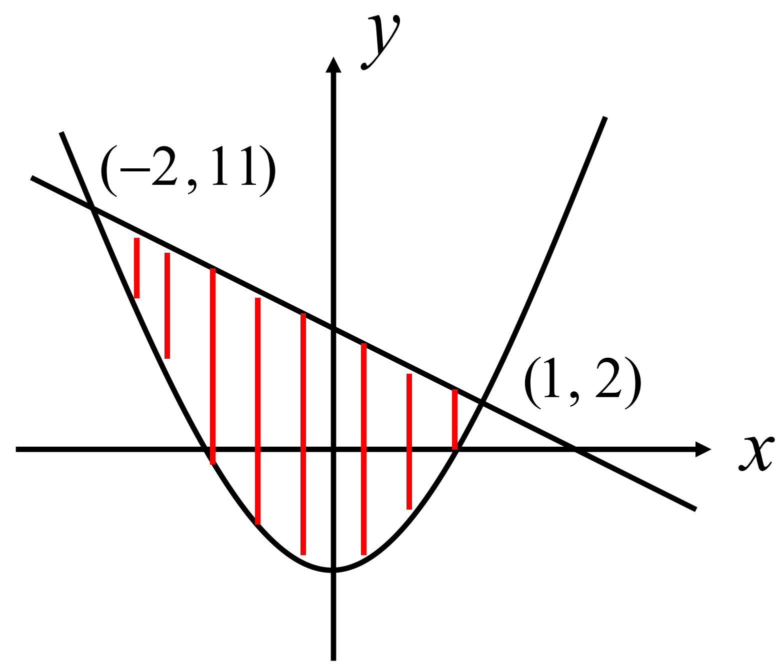
$$\therefore \quad A=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}$$



例5. 求由曲线 $y=3x^2-1$ 和直线 $y=5-3x$ 围成的平面图形面积。



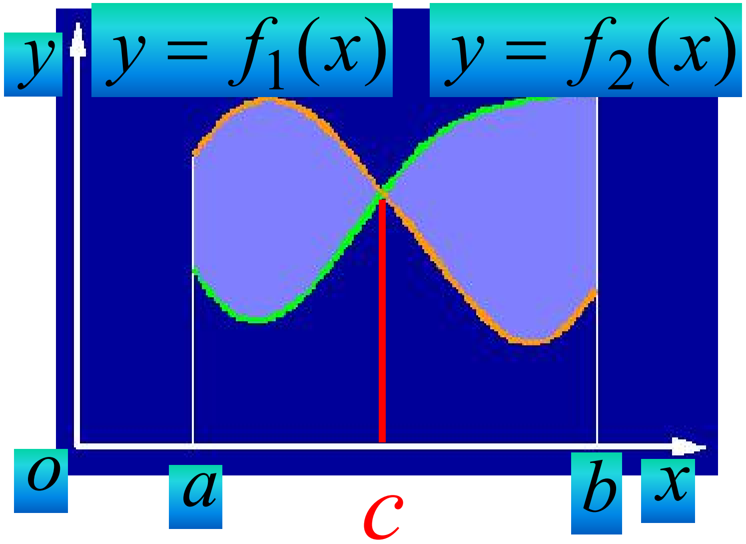
解: 由 $\begin{cases} y=3x^2-1 \\ y=5-3x \end{cases}$

得交点 $(-2,11)$, $(1,2)$

$$A=\int_{-2}^{1}\left[(5-3x)-(3x^2-1)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(-3x^2-3x+6\right)dx$$

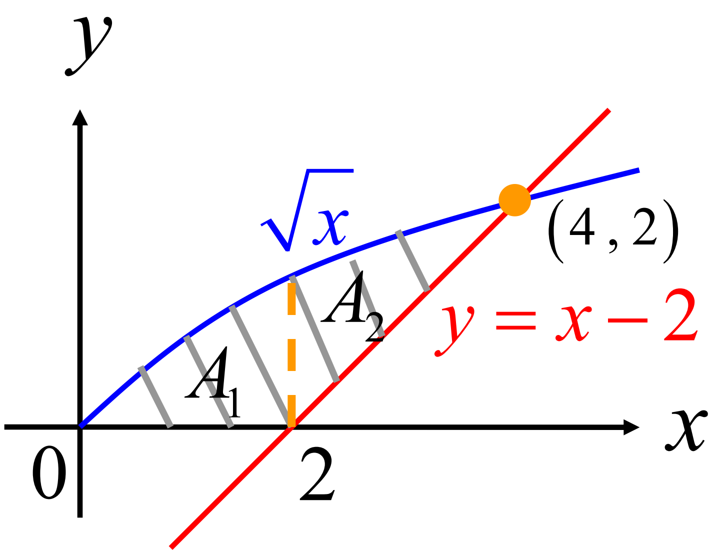
$$=\left(-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{27}{2}$$

（4）



$$A = \int_a^c \left[f_1(x) - f_2(x) \right] \mathrm{d}x + \int_c^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] \mathrm{d}x$$

例6. 求由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=x-2$ 以及 x 轴围成的平面图形面积。



解: $A=A_1+A_2$

$$=\int_0^2\left(\sqrt{x}\right)dx+\int_2^4\left[\sqrt{x}-(x-2)\right]dx$$

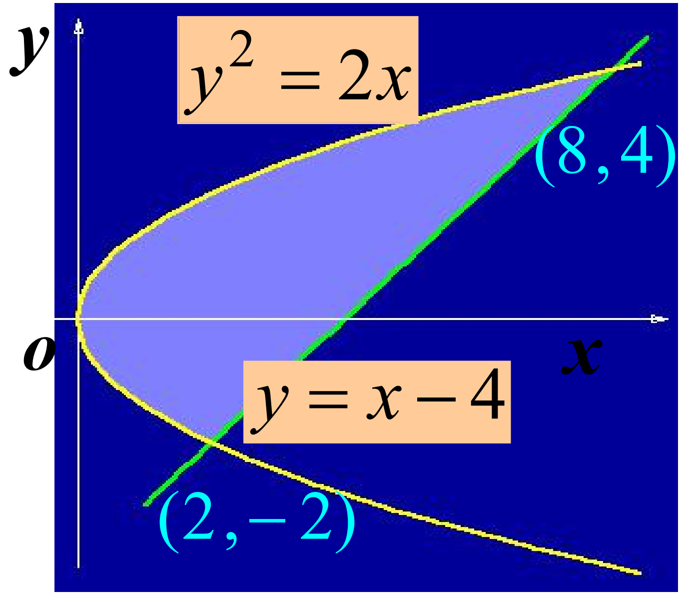
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^2+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\bigg|_2^4$$

$$=\frac{10}{3}$$

例7. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点

$(2,-2),(8,4)$



为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

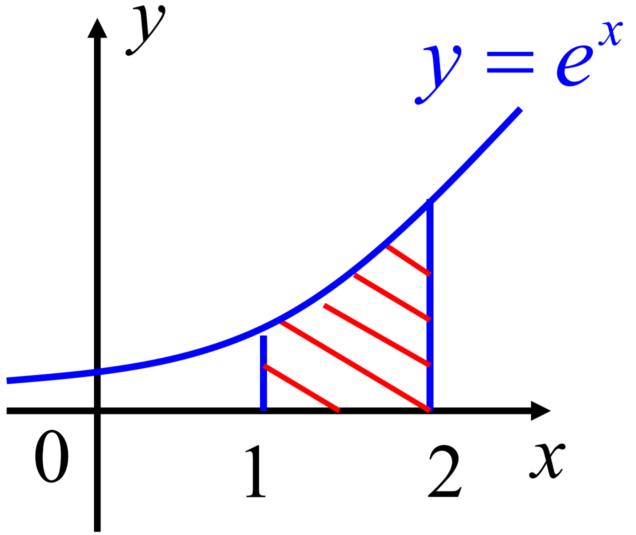
$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\tfrac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

习题课

二、求由下列曲线所围成的平面图形的面积

$(1)\ y=e^x, y=0, x=1, x=2$



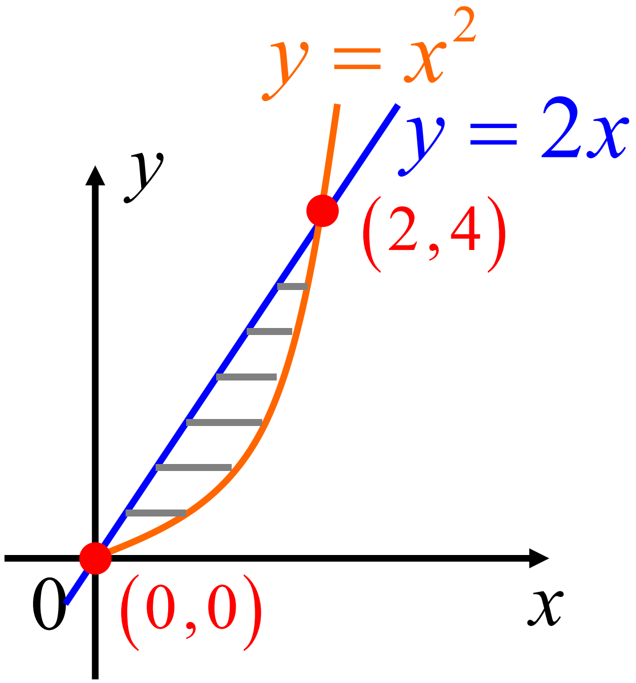
解：$A=\int_1^2 e^x dx$

$=e^x\Big|_1^2$

$=e^2-e$

$=e(e-1)$

$$(2)\ y=x^2, y=2x$$



解：

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$$

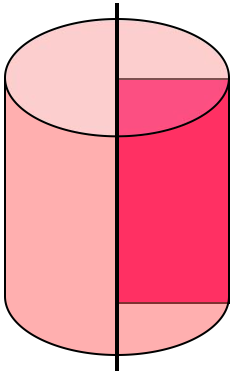
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$A=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$$

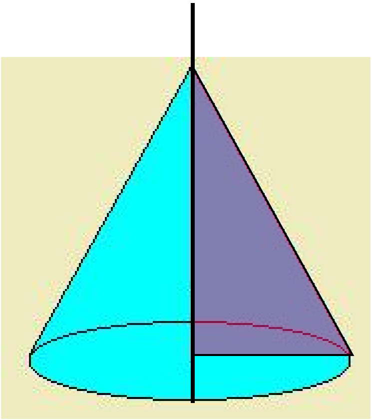
$$=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

二、旋转体的体积

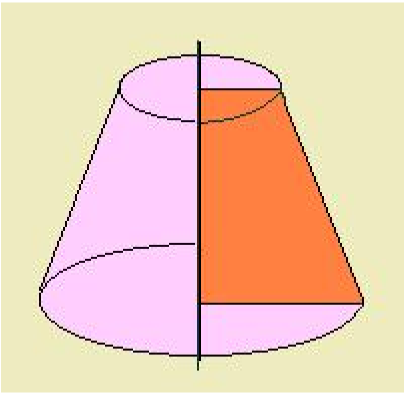
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做旋转轴．



圆柱



圆锥

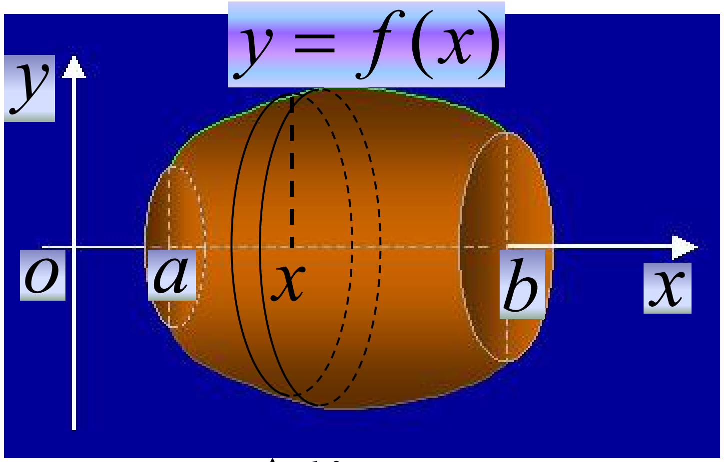


圆台

问题1：连续曲线段 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时, 有

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$



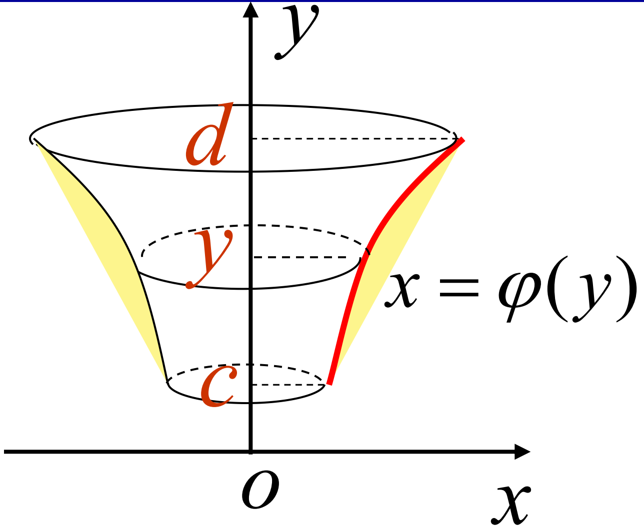
问题2： 连续曲线段

$$x=\varphi(y)\ \ (c\le y\le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时,

有

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$



例8. 求由 $y=\sqrt{x}\,,x=1\,,y=0\,,x=4$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

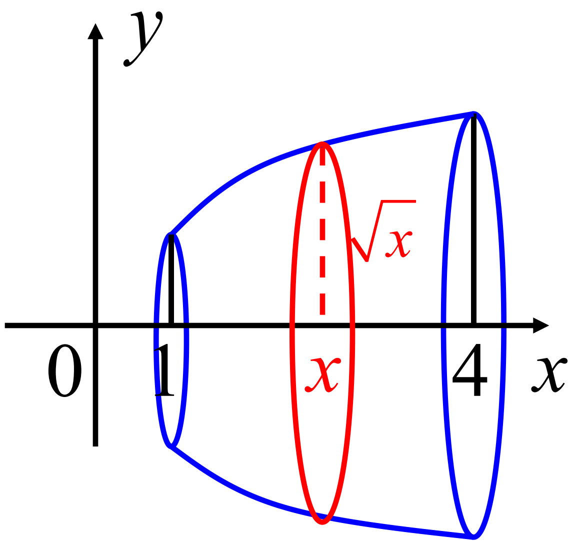
解:

$$V=\int_1^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$=\int_1^4 \pi x dx$$

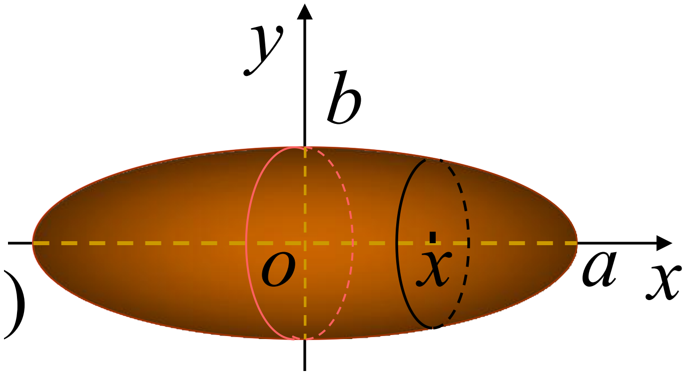
$$=\frac{1}{2}\pi x^2\Big|_1^4$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(16-1\right)=\frac{15}{2}\pi$$



例9. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的椭球体的体积.

解:



$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$

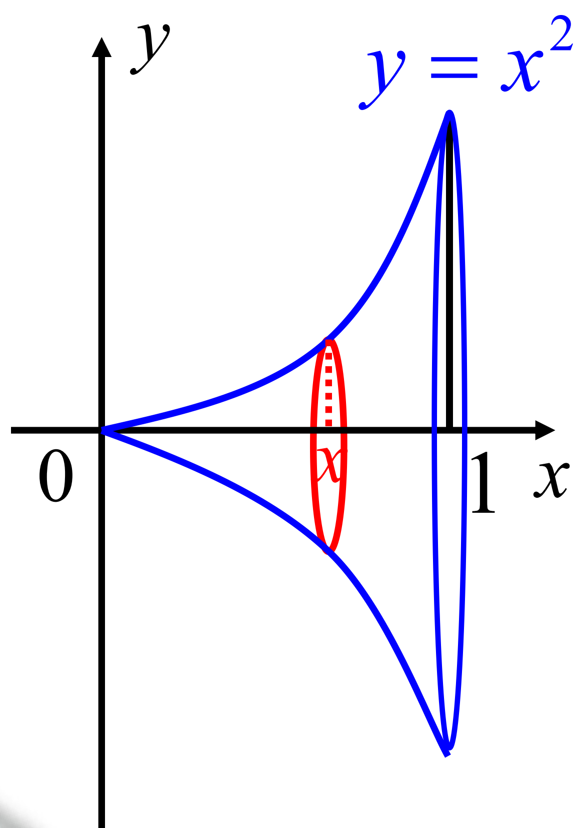
则 $\quad V=2\int_0^a \pi\, y^2\,\mathrm{d}x$ **(利用对称性)**

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

三、求下列旋转体的体积

1、求由曲线 $y=x^2, x=1, y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积。



解：

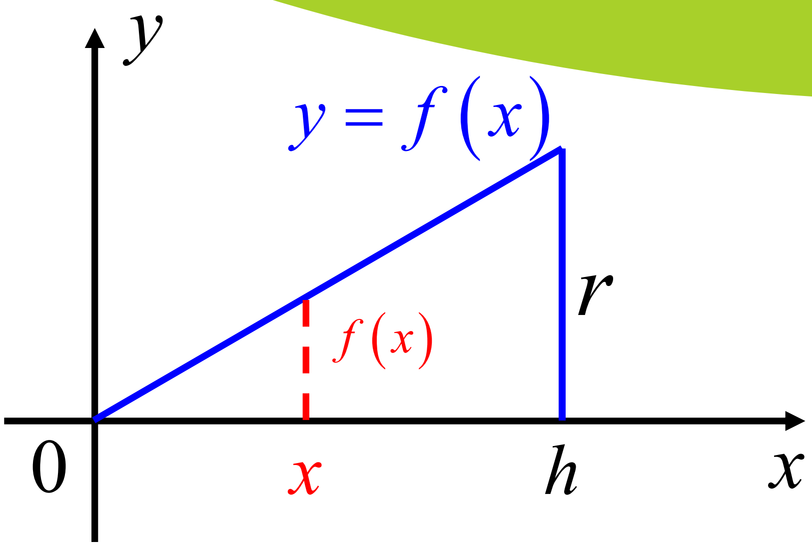
$$V=\int_0^1 \pi[\,x^2\,]^2 dx$$

$$=\int_0^1 \pi x^4 dx$$

$$=\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

2、利用定积分求旋转体体积的方法证明：

圆锥体积公式 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$



解：

$$V=\int_0^h \pi[f(x)]^2 dx=\int_0^h \pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx$$

$$=\int_0^h \pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot x^2 dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx$$

$$=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\times\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h\right)=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\times\frac{1}{3}h^3=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$