第二讲　极限的概念

内容概要：

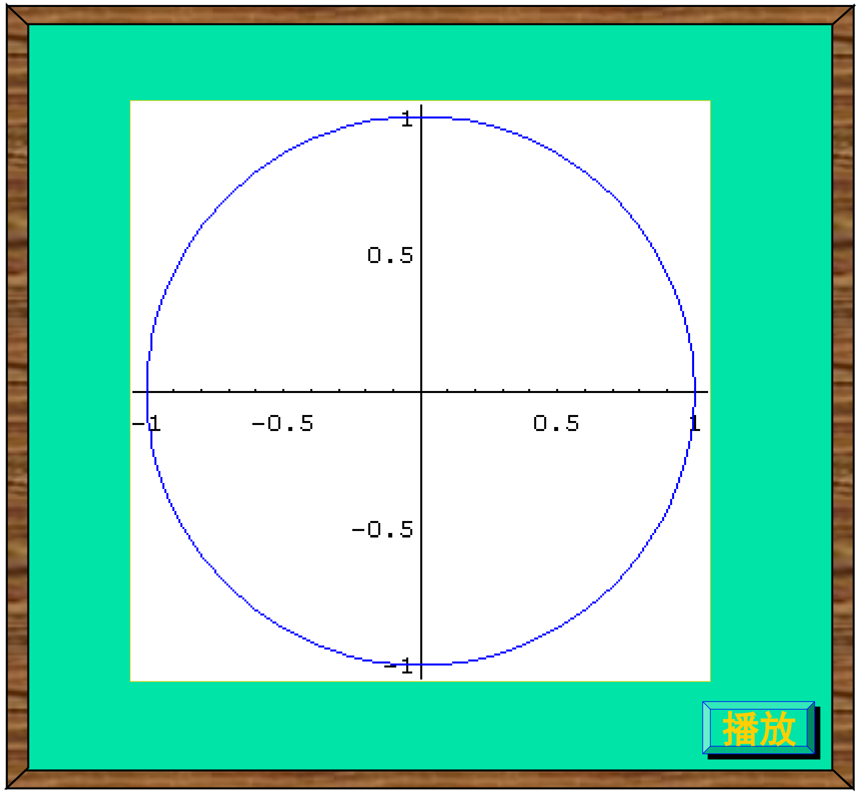
- 数列的极限
- 函数的极限
- 极限的性质

一、概念的引入

1、割圆术：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽

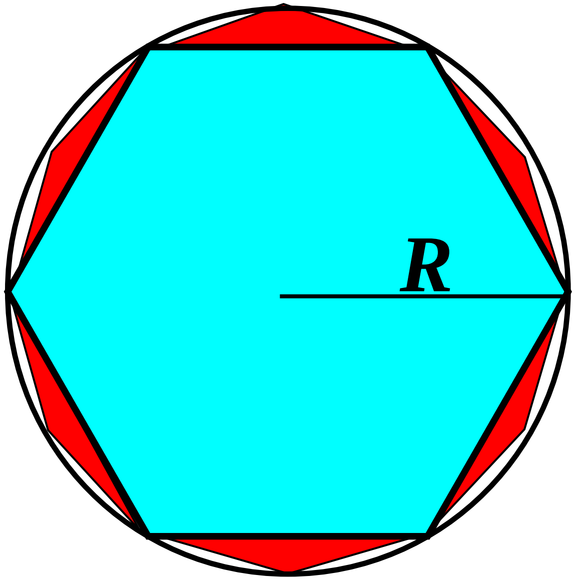


正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 A_n



$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \Longrightarrow S$

2、截丈问题：

"一尺之棰，日截其半，万世不竭"

第一天截下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天截下的杖长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

二、数列的定义

定义: 按自然数$1,2,3,\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为无穷数列,简称数列.其中的每个数称为数列的项,x_n称为通项(一般项).数列(1)记为$\{x_n\}$.

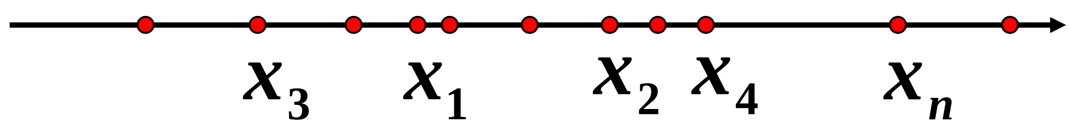
例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\qquad \{2^n\}$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots; \qquad \{\frac{1}{2^n}\}$$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;\qquad \{(-1)^{n-1}\}$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots;\qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$

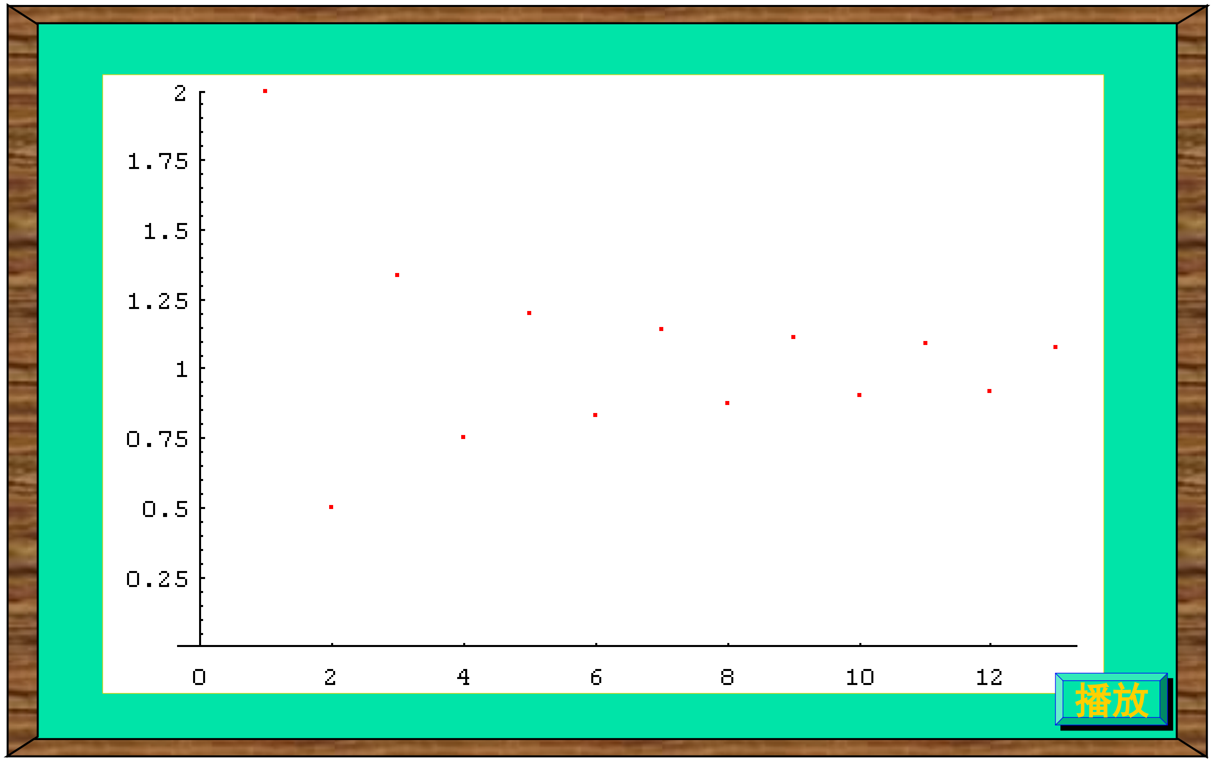
注意: 1.数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



2.数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

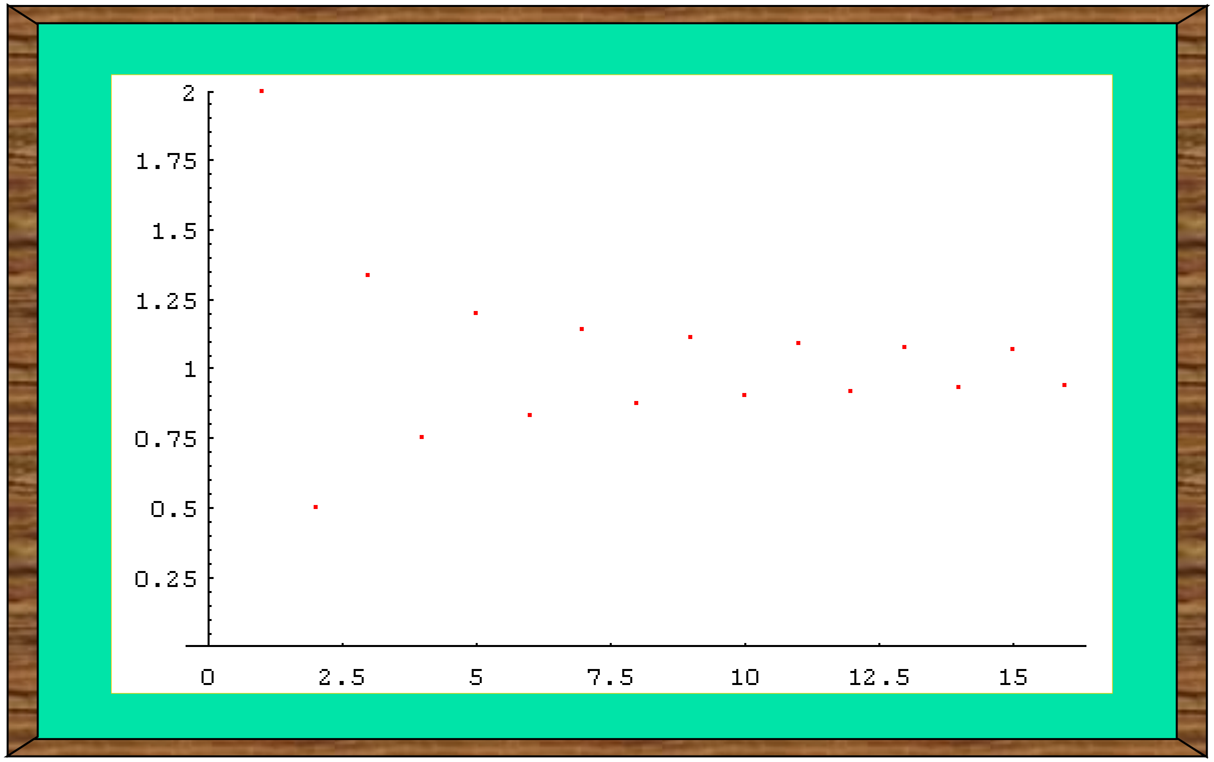
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



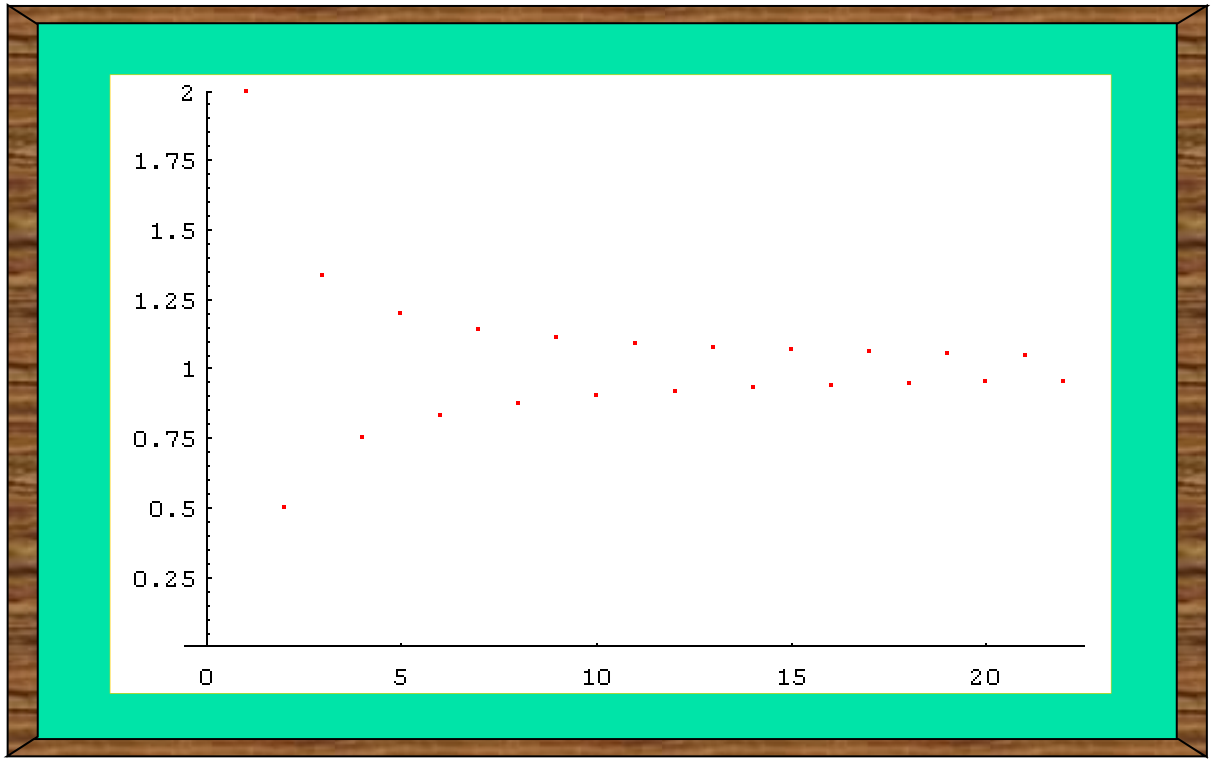
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



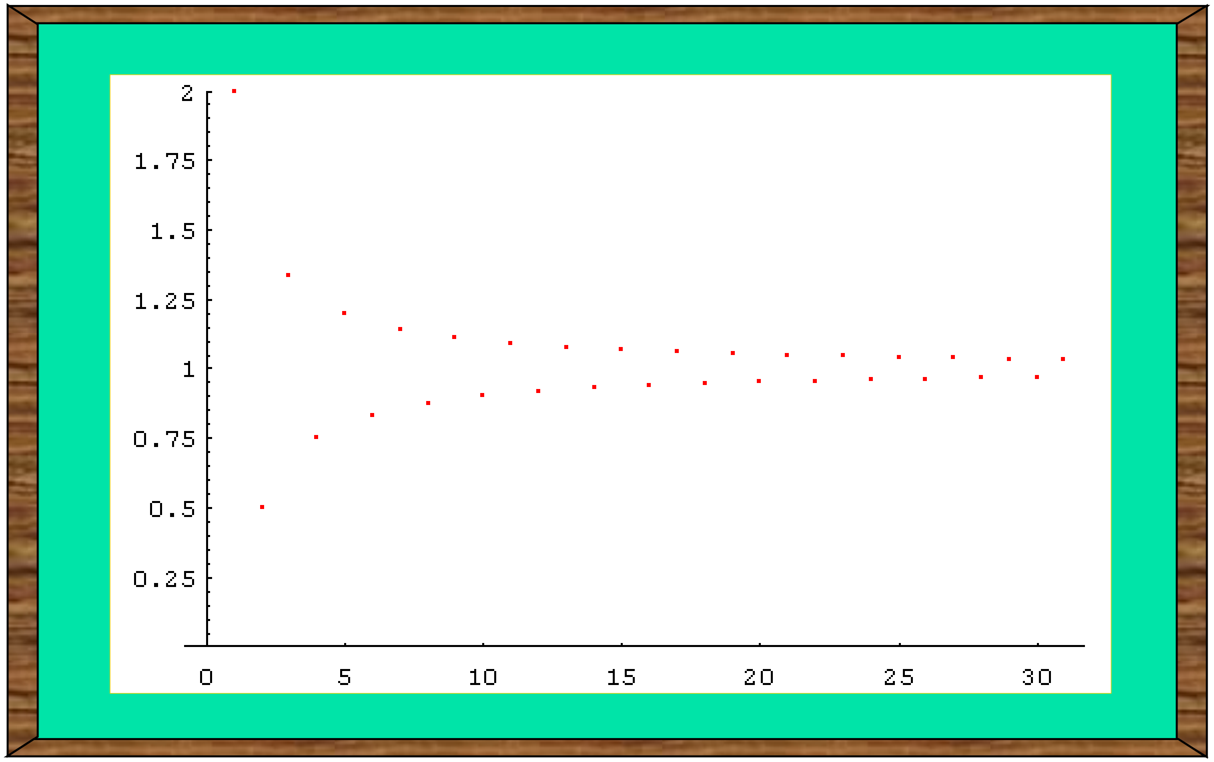
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n \to \infty$时的变化趋势.



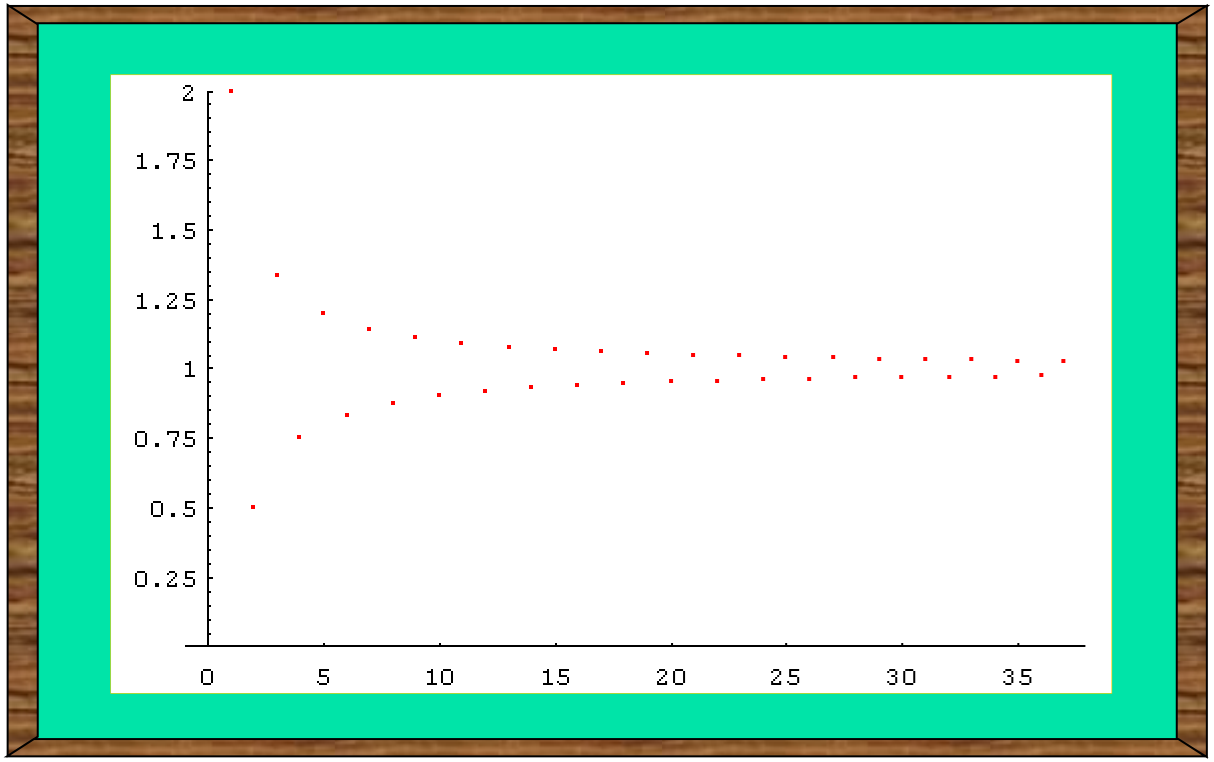
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n \to \infty$时的变化趋势.



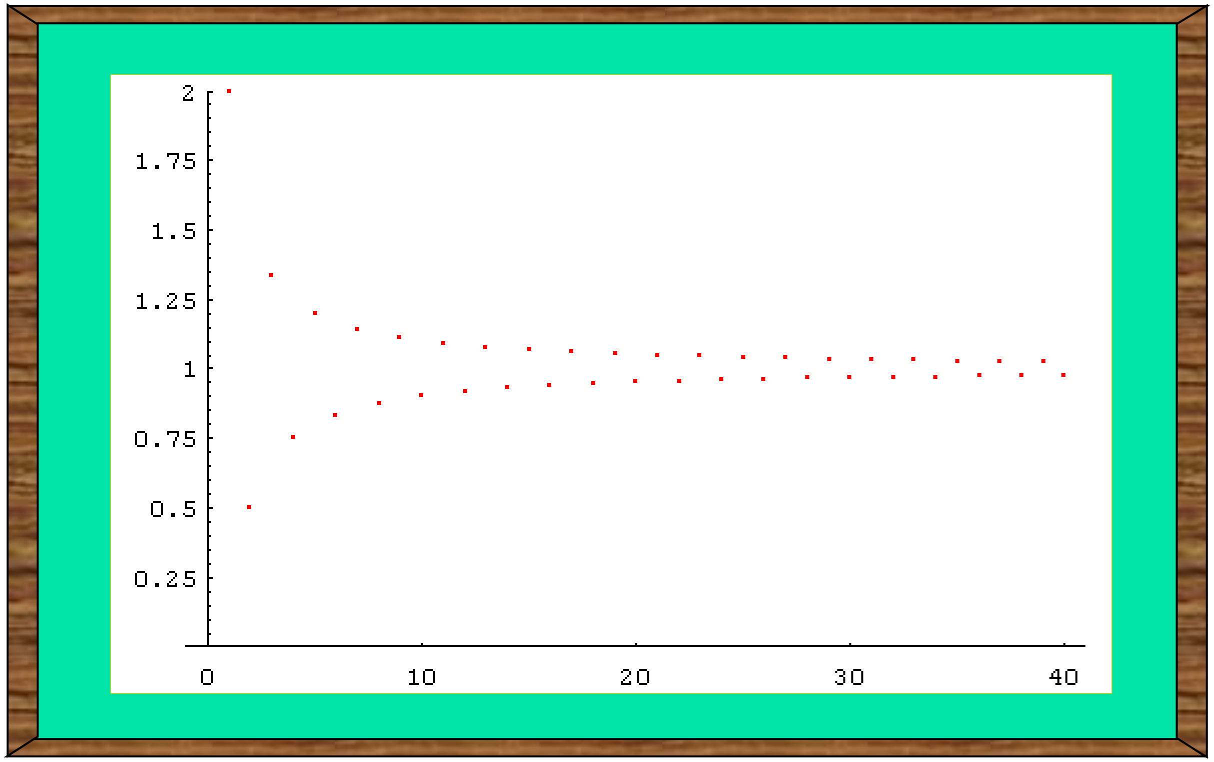
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



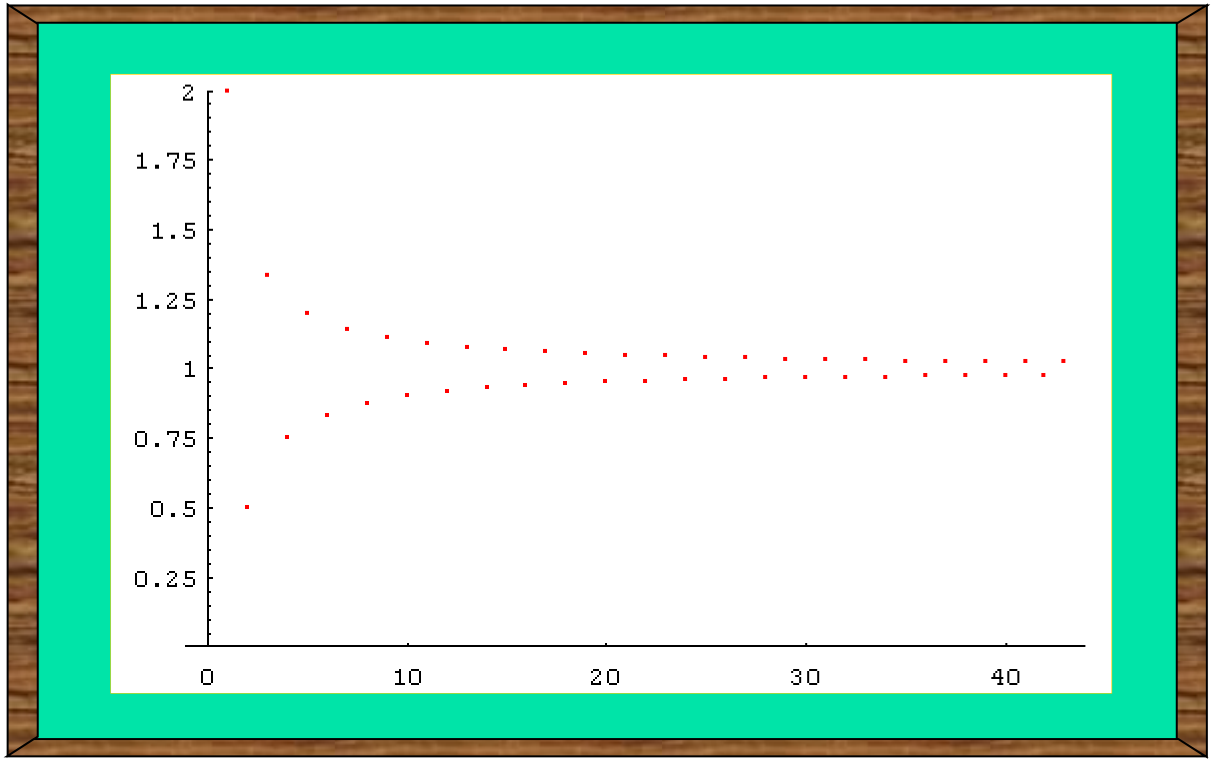
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



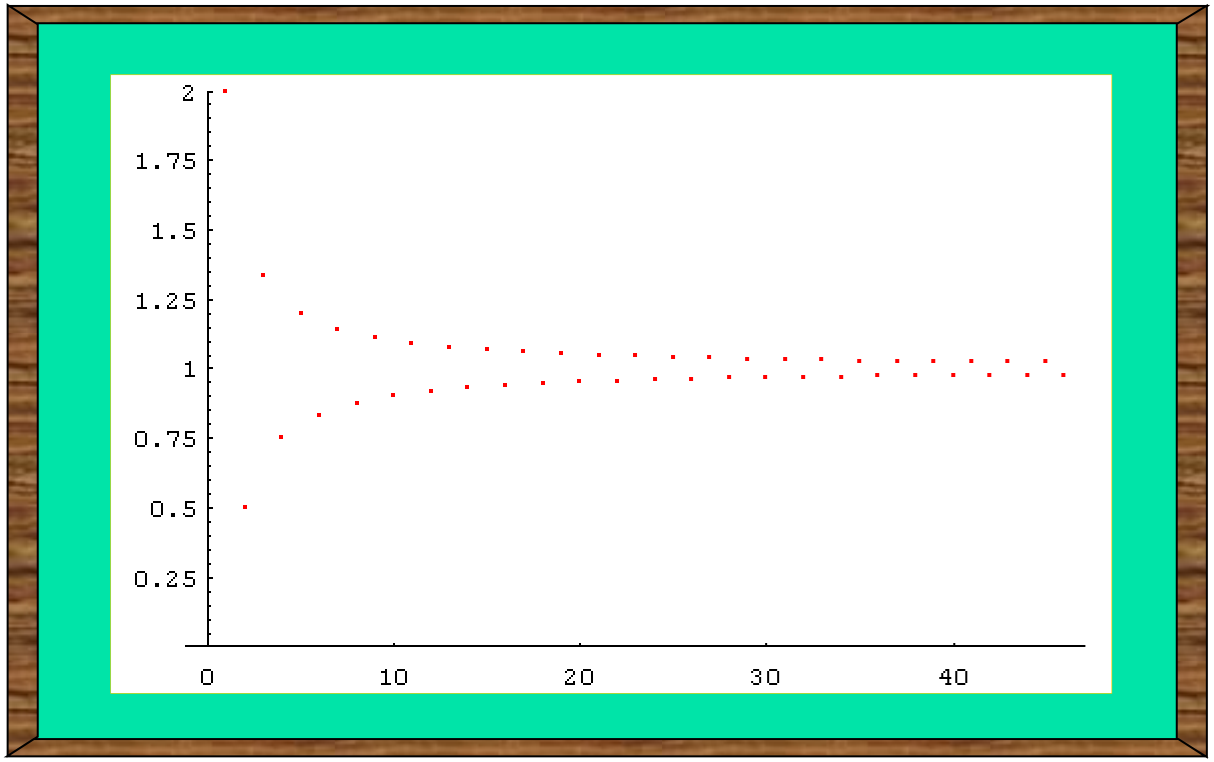
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



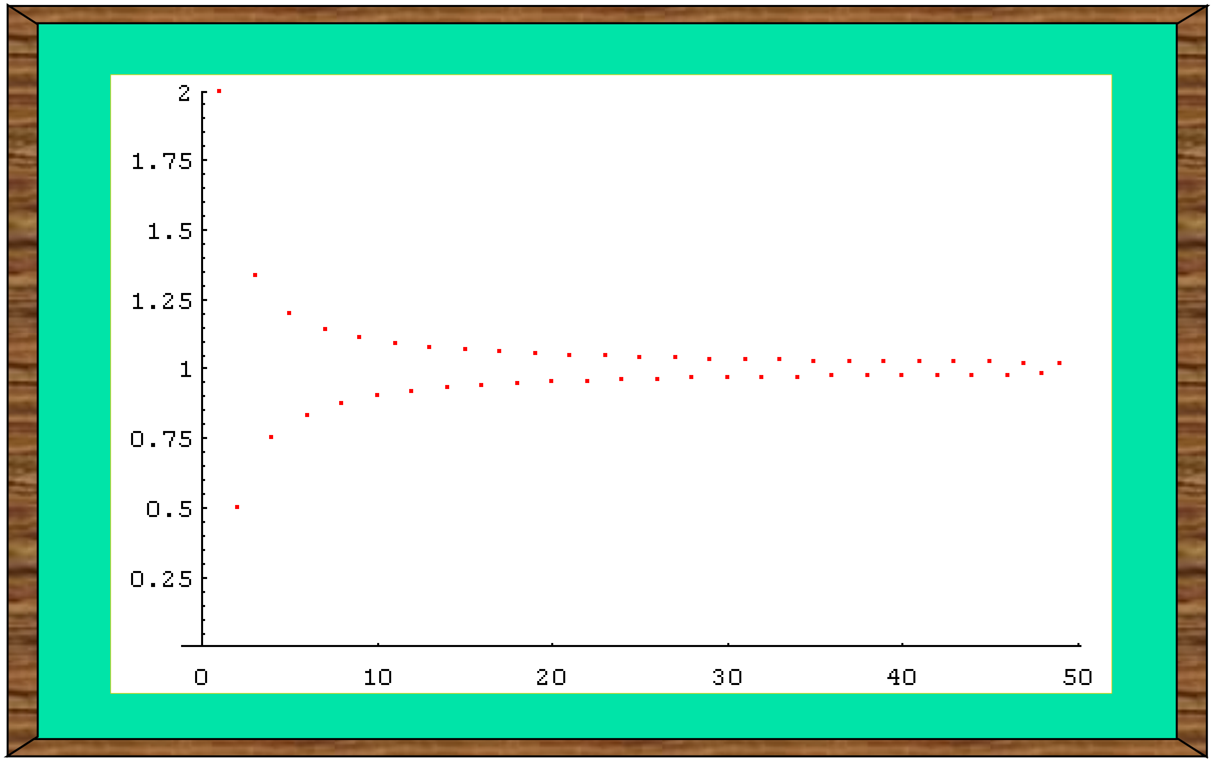
三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



三、数列的极限

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



问题: 当 n 无限增大时, x_n是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

通过上面的观察:

当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

1、数列极限的定义

定义1： $\{x_n\}$的项数n无限增大时，x_n无限接近于某个确定的常数A，则称A是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于A，记作：

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A \ （当 n\to+\infty 时）$$

极限符号

自变量

如：(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$

当$n\to+\infty$时，$\frac{1}{2^n}\to 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\ldots$

当$n \to +\infty$时，$\frac{n}{n+1} \to 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1}$$

(3) $2, 4, 8, \ldots\ldots, 2^n, \ldots\ldots$

当$n \to +\infty$时，$2^n \to +\infty$

极限不存在

(4) $1, -1, 1, \ldots\ldots, -1, \ldots\ldots, (-1)^{n+1}$

当$n \to +\infty$时，$(-1)^{n+1} \to \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ -1, & n\text{为偶数} \end{cases}$

极限不存在

2、数列极限存在的充要条件

定义2：（数列的子列）

在数列 中抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，所构成的数列 称为原数列的子数列。

如：（1） $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

子列1（奇数项）： $\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{32},\cdots\cdots$

子列2（偶数项）： $\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\cdots\cdots$

数列极限存在的充要条件:

数列 $\{x_n\}$ 极限存在 $\Leftrightarrow$ 任意子列都存在相等的极限

如: (1) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

子列1 $\{a_n\}$(奇数项): $\frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32},\ \cdots\cdots$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

子列2 $\{b_n\}$(偶数项): $\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \cdots\cdots$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

(4) $1, -1, 1, -1, \ldots\ldots (-1)^{n+1} \ldots\ldots$

数列极限不存在

子列1 $\{a_n\}$**(奇数项)：** $1, 1, 1, \cdots\cdots$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$$

子列2 $\{b_n\}$**(偶数项)：** $-1, -1, -1, \cdots\cdots$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = -1$$

子列1的极限 $\neq$ **子列2的极限**

3、收敛数列的性质

数列极限存在

性质1： （极限的唯一性）

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的。

该性质与极限定义相呼应

数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大时，x_n 无限接近于某个固定常数A，则称A是数列 $\{x_n\}$ 的极限。

定义3：（有界）

对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对于一切 x_n 都满足不等式 $|x_n| \le M$，$(-M \le x_n \le M)$

则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的，否则说 $\{x_n\}$ 是无界的。

性质2：（收敛数列的有界性）

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界。

注： 有界不一定收敛。

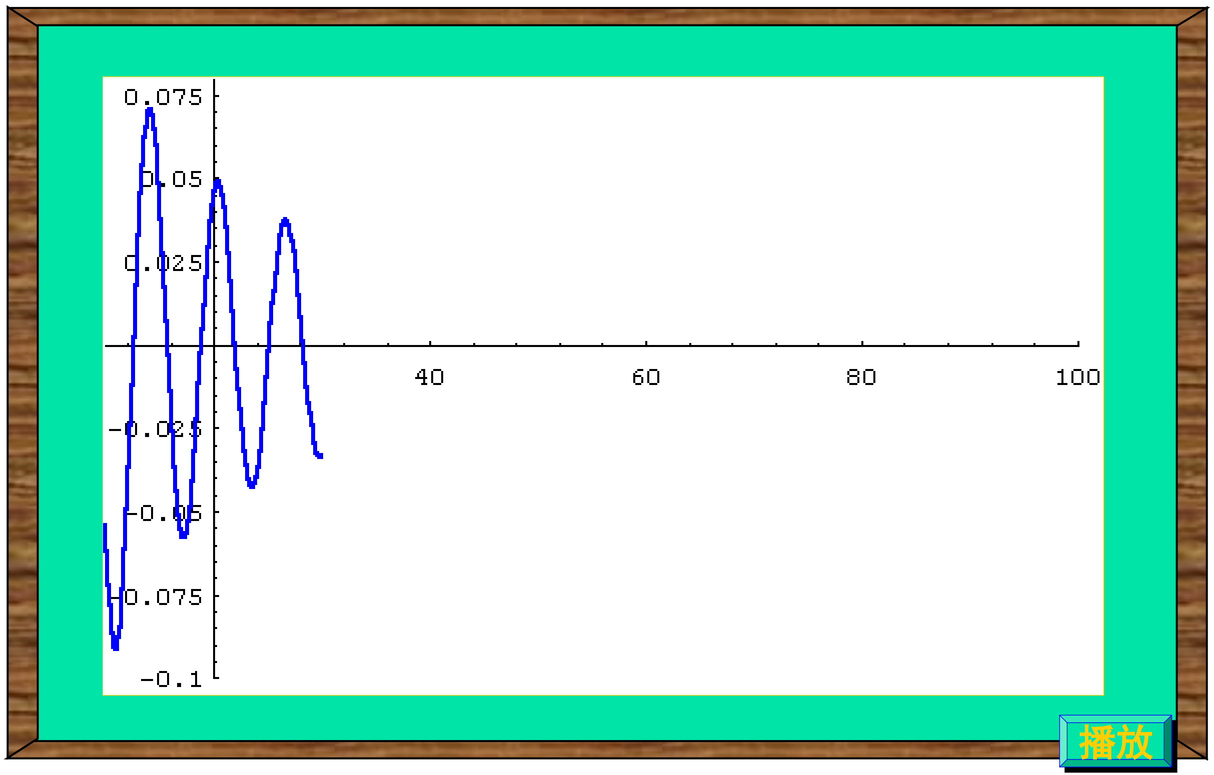
如数列 $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$，有界但不收敛。

收敛必有界，但有界不一定收敛。

五、函数极限

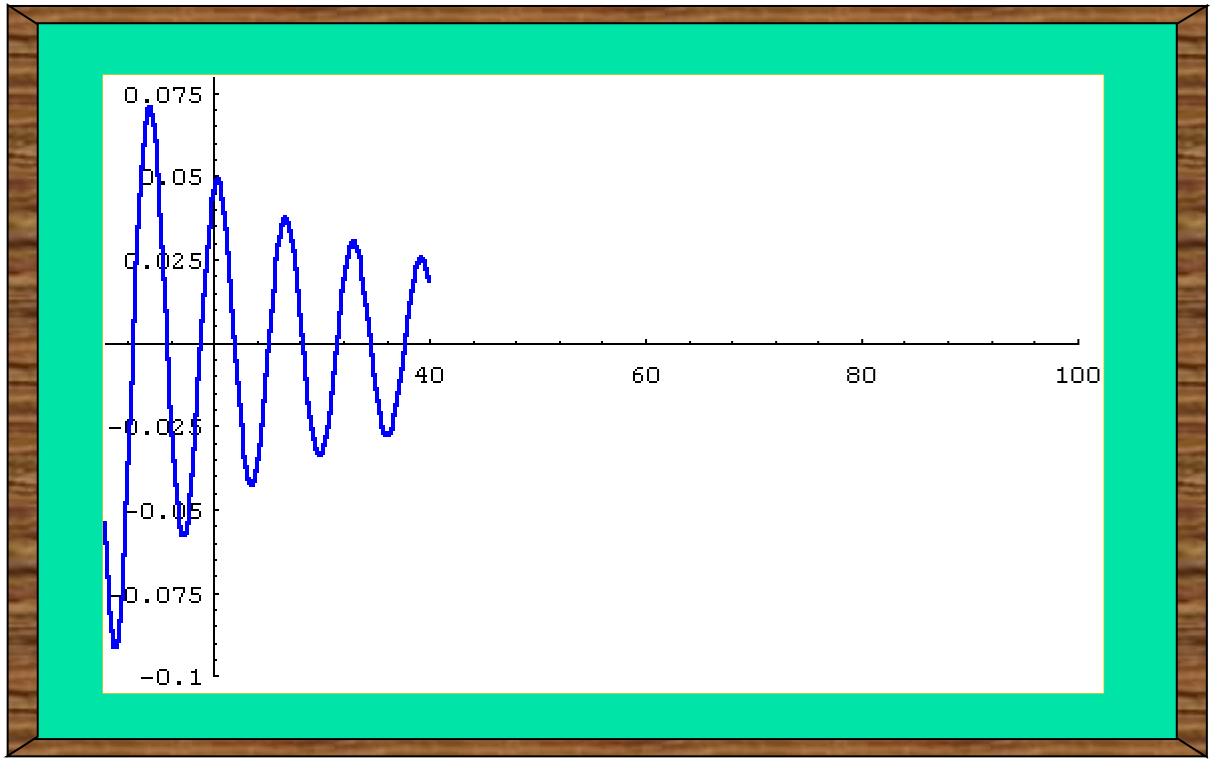
（一）、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



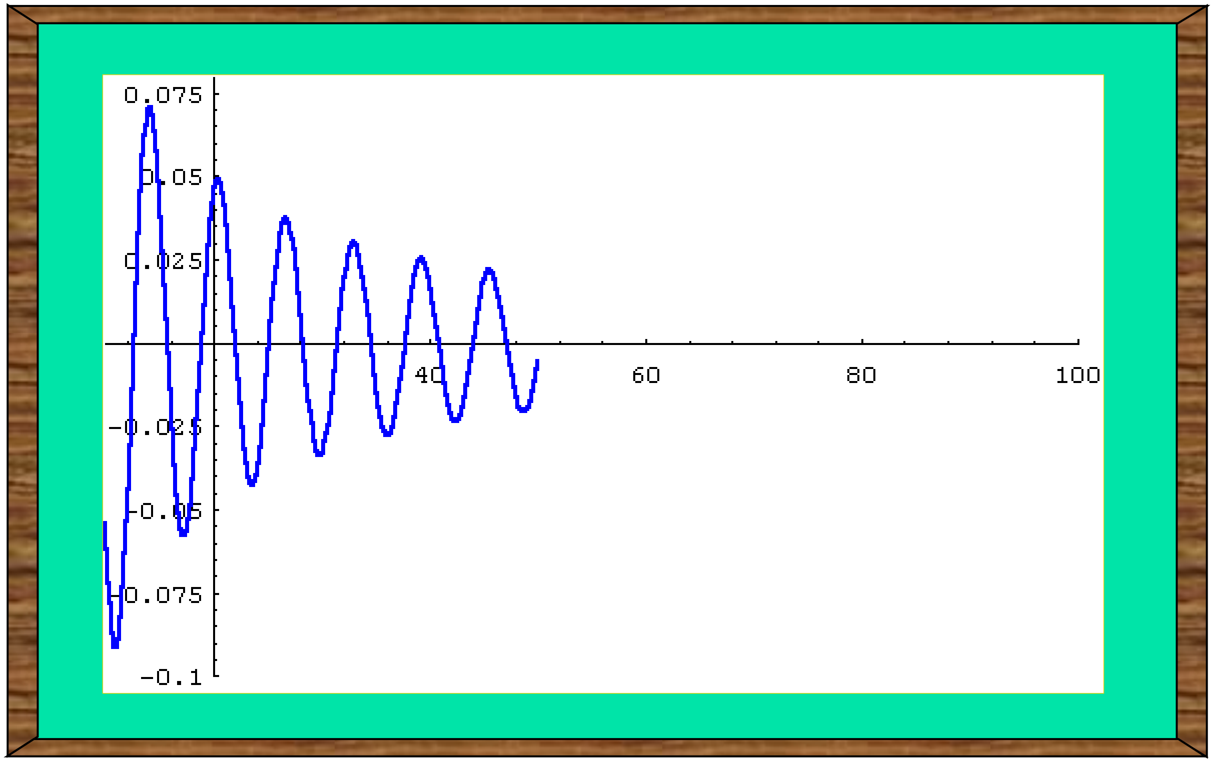
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



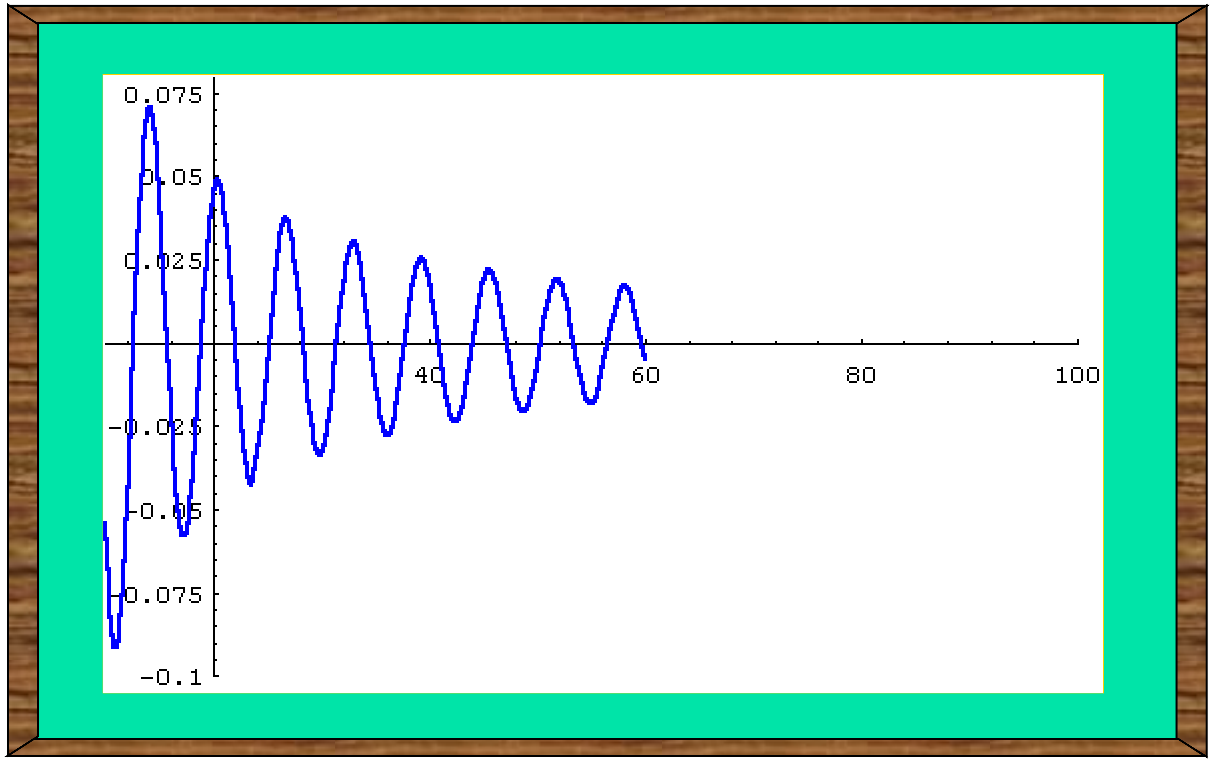
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



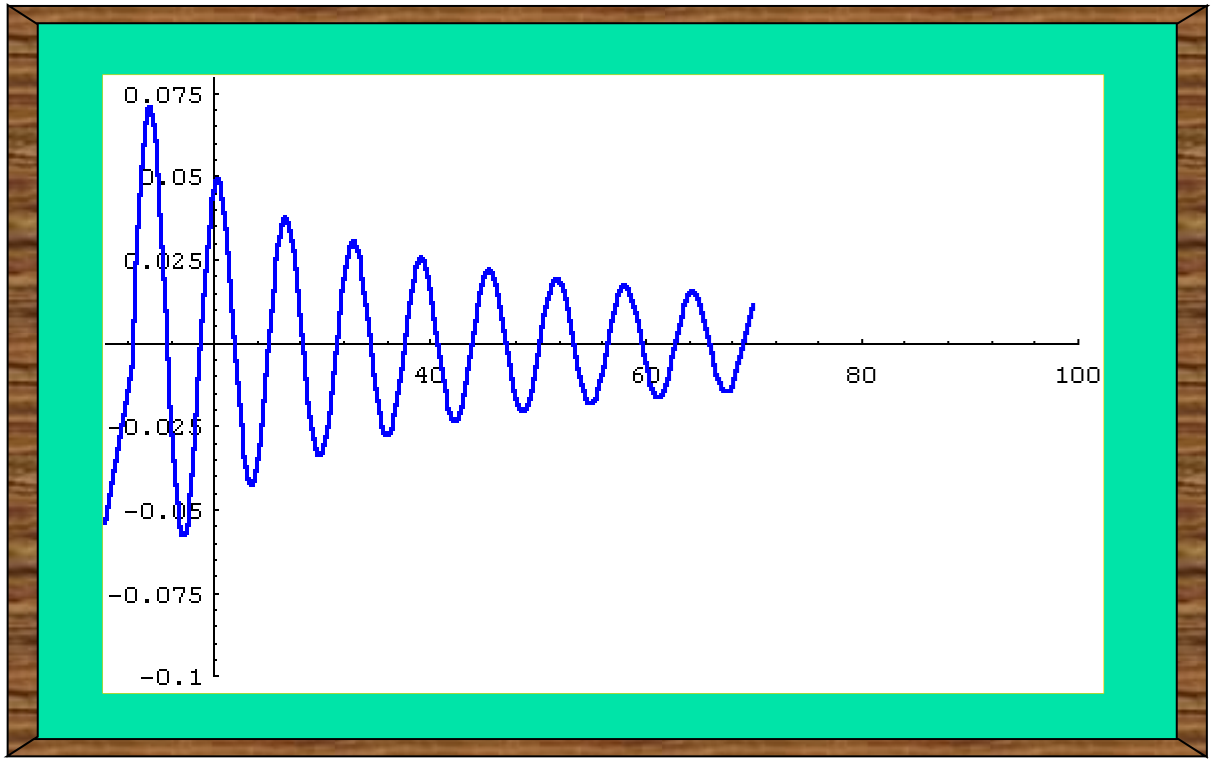
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



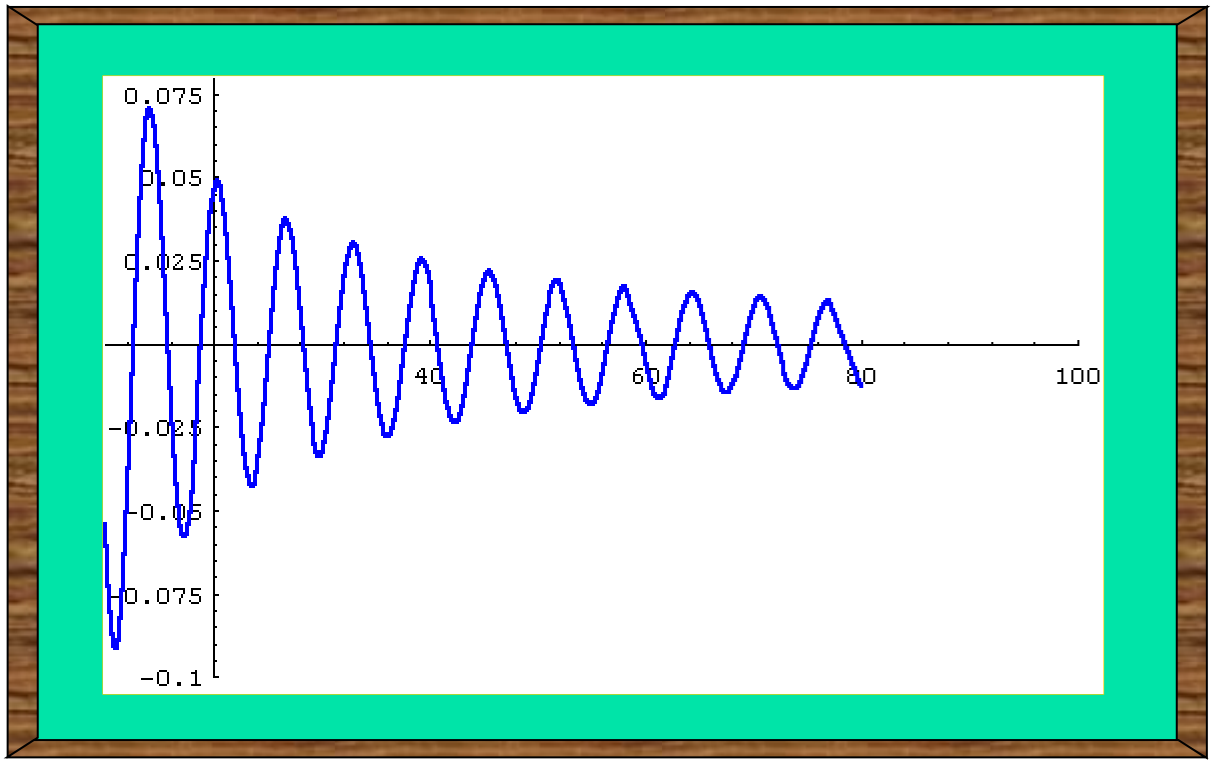
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



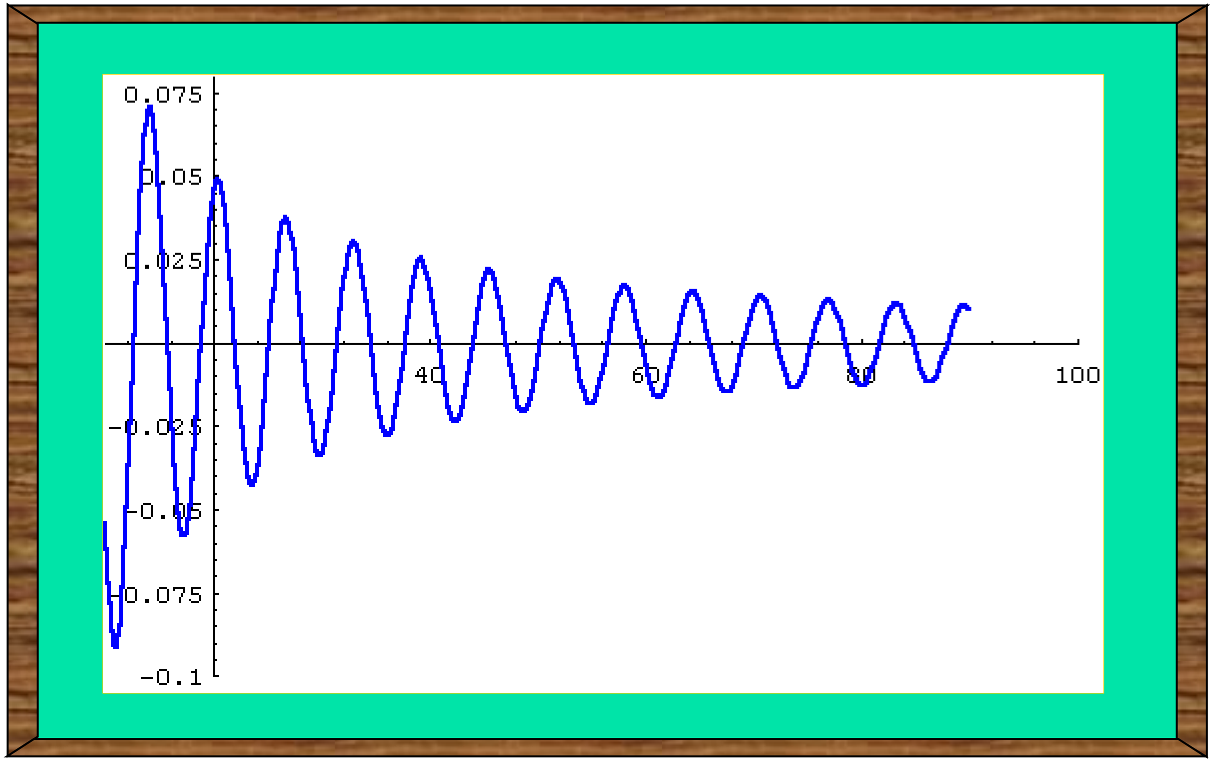
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



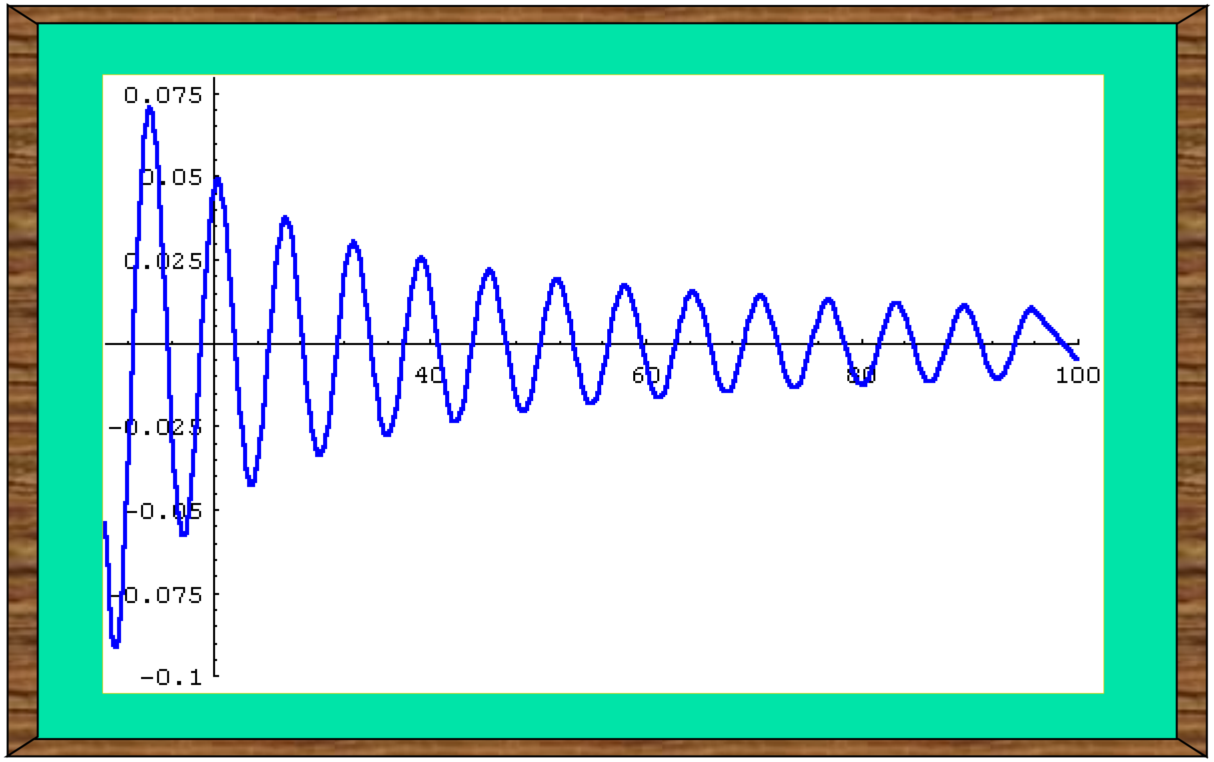
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势.



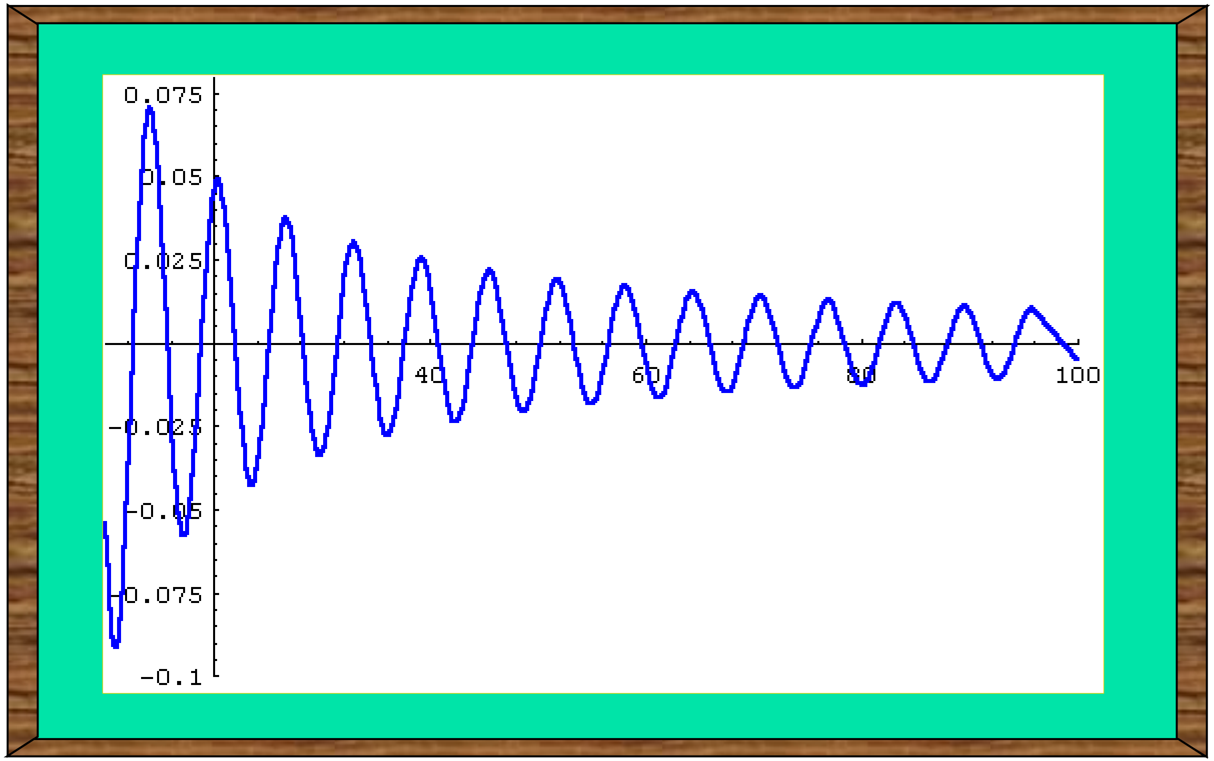
一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



问题：函数 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察：

当 x 无限增大时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

1、$x \to \infty$时，函数 $f(x)$ 的极限

函数的自变量$x \to \infty$是指x的绝对值无限增大，包含两种情况：

（1）x取正值，无限增大，记作$x \to +\infty$；

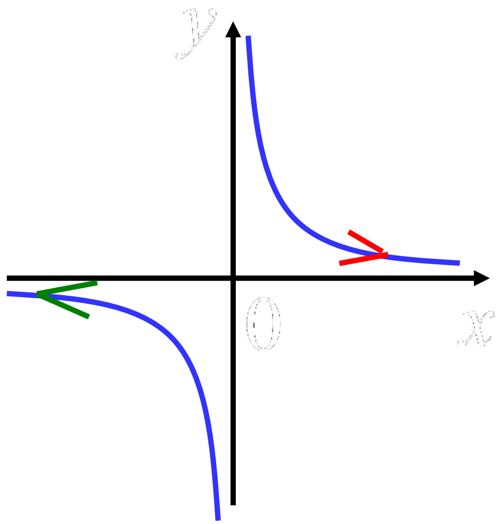
（2）x取负值，绝对值无限增大（即x无限减小），记作$x \to -\infty$.

定义：如果当$x \to \infty(\pm\infty)$时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么称A为函数$f(x)$当$x \to \infty(\pm\infty)$时的极限，

记作：$\lim\limits_{x \to \infty（\pm\infty）} f(x)=A$

例1 讨论函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $x\to\infty$ 时的极限。

解:



(1) 当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x}\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

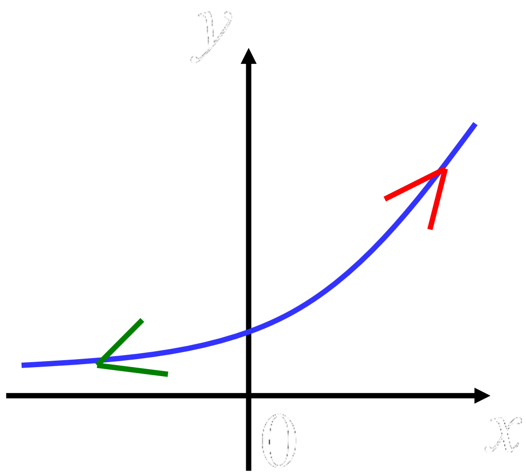
(2) 当 $x\to-\infty$ 时, $\frac{1}{x}\to 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0}$$

例2 讨论函数 $f(x)=2^x$ 在 $x\to\infty$ 时的极限。

解：



（1）当 $x\to+\infty$ 时，$2^x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

极限不存在

（2）当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

例题1：讨论函数$y=\dfrac{1}{x}$当$x\to\infty$时的极限。

例题2：讨论函数$y=2^{x}$ 当$x\to\infty$时的极限。

分析得出定理：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

2、$x \to x_0$时，函数 $f(x)$ 的极限

函数的自变量$x \to x_0$是指x无限接近于x_0,

包含两个方向：x从小于x_0的方向和大于x_0方向

（1）x从小于x_0的方向表示$x \to x_0^-$

（2）x从小于x_0的方向表示$x \to x_0^+$

定义：设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域$\hat{N}$（x_0, δ）内有定义，

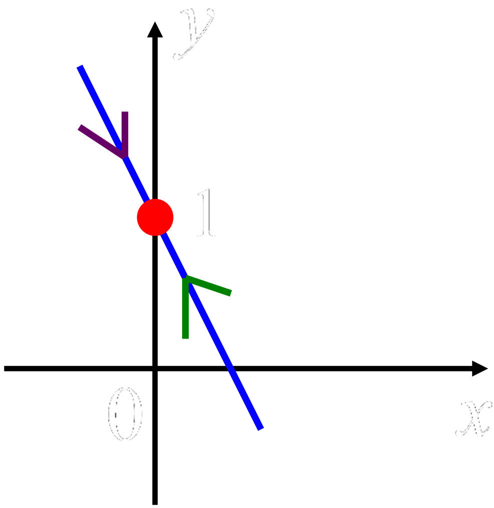
当自变量x在$\hat{N}$（x_0, δ）内无限趋近于一个确定的常数A,

那么称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，

记作：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A$（$x \to x_0$）

例3 讨论函数 $f(x)=-2x+1$ 在 $x\to 0$ 时的极限。

解：



(1) 当 $x\to 0^-$ 时， $(-2x+1)\to 1$

左极限： $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x+1)=1$

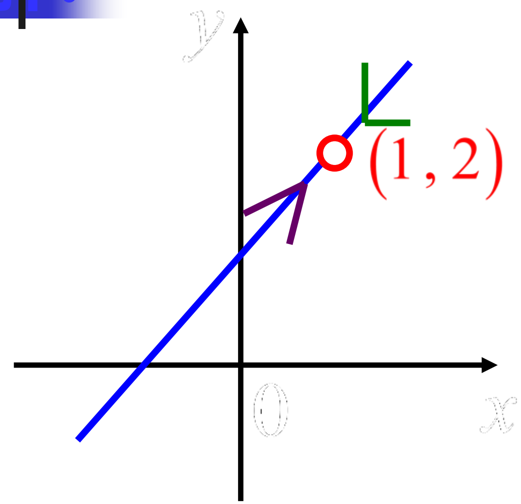
(2) 当 $x\to 0^+$ 时， $(-2x+1)\to 1$

右极限： $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x+1)=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(-2x+1)=1}$$

例4 讨论函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x\to 1$ 时的极限。

解:



$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\quad (x\neq 1)$$

左极限: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$,

右极限: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$,

得到: $$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关。

例题3：讨论函数$y=-2x+1$当$x\to 0$时的极限。

例题4：讨论函数$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$当$x\to 1$时的极限。

由例题分析得出：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在与$f(x)$在点$x_0$处是否有定义无关。

定义：如果当$x\to x_0^-$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，那么称A为函数$f(x)$当$x\to x_0^-$时的左极限，

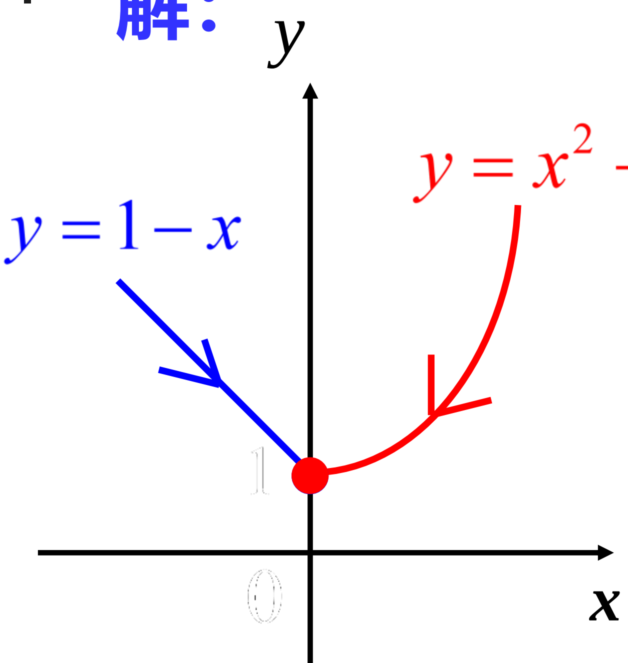
记作$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$或$f(x_0^-)=A$

定义：如果当$x\to x_0^+$时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，那么称A为函数$f(x)$当$x\to x_0^+$时的右极限，

记作$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$或$f(x_0^+)=A$

例5 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解：



左极限：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=\boxed{1}$$

右极限：

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=\boxed{1}$$

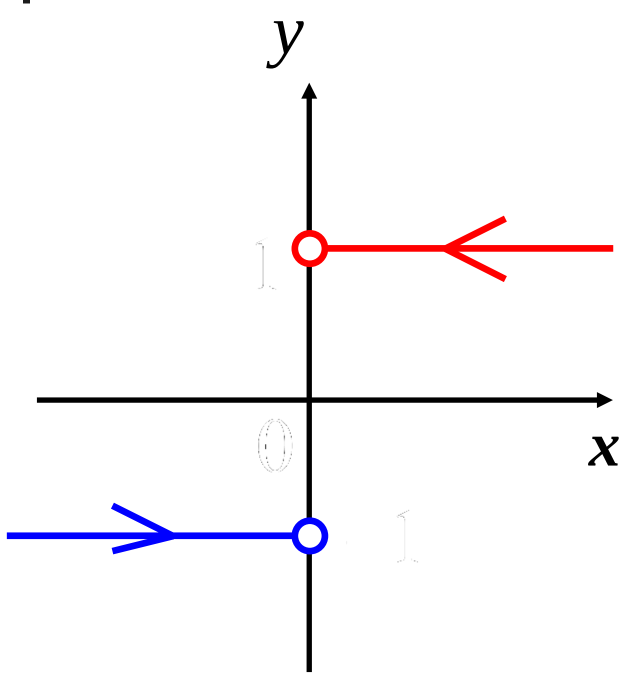
得到： $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ \text{存在} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

左极限=右极限

例6 验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

解:



$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

左极限: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\boxed{-1}$

$\neq$

右极限: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\boxed{1}$

因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ **不存在.**

定理: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

或: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$

三、函数极限的性质

1.有界性

定理 若在某个过程下, $f(x)$有极限, 则存在过程的一个时刻, 在此时刻以后 $f(x)$有界.

2.唯一性

定理 若$\lim f(x)$存在,则极限唯一.

3.不等式性质

定理(保序性) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B.$

若$\exists \delta > 0, \forall x \in U^0(x_0, \delta)$,有$f(x) \le g(x)$,则$A \le B.$

推论 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,且$A < B$

则$\exists \delta > 0, \forall x \in U^0(x_0, \delta)$,有$f(x) < g(x).$

定理(保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),

则$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,

$f(x)\geq 0$(或$f(x)\leq 0$),则$A\geq 0$(或$A\leq 0$).

第三讲 无穷小与无穷大

内容概要：

- 无穷小
- 无穷大
- 无穷小与无穷大的关系

一、无穷小

1.定义：极限为零的变量称为无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, $\therefore$ 数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注意 1.无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

2.零是可以作为无穷小的唯一的数.

2.无穷小与函数极限的关系:

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\quad \therefore f(x)=A+\alpha(x).$

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x))=A+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=A.$

意义

1.将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2.给出了函数$f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x) \approx A$,误差为$\alpha(x)$.

3.无穷小的运算性质:

定理2 在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\frac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\frac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

定理3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如,当$x \to 0$时, $\overset{\text{无穷小}}{\boxed{x}}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{有界函数}}, \overset{\text{无穷小}}{\boxed{x^2}}\underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\text{有界函数}}$.

二、无穷大

绝对值无限增大的变量称为无穷大.

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$$

注意 1.无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

2.切勿将 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 认为极限存在.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

三、无穷小与无穷大的关系

定理4　在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

无穷小

有界函数

1、$\lim\limits_{x\to 0} \boxed{x}\cdot \underline{\arctan x} =$ $\underline{\quad\quad 0 \quad\quad}$

2、当 $x\to$ $\underline{\ -1\ }$ 时，$\dfrac{x-1}{x+1}$ 为无穷大；

当 $x\to$ $\underline{\ 1\ }$ 时，$\dfrac{x-1}{x+1}$ 为无穷小。

四、小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容: 两个定义;四个定理;三个推论.

2、几点注意:

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数；

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小.

（3） 无界变量未必是无穷大.

➢极限运算法则

- 极限运算法则
- 求极限方法举例
- 小结 思考题

一、极限运算法则

定理

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

二、求极限方法举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = \lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$$= (\lim_{x\to 2}x)^2 - 3\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}5$$

$$= 2^2 - 3\cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3 - \lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\,n}+a_1x_0^{\,n-1}+\cdots+a_n = f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0,$ 商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零. $(\dfrac{0}{0}\text{型})$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解　$x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大.($\dfrac{\infty}{\infty}$型)

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, 当 n = m, \\ 0, 当 n > m, \\ \infty, 当 n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例5 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)$ $(\infty-\infty\text{型})$

因为 $\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x=\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}=\frac{\sin x}{1+\sin x}$$

所以 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

例5　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$　（$\dfrac{0}{0}$ 型）

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}=-\lim_{x\to0}(1+\sqrt{1+x^2})$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=-\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{1+x^2})=-2$

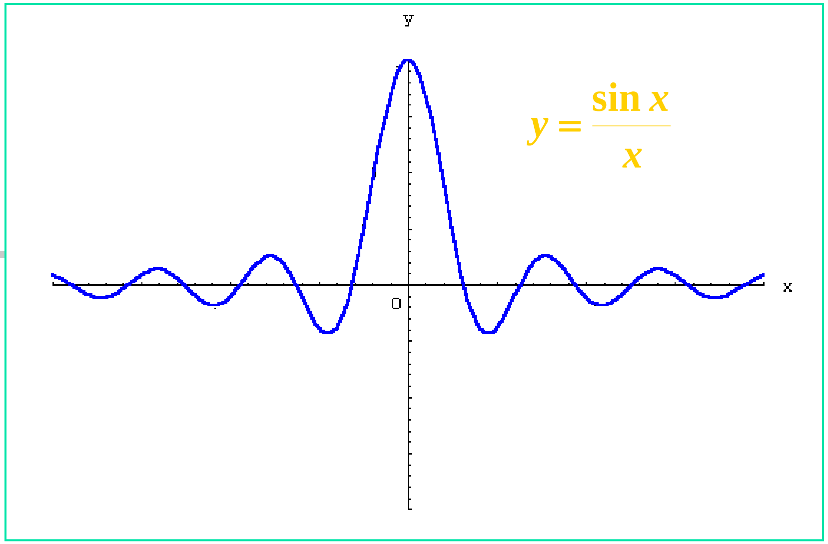
例6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 $n\to\infty$时,是无穷小之和. 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.



解 当$x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$为无穷小,

而$\sin x$是有界函数.

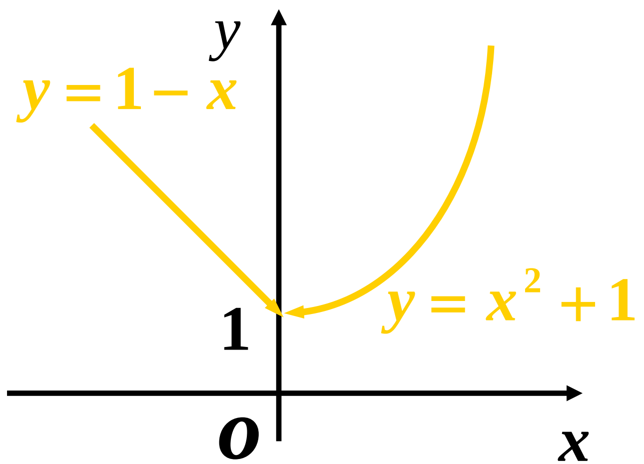
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

例8 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点,两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等,

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

三、小结

1.极限的四则运算法则及其推论;

2.极限求法;

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

注意：1.运用极限法则时，必须注意只有各极限存在（除式时还要求分母极限不为0）才能适用。

2. 如果所求极限呈现$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty, \frac{0}{0}$等形式，不能直接用极限法则，必须先对原式进行恒等变形（约分、通分、有理化、变量代换等），然后求极限。

思考题

在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限，$g(x)$ 无极限，那么 $f(x)+g(x)$ 是否有极限？为什么？

思考题解答

没有极限.

假设 $f(x)+g(x)$ 有极限，$\because$ $f(x)$ 有极限，

由极限运算法则可知：

$$g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$$ 必有极限，

与已知矛盾，　　故假设错误.

思考题

已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，试求 a 与 b 的值。

练 习 题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3}{x-3}=$ ____________.

2、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ ____________.

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})=$ ____________.

4、 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$ ____________.

5、 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=$ ____________.

7、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4-2x^2+x}{3x^2+2x}=$ __________.

8、 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$ __________.

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{n\to \infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n})$

2、 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

3、 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$

4、 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

5、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

6、 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{x}-1}{4^{x}+1}$

7、 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m}-x^{n}}{x^{m}+x^{n}-2}$

练习题答案

一、1、-5；　2、3；　3、2；　4、$\frac{1}{5}$；

5、0；　6、0；　7、$\frac{1}{2}$；　8、$(\frac{3}{2})^{30}$.

二、1、2；　2、$2x$；　3、-1；　4、-2；

5、$\frac{1}{2}$；　6、0；　7、$\frac{m-n}{m+n}$.