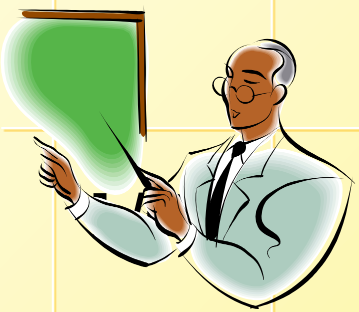
第五章　定积分

主讲教师:王玉兰



办公室：图书馆B626

高等数学

第五章 定积分

5.1 定积分的概念及性质

5.2 定积分基本公式

5.3 定积分的计算法

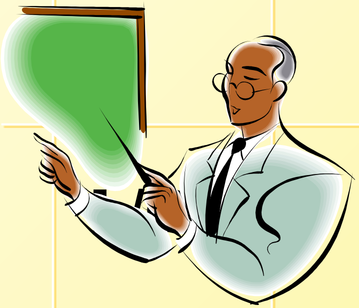
5.4 反常积分初步

5.5 定积分的应用

高等数学

5.1 定积分的概念

主讲教师：王玉兰



5.1 定积分的概念及性质

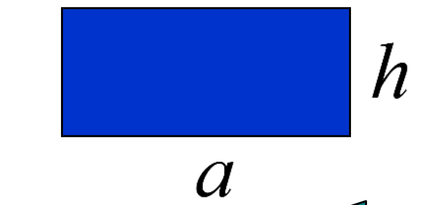
一、定积分问题举例

二、 定积分的定义

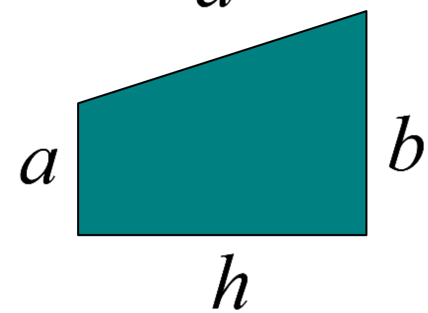
三、 定积分的性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= a h$



$\boxed{\text{梯形}}$面积 $= \dfrac{h}{2}(a+b)$



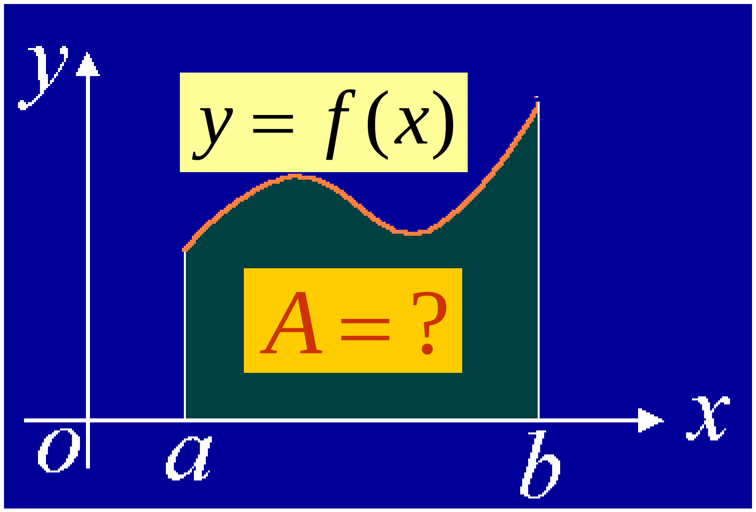
曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及 x 轴, 以及两直线 $x = a, x = b$

所围成，求其面积 A .



解决步骤：

n段

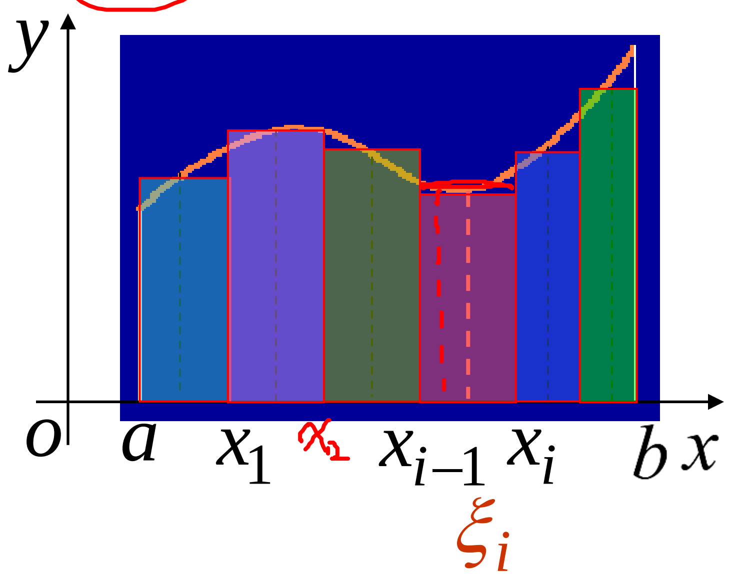
1) 分割. 在区间 $[a\,,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 取近似. 在第i 个小曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}\,, x_i]$

作以 $[x_{i-1}\,, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形，并以此小矩形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i，得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

3) 求和.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \underline{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$ 容易求得

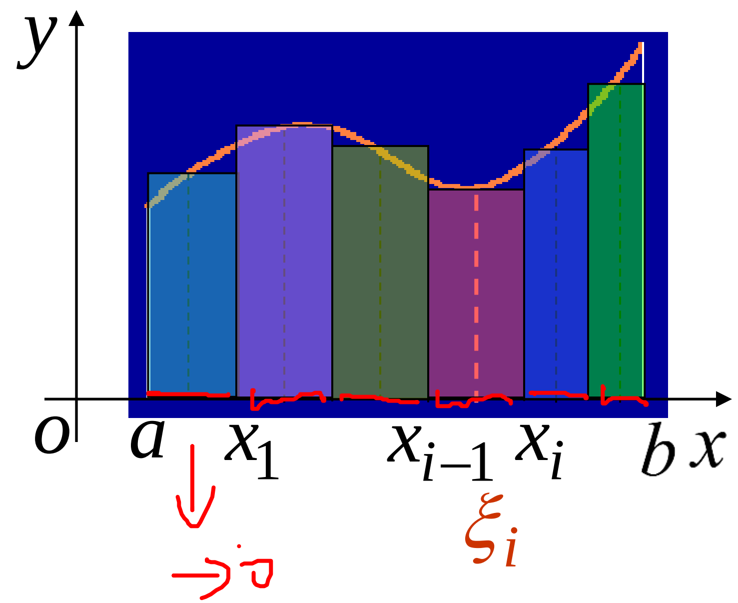
4) 取极限.

真实面积

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



二、定积分的定义

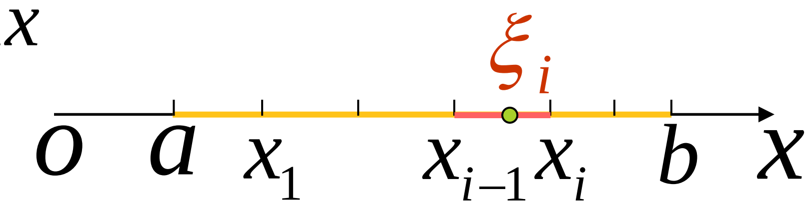
设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若对 $[a,b]$ 的**任意**分法

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，**任取**

$\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分是和式的极限

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**．

定积分是一个数值

不定积分是一组原函数

积分上限

$[a,b]$称为积分区间

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

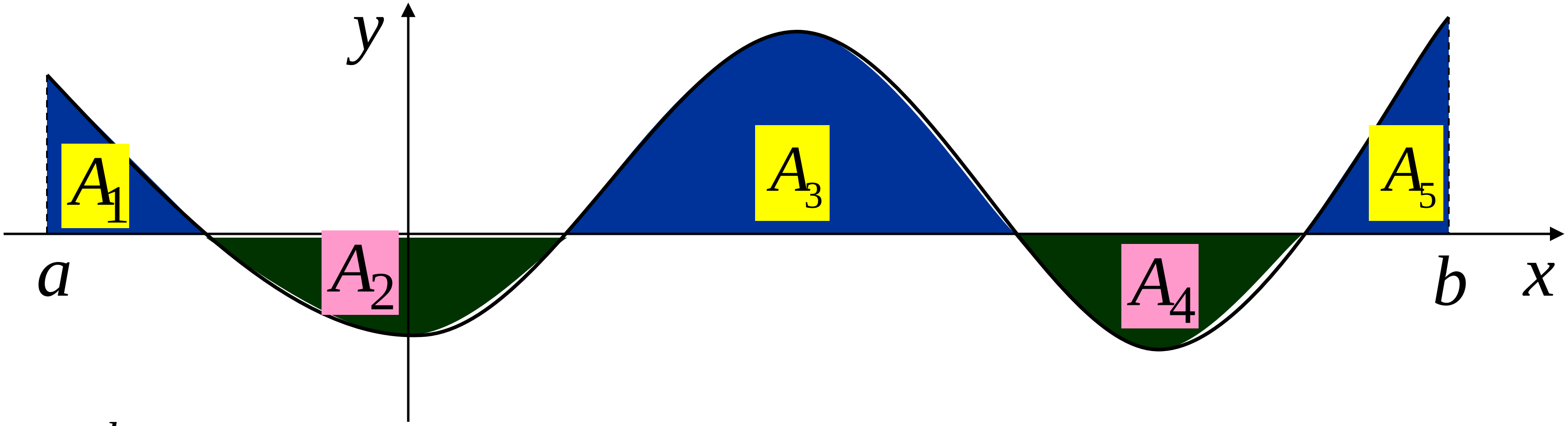
定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

定积分的几何意义:

$$f(x) > 0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$$ **曲边梯形面积**

$$f(x) < 0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$$ **曲边梯形面积的负值**



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

可积的充分条件:

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ $\longrightarrow$ $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k 为常数)

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

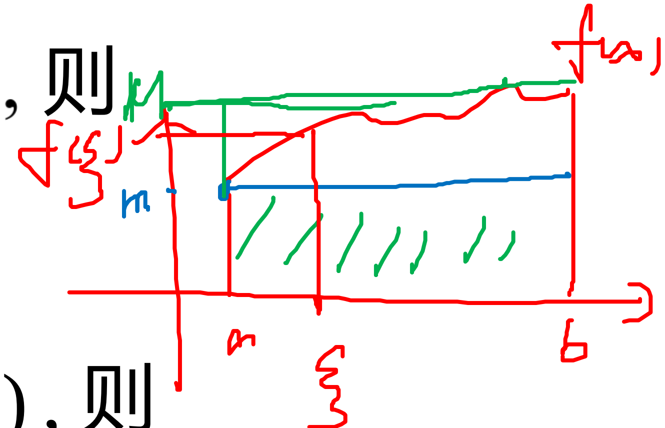
5. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(c可以是[a,b]内，也可以是[a,b]外)

6. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$

推论1. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$



7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, 则

5 ≤ A ≤ 10

$$\underbrace{m(b-a)}_{\text{区间长度}} \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \underbrace{M(b-a)}_{\text{区间长度}} \quad (a<b)$$

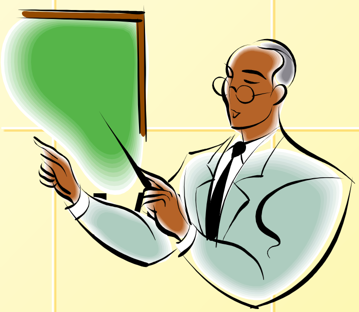
8. 积分中值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

5.2 定积分基本公式

主讲教师：王玉兰



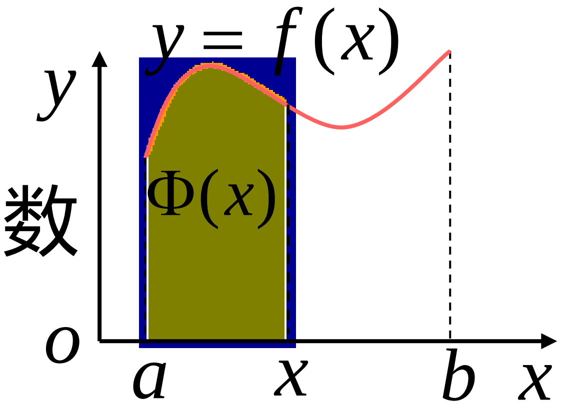
高等数学

5.2　微积分基本公式

一、变上限积分函数

二、牛顿－莱布尼兹公式

一、变上限积分函数



定理1. 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

即 $$\boxed{\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)}$$

证明： 任取$x \in [a,b]$，改变量Δx满足$x+\Delta x \in [a,b]$,

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= [\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt] - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

由积分中值定理

$\Delta\Phi = f(\xi)\cdot\Delta x$, 即 $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$ （ ξ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间）

当$\Delta x \to 0$ 时，$\xi \to x$； 而$f(x)$在区间 $[a,b]$ 上连续,

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x)$， 于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x)$

即$\Phi(x)$在 x 处可导，且$\Phi'(x) = f(x), x \in [a,b]$.

变限积分求导公式:(重点)

(1) $\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$

(2) $\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 复合的 要 别忘积分求导

(3) $\boxed{\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)}$

$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \int_{\psi(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{\varphi(x)} f(t)\,dt$

利用(2) $= -\int_c^{\psi(x)} f(t)\,dt + \int_c^{\varphi(x)} f(t)\,dt$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

解 这属于$\dfrac{0}{0}$型的极限问题，利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t\right]}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)'}{(x)'}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

例2： 求 $\left[\int_{-1}^{x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right]'$.

解： 原式$=\left[\int_{-1}^{x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\right]'=\ln(1+x^2).$

例3. 求 $\left(\int_{1}^{\cos x}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)'$

复杂的变上限积分

解： 原式$=e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'=e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)$

例4： 求 $\left[\int_{\cos x}^{\sin x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right]'$.

解： 原式$=e^{\sin x}\cdot(\sin x)'-e^{\cos x}(\cos x)'$

$$=e^{\sin x}\cdot(\cos x)-e^{\cos x}(-\sin x).$$

二、牛顿 – 莱布尼兹公式

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

（牛顿 - 莱布尼兹公式）

定积分（数值）　$\int_a^b f(x)dx$

不定积分（函数）　$\int f(x)dx$

证明：由定理1可知，

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数，由原函数的性质：

$\Phi(x)=F(x)+C$，（ $a\le x\le b, C$ 为常数）

在上式中，分别以 $x=b$，$x=a$ 代入后相减，得

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

例1

$$(1)\ \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{7}{3}$$

$$(2)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\cos \boxed{2x}}_{\text{复合}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

例2. 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解:

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{7}{12}\pi$$

例3. **(1)** $$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

(2) $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b)$$

即 $$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

(3) $$\int_a^b dx = \int_a^b 1 \cdot dx = x\Big|_a^b = b - a$$