第五讲　极限存在准则
两个重要极限

- 极限存在准则
- 两个重要极限
- 小结　思考题　作业

一、极限存在准则

1. 夹逼准则

准则I 如果数列 $\{x_n\},\{y_n\}$及$\{z_n\}$ 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \qquad (n = 1,2,3\cdots)$,

(2) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,}$

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

上述数列极限存在的准则可以推广到函数的极限.

准则I' 如果

(1) 当$x \in \overset{o}{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$),

有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那么 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在,且等于A.

准则I和 **准则I'** 称为 **夹逼准则**.

例 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

注

利用夹逼准则是求极限的一个重要手段，将复杂的函数 $f(x)$ 做适当的放大和缩小化简，找出有共同极限值又容易求极限的函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 即可.

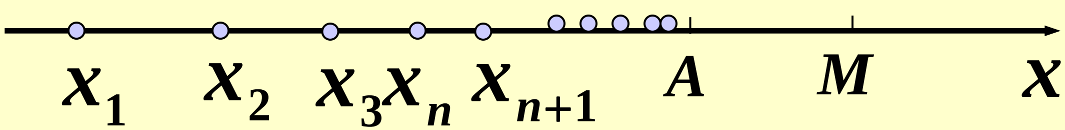
2. 单调有界准则

如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots, \text{单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots, \text{单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则 II 单调有界数列必有极限.

几何解释:



对数列$\{x_n\}$:

$$\text{单调有界} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \text{有极限} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \text{有界}$$

例 证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证 (1) 显然 $x_{n+1} > x_n$,

$\therefore \{x_n\}$是单调增加的;

(2) $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$,

$$x_{k+1} = \sqrt{3 + x_k} < \sqrt{3+3} < 3,$$

$\therefore \{x_n\}$是有界的;

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$\because x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2 = 3 + x_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$, $A^2 = 3 + A$,

解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

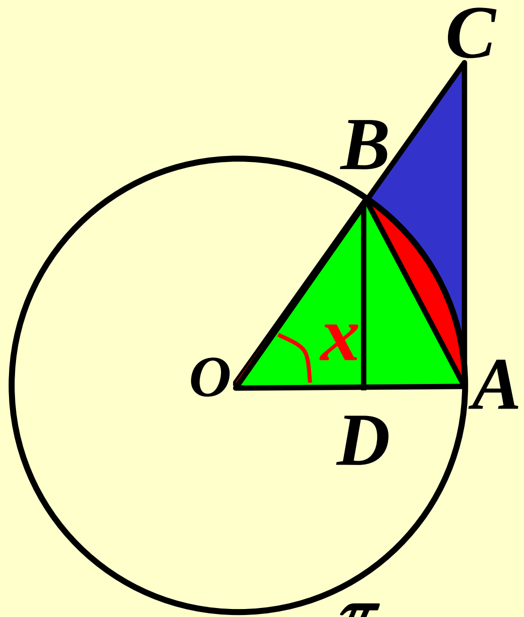
准则 II 单调有界数列必有极限.

函数极限也有类似的准则. 对于自变量的不同变化过程 $(x \to x_0^-, x \to x_0^+, x \to -\infty, x \to +\infty)$, 准则有不同的形式.

准则II' 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在点 x_0 右极限 $f(x_0^+)$ 必定存在.

二、两个重要极限

作为准则I' 的应用



(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

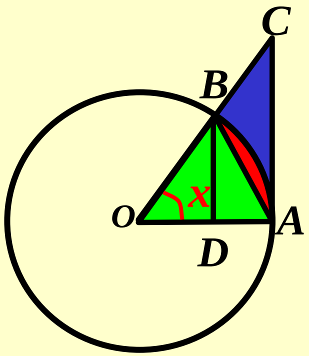
设单位圆O,圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线,得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x,ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

ΔAOB的面积$<$圆扇形AOB的面积$<\Delta AOC$的面积



即 $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}\tan x$

$\therefore \sin x < x < \tan x$, 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$,

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立.

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, 又 $\because \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$,

夹逼定理

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin \boxed{x}}{\boxed{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

该极限的特点: (1) $\dfrac{0}{0}$ 型未定式;

(2) sin□与分数线另一侧的变量□形式一致.

问 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} \cancel{=} 1$ ？ $(\because$ 非 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式.$)$

正确 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

一般有 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$

例1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x=1$

推广: $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\tan\square}{\square}=1,\quad \lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\square}{\tan\square}=1.$

例2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4=4$

例3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=2$

例4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\sqrt[3]{x}}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^3=\frac{1}{3}$$

例5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\tan 5x}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

例6. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

二倍角公式

$$1-\cos 2x=2\sin^2 x$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

例7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$

令 $u=\arcsin x$， 当 $x\to 0$ 时，有 $u\to 0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

例8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}\cdot(x+3)$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}\cdot\lim_{x\to 3}(x+3)$$

$$=1\times 6$$

$$=6$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

练习 (1)求$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$

解 令$t=\pi-x$, 则$x\to\pi$时, $t\to 0$, 故

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi-t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(2) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sin^3 x}$

解

原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{4}$$