1.7 函数的连续性

主讲教师：王玉兰

高等数学

第八讲 函数的连续性与间断点

- 内容概要
- 一、函数的连续性
- 二、函数的间断点
- 三、小结，思考题

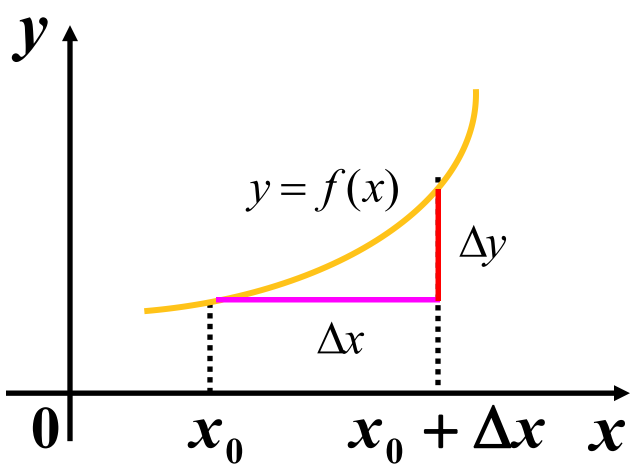
一、函数的连续性

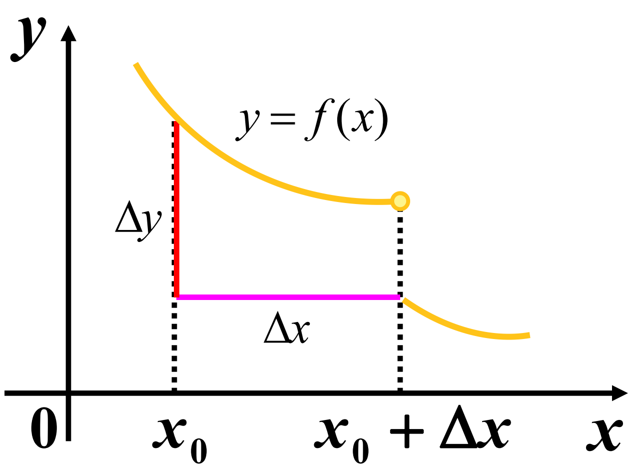
1. 函数的增量

设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, $\forall\ x \in U_\delta(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$，称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数 $f(x)$相应于Δx的增量.





2. 连续的定义

定义 1 设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义，如果当自变量的增量Δx趋向于零时，对应的函数的增量Δy也趋向于零，即$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那末就称函数$f(x)$在点$x_0$连续，$x_0$称为$f(x)$的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x,$ $\Delta y = f(x) - f(x_0),$

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$，$\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0).$

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处右连续.

性质1

函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$
函数$f(x)$ 在x_0处既左连续又右连续。

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2= f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

右连续但不左连续,

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

例3 （1）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x, & x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x, & x\geq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的连续性。

解：①左极限：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\cos x)=\boxed{1}$

②右极限：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sin x)=\boxed{1}$

③函数值：$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=\boxed{1}$

$f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处是连续的。

（2）函数 $f(x)=\begin{cases} e^{x} & , x<0 \\ x+a & , x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a。

解：

①左极限：$\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left(e^{x}\right)=\boxed{1}$

②右极限：$\lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}(x+a)=\boxed{a}$

③函数值：$f(0)=0+a=\boxed{a}$

$$\boxed{a=1}$$

4.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数, 叫做在该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续, 并且在左端点 $x=a$处右连续, 在右端点 $x=b$处左连续, 则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如,有理函数在区间 $(-\infty,+\infty)$内是连续的.

例4 证明函数 $y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$\because\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,\qquad 则\ |\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

对任意的α, 当$\alpha\neq 0$时, 有$|\sin\alpha|<\alpha$,

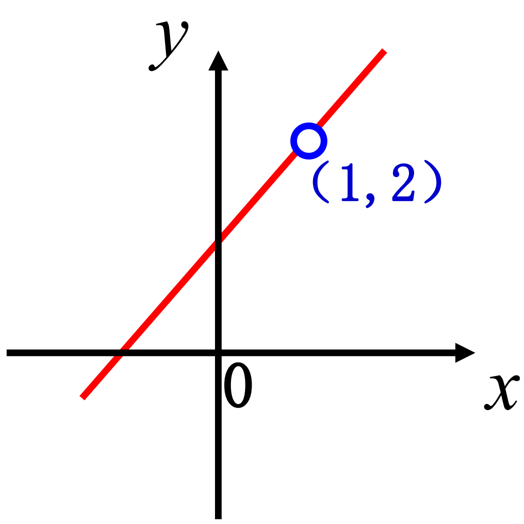
$$故\ |\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|,\qquad \therefore 当\Delta x\to 0时, \Delta y\to 0.$$

即函数 $y=\sin x$对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

二、间断点及其分类

例5 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，讨论点 $x=1$ 。

解： $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=x+1 \quad (x\neq 1)$



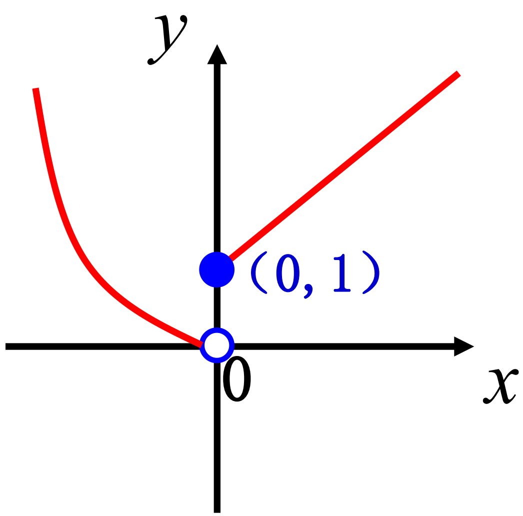
左极限：$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=\boxed{2}$

右极限：$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=\boxed{2}$

$x=1$ 是间断点（可去间断点）

例6 函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 , & x\ge 0 \\ x^2 , & x<0 \end{cases}$，讨论点 $x=0$ 。

解：



左极限：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2\right)=\boxed{0}$$

右极限：

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=\boxed{1}$$

$x=0$ 是间断点（跳跃间断点）

例7 函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$，讨论点 $x=1$ 。

解： $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-1}=\boxed{\infty}$$

$x=1$ 是间断点（无穷间断点）

例8 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，讨论点 $x=0$ 。

解： 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to\infty$

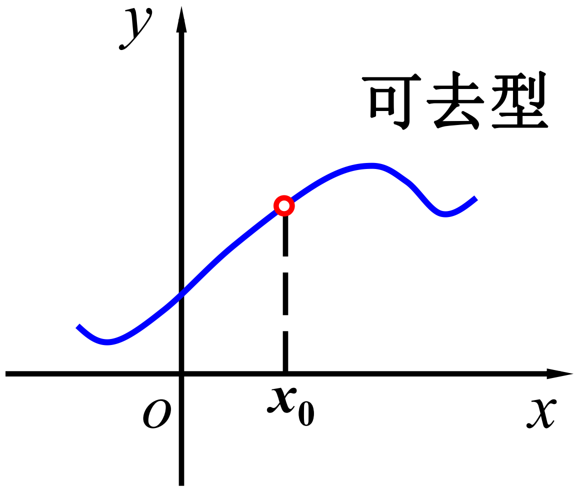
$\sin\dfrac{1}{x}$ 的取值在 $[-1,1]$ 之间来回摆动。

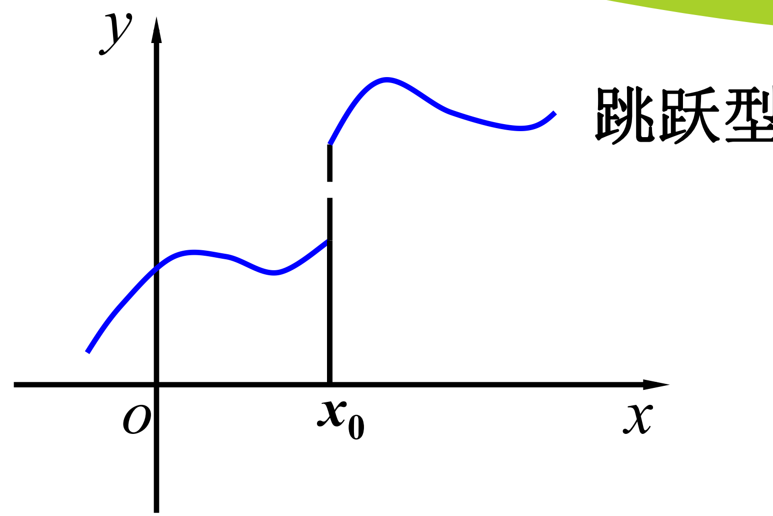
$x=0$ 是间断点（振荡间断点）

间断点的类型

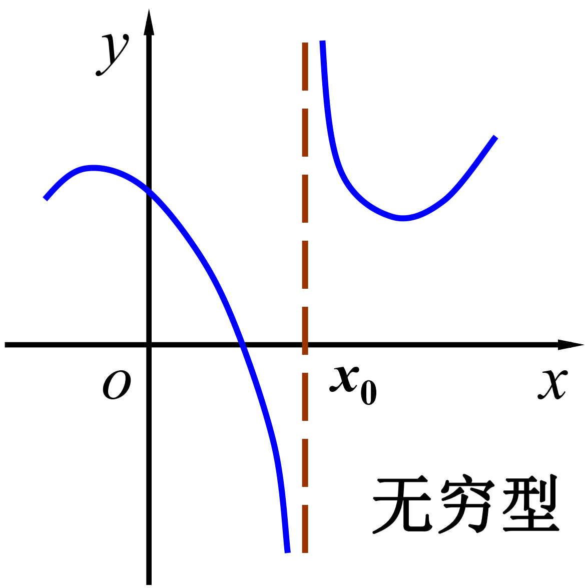
- **第一类间断点**（左、右极限都存在）
  - 可去间断点（左极限=右极限）
  - 跳跃间断点（左极限≠右极限）
- **第二类间断点**（左、右极限至少有一个不存在）
  - 无穷间断点（$f(x)\to\infty$）
  - 振荡间断点（$f(x)$趋势不唯一）

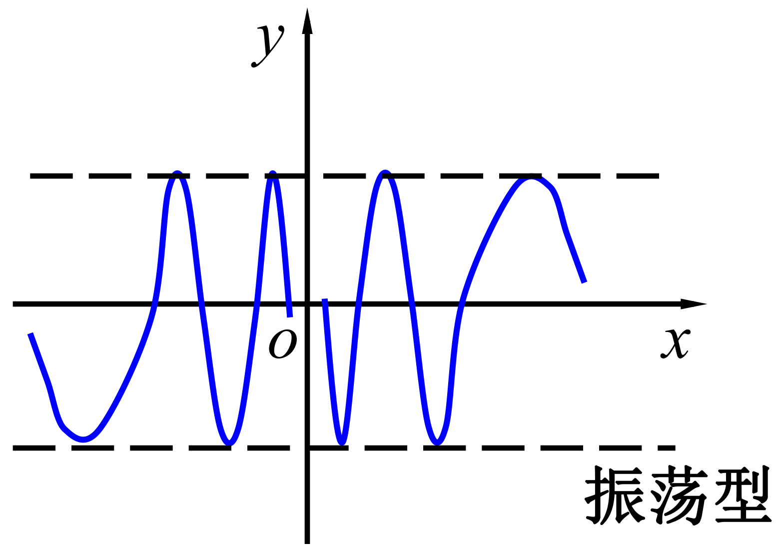
第一类间断点





第二类间断点





练习题

（1）找出函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并讨论其间断点类型。

解： $$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

（1） $x=1$ （可去间断点）

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=-2$$

（2） $x=2$ （无穷间断点）

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)}{(x-2)}=\infty$$

（2）找出函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & , x<0 \\ 2x+1 & , x\geq 0\end{cases}$ 的间断点，

并讨论其间断点类型。

解：（1）左极限

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\sin x)=0$$

（2）右极限

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1$$

$x=0$ 是间断点（跳跃间断点）

三、初等函数的连续性

性质2 一切初等函数在其定义域内都是连续的。

例9 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}\sin x & , \ x<0 \\ k & , \ x=0 \\ x\cdot\sin\dfrac{1}{x}+2 & , \ x>0 \end{cases}$，试确定 k 的值，

使 $f(x)$ 在定义域内连续。

例9 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x}\sin x & , \quad x<0 \\ k & , \quad x=0 \\ x\cdot\sin\dfrac{1}{x}+2 & , \quad x>0 \end{cases}$ ，试确定 k 的值，

使 $f(x)$ 在定义域内连续。

解： ①左极限： $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2}{x}\sin x\right)=2\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\boxed{2}$

无穷小　　有界函数

②右极限： $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\boxed{x}\cdot\underline{\sin\dfrac{1}{x}}+2\right)=0+2=\boxed{2}$

③函数值： $f(0)=\boxed{k}$

$$\boxed{k=2}$$

例10（1）已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-ax+b}{x-1}=3$

思路：

当 $x\to1$ 时，分母 $(x-1)\to0$

函数的形式为 $\cancel{\dfrac{C}{0}}$ 或 $\dfrac{0}{0}$

解：①函数是“$\dfrac{0}{0}$”型

将 $x=1$ 代入分子 $1-a+b=0 \implies b=a-1$

② $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax+(a-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1-ax+a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)-a(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1-a)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1-a)=2-a=3$$

$$\boxed{a=-1\ ,\ b=-2}$$

（2）已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\left[a+b(x-1)\right]}{x-1}=0$，求 a、b。

解：① 函数是“$\dfrac{0}{0}$”型

将 $x=1$ 代入分子 $\sqrt{4}-(a+0)=0 \Longrightarrow a=2$

② 原极限 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\left[2+b(x-1)\right]}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2-b(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}-b\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\right)-b$$

$$=\left[\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]-b$$

$$=\left[\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]-b$$

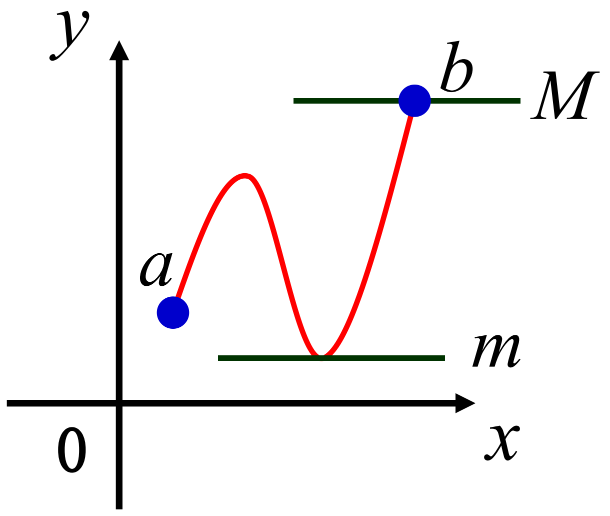
$$=\left(\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)-b \quad =\frac{1}{2}-b \quad =0$$

$$\boxed{a=2 \quad , \quad b=\frac{1}{2}}$$

四、闭区间上连续函数的性质

性质3（最值定理）

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间一定存在最大值和最小值。



$m \le f(x) \le M$

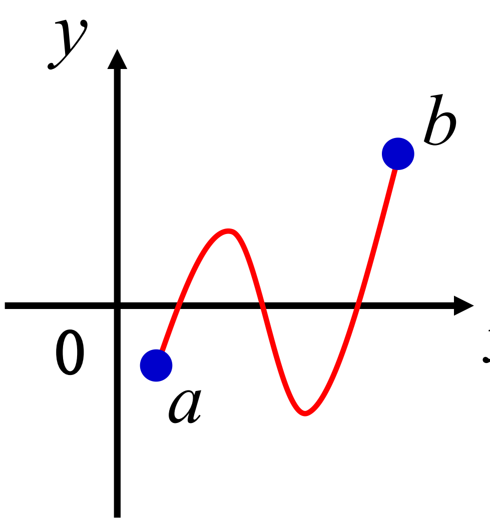
性质4（有界性定理）

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上有界。

性质5（零点定理）

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，则至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$ ，使得

$$f(\xi)=0$$



性质6（介值定理）

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)=A$ ，$f(b)=B$ ，$A\neq B$ ，则对于A 、B 间的任意数C ，至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f(\xi)=C$ 。

例11（1）证明 $x^5-5x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一实根。

解：　令 $f(x)=x^5-5x-1$

$f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，

$f(1)=1-5-1<0$

$f(2)=2^5-10-1>0$

根据零点定理，得到

$f(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少存在一个零点，

即 x^5-5x-1 在 $(1,2)$ 内至少存在一个实根。

（2）证明：$x+e^x=0$ 在 $(-1,1)$ 内有唯一的实根。

解：　令　$f(x)=x+e^x$

$f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，

$$f(-1)=-1+e^{-1}=-1+\frac{1}{e}<0$$

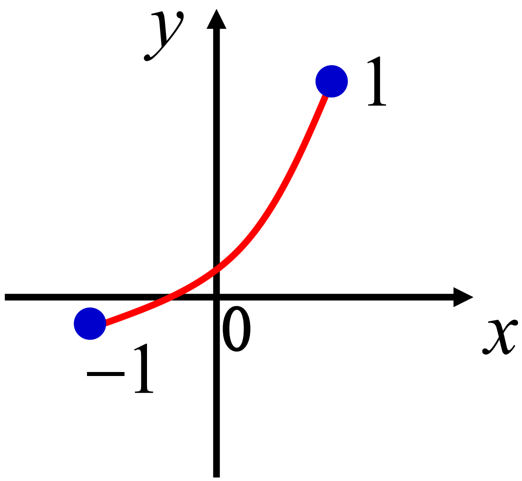
$$f(1)=1+e>0$$

根据零点定理，得到

$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内至少存在一个零点，

$f(x)=x+e^x$

$$f'(x)=\left(x+e^x\right)'=1+e^x>0$$



$f(x)$在$(-1,1)$ 内单调递增，

得到：

$f(x)$在$(-1,1)$ 内有且只有一个零点，

即　$x+e^x=0$ 在 $(-1,1)$内有唯一的实根。

练习题

6、证明：方程 $x^5+x+1=0$ 在 $(-1,0)$ 内有且只有一个实根。

解：　令 $f(x)=x^5+x+1$

$f(x)$ 在闭区间 $[-1,0]$ 上连续，

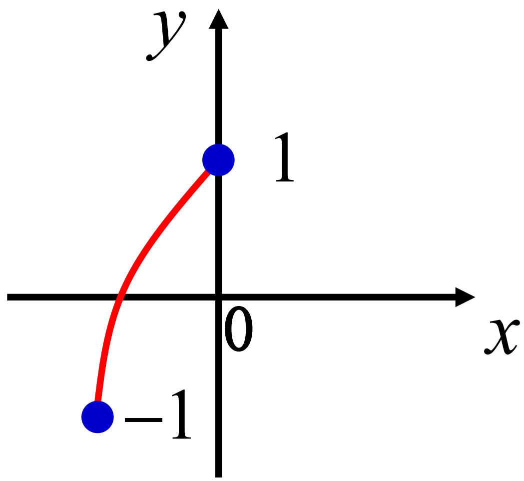
$f(-1)=-1-1+1=-1<0$

$f(0)=0+0+1=1>0$

根据零点定理，得到

$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内至少存在一个零点，

$f'(x)=\left(x^5+x+1\right)'=5x^4+1>0$



$f(x)$在$(-1,0)$内单调递增，

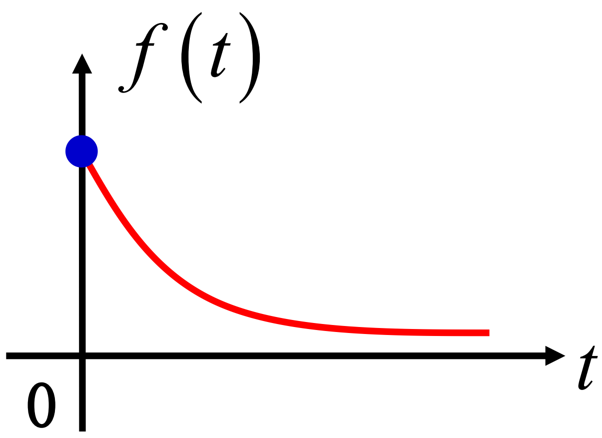
得到：

$f(x)$在$(-1,0)$内有且只有一个零点，

即方程 $x^5+x+1=0$ 在$(-1,0)$内有唯一的实根。

拓展练习

某位病人每24小时注射一次10单位的某种药物。已知该药物在体内按指数方式吸收与代谢，即注射1单位该药品后t 天，体内残留 $f(t)=e^{-t/5}$ 单位。如果该病人是无限次的连续注射10单位的该药品，长期下来，该病人在下一次注射前，体内残留该药品的量是多少？



假设：注射第 n 次后，在第 $n+1$ 次前，体内残留药品的量是 S_n 。

$$S_1 = 10e^{-\frac{1}{5}}$$

$$S_2 = 10e^{-\frac{1}{5}} + 10e^{-\frac{2}{5}}$$

$$S_3 = 10e^{-\frac{1}{5}} + 10e^{-\frac{2}{5}} + 10e^{-\frac{3}{5}}$$

$$\vdots$$

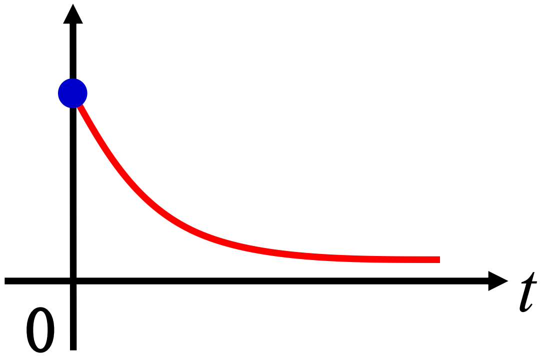
$$S_n = 10e^{-\frac{1}{5}} + 10e^{-\frac{2}{5}} + 10e^{-\frac{3}{5}} + \cdots + 10e^{-\frac{n}{5}}$$

$$S_n = 10e^{-\frac{1}{5}} + 10e^{-\frac{2}{5}} + 10e^{-\frac{3}{5}} + \cdots + 10e^{-\frac{n}{5}}$$

$$= 10\left(e^{-\frac{1}{5}} + e^{-\frac{2}{5}} + e^{-\frac{3}{5}} + \cdots + e^{-\frac{n}{5}}\right)$$

$$= 10 \times \frac{e^{-\frac{1}{5}}\left(1 - e^{-\frac{n}{5}}\right)}{1 - e^{-\frac{1}{5}}} = 10e^{-\frac{1}{5}} \times \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{5}}}{1 - e^{-\frac{1}{5}}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 10e^{-\frac{1}{5}} \times \left(\frac{1-e^{-\frac{n}{5}}}{1-e^{-\frac{1}{5}}} \right)$$



$$= 10e^{-\frac{1}{5}} \times \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-e^{-\frac{n}{5}}}{1-e^{-\frac{1}{5}}} \right)$$

$$= 10e^{-\frac{1}{5}} \times \frac{1-0}{1-e^{-\frac{1}{5}}} = \frac{10e^{-\frac{1}{5}}}{1-e^{-\frac{1}{5}}} \approx 45.17$$