课程介绍—性质与任务：

- 《高等数学》是一门必修的重要基础课程，通过本课程的学习，使学生对微分、积分有初步认识和了解，使学生初步掌握微积分的基本知识、基本理论和基本技能，并逐步培养学生逻辑推理能力、自学能力，较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力，为学习本专业其它课程和今后工作的需要，打下必要的基础。

课程介绍—目的与要求：

- 它是研究变量变化的一门科学，它所研究的对象是事物运动、变化过程中变量间相互依赖的函数关系。通过本课程的学习使学生建立变量的思想，认识到学好函数关系对于描述工科专业课程中物理现象的重要性。
- 使学生对极限的思想和方法有初步认识，对极限在描述工科专业课程中某些物理现象、几何现象的应用有所了解。
- 使学生初步掌握微积分的基本知识、基本理论和基本技能，会求解简单的常系数微分方程，能够变通的理解微积分、常系数微分方程在工科课程知识体系中模型建立和描述等方面的应用。

课程介绍—学时、学分：

- 本课程的学时数为64、学分为4。

序号	内容	学时
1	函数、极限与连续	20
2	导数与微分	15
3	导数应用	10
4	不定积分与定积分	15
5	机动 复习	4

内容概要

- 简单说明高等数学学习要求
- 简单介绍数学发展史
- 高等数学第一讲：基础知识

◆学习要求

- 上课按时出勤，带一教科书一作业本一笔记本
- 进入课堂后请将手机置于静音或震动状态
- 课堂上不得使用手机（如利用手机打游戏、听歌、看电影等）；请认真听讲，必须记录笔记
- 课后及时温习，及时反馈

> 考核方式

序号	考核内容	考核比例
1	课堂表现	60
2	平时作业	
3	单元测试	
4	期末测试	40

◆数学发展史

数学的发展史大致可以分为四个阶段

- 第一时期：数学形成时期，这是人类建立最基本的数学概念的时期。人类从数数开始逐渐建立了自然数的概念，简单的计算法，并认识了最基本最简单的几何形式，算术与几何还没有分开 。

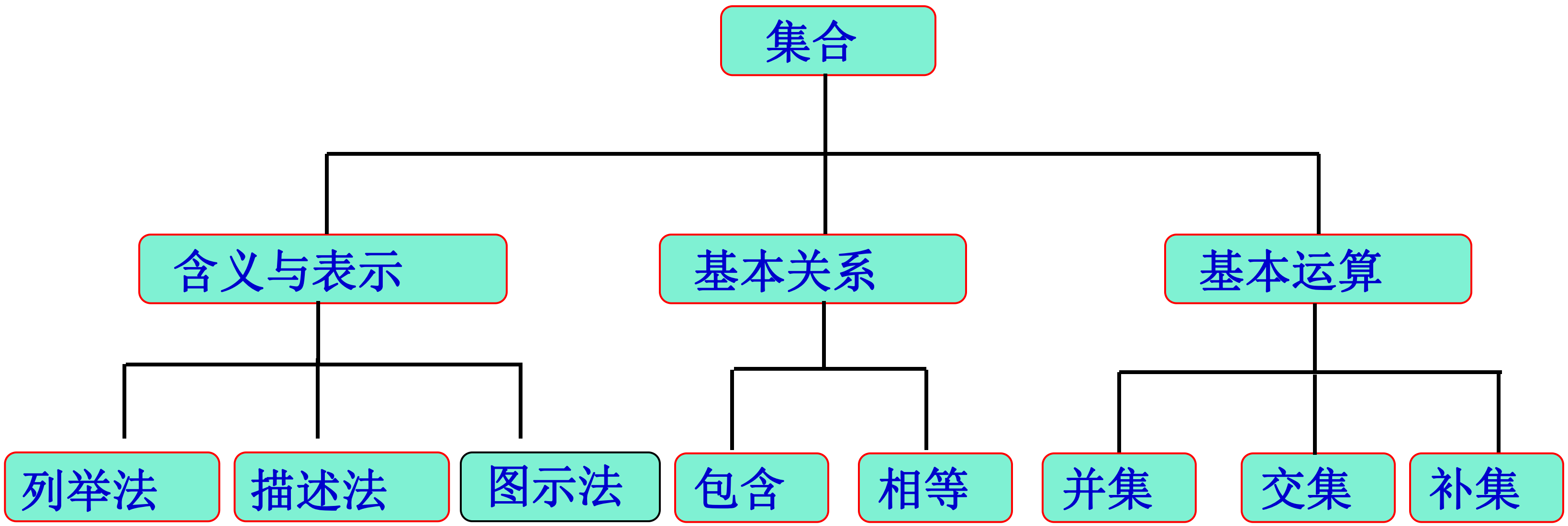
- 第二时期：初等数学，即常量数学时期。这个时期的基本的、最简单的成果构成中学数学的主要内容。这个时期从公元前5世纪开始，也许更早一些，直到17世纪，大约持续了两千年。这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支：算数、几何、代数、三角。

- 第三时期：变量数学时期。变量数学产生于17世纪，大体上经历了两个决定性的重大步骤：第一步是解析几何的产生；第二步是微积分的创立。

  微积分是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支。它是数学的一个基础学科。内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用。微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论。它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论。积分学，包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供一套通用的方法。

- 第四时期：现代数学。

◆第一讲 基础知识



一、集合的含义与表示

（一）集合的含义

1、集合：把研究对象称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合

2、元素与集合的关系：$\in$ 或 $\notin$

3、元素的特性：确定性、互异性、无序性

4、常用数集：N^*、N、Z、Q、R

(二)集合的表示

1、列举法：把集合中的元素一一列举出来，并放在{ }内

2、描述法：用文字或公式等描述出元素的特性，并放在{x| }内

3.图示法： Venn图,数轴

二、集合间的基本关系

1、子集：对于两个集合A，B如果集合A中的任何一个元素都是集合B的元素，我们称A为B的子集.

若集合中元素有n个，则其子集个数为 2^n

真子集个数为 2^n-1

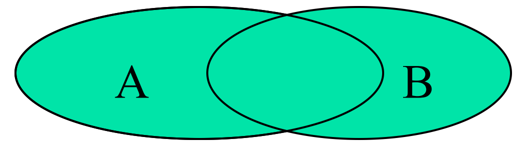
非空真子集个数为 2^n-2

2、集合相等： $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

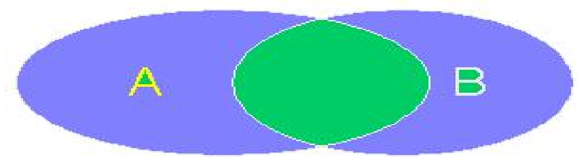
3、空集：规定空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集

三、集合的并集、交集、全集、补集

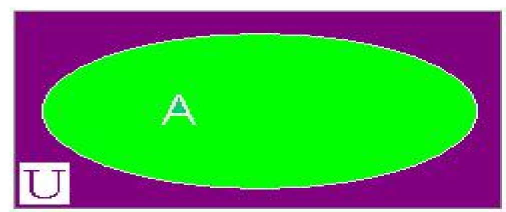
1、 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$



2、 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$



3、 $C_U A = \{x \mid x \in U \text{且} x \notin A\}$



全集：某集合含有我们所研究的各个集合的全部元素，用U表示

题型示例

考查集合的含义

例1　已知 $x \in \{1, 2, x^2\}$，则 $x =$ **0或2**

例2　$A = \{y \mid y = x^2\}, B = \{x \mid y = x^2\}$，求 $A \cap B$.

$\because A = [0, +\infty), B = R$,

$\therefore A \cap B = [0, +\infty)$.

考查集合之间的关系

例 3　设 $A=\{x \mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x \mid mx+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求 m 的值的集合．

解：$\because A=\{2,-3\}$，由 $A\cup B=A$ 得 $B\subseteq A$

$\therefore$ 当 $m=0$ 时，$B=\varnothing$，符合题意；

当 $m\neq 0$ 时，$B=\left\{-\dfrac{1}{m}\right\}$，$\because B\subseteq A$

$\therefore -\dfrac{1}{m}=2$，则 $m=-\dfrac{1}{2}$；或 $-\dfrac{1}{m}=-3$，$m=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore m=0$，或 $-\dfrac{1}{2}$，或 $\dfrac{1}{3}$

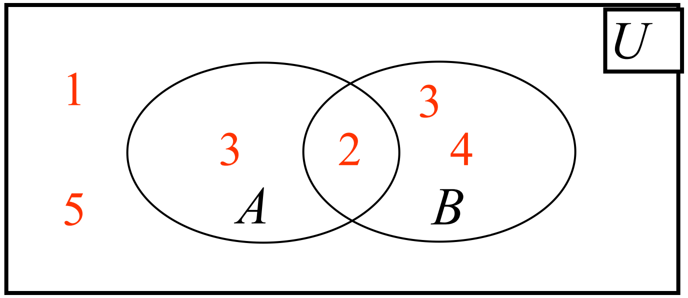
考查集合的运算

例4(1) 已知 $I=\{0,1,2,3,4\}$, $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{2,3\}$，求 $C_I B$, $C_A B$.

(2)已知 $A=\{x|-1<x\leq 3\}$, $B=\{x|x\leq 0,\text{或}x\geq 2\}$, 求 $A\cap B$, $A\cup B$.

考查集合的运算

例5 设$U=\{1,2,3,4,5\}$,若$A\cap B=\{2\}$,$(C_U A)\cap B=\{4\}$,$(C_U A)\cap(C_U B)=\{1,5\}$,求A.



考查集合的运算

例6 已知集合 $A=\{x \mid -1<x\leq 2\}$，$B=\{x \mid x-k\leq 0\}$，

(1)若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 k 的取值范围

(2)若 $A\cap B=A$，求 k 的取值范围

函数 定义域 值域 单调性 奇偶性 图象

一次函数

反比例函数

二次函数

指数函数

对数函数

幂函数

函数的复习主要抓住两条主线

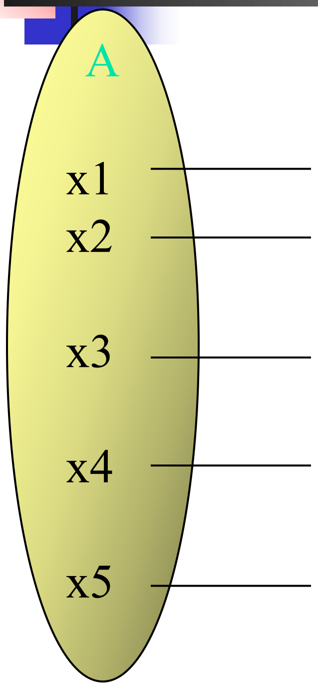
1、函数的概念及其有关性质

2、几种初等函数的具体性质

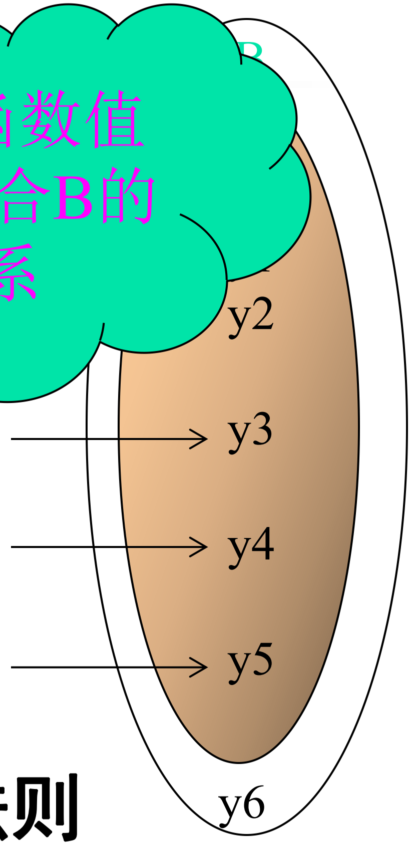
函数知识结构

- 函数
  - 函数的概念
  - 函数的基本性质
    - 函数的单调性
    - 函数的最值
    - 函数的奇偶性

三、函数的概念：



A、B是两个非空的数集，某种对应法则f，对于集合A中的每一个元素x，在集合B中都有唯一的元素y和它对应，这样的对应叫做从A到B的一个函数。



思考:函数值域与集合B的关系

函数的三要素：定义域，值域，对应法则

四、映射的概念

设A,B是两个非空的集合,如果按照某种确定的对应关系f,使对于集合A中的任意一个元素x,在集合B中都有唯一确定的元素y于之对应,那么就称对应f:A→B为集合A到集合B的一个映射

映射是函数的一种推广,本质是:任一对唯一

函数的定义域：使函数有意义的x的取值范围。

求定义域的主要依据

1、分式的分母不为零.

2、偶次方根的被开方数不小于零.

3、零次幂的底数不为零.

4、对数函数的真数大于零.

5、指、对数函数的底数大于零且不为1.

6、实际问题中函数的定义域

（一）函数的定义域

1、具体函数的定义域

例 7. 求 下 列 函 数 的 定 义 域

$$(1)\ f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$$

$$(2)\ f(x)=\log_2(x^2-1)$$

$$(3)\ f(x)=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$$

1.【-1,2）∪（2，+∞）
2.（-∞，-1）∪（1，+∞）
3.（3/4,1】

2、抽象函数的定义域

1）已知函数y=f(x)的定义域是[1，3]，求f(2x-1)的定义域

2）已知函数y=f(x)的定义域是[0，5)，求g(x)=f(x-1)- f(x+1)的定义域

3）$y = f(x-2)$的定义域为$\{x|x \leq 4\}$，求$y=f(x^2)$的定义域

1.[1,2]；　　2.[1,4)；　　3. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

例8　若$f(x)=\lg(ax^2-4ax+3)$的定义域为R，求实数a的取值范围。

解： 当$a=0$时，函数的定义域为R;

当$\begin{cases} a>0, \\ \Delta=16a^2-12a<0 \end{cases}$时，函数的定义域也为$R$.

$\therefore$函数的定义域为R，a的取值范围是$0\le a\le\dfrac{3}{4}$.

思考：若值域为R呢？

分析： 值域为R等价为真数N能取（0，+∞）每个数。

当a=0时，N=3只是（0，+∞）上的一个数，不成立；

当a≠0时，真数N取（0，+∞）每个数即 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\ge 0 \end{cases}$

五、函数的表示法

1、解 析 法
2、列 表 法
3、图 象 法

六、函数单调性

定义：一般地，设函数f(x)的定义域为I：

如果对于定义域I内某个区间D上的任意两个自变量x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1) < f(x_2)$，那么就说函数在区间上是增函数。区间D叫做函数的增区间。

如果对于定义域I内某个区间D上的任意两个自变量x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1) >f(x_2)$，那么就说函数在区间上是减函数。区间D叫做函数的减区间。

注：增函数、减函数、单调函数是 对定义域上的某个区间而言的。

写出常见函数的单调区间，指明是增区间还是减区间

1、函数 $y=\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 单调区间是

$a>0$时，单减区间是$(-\infty,0),(0,+\infty)$

$a<0$时，单增区间是$(-\infty,0),(0,+\infty)$

2、函数y=ax+b（a≠0）的单调区间是

$a>0$时，单增区间是$(-\infty,+\infty)$

$a<0$时，单减区间是$(-\infty,+\infty)$

3、函数$y=ax^2+bx+c$（a≠0）的单调区间是

$a>0$时，单减区间是$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$，单增区间是$[-\frac{b}{2a},+\infty)$

$a<0$时，单增区间是$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$，单减区间是$[-\frac{b}{2a},+\infty)$

用定义证明函数单调性的步骤:

(1) 设元，设x_1,x_2是区间上任意两个实数，且$x_1<x_2$;

(2) 作差， $f(x_1)-f(x_2)$;

(3) 变形，通过因式分解转化为易于判断符号的形式

(4) 判号， 判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号；

(5) 下结论.

•复合函数的单调性

•复合函数的单调性由两个函数共同决定；

引理1：已知函数$y=f[g(x)]$，若$u=g(x)$在区间(a,b)上是增函数，其值域为(c,d),又函数$y=f(u)$在区间(c,d)上是增函数，那么，原复合函数$y=f[g(x)]$在区间(a,b)上是增函数。

x增→ g(x)增 →y增:故可知y随着x的增大而增大

引理2：已知函数$y=f[g(x)]$，若$u=g(x)$在区间(a,b)上是减函数，其值域为(c,d),又函数$y=f(u)$在区间(c,d)上是减函数，那么，原复合函数$y=f[g(x)]$在区间(a,b)上是增函数。

x增→ g(x)减 →y增:故可知y随着x的增大而增大

•复合函数的单调性

例9：求下列函数的单调性$y=\log_4(x^2-4x+3)$

解：设 $y=\log_4u$（外函数），$u=x^2-4x+3$（内函数）．

由 $u>0$，$u=x^2-4x+3$，

解得原复合函数的定义域为$\{x|x<1或x>3\}$.

当$x\in(-\infty，1)$时，$u=x^2-4x+3$为减函数，而$y=\log_4u$为增函数，所以$(-\infty，1)$是复合函数的单调减区间；

当$x\in(3，+\infty)$时，$u=x^2-4x+3$为增函数，而$y=\log_4u$为增函数，所以，$(3，+\infty)$是复合函数的单调增区间.

•复合函数的单调性小结

复合函数$y=f[g(x)]$的单调性可按下列步骤判断：

(1)　将复合函数分解成两个简单函数：$y=f(u)$与$u=g(x)$。其中$y=f(u)$又称为外层函数, $u=g(x)$称为内层函数;

(2)　确定函数的定义域;

(3)　分别确定分解成的两个函数的单调性;

(4)　若两个函数在对应的区间上的单调性相同（即都是增函数，或都是减函数），则复合后的函数$y=f[g(x)]$为增函数;

(5)　若两个函数在对应的区间上的单调性相异（即一个是增函数，而另一个是减函数），则复合后的函数$y=f[g(x)]$为减函数。

复合函数的单调性可概括为一句话：“同增异减”。

七、函数的奇偶性

1.奇函数:对任意的 $x \in I$,都有 $f(-x) = -f(x)$

2.偶函数:对任意的 $x \in I$,都有 $f(-x) = f(x)$

3.奇函数和偶函数的必要条件:

定义域关于原点对称.

注:要判断函数的奇偶性,首先要看其定义域区间是否关于原点对称!

奇(偶)函数的一些特征

1.若函数f(x)是奇函数,且在x=0处有定义,则 f(0)=0.

2.奇函数图像关于原点对称,且在对称的区间上不改变单调性.

3.偶函数图像关于y轴对称,且在对称的区间上改变单调性

八、指数、对数基本运算

指数运算： $a^0 = 1\ (a \neq 0)$， $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}\ (a \neq 0)$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (a \geq 0),\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a > 0)$$

对数运算： $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N\ \left(M > 0，\ N > 0\right)$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N，\quad \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$$

对数恒等式： $a^{\log_a x} = x$

对数换底公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$