# 2.2　导数的运算

高等数学

主讲教师：王玉兰

# 1.2 函数的极限

## 一、导数基本公式与四则运算法则

1、常函数导数 $\boxed{(C)' = 0}$

2、幂函数的导数 $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

3、指数函数的导数 $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$

特别地， $\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$

4、 对数函数的导数

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

特别地，

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

5、 三角函数的导数

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

# 代数和函数的导数

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$$

**例1** 设 $y = 5x^2 + \frac{3}{x^3} - 2^x + 4\cos x$，求 $y'$ .

**解** $y' = 5(x^2)' + 3(x^{-3})' - (2^x)' + 4(\cos x)'$

$$= 5 \cdot 2x + 3 \cdot (-3)x^{-4} - 2^x \ln 2 + 4 \cdot (-\sin x)$$

$$= 10x - 9x^{-4} - 2^x \ln 2 - 4\sin x$$

$$= 10x - \frac{9}{x^4} - 2^x \ln 2 - 4\sin x$$

# 乘积函数的导数

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

特别地，当其中有一个函数为常数 $C$ 时，则有

$$\boxed{(Cu)' = C \cdot u'}$$

上面的公式对于有限多个可导函数成立，如：

$$\boxed{(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'}$$

例2（1）设 $y=(1+2x)(5x^2-3x+1)$，求 $y'$．

解

$$y'=\left(1+2x\right)'\cdot\left(5x^2-3x+1\right)+\left(1+2x\right)\cdot\left(5x^2-3x+1\right)'$$

$$=2\cdot\left(5x^2-3x+1\right)+\left(1+2x\right)\cdot\left(10x-3\right)$$

$$=10x^2-6x+2+\left(10x-3+20x^2-6x\right)$$

$$=30x^2-2x-1$$

例2（2）设 $y = x\sin x\ln x$ ，求 $y'$ .

解

$$y' = (x)'\sin x\ln x + x(\sin x)'\ln x + x\sin x(\ln x)'$$

$$= 1\cdot\sin x\ln x + x\cdot\cos x\cdot\ln x + x\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \sin x\ln x + x\cos x\ln x + \sin x$$

# 函数商的导数

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

例3（1）已知 $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+3}$，求 $f'(1)$ .

解 $$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 2)'(x+3) - (x^2 - x + 2)(x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+3) - (x^2 - x + 2)\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 5}{(x+3)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1+6-5}{(1+3)^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

例3（2）已知 $f(x)=\tan x$，求 $f'(x)$.

解 $$f'(x)=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}=\sec^2 x$$

$$\boxed{(\tan x)'=\sec^2 x}$$

用同样的方法得到

$$\boxed{(\cot x)' = -\csc^2 x}$$

$$\boxed{(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x}$$

$$\boxed{(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x}$$

## 练习一

**1. 求下列函数的导数：**

$(1)\ y=10^x+x^{10}$

$(2)\ y=x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-5\cos x+3\log_2 x+\ln 4$

$(3)\ y=10x^5\ln x$

$(4)\ y=(1-2x^2)\sin x+\sin\dfrac{\pi}{2}$

$(5)\ y=\dfrac{x-1}{x+1}$

2. 求下列函数在指定点处的导数：

(1) 设$f(x)=(1+x^3)(4-\frac{1}{x^2})$，求$f'(1)$和$f'(-\frac{1}{2})$

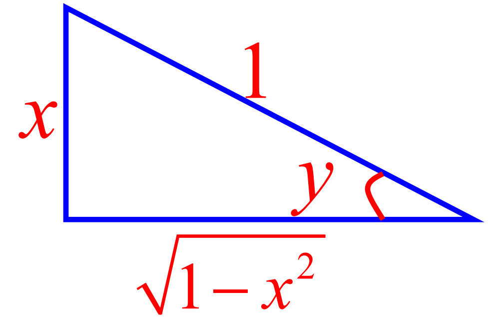
(2) 设$y=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$，求$y'(4)$

# 二、反函数的导数

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

**反函数的导数等于直接函数的导数的倒数.**

**例4** 已知 $f(x)=\arcsin x$，求 $f'(x)$.




**解** $y=\arcsin x \quad \Rightarrow \quad x=\sin y$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

用同样的方法得到

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\operatorname{arc}\cot x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

# 求导公式（书本 P58）

（1） $(C)' = 0$

（2） $(x^n)' = nx^{n-1}$ （$n$ 为任意常数）

（3） $(a^x)' = a^x \ln a$　　$(e^x)' = e^x$

（4） $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$　　$(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

（5） $(\sin x)' = \cos x$　　$(\tan x)' = \sec^2 x$　　$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\cos x)' = -\sin x$　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

（6） $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

# 三、复合函数求导

$y=\sin(3x+1)$是一个复合函数，它可以看作是由 $y=\sin u$ 及 $u=3x+1$ 复合而成的.

我们用定义求出它的导数.

$$\Delta y=\sin[3(x+\Delta x)+1]-\sin(3x+1)$$

$$=2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos(3x+1+\frac{3\Delta x}{2}),$$

而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos(3x+1+\frac{3\Delta x}{2})}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos(3x+1+\frac{3\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\sin\frac{3\Delta x}{2}\cdot\cos(3x+1+\frac{3\Delta x}{2})}{\frac{3\Delta x}{2}}$$

$$=3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(3x+1+\frac{3\Delta x}{2})$$

$$=3\cdot 1\cdot\cos(3x+1)=3\cos(3x+1)$$ .

**定理2.2** 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x$ 处有导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在点 $u$ 处有导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=f'(u)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在该点 $x$ 也有导数，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

或

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

**例5** **求下列函数的导数：**

(1) $y=\sin^3 x$ ；

(2) $y=\cos x^2$ ；

(3) $y=\sin\frac{x}{5}$ ；

(4) $y=(2+5x)^4$ ；

(5) $y=\frac{1}{1+2x}$ ；

(6) $y=\sqrt{4-3x^2}$ ；

(7) $y=\ln\cos x$.

**解** (1) 设 $u=\sin x$ ， $y=u^3$ 由定理得

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cos x$$ ；

(2) 设 $u=x^2$ ， $y=\cos u$ 由定理得

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\sin u\cdot 2x=-2x\sin x^2$$ ；

(3) 设 $u=\frac{x}{5}$ ， $y=\sin u$ 由定理得

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}$$ ；

(4) 设 $u=2+5x$ ，$y=u^4$ 则

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=4u^3\cdot 5=20(2+5x)^3$$ ；

(5) 设 $u=1+2x$ ，$y=u^{-1}$ 则

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(-1)u^{-2}\cdot 2=-\frac{2}{(1+2x)^2}$$ ；

(6) 设 $u=4-3x^2$ ，$y=u^{\frac{1}{2}}$ 则

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-6x)=-\frac{-3x}{\sqrt{4-3x^2}}$$ .

(7) 设 $u=\cos x$ ，$y=\ln u$ ，则

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}\cdot(-\sin x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$ .

定理2.2的结论可以推广到多层次复合的情况．　例如设 $y=f(u)$， $u=\varphi(v)$ ，$v=\psi(x)$，则复合函 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

**例6　求下列函数的导数：**

(1) $y=2^{\tan\frac{1}{x}}$ ；　　(2) $y=\sin^2(2-3x)$ ；

(3) $y=\log_3\cos\sqrt{x^2+1}$ .

**解** (1) 设 $y=2^u$ ，$u=\tan v$，$v=\frac{1}{x}$ 由定理2.2得

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

$$=2^u\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{2^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\ln 2}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$$

(2) $y=\sin^2(2-3x)$；

(3) $y=\log_3\cos\sqrt{x^2+1}$．

(2) $y'=2\sin(2-3x)\cdot\cos(2-3x)\cdot(-3)$

$=-3\sin 2(2-3x)$；

(3) $y'=\dfrac{1}{\cos\sqrt{x^2+1}\cdot\ln 3}\cdot(-\sin\sqrt{x^2+1})$

$\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$=-\dfrac{x}{\ln 3\sqrt{x^2+1}}\cdot\tan\sqrt{x^2+1}$．

**例7** 求函数 $y=(x+1)\sqrt{3-4x}$ 的导数

**解**

$$y'=(x+1)'\sqrt{3-4x}+(x+1)(\sqrt{3-4x})'$$

$$=\sqrt{3-4x}+(x+1)\cdot\frac{-4}{2\sqrt{3-4x}}$$

$$=\frac{3-4x-2x-2}{\sqrt{3-4x}}=\frac{1-6x}{\sqrt{3-4x}}\quad ;$$

# 练习题

## 1、求下列函数的导数

(1) $y = 2x^2 - \dfrac{1}{x^3} + 5x + 1$

解 $y' = \left(2x^2 - x^{-3} + 5x + 1\right)'$

$= 4x - (-3)x^{-3-1} + 5 + 0$

$= 4x + 3x^{-4} + 5$

$= 4x + \dfrac{3}{x^4} + 5$

(2) $y=x^2\sin x$

解 $$y'=\left(x^2\right)'\cdot\sin x+x^2\cdot(\sin x)'$$

$$=2x\sin x+x^2\cos x$$

(3) $y=e^x\left(\sin x-2\cos x\right)$

解 $$y'=\left(e^x\right)'\cdot(\sin x-2\cos x)+e^x\cdot(\sin x-2\cos x)'$$

$$=e^x\cdot(\sin x-2\cos x)+e^x\left(\cos x+2\sin x\right)$$

$$=e^x\left(3\sin x-\cos x\right)$$

(4) $y=\dfrac{x+5}{2x-1}$

解 $y'=\dfrac{(x+5)'(2x-1)-(x+5)(2x-1)'}{(2x-1)^2}$

$$=\frac{1\cdot(2x-1)-(x+5)\cdot 2}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)-(2x+10)}{(2x-1)^2}=\frac{-11}{(2x-1)^2}$$

(5) $y = e^{-4x}$

解 $y' = e^{-4x} \cdot (-4x)' = -4e^{-4x}$

(6) $y = (2\sin x + x)^3$

解 $y' = 3(2\sin x + x)^2 \cdot (2\sin x + x)'$

$$= 3(2\sin x + x)^2 (2\cos x + 1)$$

**练习**　求下列函数的导数：

(1) $y = e^{x^2}$　　$y' = 2xe^{x^2}$

(2) $y = (3x+5)^7$　　$y' = 21(3x+5)^6$

(3) $y = 4\sin(3x+1)$　　$y' = 12\cos(3x+1)$

(4) $y = \ln(x^2 - x + 1)$　　$y' = \dfrac{2x-1}{(x^2 - x + 1)}$

(5) $y = (x^3 - 2)^5$　　$y' = 15x^2(x^3-2)^4$

(6) $y = \sin^2(3x)$　　$y' = 3\sin 6x$

**例8** 设 $f'(x_0)=A$，试用 $A$ 表示下列各极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2 (1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$;  2 $h$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0-h)}{h}$;

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$=-2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$

$=-2A+A$

$=-A$

**例9** 求下列分段函数的导数：

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x, x\ge 0;\end{cases}\qquad (2)\ f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x < 0\\ 0, & x=0\\ \ln(1+x), & x>0.\end{cases}$$

解：① 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$

② 当 $x>0$ 时，$f'(x)=x'=1$

③ 当 $x=0$ 时，$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-0}{x-0}=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

则 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

解 ① 当 $x<0$ 时，$f'(x) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

② 当 $x>0$ 时，$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

③ 当 $x=0$ 时，$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

则 $f'(x) = \begin{cases} \quad , & x<0 \\ \quad , & x>0 \end{cases}$