3.3　函数的性质

主讲教师：王玉兰

高等数学

一、函数的单调性

定理1（函数单调性的判别法）

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

（1）若在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$ ，则函数在 $[a,b]$ 上单调递增；

（2）若在 (a,b) 内有 $f'(x)<0$ ，则函数在 $[a,b]$ 上单调递减；

确定函数的单调性的一般步骤：

1、确定函数的定义域；

2、求出使函数$f'(x)=0$和$f'(x)$不存在的点，并以这些点为分界点，将定义域分成若干个子区间；

3、确定$f'(x)$在各个子区间的符号，从而判断出$f(x)$的单调性。

例1（1）讨论函数 $f(x)=x-\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的单调性.

解：

$$f(x)=x-\sin x$$

$$f'(x)=(x-\sin x)'=1-\cos x$$

在 $(0,2\pi)$ 上，有

$$f'(x)=1-\cos x \;>0$$

则 $f(x)=x-\sin x$ 在 $[0,2\pi]$上单调递增.

（2）讨论函数 $f(x)=e^x-x-1$ 的单调性.

解： $D:(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$ 单调递增;

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1<0$ 单调递减;

当 $x=0$ 时，$f'(x)=e^x-1=0$ 驻点

二、函数的极值及其求法

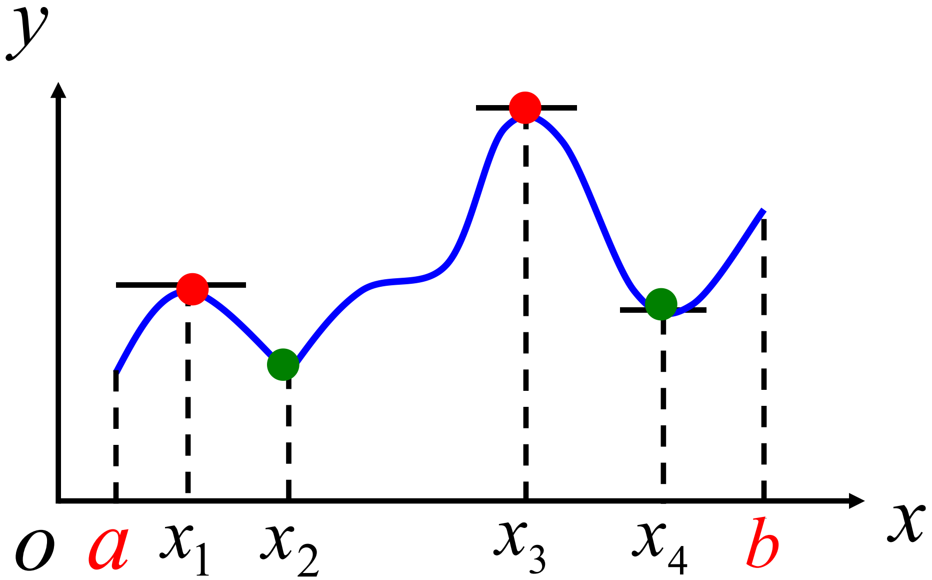
定义1（极值）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果对于该邻域内任何异于 x_0 的 x 都有

(1) $f(x) \le f(x_0)$ 成立，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值，称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；

(2) $f(x) \ge f(x_0)$ 成立，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，称 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

极大值、极小值统称为极值. 极大值点、极小值点统称为极值点.

注意： 极值是局部性的。因而，函数可以有许多个极大值和极小值，并且极大值不一定大于极小值。



x_1, x_3 为极大值点

x_2, x_4 为极小值点

极值点左右两侧单调性相反。

定理2（极值的必要条件）

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的驻点。

注意：可导函数的极值点必定是它的驻点. 但是函数的驻点并不一定是函数的极值点.

例如 $y=x^3, x=0$ 为其驻点，但是 $x=0$ 不是函数的极值点.

定理3（极值第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，在 x_0 处的某去心邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$（或 $f'(x_0)$ 不存在），

（1） $f'(x)$ “左正右负”，则 $f(x)$ “先增后减”，x_0 是极大值点；

（2） $f'(x)$ “左负右正”，则 $f(x)$ “先减后增”，x_0 是极小值点.

由定理3判定函数极值的一般步骤为：

(1) 求函数的定义域；

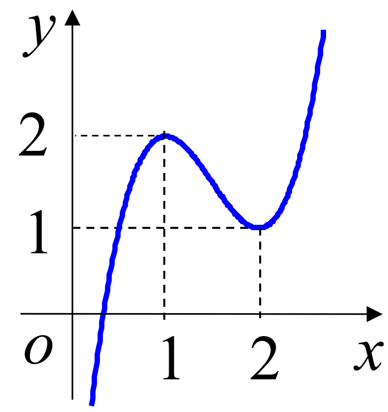
(2) 求导函数 $f'(x)$ ；

(3) 求出所有驻点及 $f'(x)$ 不存在的点；

(4) 判定（3）中每个点左右两侧的单调性，单调性相反的是极值点，单调性相同的不是。

例2（1） 求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$



$$f'(x)=6x^2-18x+12$$
$$=6\left(x^2-3x+2\right)$$
$$=6(x-1)(x-2)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1, x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 2	↘	极小值 1	↗

（2）求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+1$ 的极值。

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$$ 令 $f'(x)=0$，

得驻点 $x=1$； 当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 不存在

因此函数只可能在这两点取得极值，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值 1	$\searrow$	极小值 $\frac{1}{2}$	$\nearrow$

定理4(判定极值的第二充分条件)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，并且有 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 为极大值点；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 为极小值点；

由定理4判定函数极值一般步骤为:

1、确定定义域，并求出所给函数的全部驻点；

2、求驻点的二阶导数符号，确定极值点；

3、求出极值点处的函数值，得到极值。

（3）求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解：第一充分条件

$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\left(x^3-3x^2-9x+5\right)'=3x^2-6x-9$$

$$=3\left(x^2-2x-3\right)=3(x+1)(x-3)=0$$

得到驻点：$x_1=-1,\ x_2=3$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值10	↘	极小值-22	↗

第二充分条件

$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x)=\left(x^3-3x^2-9x+5\right)' =3x^2-6x-9$$

$$=3\left(x^2-2x-3\right)=3(x+1)(x-3) =0$$

得到驻点： $x_1=-1, x_2=3$

$$f''(x)=\left(3x^2-6x-9\right)' =6x-6 =6(x-1)$$

$f''(-1)=6\cdot(-1-1)<0$ 极大值： $f(-1)=10$

$f''(3) =6\cdot(3-1) >0$ 极小值： $f(3)=-22$

（4）求函数 $f(x)=\left(x^2-1\right)^3+1$ 的极值.

解：第二充分条件

$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\left[\left(x^2-1\right)^3+1\right]'=3\left(x^2-1\right)^2\cdot\left(x^2-1\right)'=6x\cdot\left(x^2-1\right)^2$$

得到3个驻点： $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$

$$f''(x)=\left[6x\cdot\left(x^2-1\right)^2\right]'=6\left(x^2-1\right)\left(5x^2-1\right)$$

$f''(0)=6(0-1)(0-1)\ =6>0$ $\quad f(0)$为极小值

$$\left.\begin{aligned} f''(1)&=6\cdot(1-1)\cdot(5-1)=0 \\ f''(-1)&=6\cdot(1-1)\cdot(5-1)=0 \end{aligned}\right\}\text{不能判断}$$

第一充分条件

$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x)=\left[\left(x^2-1\right)^3+1\right]'=3\left(x^2-1\right)^2\cdot\left(x^2-1\right)'=6x\cdot\left(x^2-1\right)^2$$

得到3个驻点： $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	不是极值点	$\searrow$	极小值 $f(0)=0$	$\nearrow$	不是极值点	$\nearrow$

练习题

3、求函数 $f(x)=2x^3-3x^2$ 的极值.

解 $D:\ (-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\left(2x^3-3x^2\right)'=6x^2-6x\ \ =6x(x-1)$$

驻点: $x_1=0\ ,\ \ x_2=1$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 −1	↗

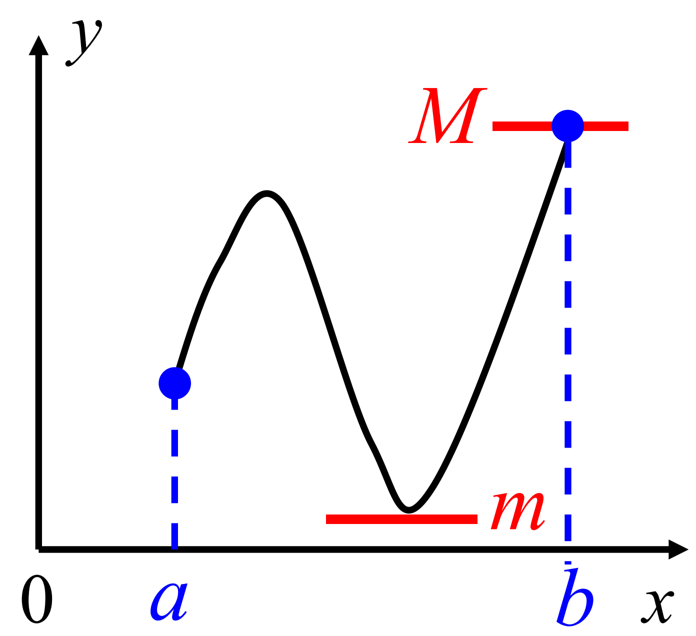
三、函数在闭区间上的最值

$f(x)$ 在闭区间 $[a\,,b]$ 上连续，

确定 $f(x)$在 $[a\,,b]$上最值的方法：

（1）求导数 $f'(x)$ ；

（2）求出 $f(x)$ 在区间内的全部驻点及使 $f'(x)$ 没有意义的点；



（3）计算（2）中所有点及端点 $a\,,b$ 的函数值；

（4）比较（3）中所有函数值，选出最大值及最小值.

例3（1）求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$ 在区间 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)=6(x+2)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 ：$x_1=-2, x_2=1$.

$f(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+4=\boxed{24}$

最小值 $f(1)=2\cdot(1)^3+3\cdot(1)^2-12\cdot1+4=\boxed{-3}$

$f(-3)=2\cdot(-3)^3+3\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)+4=\boxed{13}$

最大值 $f(4)=2\cdot(4)^3+3\cdot(4)^2-12\cdot4+4=\boxed{132}$

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $[0,2]$ 上的最值.

解

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{x'\cdot\left(1+x^2\right)-x\cdot\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点：$x_1 \cancel{=} -1, x_2=1.$

$$f(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2};\quad f(0)=\frac{0}{1+0^2}=0;\quad f(2)=\frac{2}{1+2^2}=\frac{2}{5};$$

经过比较得到 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值是 $f(1)=\dfrac{1}{2}$,

最小值是 $f(0)=0.$

练习题

4、求函数 $f(x)=x^4-8x^2+2,\ (-1\le x\le 4)$ 的最值.

解 $f'(x)=\left(x^4-8x^2+2\right)'=4x^3-16x\ =4x\left(x^2-4\right)$

驻点: $x_1=0\ ,\ x_2=2\ ,\ \cancel{x_3=-2}$

$$f(0)=0^4-8\cdot 0^2+2=\boxed{2}$$

最小值 $f(2)=2^4-8\cdot 2^2+2=\boxed{-14}$

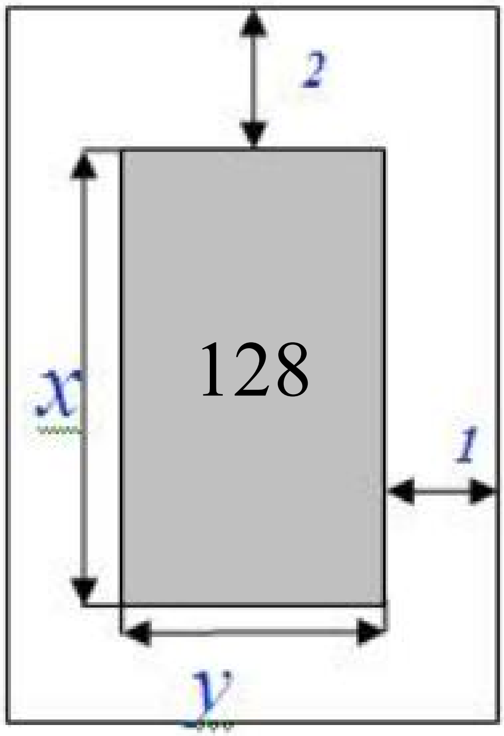
$$f(-1)=(-1)^4-8\cdot(-1)^2+2=\boxed{-5}$$

最大值 $f(4)=4^4-8\cdot 4^2+2=\boxed{130}$

若函数在所讨论的区间内只有一个可能的极值点，则该点处的函数值一定是最大值或最小值。

6、拓展练习（海报设计问题）

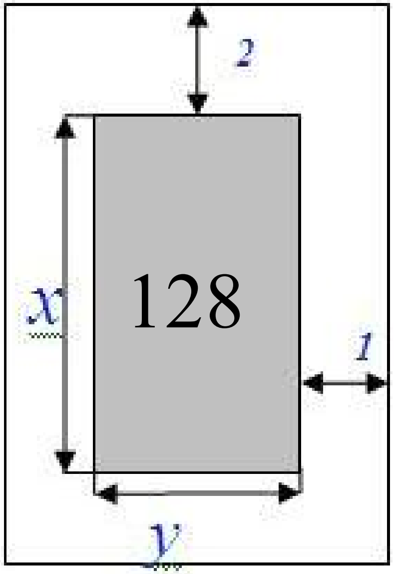
现在要求设计一张单栏的竖向张贴的海报，它的印刷面积为128平方分米，上下空白2分米，两边空白1分米，如何确定海报尺寸可使四周空白面积为最小？



解　设海报的高为 x ，底为 y .

海报的面积= $\boxed{xy=128}$

墙的面积= $(y+2)\cdot(x+4)$



空白面积 $S=(y+2)\cdot(x+4)-128$

$$=xy+4y+2x+8-128$$

$$=x\cdot\frac{128}{x}+4\cdot\frac{128}{x}+2x+8-128$$

$$=\frac{512}{x}+2x+8 \qquad (x>0)$$

求 $S=\frac{512}{x}+2x+8,\ (x>0)$ 的最小值

$$S'=\left(\frac{512}{x}+2x+8\right)'=512\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2=-\frac{512}{x^2}+2$$

驻点：$x_1=16$ ， $x_2 \cancel{=} -16$

$x=16$是极小值点.

结论： $x=16, y=8$ 时空白处面积最小.

四、函数的凹凸性与拐点

定义2 设曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内各点都有切线，

（1）若曲线总在切线上方，则称曲线 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的或称为凹弧，也称 (a,b) 为凹区间；

（2）若曲线总在切线下方，则称曲线 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的或称为凸弧，也称 (a,b) 为凸区间；

定理5（函数凹凸性的判别法）

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上具有二阶导数，

（1）若在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$ ，则函数在 (a,b) 上是凹的；

（2）若在 (a,b) 内有 $f''(x)<0$ ，则函数在 (a,b) 上是凸的；

例4（1）判断曲线 $y=x^4+2x^2$ 的凹凸性.

解 $D:\ (-\infty, +\infty)$

$$y'=\left(x^4+2x^2\right)' =4x^3+4x$$

$$y''=\left(4x^3+4x\right)' =12x^2+4 \ >0$$

曲线 $y=x^4+2x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的.

（2）判断曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 $D:\ (0\,,+\infty)$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

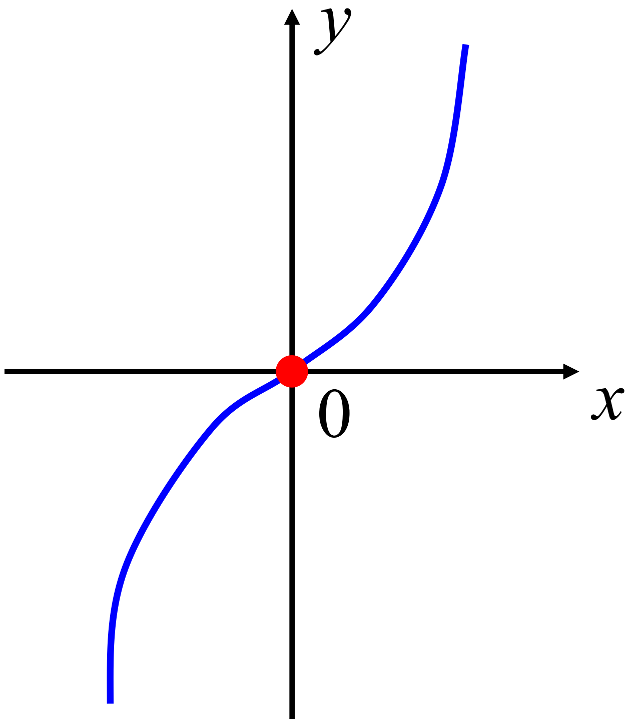
曲线 $y = \ln x$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

（3）判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解　D:　$(-\infty, +\infty)$

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$$

$$y'' = \left(3x^2\right)' = 6x$$



当 $x < 0$ 时，$y'' = 6x < 0$，凸的；

当 $x > 0$ 时，$y'' = 6x > 0$，凹的；

当 $x = 0$ 时，$y'' = 6x = 0$，拐点.

拐点：左右两侧凹凸性相反的点。

求函数拐点的一般步骤为：

(1) 求函数的定义域；

(2) 求二阶导数 $f''(x)$；

(3) 找出所有 $f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点；

(4) 判定（3）中每个点左右两侧的凹凸性，凹凸性相反的是拐点，凹凸性相同的不是。

（4）判断曲线 $f(x)=x^4-4x^3-18x^2+4x+10$ 的凹凸性并求出拐点.

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\left(x^4-4x^3-18x^2+4x+10\right)'$$

$$=4x^3-12x^2-36x+4$$

$$f''(x)=\left(4x^3-12x^2-36x+4\right)'=12x^2-24x-36$$

$$=12\left(x^2-2x-3\right)=12(x-3)(x+1)$$

令 $f''(x)=0$，得 $x_1=-1,\ x_2=3$

$$f''(x)=12(x-3)(x+1)$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	拐点 $(-1,-7)$	$\cap$	拐点 $(3,-167)$	$\cup$

$$f(x)=x^4-4x^3-18x^2+4x+10$$

$$f(-1)=(-1)^4-4\cdot(-1)^3-18\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+10 \quad =-7$$

$$f(3)=(3)^4-4\cdot(3)^3-18\cdot(3)^2+4\cdot(3)+10 \quad =-167$$

练习

5、求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ **的凹凸性与拐点.**

解 $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)'=x^2-1$

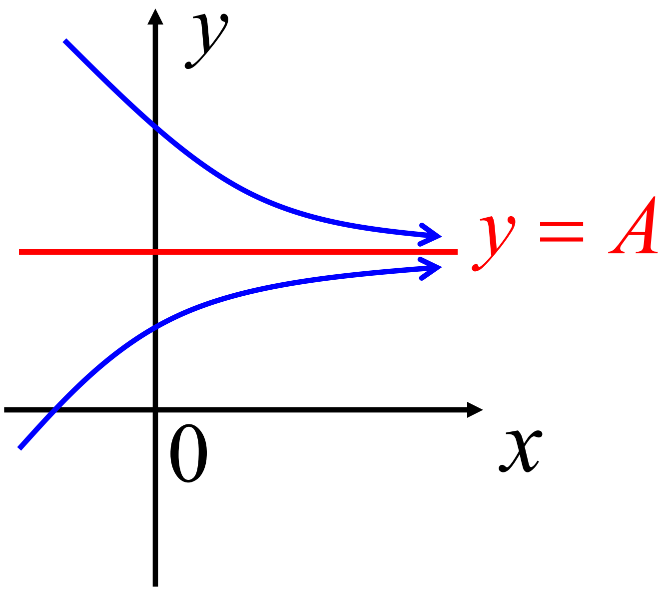
$f''(x)=\left(x^2-1\right)'=2x$

令 $f''(x)=0$，得 $x=0$

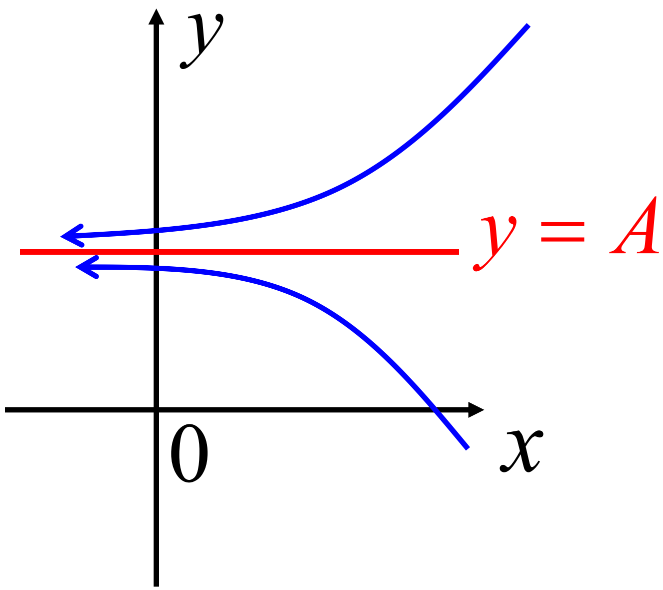
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点 $(0,0)$	$\cup$

五、渐近线（水平、垂直）

1、水平渐近线



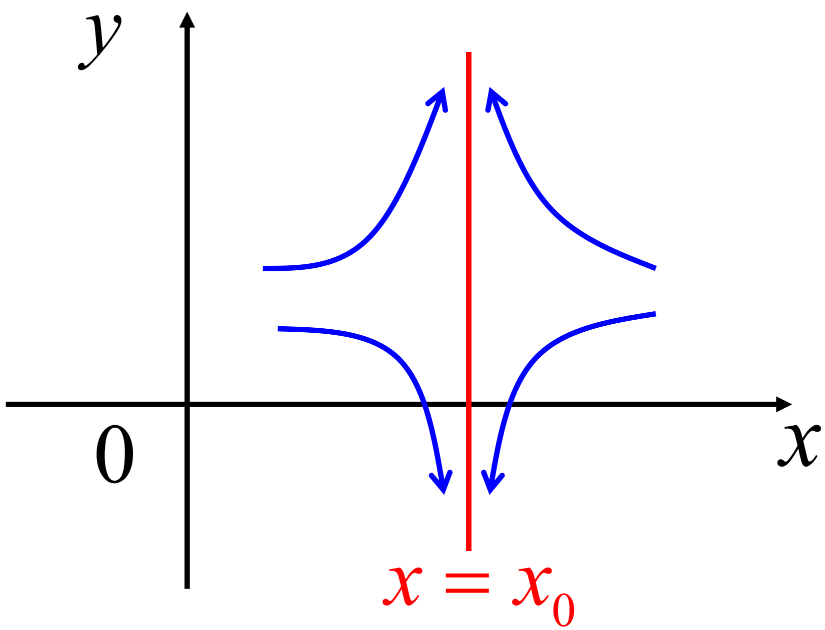
$x \to +\infty, f(x) \to A$



$x \to -\infty, f(x) \to A$

若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, 则曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = A$.

2、垂直渐近线



$x \to x_0$,

$f(x) \to \infty$

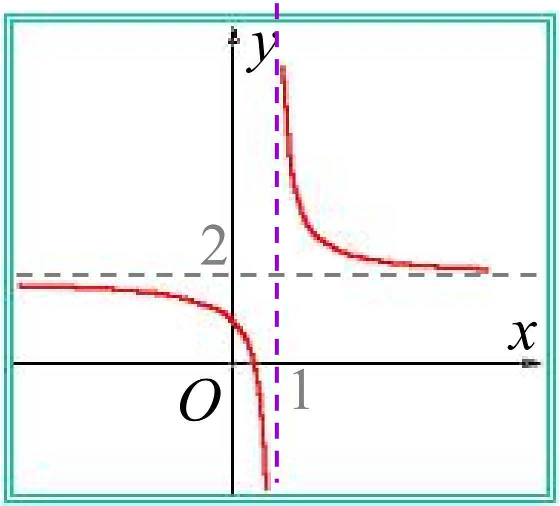
若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = x_0$.

例5（1）求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的水平和垂直渐近线.

解：水平渐近线

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}+2\right)=2$$

$y=2$ 为水平渐近线;



垂直渐近线

$$\lim_{x\to\boxed{1}}\left(\frac{1}{x-1}+2\right)=\infty,$$

$x=1$ 为垂直渐近线.

（2）求曲线 $y=\dfrac{e^x}{x^2-1}$ 的水平和垂直渐近线.

解： 水平渐近线

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}e^x\cdot\frac{1}{x^2-1}=0\cdot 0=0$$

$y=0$ 为水平渐近线;

垂直渐近线 $$\lim_{x\to\boxed{\pm 1}}\frac{e^x}{x^2-1}=\infty,$$

$x=1$ 和 $x=-1$ 为垂直渐近线.

六、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形．

例6 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

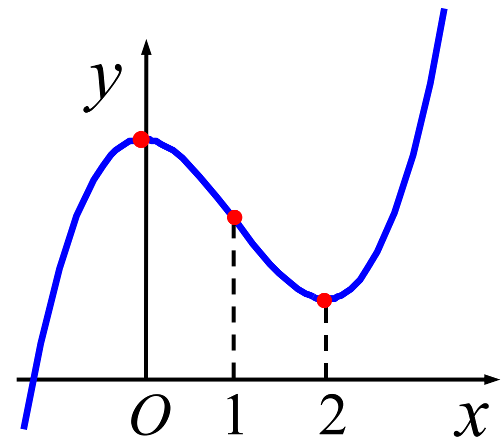
解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

2) $y'=x^2-2x=\boxed{x(x-2)}$,

$y''=2x-2=\boxed{2(x-1)}$,

令 $y'=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=2$

令 $y''=0$, 得 $x_3=1$



3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$ ↗	0	$-$ ↘		$-$ ↘	0	$+$ ↗
y''	$-$ $\cap$		$-$ $\cap$	0	$+$ $\cup$		$+$ $\cup$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		极大值		拐点		极小值	

4) 无渐近线