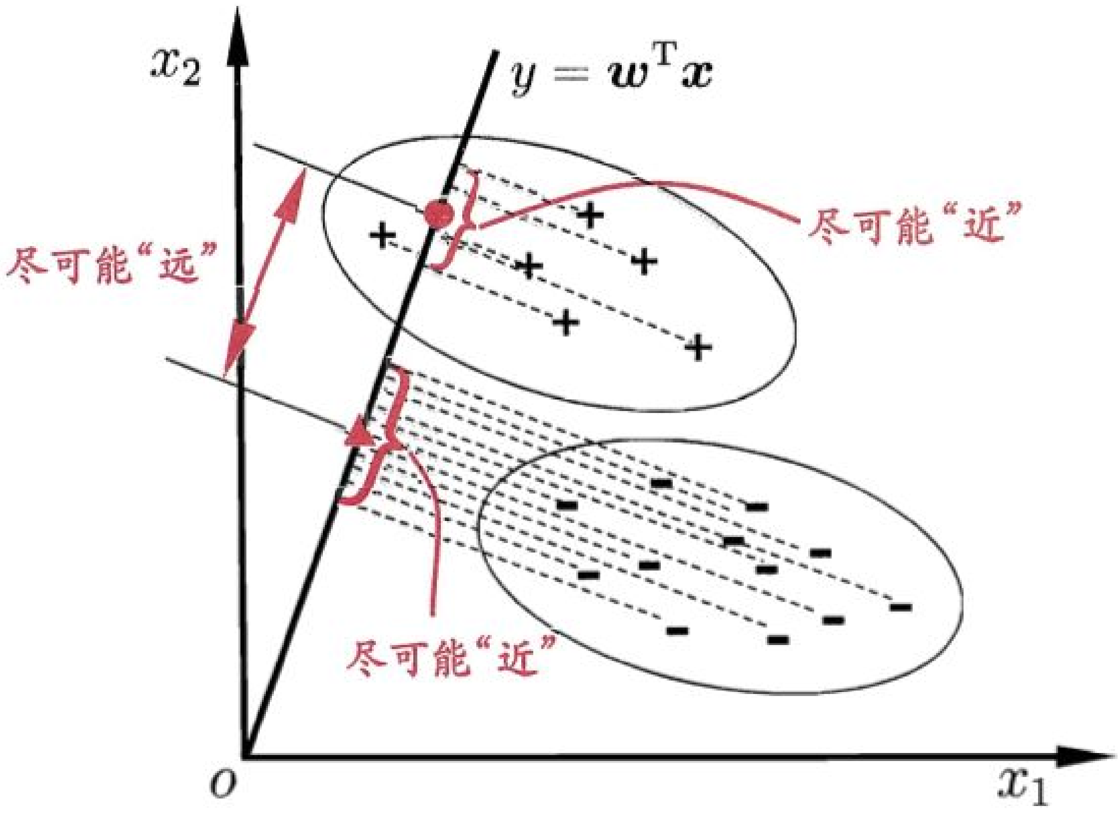
线性判别分析（LDA）



- 组内距离小，组间距离大

给定数据集$D=\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^m$，$y_i\in Y=\{0,1,\dots,k\}$，令N_i、X_i、μ_i、Σ_i分别表示第$i\in Y$类示例的样本个数、样本集合、均值向量、协方差矩阵。

$$\text{均值向量：}\mu_i=\frac{1}{N_i}\sum_{x\in X_i}x$$

$$\text{协方差矩阵：}\Sigma_i=\sum_{x\in X_i}(x-\mu_i)(x-\mu_i)^T$$

$$\text{组内散度：}\Sigma_w=\sum_{i\in Y}\Sigma_i$$

$$\text{组间散度：}\Sigma_b=\sum_{i\in Y}(u_i-u)(u_i-u)^T$$
$$u=\mathrm{mean}(u_i)$$

在保证组间散度大的同时，让组内散度尽可能的小，所以我们可构造目标函数：

$$\max\ J(\omega)=\frac{\omega^TS_b\omega}{\omega^TS_w\omega}$$

这就是LDA欲最大化的目标。即S_b与S_w的“广义瑞利商”，其中ω为最佳投影向量。

如何确定最佳投影向量

构造新的函数$L(\omega)$

$$\max\ L(\omega)=\omega^TS_b\omega-\lambda\omega^TS_w\omega$$

最大值在导数为0处取得，故对$L(\omega)$求导。

因为S_b和S_w均为对称矩阵，所以$L(\omega)$的导数可以写为：

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = 2S_b\omega - 2S_w\omega = 0$$

即：

$$S_b\omega = \lambda S_w\omega$$

$$S_w^{-1}S_b\omega = \lambda\omega$$

因此我们只要求出$S_w^{-1}S_b$的特征向量，就求出了ω。