第 9 章（之 1）（总第 44 次）

教学内容: § 9.1 微分方程基本概念

*1. 微分方程 $2(y'')^3-9y'y'''=5xy^7$ 的阶数是 （ ）

（A）3； （B）4； （C）6； （D）7.

答案（A）

解 微分方程的阶数是未知函数导数的最高阶的阶数.

*2. 下列函数中的 C、α、λ 及 k 都是任意常数，这些函数中是微分方程 $y''+4y=0$ 的通解的函数是 （ ）

（A）$y=3C\cos 2x+(12-29C)\sin 2x$； （B）$y=C\cos 2x(1+\lambda\sin 2x)$；

（C）$y=kC\cos 2x+\sqrt{1+k^2C^2}\sin 2x$； （D）$y=C\cos(2x+\alpha)$.

答案 （D）

解 二阶微分方程的通解中应该有两个独立的任意常数.

（A）中的函数只有一个任意常数 C；

（B）中的函数虽然有两个独立的任意常数，但经验算它不是方程的解；

（C）中的函数从表面上看来也有两个任意常数 C 及 k，但当令 $\overline{C}=kC$ 时，函数就变成了 $y=\overline{C}\cos 2x+\sqrt{1+\overline{C}^2}\sin 2x$，实质上只有一个任意常数；

（D）中的函数确实有两个独立的任意常数，而且经验算它也确实是方程的解.

*3. 在曲线族 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ 中，求出与直线 $y=x$ 相切于坐标原点的曲线.

解 根据题意条件可归结出条件 $y(0)=0, y'(0)=1$，

由 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$， $y'=c_1e^x-c_2e^{-x}$，可得 $c_1+c_2=0, c_1-c_2=1$，

故 $c_1=\dfrac{1}{2}, c_2=-\dfrac{1}{2}$，这样就得到所求曲线为 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，即 $y=\sinh x$.

*4. 证明：函数 $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0\\ y\big|_{x=0}=0, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1\end{cases}$ 的解.

证明 $y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

$$y'' = -\frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

代入方程得　$y'' + y' + y = 0$，　　　　此外　$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$，

故 $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 是初始值问题的解.

*5．验证 $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + Ce^x$（其中 C 为任意常数）是方程 $y' - y = e^{x+x^2}$ 的通解.

证明　$y' = e^x \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + e^x \cdot e^{x^2} + Ce^x \quad = y + e^{x+x^2}$，　即 $y' - y = e^{x+x^2}$，说明函数确实给定方程的解.

另一方面函数 $y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t + Ce^x$ 含有一任意常数 C，所以它是方程的通解.

**6．求以下列函数为通解的微分方程：

（1）$y = \sqrt[3]{Cx+1}$；

解　将等式 $y = \sqrt[3]{Cx+1}$ 改写为 $y^3 = Cx + 1$，再在其两边同时对 x 求导，得 $3y^2 y' = C$，代入上式，即可得到所求之微分方程为 $3xy^2 y' = y^3 - 1$.

（2）$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$.

解　因为给定通解的函数式中有两个独立的任意常数，所以所求方程一定是二阶方程，在方程等式两边同时对 x 求两次导数，得

$$y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2},\quad y'' = \frac{2C_2}{x^3}.$$

从以上三个式子中消去任意常数 C_1 和 C_2，即可得到所求之微分方程为

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

**7．建立共焦抛物线族 $y^2 = 4C(x + C)$（其中 C 为任意常数）所满足的微分方程［这里的共焦抛物线族是以 x 轴为对称轴，坐标原点为焦点的抛物线］.

解　在方程 $y^2 = 4C(x + C)$ 两边对 x 求导有 $2yy' = 4C$，从这两式中消去常数所求方程为 $y = y'(2x + yy')$.

**8．求微分方程，使它的积分曲线族中的每一条曲线 $y=y(x)$ 上任一点处的法线都经过坐标原点．

解　任取 $y=y(x)$ 上的点 $(x\,,y)$，曲线在该点处的切线斜率为 $y'=\dfrac{dy}{dx}$．

所以过点 (x,y) 的法线斜率为 $\dfrac{-1}{y'}$，　法线方程为 $Y-y=\dfrac{-1}{y'}(X-x)$，

因为法线过原点，所以 $0-y=\dfrac{-1}{y'}(0-x)$ 从而可得所求微分方程为 $x+yy'=0$．

第 9 章（之 2）（总第 45 次）

教学内容：§9.2 .1 可分离变量的方程；　§9.2 .2 一阶线性方程

**1．求下列微分方程的通解：

（1）$y'=\dfrac{x(1-y)}{1+x^2}$；

解：　分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，两边积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，

得 $-\ln(1-y)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln C$，即 $y=1-\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$．

（2）$y'=\dfrac{x}{2y}e^{2x-y^2}$；

解：分离变量 $2ye^{y^2}\mathrm{d}y=xe^{2x}\mathrm{d}x$，两边积分就得到了通解

$$e^{y^2}=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\int e^{2x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x})+c\,.$$

（3）$(2x+1)e^y y'+2e^y-4=0$．

解：　$\dfrac{e^y\,\mathrm{d}\,y}{2e^y-4}=-\dfrac{\mathrm{d}\,x}{2x+1}$，　　$\dfrac{1}{2}\ln(e^y-2)=-\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)+\dfrac{1}{2}\ln C$，

即　$(e^y-2)(2x+1)=C$．

**2．试用两种不同的解法求微分方程 $y'=1-x-y+xy$ 的通解.

解法一 （可分离变量方程的分离变量法）这是一个一阶可分离变量方程，同时也是一个一阶线性非齐次方程，这时一般作为可分离变量方程求解较为容易.

分离变量，$y'=(1-x)(1-y)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y}=(1-x)\mathrm{d}x$，并积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{1-y}=\int(1-x)\mathrm{d}x$

得 $-\ln(1-y)=x-\dfrac{1}{2}x^2+c$，所求通解为 $y=1+ce^{\frac{1}{2}x^2-x}$.

解法二 （线性方程的常数变易法）将原方程改写为 $y'+(1-x)y=1-x$，这是一个一阶线性非齐次方程.

对应的齐次方程为 $y'+(1-x)y=0$，其通解为① $y=\overline{C}e^{\frac{1}{2}x^2-x}$.

代入原非齐次方程得 $\overline{C}'e^{\frac{1}{2}x^2-x}=1-x$，解得② $\overline{C}=e^{x-\frac{1}{2}x^2}+C$，②代入①即可得原方程的通解

$$y=1+Ce^{\frac{1}{2}x^2-x}.$$

*3．求解下列初值问题：

（1）$y'=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，$y(\dfrac{1}{2})=-e^{\frac{\pi}{6}}$.

解：$\because\ y'=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ （$y\neq 0$）， $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，

$\therefore\ \ln y=\arcsin x+C$， $\therefore\ \ y=Ce^{\arcsin x}$，

$\because\ y(\dfrac{1}{2})=-e^{\frac{6}{\pi}}$，$\therefore -e^{\frac{6}{\pi}}=Ce^{\arcsin\frac{1}{2}}$，$\therefore\ C=-1$， $\therefore\ \ y=-e^{\arcsin x}$.

（2）$y'+2xy=e^{-x^2}$，$y(0)=1$；

解：$\because\ y'+2xy=e^{-x^2}$， $\therefore\ p(x)=2x$，$q(x)=e^{-x^2}$，

$$\therefore\ y(x)=e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int e^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}dx+C\right]=e^{-x^2}\left[\int e^{-x^2}e^{\int 2x\mathrm{d}x}dx+C\right]=xe^{-x^2}+Ce^{-x^2},$$

$\because\ \ y(0)=1$， $\therefore 1=0+c\Rightarrow c=1$， $\therefore\ y=(x+1)e^{-x^2}$.

（3） $y'+y\cot x=e^{\cos x}$， $y(\frac{\pi}{2})=1$ ；

解： $\because$ $y'+y\cot x=e^{\cos x}$， $\therefore P(x)=\cot x$，$Q(x)=e^{\cos x}$.

$$\therefore \quad y=\mathrm{e}^{-\int \cot x\mathrm{d}x}\left[C+\int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{\int \cot x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{-\ln\sin x}(C+\int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{\ln\sin x}\mathrm{d}x)$$

$$=\csc x(C+\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x)=(C-\mathrm{e}^{\cos x})\csc x,$$

由 $y(\frac{\pi}{2})=1$， 可确定 $C=2$，所以 $y=(2-\mathrm{e}^{\cos x})\csc x$.

（4） $x^2\,\mathrm{d}\,y+(2xy-x+1)\,\mathrm{d}\,x=0$， $y\big|_{x=1}=0$.

解： 方程变形为 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，是一阶线性非齐次方程，其通解为

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[c+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[c+\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})x^2dx\right]=\frac{1}{x^2}\left[c+\frac{1}{2}x^2-x\right]=\frac{c}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$$

由 $y(1)=0$， 得 $c=\frac{1}{2}$， 所以特解为：$y=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$.

**4．求微分方程 $y\ln y\,\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$ 的通解（提示将 x 看作是 y 的函数）.

解：将 x 看作是 y 的函数，原方程可化为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$，这是一阶线性方程，将其中

$P(y)=\frac{1}{y\ln y}$， $Q(y)=\frac{1}{y}$ 代入一阶线性方程求解公式，得通解

$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left[c+\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy\right]=\mathrm{e}^{-\ln(\ln y)}\left[c+\int\frac{1}{y}e^{\ln(\ln y)}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left[c+\int\frac{\ln y}{y}dy\right]=\frac{c}{\ln y}+\frac{1}{2}\ln y.$$

**5．求满足关系式 $\int_{\sqrt{2}}^{x} uy(u)\,\mathrm{d}u = x^2 + y(x)$ 的可导函数 $y(x)$．

解：这是一个积分方程，在方程等式两边同对 x 求导，可得微分方程 $xy(x) = 2x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = -2x$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y-2} = x\,\mathrm{d}x$，积分得 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 2$，

在原方程两边以 $x = \sqrt{2}$ 代入，可得初试条件 $y\big|_{x=\sqrt{2}} = -2$．据此可得 $C = -4e^{-1}$，所以原方程的解为　$y = -4e^{\frac{x^2}{2}-1} + 2$．

**6．设降落伞自塔顶自由下落，已知阻力与速度成正比（比例系数为 k），求降落伞的下落速度与时间的函数关系．

解：根据牛顿运动第二定理有 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$．这是一个可分离变量方程，分离变量并积分得

$$-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C.$$

由初始条件 $v(0) = 0$，得 $C = -\dfrac{1}{k}\ln(mg)$，即得　$v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$．

**7．求一曲线，已知曲线过点 $(0,1)$，且其上任一点 (x, y) 的法线在 x 轴上的截距为 kx．

解：曲线在点 (x, y) 处的法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'}$，所以法线方程为 $Y - y = -\dfrac{1}{y'}(X - x)$．

只要令 $Y = 0$，就可以得到法线在 x 轴上的截距为 $X = x + yy'$．

据题意可得微分方程 $x + yy' = kx$，即 $yy' = (k-1)x$．这是一个可分离变量方程，分离变量并积分得所求曲线 $y^2 + (1-k)x^2 = C$，由于曲线过点 $(0,1)$，所以 $C = 1$，所以所求曲线方程为　$y^2 + (1-k)x^2 = 1$．

***8．求与抛物线族 $y = Cx^2$（C 是常数）中任一抛物线都正交的曲线（族）的方程．

解：在给定曲线 $y = cx^2$ 上任意一点 (x, y) 处切线斜率为 $k_0 = y' = 2cx$，从上面两式中消去 c 得 $k_0 = y' = \dfrac{2y}{x}$，这样就得到了给定曲线族所满足的微分方程 $y' = \dfrac{2y}{x}$．

设所求曲线方程为 $y = y(x)$，在同一点 (x, y) 处切线斜率为 $k = y'$，则根据正交要

求有 $k_0 k=-1$，这样就得到了所求曲线族应该满足的微分方程 $y'=-\dfrac{x}{2y}$.

这是一个可分离变量方程，分离变量 $2ydy=-xdx$，积分得所求曲线族 $y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+c$，即椭圆族 $y^2+\dfrac{1}{2}x^2=c$.

***9．作适当变换，求微分方程 $y'=4e^{-y}-\dfrac{2}{2x+1}$ 的通解.

解 原方程可化为 $e^y y'+\dfrac{2}{2x+1}e^y=4$，在换元 $z=e^y$ 下方程可化为 $z'+\dfrac{2z}{2x+1}=4$，这是一个一阶线性方程，其通解为

$$z=e^{-\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x+1}}\left\{C+\int 4e^{\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2x+1}}\,\mathrm{d}x\right\}=\frac{1}{2x+1}\{C+4x+4x^2\}.$$

***10．作适当变换，求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$ 的通解.

解：令 $y^2=ux$，代入方程整理得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得 $\sin u=Cx$，以 $u=\dfrac{y^2}{x}$ 代入上式，即得原方程的通解： $\sin\dfrac{y^2}{x}=Cx$.

第 9 章 （之 3） （总第 46 次）

教学内容：§9.2 .3 齐次型方程；9.2.4 伯努利方程.

**1．求下列微分方程的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$；

解： $\because$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$， $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}(1+\ln\dfrac{y}{x})$，这是一个一阶齐次型方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，即 $y'=u+xu'$，于是原方程可化为 $xu'=u\ln u$. 这是一个可分离变量方程.

分离变量 $\dfrac{du}{u\ln u}=\dfrac{dx}{x}$ ，并积分 $\displaystyle\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}$，得 $\ln\ln u=\ln x+\ln c$，即 $u=e^{cx}$.

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得所求的通解为 $y=xe^{cx}$.

（2）$(xy'-y)\arctan\dfrac{y}{x}=x$.

解：方程可化为$y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{\arctan\frac{y}{x}}$，这是一个一阶齐次型方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，即$y'=u+xu'$，于是原方程可化为$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\arctan u}$，这是一个可分离变量方程.

分离变量后积分得 $x\sqrt{1+u^2}=Ce^{u\arctan u}$.

以 $u=\dfrac{y}{x}$代入上式得原方程的通解：$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}}$.

**2．求解下列初值问题：

（1）$xy\mathrm{d}x-(2x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y(2)=1$ 的特解.

解: $\because$ $xy\mathrm{d}x-(2x^2+y^2)\mathrm{d}y=0$，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}$，令 $u=\dfrac{x}{y}$，

则 $u+y\dfrac{du}{dy}=2u+\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{du}{u+\frac{1}{u}}=\dfrac{dy}{y}$，$\therefore\displaystyle\int\frac{du}{u+\frac{1}{u}}=\int\frac{dy}{y}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln y+\ln c$，$\therefore\sqrt{u^2+1}=cy$，即 $u^2+1=c^2y^2$，

代回即得$\dfrac{x^2}{y^2}+1=c^2y^2$，$\because y(2)=1$，$\therefore c^2=5$，因此 $x^2+y^2=5y^4$.

（2）$\begin{cases}(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0,\\ y\big|_{x=0}=0.\end{cases}$

解：原方程可表为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，$y'=u+xu'$，

代入方程，有 $u+xu'=\dfrac{1+u}{u-1}$，即 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+2u-u^2}{u-1}$，

分离变量 $\dfrac{u-1}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，积分得 $-\dfrac{1}{2}\ln(1+2u-u^2)=\ln x-\ln\sqrt{C}$

$\Rightarrow$通解 $x^2+2xy-y^2=C$，令 $x=0,y=0$，得 $C=0$.

所以初值问题的解为 $x^2+2xy-y^2=0$.

***3．试证明：当$a_1b_2 \neq a_2b_1$时，总能找到适当的常数h，k，使一阶微分方程

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

在变换$s = y - k$，$t = x - h$之下，可化为一阶齐次型方程 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f\left(\dfrac{a_1t + b_1s}{a_2t + b_2s}\right)$．

并求方程 $(x + 2y + 1)\mathrm{d}x + (2x + 3y)\mathrm{d}y = 0$ 的解．

证明：令$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = a_1t + b_1s \\ a_2x + b_2y + c_2 = a_2t + b_2s \end{cases}$ $\qquad \because a_1b_2 \neq a_2b_1$，

$\therefore$可解得：$\begin{cases} s = y - \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ t = x - \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}$ $\qquad$ 因此可取：$\begin{cases} k = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ h = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}$

解：$\because (x + 2y + 1)dx + (2x + 3y)dy = 0$，令$\begin{cases} s = y + 2 \\ t = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}s = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{cases}$

$\therefore [t + 3 + 2(s - 2) + 1]dt + [2(t + 3) + 3(s - 2)]ds = 0$，$(t + 2s)dt + (2t + 3s)ds = 0$，

$\Rightarrow 1 + \dfrac{2s}{t} + (2 + \dfrac{3s}{t})\dfrac{ds}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{1 + \frac{2s}{t}}{2 + \frac{3s}{t}}$，

令$u = \dfrac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ds}{dt} = u + t\dfrac{du}{dt}$，

$\therefore u + t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1 + 2u}{2 + 3u} \qquad \Rightarrow \qquad t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{(3u + 1)(u + 1)}{3u + 2}$，

$\Rightarrow \dfrac{(3u + 2)}{(3u + 1)(u + 1)}du = -\dfrac{dt}{t}$，$\quad \therefore \displaystyle\int \left[\frac{1}{2(u + 1)} + \frac{3}{2(3u + 1)}\right] du = -\int \frac{dt}{t}$，

即 $\quad \dfrac{1}{2}\ln(u + 1)(3u + 1) = -\ln t + \ln c$，

$\therefore \quad \sqrt{(u + 1)(3u + 1)} \cdot t = c \qquad \Rightarrow \qquad t\sqrt{(\frac{s}{t} + 1)(\frac{3s}{t} + 1)} = c$，

$\therefore \quad (x - 3)\sqrt{(1 + \dfrac{y + 2}{x - 3})(1 + \dfrac{3y + 6}{x - 3})} = c \quad \Rightarrow 3y^2 + x^2 + 4xy + 2x = c$．

**4．求下列微分方程的通解

（1）$xy' - y + y^2 \ln x = 0$；

解：　$\because xy' - y + y^2 \ln x = 0$　　　$\therefore y^{-2} y' - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{\ln x}{x}$

令 $t = y^{-1} \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{1}{x} t = \frac{\ln x}{x}$，　　$\therefore P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{\ln x}{x}$,

$$\therefore t(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left[C + \int \frac{\ln x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx\right] = \frac{1}{x}\left[C + \int \frac{\ln x}{x} \cdot x dx\right]$$

$$= Cx^{-1} + x^{-x}(x \ln x - x) = Cx^{-1} + \ln x - 1,$$

$y^{-1} = \ln x - 1 + Cx^{-1}$.

（2）$(y - 2\sqrt{xy})dx + xdy = 0$.

解：$\because$　$(y - 2\sqrt{xy})dx + xdy = 0$，　$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = \frac{2}{\sqrt{x}} y^{\frac{1}{2}}$，　$y^{-\frac{1}{2}} y' + \frac{1}{x} y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$，

$u = y^{\frac{1}{2}}$，　$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2x} u = \frac{1}{\sqrt{x}}$，　$\therefore P(x) = \frac{1}{2x}$，$Q(x) \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\therefore u(x) = e^{-\int \frac{1}{2x} dx}\left[C + \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\int \frac{1}{2x} dx} dx\right] = x^{-\frac{1}{2}}\left[C + \int \frac{1}{\sqrt{x}} x^{\frac{1}{2}} dx\right] = x^{-\frac{1}{2}}[C + x],$$

$\therefore$　$y^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}[C + x]$,　　$\therefore \sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{C}{\sqrt{x}}$.

（3）$y' = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}$

解一：令 $u = y^2$，原方程化为：　$\frac{du}{dx} = \frac{\left(\frac{u}{x}\right)^2}{\left(\frac{u}{x}\right) - 1}$，解此方程得　$u = Ce^{\frac{u}{x}}$，

以 $u = y^2$ 代入上式，原方程通解为　$y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

解二：原方程写成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x=-\dfrac{2}{y^3}x^2$，

令 $x^{-1}=z$，则方程化为：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{2}{y}z=\dfrac{2}{y^3}$，

则通解 $z=e^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[C+\int\dfrac{2}{y^3}e^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right]=\dfrac{1}{y^2}[C+2\ln y]$，

故原方程通解：$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y^2}[C+2\ln y]$.

**5．求下列伯努力方程满足初始条件的特解：$y'=y-\dfrac{2x}{y}$，$y(0)=1$.

解：$\because y'=y-2xy^{-1},\quad \therefore yy'-y^2=-2x$，

令 $t=y^2\ \Rightarrow \dfrac{dt}{dx}-2t=-4x$，$\quad\therefore P(x)=-2,\quad Q(x)=-4x$，

$$\therefore t(x)=e^{\int 2\mathrm{d}x}\left[C+\int(-4x)e^{-\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=e^{2x}\left[C-4\int xe^{-2x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=e^{2x}[C+2xe^{-2x}+e^{-2x})]=Ce^{2x}+2x+1$$

$\therefore y^2=2x+1+Ce^{2x}$

$\because y(0)=1,\quad \therefore 1=2\times0+1+Ce^0\quad\Rightarrow C=0$

$\therefore y^2=2x+1$

****6．作适当的变换求方程 $\sqrt{1+x^2}\sin 2y\cdot y'=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$ 的通解.

解：原方程化为：$\sqrt{1+x^2}\dfrac{\mathrm{d}\sin^2 y}{\mathrm{d}x}=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$，

令 $z=\sin^2 y$，得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}z=e^{2\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+x^2}$，

故 $z=e^{\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}\left\{C+\int\dfrac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right\}$

$=Ce^{2\sqrt{1+x^2}}+e^{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

原方程的通解为 $\sin^2 y=Ce^{2\sqrt{1+x^2}}+e^{2\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

***7．已知$2\int_0^x y(\xi)\sqrt{1+y'^2(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 2x + y^2(x)$，求$y(x)$．

解：两边关于x求导得　　$2yy' - y^2 = -1$，

　　解得　　　　　　$y^2 = Ce^x + 1$，

　　由$y\big|_{x=0} = 0$，求得　　$C = -1$，

　　故原方程的解为：$y^2 = 1 - e^x$．

***8．曲线过点$(1,1)$，其上任一点与原点的距离平方等于该点横坐标与该点的曲线的法线在x轴上的截距乘积的两倍，求曲线方程．

解：　　$x^2 + y^2 = 2x(x + yy'), y(1) = 1$，　$2yy' - \dfrac{1}{x}y^2 = -x$

　　令$y^2 = z$，解得　　$z = y^2 = x(C - x)$

　　由$y(1) = 1$，　得　$C = 2$，

　　曲线方程为：　$x^2 + y^2 = 2x$．

***9．根据托里斥利定律，液体从容器小孔中流出的速度为 $v = \alpha A\sqrt{2gh}$，其中 g为重力加速度，h为液面与底部孔口之间的距离，A为孔口面积，α为孔口收缩系数，实验确定其取值为 $\alpha = 0.62$．现有一直径为1m，高为2m的直立圆柱形容器，其中盛满的水从底部直径为$d = 1$cm的圆孔流出，要多长时间容器内的水才会完全流尽？

解：设在时刻t时，　容器中液面高度$h(t)$，则经过Δt后液面高度为$h(t + \Delta t)$，　于是有

$$\pi r^2 (h(t) - h(t + \Delta t)) = \alpha A\sqrt{2gh(t)}\Delta t,$$

即　　$-\dfrac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \dfrac{\alpha A\sqrt{2gh}}{\pi r^2}$，

令$\Delta t \to 0$，　得

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\alpha A}{\pi r^2}\sqrt{2gh} \\ h(0) = 200 \end{cases}$$

解得　　$\sqrt{h} = \dfrac{\alpha A}{2\pi r^2}\sqrt{2g}t + \sqrt{200}$，

代入$h = 0$，　$g = 980$，　$r = 50$，　$A = \dfrac{\pi}{4}$，　$\alpha = 0.62$，　得$t = 10304$（秒）.

第 9 章 （之 4）（总第 47 次）

教学内容：§9.3 可降阶的高阶微分方程

**1．解下列问题：

（1）．微分方程 $y'+y''=xy''$ 满足条件 $y'(2)=1, y(2)=1$ 的解是　（　　）

（A）$y=(x-1)^2$　　　　（B）$y=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{21}{4}$

（C）　$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$　　　　（D）$y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$

解：（C）

（2）．微分方程 $y''-2yy'^3=0$ 满足条件 $y'(0)=-1, y(0)=1$ 的解是　（　　）

（A）$\frac{y^3}{3}=x+\frac{1}{3}$　　　　（B）$\frac{x^3}{3}=y-1$

（C）$\frac{y^3}{3}=-x+\frac{1}{3}$　　　　（D）$\frac{x^3}{3}=-y+1$

解：（C）

**2．求下列微分方程的通解．

（1）$xy''+y'=0$；

解：　$\because$　$xy''+y'=0$　是一不显含因变量 y 的二阶方程，

令　$p=y'$　$\Rightarrow$　$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$　　$\therefore xp'+p=0$，　$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，

$$\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln p=-\ln x+\ln C_1 \quad \Rightarrow p=\frac{C_1}{x},$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{x}, \quad \mathrm{d}y=\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x, \quad \int\mathrm{d}y=\int\frac{C_1}{x}\mathrm{d}x \ , \quad y=C_1\ln x+C_2 .$$

（2）$(1+x^2)y''+2xy'=1$；

解：$y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=\frac{1}{1+x^2}$，　　$y'=\frac{1}{1+x^2}(x+C_1)$，

$$y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1\arctan x+C_2 \ .$$

（3）$yy''+\left(y'\right)^2=0$；

解：$\because yy''+\left(y'\right)^2=0$，　　令 $p=y'$，　则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程有

$$y\cdot p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0，\quad\Rightarrow\quad p(y\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p)=0，$$

因为求通解，所以 p 满足　　$y\cdot\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{-\mathrm{d}y}{y}\ \Rightarrow\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}$，　$\Rightarrow\ln p=-\ln y+\ln C_1\Rightarrow p=\dfrac{C_1'}{y}$，

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1'}{y}\ \Rightarrow\ y\mathrm{d}y=C_1'\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ \int y\mathrm{d}y=\int C_1'\mathrm{d}x\quad\Rightarrow y^2=C_1x+C_2.$$

$\therefore$ 通解：$y^2=C_1x+C_2$.

（4）$(1+y^2)y''=2yy'^2$

解：令：$y'=p(y),\ y''=pp'$，得　$(1+y^2)p\cdot p'=2p^2y$，

即 $\dfrac{\mathrm{d}\,p}{p}=\dfrac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}\,y$，　得　$p=C_1(1+y^2)$，

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2}=C_1\,\mathrm{d}\,x$，通解为：$\arctan y=C_1x+C_2$.

第 9 章 （之 5）（总第 48 次）

教学内容：§9.4.1 二阶线性方程和解的存在性；§9.4.2 二阶线性方程解的结构

**1. 若 y_1,y_2 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ 的两个解，试证 y_2-y_1 必是其对应齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

证明：因为 y_1,y_2 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ 的解.

所以成立下式：

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=R(x)\qquad(1)$$
$$y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=R(x)\qquad(2)$$

将 (1)、(2) 两式相减，得

$$(y_1''-y_2'')+P(x)(y_1'-y_2')+Q(x)(y_1-y_2)=0 \qquad (3)$$

(2) 式可写为

$$(y_1-y_2)''+P(x)(y_1-y_2)'+Q(x)(y_1-y_2)=0,$$

所以 y_1-y_2 是齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

***2．已知 $y_1=1, y_2=1+x, y_3=1+x^2$ 是方程 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=\frac{2}{x^2}$ 的三个特解，问能否求出该方程得通解？若能则求出通解来.

解：按（1）证明可知 $y_2-y_1=x,\quad y_3-y_1=x^2$ 分别是其对应齐次方程 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$ 的解，并且线性无关，所以 $C_1x+C_2x^2$ 为齐次方程的通解.

所以原方程的通解可以表示为：$y=C_1x+C_2x^2+1$.

*3．验证：e^{t^2}, e^{-t^2} 是微分方程 $x''-\frac{1}{t}x'-4t^2x=0$ 的两个线性无关特解，并求此方程的通解.

证明：因为

$$\left(e^{t^2}\right)''-\frac{1}{t}\left(e^{t^2}\right)'-4t^2e^{t^2}=2e^{t^2}+4t^2e^{t^2}-\frac{1}{t}\times 2te^{t^2}-4t^2e^{t^2}=0,$$

$$\left(e^{-t^2}\right)''-\frac{1}{t}\left(e^{-t^2}\right)'-4t^2e^{-t^2}=-2e^{-t^2}+4t^2e^{t^2}-\frac{1}{t}\times(-2te^{-t^2})-4t^2e^{t^2}=0,$$

故 e^{t^2}, e^{-t^2} 是方程的解，且 $\frac{e^{t^2}}{e^{-t^2}}=e^{2t^2}\neq$ 常数.

于是 e^{t^2}, e^{-t^2} 是方程线性无关的解（构成基本解组），故方程的通解为

$$x=C_1e^{t^2}+C_2e^{-t^2},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

*4．已知函数 $y_1=e^x, y_2=x$ 是方程 $(1-x)y''+xy'-y=0$ 的两解，试求该方程满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解.

解：方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2x$，将初始条件代入，有：

$$\begin{aligned}&y(0)=c_1=1,\\&y'(0)=c_1e^x+c_2=c_1+c_2=0,\end{aligned}$$

解得c_1,c_2为：　$c_1=1,c_2=-1$，

所以特解为：　$y=e^x-x$.

**5．设 $x_1(t)$ 是非齐次线性方程

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=f_1(t) \qquad (1)$$

的解．$x_2(t)$ 是方程

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=f_2(t) \qquad (2)$$

的解．试证明　$x=x_1(t)+x_2(t)$

是方程

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_2(t)x(t)=f_1(t)+f_2(t) \qquad (3)$$

的解．

解：因为$x_1(t),x_2(t)$分别为方程（1）和方程（2）的解，所以

$$x_1''(t)+a_1(t)x_1'(t)+a_2(t)x_1(t)\equiv f_1(t) \qquad (1)'$$

$$x_2''(t)+a_1(t)x_2'(t)+a_2(t)x_2(t)\equiv f_2(t) \qquad (2)'$$

$(1)'+(2)'$得：

$$\left(x_1(t)+x_2(t)\right)''+a_1(t)\left(x_1(t)+x_2(t)\right)'+a_2(t)\left(x_1(t)+x_2(t)\right)'=f_1(t)+f_2(t)$$

即 $x=x_1(t)+x_2(t)$ 是方程（3）的解．

第 9 章　（之 6）（总第 49 次）

教学内容：§9 .4 .3 二阶线性常系数方程的解法

**1．解下列问题：

（1）方程 $y''+8y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \sin 2\sqrt{2}x$.

（2）方程 $y''+6y'+25y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

（3）方程 $y''-8y'+15y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{5x}$.

（4）方程 $5y''+2\sqrt{15}y'+3y=0$ 的通解为 $y=$______________.

解：$y = e^{-\frac{\sqrt{15}}{5}x}(C_1 x + C_2)$.

（3）方程 $y''+6\,y'+py=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{kx}(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$，则 $p=$___，$k=$_____.

解：11，-3 .

**2．求解下列初值问题：

（1）$y''-8y'+16y=0,\quad y(1)=e^4,\quad y'(1)=0$；

解：$\because \lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2=0$，　　　$\therefore \lambda_{1,2}=4$，

通解为：$y=(c_1+c_2x)e^{4x}$.

将初始条件代入，有　$y(1)=(c_1+c_2)e^4=e^4$，

$y'(1)=c_2e^{4x}+4(c_1+c_2x)e^{4x}=c_2e^4+4(c_1+c_2)e^4=c_2e^4+4e^4=0$

得到：$c_1=5\quad c_2=-4$，　　　所以特解为：$y=(5-4x)e^{4x}$.

（2）$y''+4y'+29y=0,\qquad y(\frac{\pi}{2})=1,\ y'(\frac{\pi}{2})=3$；

解：$\lambda^2+4\lambda+29=0$，　$\lambda=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-116}}{2}=\dfrac{-4\pm10i}{2}=-2\pm5i$，

通解为：$y=e^{-2x}(c_1\cos5x+c_2\sin5x)$.

代入初始条件有：　　$y(\frac{\pi}{2})=e^{-\pi}(0+c_2)=1 \quad\Rightarrow\quad c_2=e^{\pi}$，

$$y'(\frac{\pi}{2})=-2e^{-2x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)+e^{-2x}(-5c_1\sin 5x+5c_2\cos 5x),$$

得：$c_1=-e^{\pi}$．　特解为：$y=e^{\pi-2x}(-\cos 5x+\sin 5x)$．

（3）$y''+4y'+3y=0,\quad y(0)=6,\quad y'(0)=10$；

解：　$\lambda^2+4\lambda+3=0$，　$(\lambda+1)(\lambda+3)=0$，

所以通解为　　$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$．

代入初始条件有：

$$y(0)=c_1+c_2=6,$$

$$y'(0)=-c_1e^{-x}-3c_2e^{-3x}=-c_1-3c_2=10,$$

特解为：$y=14e^{-x}-8e^{-3x}$．

**3．求解初值问题

$$\begin{cases} y'+2y+\int_0^x y\,\mathrm{d}x=1 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad x\ge 0$$

解：将原方程对 x 求导得　　$y''+2y'+y=0 \qquad (1)$

且有　　$y'(0)=1-2y(0)=-1$

微分方程（1）的通解为：　　$y=e^{-x}(C_1x+C_2)$，

代入初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-1$，得 $C_1=0, C_2=1$，

故所求问题的解为：$y=e^{-x}$．

***4．设函数 $\varphi(x)$ 二阶连续可微，且满足方程 $\varphi(x)=1+\int_0^x(x-u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u$，求函数 $\varphi(x)$．

解：原方程关于 x 求导得

$$\varphi'(x)=\int_0^x\varphi(u)\,\mathrm{d}u+x\varphi(x)-x\varphi(x)=\int_0^x\varphi(u)\,\mathrm{d}u\,,\varphi'(0)=0,$$

再求导得：　$\varphi''(x)=\varphi(x)$，　　　　且由原方程还有：$\varphi(0)=1$，

微分方程的通解为：　$\varphi(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$，

代入条件 $\varphi(0)=1, \varphi'(0)=0$，得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，

故所求函数为： $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\operatorname{ch}x$.

***5．长为 100cm 的链条从桌面上由静止状态开始无摩擦地沿桌子边缘下滑．设运动开始时，链条已有 20cm 垂于桌面下，试求链条全部从桌子边缘滑下需多少时间．

解：设链条单位长度的质量为 ρ，则链条的质量为 100ρ．再设当时刻 t 时，链条的下端距桌面的距离为 $x(t)$，则根据牛顿第二定律有：

$$100\rho\frac{d^2x}{dt^2}=\rho gx, \qquad 即 \qquad \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{100}x=0.$$

又据题意知：$x(0)=20$， $x'(0)=0$，所以 $x(t)$ 满足下列初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{g}{100}x=0\\ x(0)=20,\quad x'(0)=0\end{cases}$$

解得方程的通解为：$x=c_1e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t}+c_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$.

又因为有初始条件：$\begin{cases}x(0)=20\\ x'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=10\\ c_2=10\end{cases}$

所以 $\qquad x=10e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t}+10e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$.

又当链条全部从桌子边缘滑下时，$x=100$，求解 t，得：$100=10e^{\frac{\sqrt{g}}{10}t}+10e^{-\frac{\sqrt{g}}{10}t}$，

即： $\qquad ch\dfrac{\sqrt{g}}{10}t=5$， $\qquad t=\dfrac{10}{\sqrt{g}}arch5$.

***6．设弹簧的上端固定，下端挂一个质量为 2 千克的物体，使弹簧伸长 2 厘米达到平衡，现将物体稍下拉，然后放手使弹簧由静止开始运动，试求由此所产生的振动的周期．

解：取物体的平衡位置为坐标原点，x 轴竖直向下， 设 t 时刻物体 m 位于 $x(t)$ 处，由牛顿第二定律： $\qquad 2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=2g-g(x+2)=-gx$，

其中 $g=980$ 厘米/秒 ^{2} 其解为： $\qquad x=C_1\cos\sqrt{\dfrac{g}{2}}t+C_2\sin\sqrt{\dfrac{g}{2}}t$，

振动周期为 $\quad T=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{g}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{490}}\approx 0.28$.

第 9 章 （之 7）（总第 50 次）

教学内容： §9.4.3 二阶线性常系数方程的解法； §9.4.4 高阶线性常系数微分方程

**1．微分方程 $y''+y=x\sin x$ 的一个特解应具有形式 （ ）

（A）$(Ax+B)\sin x$

（B）$x(Ax+B)\sin x+x(Cx+D)\cos x$

（C）$x(Ax+B)(\cos x+\sin x)$

（D）$x(Ax+B)(C\sin x+D\cos x)$

解：（B）

**2．设 A,B,C,D 是待定常数，则微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的一个特解应具有形式

（ ）

（A） $Ax+B+C\cos x$

（B） $Ax+B+C\cos x+D\sin x$

（C） $Ax+B+x(C\cos x+D\sin x)$

（D） $Ax+B+Cx\cos x$

答：（C）

**3．求下列非齐次方程的一个解

（1） $y''-y'-2y=2x+1$；

解：$\because$ $\lambda^2-\lambda-2=0$， $\therefore \lambda_{1,2}=2,-1$， $\because$ 0 不是特征根.

设 $y_p=b_1x+b_0$， 代入原方程，得：$-b_1-2b_1x-2b_0=2x+1$，

有：$b_0=0,b_1-1$， 特解为：$y=-x$.

（2） $y''+2y'+y=e^{-x}$.

解： $\because$ -1 是二重特征根，

$\therefore$ 设 $y_p=x^2e^{-x}b_0$， $y_p'=2xe^{-x}b_0-x^2e^{-x}b_0$，

$y_p''=2e^{-x}b_0-x^2e^{-x}b_0-2xe^{-x}b_0+x^2e^{-x}b_0$，

代入 $y''+2y'+y=e^{-x}$， 解得：$b_0=\dfrac{1}{2}$，

特解为： $y=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$.

**4．求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

解：特征方程 $r^2-3r+2=0$ 的根为 $r_1=1, r_2=2$，相应齐次方程的通解为

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x},$$

设特解为 $y_p=x(Ax+B)e^x$，代入方程得： $A=-\frac{1}{2}, B=-1$.

故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^x,$$

代入条件 $y(0)=y'(0)=0$，得 $C_1=-1, C_2=1$，因此所求特解为

$$y=e^{2x}-\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^x.$$

**5． 求下列非齐次方程的通解： $y''+2y'=f(x)$

$1)f(x)=4x+1,\quad 2)f(x)=e^{2x},\quad 3)f(x)=\cos x$；

解：特征方程： $\lambda^2+2\lambda=0$， 特征根： $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-2$，

所以方程 $y''+2y'=0$ 的通解为 $y_h=c_1+c_2e^{-2x}$.

1）对于方程 $y''+2y'=4x+1$， 由于 0 是特征方程的单根，故设其特解为：

$$y_p=(b_0x+b_1)x,$$

代入方程有：$2b_0+4b_0x+2b_1=4x+1$，解得 $b_0=1 \quad b_1=-\frac{1}{2}$，

所以特解为： $y_p=x^2-\frac{1}{2}x$.

所以方程的通解为： $y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-2x}+x^2-\frac{1}{2}x$.

2）对于方程 $y'''+2y'=e^{2x}$，由于 2 不是特征方程的根，故设其特解为： $y_p=e^{2x}b_0$，

代入方程有： $b_0=\frac{1}{8}$， $y_p=\frac{1}{8}e^{2x}$，

所以方程的通解为： $y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-2x}+\frac{1}{8}e^{2x}$.

3）对于方程：$y''' + 2y' = \cos x$，由于$\pm i$不是特征方程的根，故设其特解为：

$$y_p = b_0 \cos x + b_1 \sin x，$$

代入方程有：$y_p' = -b_0 \sin x + b_1 \cos x$，

$$y_p'' = -b_0 \cos x - b_1 \sin x，$$

$$-b_0 \cos x - b_1 \sin x - 2b_0 \sin x + b_1 \cos x = \cos x，$$

得：$b_0 = -\dfrac{1}{5} \quad b_2 = \dfrac{2}{5}$，

$y_p = -\dfrac{1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x$，

所以方程的通解为：$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x$.

**6．求微分方程$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$的通解.

解：特征方程$r^2 - 6r + 9 = 0$的根为$r_{1,2} = 3$，相应齐次方程的通解为

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$$

设特解为$y_p = e^x(A\cos x + B\sin x)$，代入方程得：$A = 4, \qquad B = 3$

故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^x(4\cos x + 3\sin x)$$

***7．已知曲线$y = y(x)(x \ge 0)$过原点，位于x轴上方，且曲线上任一点$M = (x_0, y_0)$处切线斜率数值上等于此曲线与x轴，直线$x = x_0$所围成的面积与该点横坐标的和，求此曲线方程.

解：由已知$y(0) = 0$，且$y' = \int_0^x y \,\mathrm{d}\, x + x, y'(0) = 0$，将此方程关于$x$求导得

$$y'' = y + 1$$

其通解为：　$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1$ ，

代入初始条件$y(0) = 0, y'(0) = 0$，得　$C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$，

故所求曲线方程为：$y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \mathrm{ch}\, x - 1$.

***8．设一物体质量为m，以初速v_0从一斜面滑下，若斜面与水平面成θ角，斜面摩擦系数为$\mu(0<\mu<\tan\theta)$，试求物体滑下的距离与时间的关系．

解：设t时刻物体滑过的距离为S，由牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}=mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta$$

且 $S(0)=0, S'(0)=v_0$

方程的通解为

$$S=\frac{1}{2}gt^2(\sin\theta-\mu\cos\theta)+C_1t+C_2$$

代入初始条件得$C_1=v_0, C_2=0$，故物体滑下的距离与时间的关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2(\sin\theta-\mu\cos\theta)+v_0t$$

***9．设弹簧的上端固定，下端挂一质量为m的物体，开始时用手托住重物，使弹簧既不伸长也不缩短，然后突然放手使物体开始运动，弹簧的弹性系数为k，求物体的运动规律．

解：取物体未发生运动时的位置为坐标原点，x轴垂直向下，设t时刻物体位于$x(t)$处，

由牛顿第二定律： $m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+kx=mg$， 且 $x(0)=0$，$x'(0)=0$.

方程的通解为： $x=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}g$，

代入初始条件得$C_1=-\frac{m}{k}g, C_2=0$，故物体的运动规律为

$$x=\frac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

***10． 求下列方程的通解：

（1）$y^{(4)}-2y'''+y''=0$；

解： $\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=0$， $\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1)=0$， $\lambda^2(\lambda-1)^2=0$，

所以通解为 $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)e^x$.

（2） $y^{(4)}+5y''-36y=0$.

解：$\lambda^4+5\lambda^2-36=0$，　$(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda^2+9)=0$，

所以通解为　$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$.

****11*　试证明，当以　$t=\ln x$ 为新的自变量时，变系数线性方程（其中 a,b,c 为常数，这是欧拉方程） $ax^2y''+bxy'+cy=f(x)$ 可化为常系数线性方程 $a\dfrac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\dfrac{dy}{dt}+cy=f(e^t)$ 并求下列方程通解：

（1） $x^2y''-2y=0$；　　　（2） $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$.

证明：令　$t=\ln x$，　$x=e^t$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

将 y',y'' 代入方程有：

$$ax^2y''+bxy'+cy=a\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+b\frac{dy}{dt}+cy=a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=f\left(e^t\right),$$

得证.

（1）令　$t=\ln x$，　$x=e^t$，

原方程化为：　$\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-2y=0$.

其通解为　$y=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}$.

将 x 代入，得：$y=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$.

（2）　令　$t=\ln x$，　$x=e^t$，

原方程化为：　$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+2y=te^t$，

上述方程的相应其次方程的通解为：　$y_h=e^t\left(c_1\cos t+c_2\sin t\right)$.

令上述方程一个特解为： $y_p=e^t(b_0t+b_1)$，

代入方程得：$b_0=1, b_1=0$， 即：$y_p=e^t t$.

原方程得通解为： $y=e^t(c_1\cos t+c_2\sin t+t)$，

即：$y=x[c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)+\ln x]$.

***12．一质量为 m 的潜水艇在水面从静止状态开始下降，所受阻力与下降速度成正比（比例系数为 k>0），浮力为常数 B，求潜水艇下降深度 x 与时间 t 之间的函数关系．

解： $F_{重}-F_{阻}-B=ma$， a 为加速度，

$mg-kv-B=ma$， v 为下降速度，

因为 $v=\dfrac{dx}{dt}$， $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$， 所以 $mg-k\dfrac{dx}{dt}-B=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$，即

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=g-\frac{B}{m} ,$$

其特征方程为： $\lambda^2+\dfrac{k}{m}\lambda=0$， 解得特征根为 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\dfrac{k}{m}$.

所以对应的齐次方程的通解为：$x_h=c_1e^{-\frac{k}{m}t}+c_2$.

由于 0 是特征方程的单根，故设其特解为：$x_1=b_0t$，

代入方程有：$\dfrac{k}{m}b_0=g-\dfrac{B}{m}$， 得 $b_0=\dfrac{mg-B}{k}$.

所以微分方程的通解为：$x=c_1e^{-\frac{k}{m}t}+c_2+\dfrac{mg-B}{k}t$，

因为初始位置为 0，初始速度为 0，所以有初始条件 $x(0)=0,\quad x'(0)=0$，

代入微分方程有：
$$\begin{cases} c_1+c_2+0=0 \\ -\dfrac{k}{m}c_1+\dfrac{mg-B}{k}=0 \end{cases}$$

求得： $c_1=\dfrac{m^2g-Bm}{k^2}$， $c_2=\dfrac{Bm-m^2g}{k^2}$，

所以 x 与 t 的关系可表示为： $x=\dfrac{Bm-m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+\dfrac{mg-B}{k}t$.

***13．证明：若有方程 $f'(x)=f(1-x)$，则必有 $f''(x)+f(x)=0$，并求解此方程.

证明：由于 $f'(x)=f(1-x)$，两边关于 x 求导得

$$f''(x)=-f'(1-x)=-f[1-(1-x)]=-f(x)$$

故得

$$f''(x)+f(x)=0 \qquad （1）$$

解方程（1）得通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x \qquad （2）$$

$$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x \qquad （3）$$

$f'(0)=f(1), f'(1)=f(0)$，将此代入(2),(3)得

$$\begin{cases} C_1\cos 1+C_2\sin 1=C_2 \\ -C_1\sin 1+C_2\cos 1=C_1 \end{cases}$$

解得：$C_2=\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}C_1$

所以原方程的解为：

$$f(x)=C_1\left(\cos x+\frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right).$$

第 9 章 （之 8）　（总第 51 次）

教学内容：§9.6 微分方程应用举例　**（机动）**

第 9 章 （之 9）　（总第 52 次）

教学内容：§9. 7 差分方程

1. 已知 $y_t=3e^t$ 是二阶差分方程 $y_{t+1}+ay_{t-1}=e^t$ 的一个特解，求 a .

解：　$a=\dfrac{e}{3}(1-3e)$.

2. 求下列差分方程的一般解：

(1) $2y_t+7y_{t-1}=0$；

解：$y_t=C(-\dfrac{7}{2})^t$

(2) $y_t - 3y_{t-1} = -4$；

解：$y_t = C3^t + 2$

(3) $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$；

解：$y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}(t - \frac{1}{6})$

(4) $y_{t+1} - 4y_t = 2^{2t}$；

解：$y_t = C4^t + t4^{t-1}$

(5) $y_{t+1} - y_t = t \cdot 2^t$.

解：$y_t = C + (t-2)2^t$

3. 写出下列差分方程的一个特解形式：

(1) $y_{t+1} - y_t = \sin t$；

解：$Y_t = B_1 \sin t + B_2 \cos t$

(2) $y_{t+1} + y_t = -3\cos \pi t$.

解：$Y_t = t(B_1 \cos \pi t + B_2 \sin \pi t)$

4. 设 y_t 为第 t 期国民收入，C_t 为第 t 期消费，I 为每期投资（I 为常数）. 已知 y_t，C_t，I 之间有关系 $y_t = C_t + I$，$C_t = \alpha y_{t-1} + \beta$，其中 $0 < \alpha < 1$，$\beta > 0$，试求 y_t，C_t.

解：y_t 满足：$y_t - \alpha y_{t-1} = I + \beta$，

解得 $y_t = C\alpha^t + \frac{\beta + I}{1-\alpha}$， 从而 $C_t = y_t - I = C\alpha^t + \frac{\beta + \alpha I}{1-\alpha}$.

5. 已知差分方程 $(a + by_t)y_{t+1} = cy_t$，其中 a，b，c 为正的常数. 设初始条件 $y(0) = y_0 > 0$，证明：

(1) 对任意 $t = 1, 2, \cdots$，有 $y_t > 0$；

(2) 在变换$u_t=\dfrac{1}{y_t}$之下，原差分方程可化为有关u_t的线性差分方程，写出该线性差分方程并求其一般解；

(3) 求方程$(1+2y_t)y_{t+1}=y_t$的满足初始条件$y_0=2$的解.

解：(1) 归纳法证明.

(2) 令 $u_t=\dfrac{1}{y_t}$，即$y_t=\dfrac{1}{u_t}$，$y_{t+1}=\dfrac{1}{u_{t+1}}$，

则原方程化为线性差分方程

$$cu_{t+1}-au_t=b,$$

其一般解为 $c\neq a$时，$u_t=C(\dfrac{a}{c})^t+\dfrac{b}{c-a}$ ； $c=a$时，$u_t=C+b$.

(3) 令 $u_t=\dfrac{1}{y_t}$，原方程化为 $u_{t+1}-u_t=2$，一般解为 $u_t=C+2$，

所以原方程的一般解为 $y_t=\dfrac{1}{u_t}=\dfrac{1}{C+2}$，代入 $y_0=2$，得 $C=-\dfrac{3}{2}$，

所以 特解为 $y_t=2$.

第 10 章 （之 1）（总第 53 次）

教学内容： § 10. 1 向量及其运算

* 1. 设$|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=2\sqrt{3},|\vec{a}+\vec{b}|=2$，则$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$=______________.

答：$\dfrac{5\pi}{6}$.

** 2. 设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，则$(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=(\widehat{\vec{b},\vec{c}})$的充分必要条件为____________.

答：$|\bar{a}|=|\bar{b}|$.

** 3. 设直线 L 经过点P_0且平行于向量$\boldsymbol{a}$, 点P_0的径向量为$\boldsymbol{r}_0$，设P是直线 L 的任意一点，试用向量$\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{a}$表示点P的径向量r.

解：$\because \overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{a}$， $\therefore \overrightarrow{P_0P}=t\vec{a}$， 而$\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{P_0P}$，

$\therefore \vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}$

∴P 点的径向量为 $\vec{r}_0 + t\vec{a}$.

** 4．设 $a = 2, b = 3$，a 与 b 的夹角等于 $\frac{2}{3}\pi$，求：

（1）$a \cdot b$；　　　　　　（2）$(3a - 2b) \cdot (a + 2b)$；

（3）$(a)_b$；　　　　　　　（4）$|3a - 2b|$.

解：（1）$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 2 \times 3 \times \cos\frac{2}{3}\pi = -3$.

（2）$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = 3|\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a}\vec{b}$

$$= 3 \times 2^2 - 4 \times 3^2 + 4 \times (-3) = -36 .$$

（3）$\left(\vec{a}\right)_{\vec{b}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{-3}{3} = -1$.

（4）$\left|3\vec{a} - 2\vec{b}\right|^2 = \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) = 9|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 12\vec{a}\vec{b}$

$= 9 \times 2^2 + 4 \times 3^2 - 12 \times (-3) = 108$，

$\left|3\vec{a} - 2\vec{b}\right| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

** 5．设 $a = 4, b = 5$，a 与 b 的夹角等于 $\frac{1}{3}\pi$，求：

（1）$(a + b)_{a-b}$；

（2）$5a + 2b$ 与 $a - b$ 的夹角.

解：（1）$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

$$= |\vec{a}|^2 + |b|^2 - 2\vec{a}\vec{b} = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5\cos\frac{\pi}{3} = 21,$$

∴ $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{21}$，

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)_{\vec{a}-\vec{b}} = \frac{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)}{\left|\vec{a} - \vec{b}\right|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{21}} = \frac{4^2 - 5^2}{\sqrt{21}} = -\frac{3\sqrt{21}}{7} .$$

（2）$\left(5\vec{a} + 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 5|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 - 3\vec{a}\vec{b}$

$$= 5 \times 4^2 - 2 \times 5^2 - 3 \times 4 \times 5\cos\frac{\pi}{3} = 0,$$

∴向量 $5\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 垂直.

** 6. 若 a，b 为非零向量，且 $|a+b|=|a-b|$，试证 $a\perp b$．

解：$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，　　∴ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$，

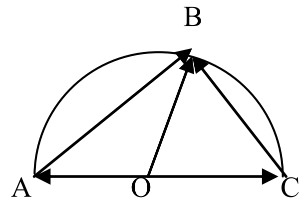
∴ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$，

∴ $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}$，

∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，　　∴ $\vec{a}\perp\vec{b}$．

***7. 用向量的方法证明半圆的圆周角必是直角．

解：如图所示，AC 为直径，B 为圆周上任一点，



$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$，　$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$，

则有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$，

∴　半圆的圆周角必为直角．

第 10 章（之 2）（总第 54 次）

教学内容：§10.2 空间直角坐标系与向量代数

1. 填空题

*(1) 点 A（2，－3，－1）关于点 M（3，1，－2）的对称点是______ ．

答：$(4,5,-3)$

**(2) 设平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(2,-3,1),B(-2,4,3),C(3,-1,-3)$，则 D 点为______ ．

答：（$7,-8,-5$）

**(3) 已知 $\vec{a}=\{4,-5,3\},\vec{b}=\{1,-4,z\}$，且 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $z=$______ ．

答：-8

**2. A,B 两点的坐标分别为 $(-2,5,p),(q,-3,1)$，线段 AB 与 y 轴相交且被 y 轴平分，求 p,q 之值及交点坐标．

解：令AB与y轴相交于C点，即C为AB的中点，则C点的坐标为 $(\dfrac{-2+q}{2},\dfrac{5-3}{2},\dfrac{p+1}{2})$，

又C点在y轴上，所以 $\dfrac{-2+q}{2}=0,\quad \dfrac{p+1}{2}=0$，即 $q=2, p=-1$，

故C点的坐标为$(0,1,0)$，即交点的坐标为$(0,1,0)$.

**3. 设 A, B 两点的坐标分别为$(0,2,-1),(1,0,1)$. 求

（1）向量$\overrightarrow{AB}$的模；（2）向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦；

（3）使$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$的$C$点坐标.

解：（1）$\overrightarrow{AB}=\{1,-2,2\}$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，

所以$\overrightarrow{AB}$的模为 3.

（2）$\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\quad \cos\beta=-\dfrac{2}{3},\quad \cos r=\dfrac{2}{3}$.

（3） 设C的坐标为（x, y, z），由$\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{CB}$ 则

$$x=\frac{0+1\times(-2)}{1+(-2)}=2,\qquad y=\frac{2+0\times(-2)}{1+(-2)}=-2,\qquad z=\frac{(-1)+1\times(-2)}{1+(-2)}=3,$$

所以C点的坐标为$(2,-2,3)$.

**4. 求p,q的值，使向量$\{2,p,-4\}$与$\{-1,0,q\}$平行，再求一组使此两向量垂直的p,q值.

解：向量$\vec{u}=\{2,p,-4\}$与$\vec{v}=\{-1,0,q\}$平行，即：$\vec{u}=\lambda\vec{v}$，

$\therefore \dfrac{2}{-1}=\dfrac{p}{0}=\dfrac{-4}{q}$，$\quad\therefore p=0, q=2$，

向量$\vec{u}$与$\vec{v}$垂直时，$\quad\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，

$\therefore 2\times(-1)+p\times 0+(-4)\times q=0$.

$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$，$\quad p$ 为任意值.

**5. 求作用于某点三个力$\boldsymbol{F}_1=\{1,2,3\},\boldsymbol{F}_2=\{-2,3,-4\},\boldsymbol{F}_3=\{3,-4,5\}$之合力的大小及方向.

解：$\vec{F}_{合}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\{1,2,3\}+\{-2,3,-4\}+\{3,-4,5\}=\{2,1,4\}$，

合力的大小 $\left|\vec{F}_{合}\right| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} = \sqrt{21}$，

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$， $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{21}}$， $\cos\gamma = \dfrac{4}{\sqrt{21}}$，

其中α,β,γ分别为$\vec{F}_{合}$与x轴，y轴，z轴的夹角.

** 6. 试在xy平面上求一与 $a=\{1,1,1\}$成正交的向量.

解：设所求向量为 $\vec{b}=\{x,y,z\}$， $\because$ 在xy平面上，

$\therefore z=0$， 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

即：$\{x,y,0\}\cdot\{1,1,1\}=0$，

$\therefore x+y=0$， $x=-y$，

取 $x=1, y=-1$， $\therefore$ 向量 $\vec{b}=\{1,-1,0\}$与 $\vec{a}=\{1,1,1\}$正交.

** 7.设$\boldsymbol{a}=\{1,-2,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{3,0,-4\}$，求：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{j}$； （2）$\vec{b}\times\vec{k}$；

（3）$(2a+b)\cdot(a-b)$； （4）$(a+b)\times(3a-b)$.

解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{j}=(\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k})\cdot\vec{j}=-2$.

（2）$\vec{b}\times\vec{k}=(3\vec{i}-4\vec{k})\times\vec{k}=3\vec{i}\times\vec{k}=-3\vec{j}$.

（3）$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\{2\times1+3, 2\times(-2), 2\times2-4\}\cdot\{1-3,-2,2-(-4)\}$

$=\{5,-4,0\}\cdot\{-2,-2,6\}=5\times(-2)+(-4)\times(-2)+0\times6=-2$.

（4）$(\vec{a}+\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})=\{4,-2,-2\}\times\{0,-6,10\}=\{-32,-40,-24\}$.

** 8. 设$a=\{0,1,-1\}$， $b=\{\sqrt{2},-1,1\}$，求：

（1）$(a)_b,(b)_a$； （2）a与b的夹角.

解：（1）$(\vec{a})_{\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}}=\dfrac{\{0,1,-1\}\cdot\{\sqrt{2},-1,1\}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1}}=-1$；

$$\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\left\{\sqrt{2},-1,1\right\}\cdot\{0,1,-1\}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=-\sqrt{2};$$

（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\theta$， 即 $-2=\sqrt{2}\times2\times\cos\theta$， 则 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $0\le\theta\le\pi$，所以 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，即$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.

** 9. 在 yz 平面内求模为 10 的向量 b，使它和向量 $a=8i-4j+3k$ 垂直.

解：∵ 向量$\vec{b}$ 在 yz 平面内， ∴ 可设坐标为 $\{0,y,z\}$，

∵ $\vec{b}\perp\vec{a}$， ∴ $\vec{b}\cdot\vec{a}=0$，

即：$\{0,y,z\}\cdot\{8,-4,3\}=0$， $\therefore -4y+3z=0$，

又 $|\vec{b}|=\sqrt{y^2+z^2}=10$， $\therefore z=8,y=6$， 或 $z=-8,y=-6$，

∴向量$\vec{b}$ 的坐标为：$\{0,6,8\}$ 或 $\{0,-6,-8\}$.

*** 10. 试证明

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^{\ 2}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^{\ 2}}\ge\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|.$$

其中a_1,a_2,a_3及b_1,b_2,b_3为任意实数.

解：设$\vec{a},\vec{b}$ 的坐标分别为$\{a_1,a_2,a_3\},\{b_1,b_2,b_3\}$，

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\left||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

即：$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}}$，

$$\therefore\ \sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^{\ 2}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{3}b_i^{\ 2}}\ge\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|.$$

第 10 章（之 3）（总第 55 次）

教学内容：§10.3 平面与直线[10.3.1]

**1. 解下列各题

(1) 平行于 x 轴，且过点 $P=(3,-1,2)$ 及 $Q=(0,1,0)$ 的平面方程是______ .

答：$y+z=1$

(2) 与 xOy 坐标平面垂直的平面的一般方程为______ .

答：$Ax+By+d=0 \qquad (A^2+B^2\neq 0)$

(3) 过点 $P=(1,2,1)$ 与向量 $\overrightarrow{S_1}=\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k},\overrightarrow{S_2}=-\vec{j}-\vec{k}$ 平行的平面方程为_____ .

答：$x-y+z=0$

(4) 点 $M_0=(6,2,-1)$ 到平面 $x-2y+2z+6=0$ 的距离为 $d=$__________.

解： $d=\dfrac{|6-2\times 2+2\times(-1)+6|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}=2$.

（5）平面 $3x-3y-6=0$ 是 （ ）

（A）平行于 xOy 平面 （B）平行于 z 轴，但不通过 z 轴

（C）垂直于 y 轴 （D）通过 z 轴

答：B

**2. 填表讨论一般方程 $Ax+Bx+Cz+D=0$ 中，系数 A,B,C,D 中有一个或数个等于零的特殊情况，与图象的特征的对应关系.

系 数 情 况	图 像 特 征
$C=0$，$ABD\neq 0$	
$A=D=0$，$BC\neq 0$	
	平面 Π 过 z 轴
	平面 Π 垂直于 y 轴

解：$Ax+By+Cz+D=0$，

（1）$C=0,ABD\neq 0$ 平行于 z 轴（不包括过 z 轴）的平面.

（2）$A=D=0,\ B\cdot C\neq 0$ 过 x 轴的平面（不包括过 y 轴、z 轴的平面）.

（3）$C=D=0,\ A^2+B^2\neq 0,(A\cdot B\neq 0)$ 过 z 轴的平面.

（4）$B\neq 0,A=C=0$ 平面垂直于 y 轴.

3．在下列各题中，求出满足给定条件的平面方程：

**（1）过点 $P=(-1,3,-2)$ 及 $Q=(0,2,-1)$ 且平行于向量 $\vec{l}=\{2,-1,-1\}$；

解：所求平面的法向量$\vec{n}$垂直于向量$\vec{l}=\{2,-1,-1\}$与由点$P=(-1,3,-2)$与点$Q=(0,2,-1)$构成的向量$\overrightarrow{PQ}=\{1,-1,1\}$，故取$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=\{2,3,1\}$.

故可得所求平面方程为 $2(x+1)+3(y-3)+(z+2)=0$，

即 $2x+3y+z-5=0$.

**（2）过 z 轴且垂直于平面$3x-2y-z+7=0$；

解：平面$3x-2y-z+7=0$的法向量 $\overrightarrow{n^0}=\{3,-2,-1\}$，

故所求平面法向量$\vec{n}$与$\overrightarrow{n^0}$垂直，与 z 轴正交，故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{n^0}\times\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\{-2,-3,0\},$$

所求平面过 z 轴，故此平面必经过原点$(0,0,0)$，

故可得所求平面方程为 $-2x-3y+0z=0$，

即 $2x+3y=0$.

**（3）垂直于 yz 坐标面，且过点$P=(4,0,-2)$和$Q=(15,1,7)$；

解：由题意可知$P=(4,0,-2)$、$Q=(15,1,7)$，所以$\overrightarrow{PQ}=\{1,1,9\}$. 又由题意可知所求平面法向量 $\vec{n}$ 即与x轴垂直，又与向量$\overrightarrow{PQ}$垂直，故可取

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\{0,9,-1\},$$

故可得所求平面方程为：$9(y-0)+(-1)(z+2)=0$，

即： $9y-z-2=0$.

***4. 自点$P_0=(2,3,-5)$分别向各坐标面作垂线，求过三个垂足的平面方程.

解：垂足分别为：$A=(2,3,0)$、$B=(0,3,-5)$ 和 $C=(2,0,-5)$，所以

$\overrightarrow{AB}=\{-2,0,-5\},\overrightarrow{AC}=\{0,-3,-5\}$

平面法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & -5\\ 0 & -3 & -5\end{vmatrix}=\{-15,-10,6\}$$

故平面方程为：$15x+10y-6z-60=0$.

*** 5．过两点 $M=(0,4,-3)$ 和 $N=(6,-4,3)$ 作平面，使之不过原点，且使其在坐标轴上截距之和等于零，求此平面方程.

解：设平面方程为：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{a+b}=1$，由于它过 M,N 两点，则

$$\begin{cases}\dfrac{4}{b}+\dfrac{3}{a+b}=1\\ \dfrac{6}{a}-\dfrac{4}{b}-\dfrac{3}{a+b}=1\end{cases}$$

解得：$a=3,\qquad b=-2,6$，

故平面方程为：$2x-3y-6z=6$ 或 $6x+3y-2z=18$.

**6．判断下列各组平面相对位置，是平行，垂直还是相交，重合.

（1）$\pi_1{:}x-y+2z-1=0,\pi_2{:}2x-2y+4z-3=0$

（2）$\pi_1{:}2x-2y-z-1=0,\pi_2{:}x+2y-2z=0$

解：（1）π_1,π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{1,-1,2\},\overrightarrow{n_2}=\{2,-2,4\}\overrightarrow{n_2}=2\overrightarrow{n_1}$

取 π_1 上一点 $(1,0,0)$，显然不在 π_2 上，故 π_1,π_2 平行，不重合.

（2）π_1,π_2 法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{2,-2,-1\},\overrightarrow{n_2}=\{1,2,-2\},\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$

故 $\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_1}$ 垂直，从而 π_1,π_2 垂直.

第 10 章（之 4）（总第 56 次）

教学内容：§10.3 平面与直线[10.3.2，10.3.3]

**1．解下列各题：

（1） 过点 $M_1(3,-2,1), M_2(-1,0,2)$ 的直线方程为______________ ．

答：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$

（2） 直线 $\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+y-2z+6=0 \end{cases}$ 在 xOz 坐标面上的交点为 $P=$___________，并利用该点的坐标，写出此直线的对称式方程和参数方程．

答： $P=(0,0,3)$．对称式方程为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{5}$，参数方程为 $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ z=5t+3 \end{cases}$

（3）直线 $x+a=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{k}$ 在平面 $x+y-z=3$ 上的充要条件是 $a=$_____，$k=$_____．

答：$a=-2$，$k=3$．因为点 $P=(-a,1,0)$ 在平面上，直线的方向向量 $\vec{l}=\{1,2,k\}$ 与平面的法向量 $\vec{n}=\{1,1,-1\}$ 必须垂直．

**2．求经过点 $A=(-3,0,2)$ 且与两个平面 $x+z=1$ 及 $x+y+z=1$ 同时平行的直线方程．

解：所求直线 L 的方向向量 $\vec{l}\perp\vec{n}_1=\{1,0,1\}$，且 $\vec{l}\perp\vec{n}_2=\{1,1,1\}$，

$$\therefore \text{ 可取 } \vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\{-1,0,1\},$$

$$\therefore \text{ 所求直线方程为：} \frac{x+3}{-1}=\frac{y}{0}=z-2.$$

**3．求经过点 $A=(2,-1,0)$ 且与两条直线 $x=y=z$ 及 $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 同时垂直的直线方程．

解：所求直线 L 的方向向量 $\vec{l}\perp\vec{l}_1=\{1,1,1\}$，且 $\vec{l}\perp\vec{l}_2=\{0,1,-1\}$，

$$\therefore \text{可取} \vec{l}=\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\{-2,1,1\}, \qquad \therefore \text{所求直线方程为：} \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=z.$$

**4. 求出过点 $A=(-1,-4,3)$ 且与下列两条直线

$$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$$

均垂直的直线方程.

解：$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases}$，$\vec{l_1}\perp\vec{n_1}=\{2,-4,1\}$，$\vec{l_1}\perp\vec{n_2}=\{1,3,0\}$

$\therefore$ 可取 $\vec{l_1}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\{-3,1,10\}$，

$$L_2:\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{4}=t\\\dfrac{y+1}{-1}=t\\\dfrac{z+3}{2}=t\end{cases}\Rightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{2},$$

$\therefore$ 可取 $\vec{l_2}=\{4,-1,2\}$，$\vec{l}\perp\vec{l_1}$，且$\vec{l}\perp\vec{l_2}$.

$\therefore$ 可取 $\vec{l}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=\{12,46,-1\}$，

$\therefore$所求直线方程为$\dfrac{x+1}{12}=\dfrac{y+4}{46}=\dfrac{z-3}{-1}$.

**5. 求通过点$M_0=(2,1,-5)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$相交并垂直的直线方程.

解法一：直线$L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$上取一点$M_1=(-1,1,0)$，

过点M_0与直线L_1的平面π的法向量$\vec{n}$，则$\vec{n}\perp\vec{l_1}$ 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$，

$\therefore\vec{l_1}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\{3,2,-1\}\times\{-3,0,5\}=\{10,-12,6\}$，故$\vec{n}$可取为 $\vec{n}=\{5,-6,3\}$.

因所求直线L过点M_0点且与L_1相交，故L亦在平面π上，

故 $\vec{l}\perp\vec{n}$, $\vec{l_1}\times\vec{n}=\{0,-14,-28\}$， 故可取 $\vec{l}=\{0,1,2\}$.

故所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{2}$.

解法二：过点M_0作垂直于直线L_1的平面π：

$3(x-2)+2(y-1)-(z+5)=0$，即$3x+2y-z-13=0$

直线L_1与平面π的交点M的坐标满足：$\begin{cases}3x+2y-z-13=0\\\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\x=2\\y=3\\z=-1\end{cases}$

$\therefore M$ 点坐标为$(2,3,-1)$，$\therefore \overrightarrow{M_0M}=\{0,2,4\}$，

$\therefore$所求直线方程为：$\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+5}{2}$.

** 6．试求 k 值，使两条直线 $L_1:\dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}, L_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+14}{7}$ 相交.

解：将第二条直线的参数方程$\begin{cases}x=3t-3\\ y=-4t+9\\ z=7t-14\end{cases}$代入第一条直线方程，有

$$\frac{3t-4}{k}=\frac{-4t+13}{5}=\frac{7t-17}{-3}$$

解得　$k=2$

**7．求直线 $l_1: x-1=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 与 $l_2:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{2}$ 之间的夹角.

解：l_1，l_2 方向向量分别为$\overrightarrow{S_1}=\{1,-1,0\},\overrightarrow{S_2}=\{-1,0,2\}$，

$\cos(\overrightarrow{S_1}\hat{,}\overrightarrow{S_2})=\dfrac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}||\overrightarrow{S_2}|}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，故 l_1，l_2 之间的夹角为　$\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

**8．已知直线$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{p}=\dfrac{z}{-1}$和平面 $qx-6y+2z=1$ 垂直,求常数 p,q 之值.

解：　$\vec{l}=\{2,p,-1\}//\vec{n}=\{q,-6,2\}$，　　$\therefore \dfrac{2}{q}=\dfrac{p}{-6}=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow q=-4, p=3$.

**9．求过直线$\begin{cases}2x+7y-5z-7=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$且在 x 轴和 y 轴上的截距相等的平面方程.

解：过直线$\begin{cases}2x+7y-5z-7=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$的平面束方程可设为

$$u(2x+7y-5z-7)+v(2x-y+z-4)=0 \qquad (*)$$

令 $y=z=0$，求得在 x 轴截距 $x=\dfrac{7u+4v}{2u+2v}$，

令 $x=z=0$，求得在 y 轴截距 $y=\dfrac{7u+4v}{7u-v}$.

$\because x=y \qquad \therefore \dfrac{7u+4v}{2u+2v}=\dfrac{7u+4v}{7u-v}$，

$\therefore 7u+4v=0$或$2u+2v=7u-v$，

即:$\dfrac{u}{v}=-\dfrac{4}{7}$或$\dfrac{u}{v}=\dfrac{3}{5}$,代入（*）式，可得满足条件的平面有两个

（1）$-\dfrac{4}{7}(2x+7y-5z-7)+(2x-y+z-4)=0$，即：$6x-35y+27z=0$；

（2）$\dfrac{3}{5}(2x+7y-5z-7)+(2x-y+z-4)=0$，即：$16x+16y-10z=41$.

***10. 求直线$x=y=z$在平面$x+5y-3z=1$上的投影直线.

解：直线L的方向向量 $\vec{l}=\{1,1,1\}$. 在直线L上取一点$A=(0,0,0)$，显然不满足方程

$x+5y-3z=1$, $\therefore A$不在该平面上.

设过A做与平面$\pi_0: x+5y-3z=1$的垂直的平面π.

则平面π的法向量可取为 $\vec{n}=\vec{l}\times\vec{n}_0=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=-4\{2,-1,-1\}$,

这就得到了π的方程为$2x-y-z=0$. 从而得到投影直线方程为

$$\begin{cases}x+5y-3z=1\\ 2x-y-z=0\end{cases}.$$

第 10 章（之 5）（总第 57 次）

教学内容：§10.4 空间曲面

1. 选择题

*(1) 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$是 （　　）

（A）zox平面上曲线$z=x$绕z轴旋转而成的旋转曲面

（B）zoy平面上曲线$z=|y|$绕z轴旋转而成的旋转曲面

（C）zox平面上曲线$z=x$绕x轴旋转而成的旋转曲面

（D）zoy平面上曲线$z=|y|$绕y轴旋转而成的旋转曲面

答：B

** (2) 方程$x^2+z^2=1$在空间表示 （　　）

（A）z轴　（B）球面　（C）母线平行y轴的柱面　（D）锥面

答：C

*(3) 方程$x^2+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{25}=-1$是 （　　）

(A) 单叶双曲面　　(B) 双叶双曲面

(C) 椭球面　　(D) 双曲抛物面

答：B

*(4) 双曲面$x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$与$yoz$平面 （　　）

(A) 交于一双曲线　　(B) 交于一对相交直线

(C) 不交　　(D) 交于一椭圆

答：C

*2. 求以$M_1=(1,4,5),M_2=(1,1,1)$为直径的两个端点的球面的方程.

解：M_1,M_2中点为$M_0=(1,\dfrac{5}{2},3)$，$|M_1M_2|=5$.

即直径为5，半径为5/2.

故球面方程为　$(x-1)^2+(y-\dfrac{5}{2})^2+(z-3)^2=(\dfrac{5}{2})^2$.

即$x^2+y^2+z^2-2x-5y-6z+10=0$.

**3. 动点M到两定点$P_1=(a,0,0),P_2=(4a,0,0)$的两个距离之比等于1：2，求动点M的轨迹方程.

解：设动点$M=(x,y,z)$

$|P_1M|:|P_2M|=1:2$　即　$4[(x-a)^2+y^2+z^2]=(x-4a)^2+y^2+z^2$,

即 $$x^2+y^2+z^2=(2a)^2 .$$

**4. 动点$M=(x,y,z)$到点$A=(0,0,2)$的距离和它到 xy 平面的距离相等,求动点 M 的轨迹方程.

解：动点$M=(x,y,z)$到点$A=(0,0,2)$的距离为 $d_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}$，

动点M到xOy平面的距离为 $d_2=|z|$ $d_1=d_2$，

∴动点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2+(z-2)^2=z^2$，

整理得：$x^2+y^2=4z-4$ 是旋转抛物面.

**5. 求yOz平面上曲线$y^2-z^2=1$分别绕y轴，z轴而成的旋转曲面的方程.

解：绕y轴 $-x^2+y^2-z^2=1$； 绕z轴 $x^2+y^2-z^2=1$.

6. 把下列方程化为标准形式，从而指出方程所表示曲面的名称并画出图形.

**（1）$x^2+2y^2-z^2+2x+4y-1=0$；

解：$x^2+2y^2-z^2+2x+4y-1=0$， $(x^2+2x)+(2y^2+4y)-z^2=1$，

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{z^2}{4}=1$，是一个单叶双曲面， 中心为$M_0=(-1,-1,0)$.

**（2）$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$.

解：$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$， $x^2-4(y^2-2y)-(z^2+2z)=9$，

$x^2-4(y-1)^2-(z+1)^2=4$，

$\frac{x^2}{4}-(y-1)^2-\frac{(z+1)^2}{4}=1$，是一个双叶双曲面，中心为$M_0=(0,1,-1)$.

第 10 章（之 6）（总第 58 次）

教学内容：§10.5 向量函数 空间曲线基本知识

**1. 求曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1\\ x-2z+3=0\end{cases}$在$xoy$平面上的投影柱面方程.

解：消去z，得$x^2+20y^2-24x-116=0$，

即为所求投影柱面方程.

**2．求以曲线$\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=1\\ x^2-y^2+z^2=1\end{cases}$为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

解：$\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=1\\ x^2-y^2+z^2=1\end{cases}\overset{消z}{\Rightarrow}\quad x^2-3y^2=1$

故所求柱面方程为$x^2-3y^2=1$.

**3. 求曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$在各坐标平面上的投影曲线方程.

解：消去z，得$x^2+y^2+x+y=1$

故在xoy平面上，投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=1\\ z=0\end{cases}$

消去x，得$z=(1-y-z)^2+y^2$

故在yoz平面上，投影曲线为 $\begin{cases}z=(1-y-z)^2+y^2\\ x=0\end{cases}$

消去y，得$z=x^2+(1-x-z)^2$

故在xoz平面上，投影曲线为 $\begin{cases}z=x^2+(1-x-z)^2\\ y=0\end{cases}$

** 4．把曲面$x^2+y^2+z^2=1$和$x+y=1$的交线改写为母线分别平行于 x 轴与 y 轴的两个柱面的交线.

解： $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y=1\end{cases}\qquad(1)$

由（1）消去 x $\Rightarrow (y-1)^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow 2y^2-2y+z^2=0$，

由（1）消去 y $\Rightarrow (x-1)^2+x^2+z^2=1 \Rightarrow 2x^2-2x+z^2=0$，

交线可写为 $\begin{cases} 2y^2+z^2-2y=0 \\ 2x^2+z^2-2x=0 \end{cases}$.

**5. 求由曲面 $3x^2+y^2=z$ 和 $z=1-y^2$ 所围成的立体在 xOy 平面上的投影区域.

解：投影区域由交线 $\begin{cases} 3x^2+y^2=z \\ z=1-y^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面上投影曲线所围成

投影曲线为 $\begin{cases} 3x^2+y^2=1-y^2 \\ z=0 \end{cases}$， 故投影区域为 $\begin{cases} 3x^2+2y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$.

**6. 试求曲线 $\vec{r}(t)=t\vec{i}+e^t\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$ 对应于 $t=0$ 点出的切线方程.

解：$\vec{r}(\theta)=t\vec{i}+e^t\vec{j}+e^{-t}\vec{k}$，

$\therefore$ 此空间曲线的参数方程为 $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=e^t \\ z(t)=e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=1 \\ y'(t)=e^t \\ z'(t)=-e^{-t} \end{cases}$.

$\therefore$ 在对应于 $t=0$ 时， $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-e^0}{e^0}=\dfrac{z-e^0}{-e^0}$，

即：$x=y-1=\dfrac{z-1}{-1}$.

**7. 试求曲线 $r(t)=2(\cos 3t)\vec{i}+2(\sin 3t)\vec{j}+t^2\vec{k}$ 从 $t=0$ 到 $t=4$ 这一段的弧长.

解：空间曲线的参数方程为 $\begin{cases} x(t)=2(\cos 3t) \\ y(t)=2(\sin 3t) \\ z(t)=t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=-6\sin 3t \\ y'(t)=6\cos 3t \\ z'(t)=2t \end{cases}$.

$\therefore$ 弧长 $s=\int_0^4\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt \quad =\int_0^4\sqrt{36\sin^2 3t+36\cos^2 3t+4t^2}\,dt$

$=\int_0^4 2\sqrt{9+t^2}\,dt=20+9\ln 3$.

第 11 章（之 1）（总第 59 次）

教材内容：§11.1 多元函数

1．解下列各题：

**（1）．函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 连续区域是 _______ .

答：$x^2+y^2>1$

**（2）．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，　则（　）

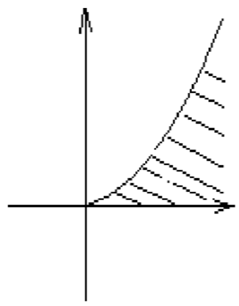
(A) 处处连续　　(B) 处处有极限，但不连续

(C) 仅在（0,0）点连续　　(D) 除（0,0）点外处处连续

答：(A)

**2. 画出下列二元函数的定义域：

（1）$u=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；



解：定义域为：$\{(x,y)|\sqrt{y}\le x\}$，见图示阴影部分：

（2）$f(x,y)=\ln(1+xy)$；

解：$\{(x,y)|xy>-1\}$，第二象限双曲线 $xy=-1$ 的上方，第四象限双曲线 $xy=-1$ 的下方（不包括边界，双曲线 $xy=-1$ 用虚线表示）.

（3）$z=\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

解：$\dfrac{x-y}{x+y}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)\ge 0\\ x+y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge|y|\\ x\neq -y\end{cases}$.

***3. 求出满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ 的函数 $f(x,y)$.

解：令$\begin{cases} s = x + y \\ t = \dfrac{y}{x} \end{cases}$，　　　　$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{s}{1+t} \\ y = \dfrac{st}{1+t} \end{cases}$

$\therefore f(s,t) = \dfrac{s^2 - s^2t^2}{(1+t)^2} = \dfrac{s^2(1-t)}{1+t}$，　即　$f(x,y) = \dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$.

***4. 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：$0 \le \left|\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \dfrac{|xy|}{\left(\sqrt{1+xy}+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} \le \dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}{\left(\sqrt{1+xy}+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\left(\sqrt{1+xy}+1\right)} \to 0$　（$(x,y)\to(0,0)$）

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

**5. 说明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$不存在.

解：我们证明(x,y)沿不同的路径趋于$(0,0)$时，极限不同.

首先，$x=0$时，极限为$\lim\limits_{\substack{x=0\\(x,y)\to(0,0)}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$，

其次，$y=0$时，极限为$\lim\limits_{\substack{y=0\\(x,y)\to(0,0)}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$，

故极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-\mathrm{y}^2}{x^2+\mathrm{y}^2}$不存在.

**6. 设$f(x,y) = \dfrac{y\sin 2x}{\sqrt{xy+1}-1}$，试问极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$是否存在？为什么？

解：不存在，因为不符合极限存在的前提，在$(0,0)$点的任一去心邻域内函数

$f(x,y) = \dfrac{y\sin 2x}{\sqrt{xy+1}-1}$并不总有定义的，$x$轴与$y$轴上的点处函数$f(x,y)$就没有定义.

***7. 试讨论函数$z = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$的连续性.

解：由于 $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 是初等函数，所以除 $xy=1$ 以外的点都连续，但在 $xy=1$ 上的点处不连续.

**8. 试求函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$ 的间断点.

解：显然当 $(x,y)=(m,n)\quad m,n\in Z$ 时，$f(x,y)$ 没定义，故不连续.

又 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$ 是初等函数.

所以除点 (m,n)（其中 $m,n\in Z$）以外处处连续.

第 11 章（之 2）　（总第 60 次）

教材内容： §11.2 偏导数［§11.2.1］

**1. 解下列各题：

（1）函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+|y|^3}$ 在 $(0,0)$ 点处　　（　　）

（A）$f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在；　　（B）$f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都不存在；

（C）$f_x'(0,0)$ 存在，但 $f_y'(0,0)$ 不存在；　（D）$f_x'(0,0)$ 不存在，但 $f_y'(0,0)$ 存在.

答：(D).

（2）　设 $z=x+(y-2)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，那么 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(!,2)}=$　　（　　）

(A) 0 ；　　(B) 1；　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$；　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$.

答：(D).

（3）设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f_x'(0,0)=$______，$f_y'(0,0)=$__________.

解：由于 $f(x,0)=0$，$\therefore\quad f_x'(0,0)=0$，同理 $f_y'(0,0)=0$.

**2. 设 $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3e^{xy}$，　求 z_x,z_y.

解：$z_x = 1 + \dfrac{x}{x^2+y^2} + 3ye^{xy}$，　　　　$z_y = -2 + \dfrac{y}{x^2+y^2} + 3xe^{xy}$.

**3. 求函数 $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ 对各自变量的偏导数.

解：$z_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, z_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

**4. 设 $f(x,y) = \begin{cases} x^2\ln(x^2+y^2) & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$.

解：$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln x^2}{x} = 0$，　$f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y} = 0$.

***5. 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 - xy + y^2 \\ x = 1 \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 点处切线与 y 轴的夹角.

解：由于曲线在平面 $x=1$ 内，故由　$z_y\big|_{(1,1)} = (-x+2y)\big|_{(1,1)} = 1$，

得切线与 y 轴的夹角为 $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. [也可求出切向量为 $\{0,1,1\}$]

$\therefore$ 夹角= $\arccos\dfrac{\{0,1,1\}\{0,1,0\}}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{12}} = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

***6. 设函数 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，已知函数 $f(x,y) = |x-y|\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数 $f_x'(0,0)$ 存在，

（1）证明 $\varphi(0,0) = 0$；　（2）证明 $f_y'(0,0)$ 也一定存在.

解：（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$，

因为 $f_x'(0,0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta x\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{-\Delta x\cdot\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$

即　$\varphi(0,0) = -\varphi(0,0)$，　故　$\varphi(0,0) = 0$.

（2）由于 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，且 $\varphi(0,0) = 0$，所以 $\Delta y \to 0$ 时，$\varphi(0,\Delta y)$ 是无穷小量，

而 $\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$ 是有界量，所以 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta y|\varphi(0,\Delta y)}{\Delta y}=0$，即 $f_y'(0,0)=0$.

第 11 章（之 3） （总第 61 次）

教材内容：§11.2 偏导数［§11.2.2 ～ 11.2.4］

**1. 求函数 $f(x,y,z)=x\mathrm{ch}z-y\mathrm{sh}x$ 的全微分，并求出其在点 $P=(0,1,\ln 2)$ 处的梯度向量.

解：$df(x,y,z)=d(x\mathrm{ch}z)-d(y\mathrm{sh}x)$

$$=\mathrm{ch}z dx+x\mathrm{sh}z dz-\mathrm{sh}x dy-y\mathrm{ch}x dx$$
$$=(\mathrm{ch}z-y\mathrm{ch}x)dx-\mathrm{sh}x dy+x\mathrm{sh}z dz$$

$$\therefore df(x,y,z)\big|_{(0,1,\ln 2)}=\frac{1}{4}dx,\qquad \nabla f(x,y,z)\big|_{(0,1,\ln 2)}=\left\{\frac{1}{4},0,0\right\}.$$

**2. 求函数 $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$ 的全微分：

解：$dz=d\arctan\frac{x+y}{1-xy}\quad =d(\arctan x+\arctan y)$

$$=d(\arctan x)+d(\arctan y)=\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$$

**3. 设 $z=\frac{\sec^2(xy)}{\ln(xy-1)}$，求 $\mathrm{d}z$.

解：$\mathrm{d}z=\frac{[\ln(xy-1)]\mathrm{d}[\sec^2(xy)]-\sec^2(xy)\,\mathrm{d}[\ln(xy-1)]}{[\ln(xy-1)]^2}$

$$=\frac{1}{[\ln(xy-1)]^2}[\ln(xy-1)2\sec^2(xy)\tan(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)-\frac{\sec^2(xy)}{xy-1}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)]$$

$$=\frac{[2\ln(xy-1)\tan(xy)(xy-1)-1](y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)}{(xy-1)\cos^2(xy)\ln^2(xy-1)}.$$

**4. 利用 $\Delta f\approx df$，可推出近似公式：$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+df(x,y)$，

并利用上式计算 $\sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2}$ 的近似值.

解：由于 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y)+df(x,y)$，

设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$， $x=3, y=4, \Delta x=-0.02, \Delta y=0.03$，

于是 $$df(x,y)=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y)+\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\therefore \sqrt{(2.98)^2+(4.03)^2} \approx \sqrt{3^2+4^2}+\frac{3(-0.02)+4(0.03)}{\sqrt{3^2+4^2}}=5.012.$$

***5. 已知圆扇形的中心角为 $\alpha=60^\circ$，半径为 $r=20cm$，如果 α 增加了 1°，r 减少了 1cm，试用全微分计算面积改变量的近似值.

解：$S=\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{\pi\alpha}{180}$，

$$dS=\frac{\pi}{360}(2(\alpha dr+r^2 d\alpha)),$$

$$\therefore \Delta S \approx dS=\pi\left(\frac{2\times 20\times 60\times(-1)}{360}+\frac{(20)^2\times 1}{360}\right)=-17.4533(cm^2).$$

***6. 计算函数 $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$ 在点 $P=(1,2,0)$ 处沿给定方向 $\vec{l}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_P$.

解：$f_x=\dfrac{1}{x+2y+3z}$， $f_y=\dfrac{2}{x+2y+3z}$， $f_z=\dfrac{3}{x+2y+3z}$，

$$\vec{e}_l=\left\{\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\therefore \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_P=\nabla f\cdot\vec{e}_l=\left\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}\cdot\left\{\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}=\frac{1}{5\sqrt{6}}.$$

***7. 函数 $z=\arctan\dfrac{1+x}{1+y}$ 在（0，0）点处沿哪个方向的方向导数最大，并求此方向导数

的值.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1+y}\right)^2}\cdot\left[-\frac{1+x}{(1+y)^2}\right]\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{1}{2}\cos\alpha+(-\frac{1}{2})\sin\alpha=\frac{1}{2}\{1,-1\}\cdot\{\cos\alpha,\sin\alpha\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi,$$

其中φ为$\vec{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$与$\vec{g}=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$的夹角，

所以$\varphi=0$时，即$\vec{l}$ 与$\vec{g}$ 同向时，方向导数取最大值$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**8. 对函数 $f(x,y,z)=e^{xyz}$ 求出 $\nabla f(x,y,z)$ 以及 $\nabla f(1,2,3)$.

解： $\nabla f=\{yze^{xyz},xze^{xyz},xye^{xyz}\}$，$\nabla f(1,2,3)=e^6\{6,3,2\}$.

**9. 求函数$f(x,y,z)=(x+y)^{\frac{1}{z}}$在点$P=(\frac{e+1}{2},\frac{e-1}{2},\frac{1}{2})$处的梯度.

解：$\nabla f=\left\{\frac{1}{z}(x+y)^{\frac{1}{z}-1},\frac{1}{z}(x+y)^{\frac{1}{z}-1},-\frac{(x+y)^{\frac{1}{z}}}{z^2}\ln(x+y)\right\}$,

$$\nabla f(\frac{e+1}{2},\frac{e-1}{2},\frac{1}{2})=\{2e,2e,-4e^2\}.$$

***10. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点（0，0）处的连续性，可导性和可微性.

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$,

所以$f(x,y)$在点（0，0）连续.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}$，

极限不存在，$f(x,y)$ 在（0，0）处不可导，从而在（0，0）处不可微.

第 11 章（之 4）（总第 62 次）

教材内容：§11.3 复合函数微分法；§11.4 隐函数微分法

**1. 解下列各题：

（1） 若函数 $f(u,v)$ 可微，且有 $f(x,x^2)=x^4+2x^3+x$ 及 $f'_u\ (x,x^2)=2x^2-2x+1$，则 $f'_v\ (x,x^2)$ =　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) $2x^2+2x+1$　　　　(B) $2x^2+3x+\dfrac{1}{2x}$

(C) $2x^2-2x+1$　　　　(D) $2x^2+3x+1$

答：(A)

（2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy^2z=x+y+z$ 所确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ =_________.

答：$\dfrac{2xyz-1}{1-xy^2}$.

（3）方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3\dfrac{\partial z}{\partial y}$，在变量代换 $u=x+3y$，$v=3x+y$ 下，可得新方程为_______.

答：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$.

**2. 设 $u=x^2+y^2+z^2, x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial r},\dfrac{\partial u}{\partial \theta},\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial r}=2x(\cos\theta\sin\varphi)+2y\sin\theta\sin\varphi+2z\cos\varphi=2r$，

$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=2x[r(-\sin\varphi)\sin\theta]+2y(r\cos\theta\sin\varphi)=0$，

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=2x(r\cos\theta\cos\varphi)+2y(r\sin\theta\cos\varphi)-2z\,r\sin\varphi=0.$$

**3. 一直圆锥的底半径以 3 cm/s 的速率增加，高 h 以 5 cm/s 的速率增加，试求 r=15 cm，h=25 cm 时其体积的增加速率.

解：$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{2\pi}{3}rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r=15\\ h=25}}=1125\pi cm^3/s$$

*4. 设 $z=e^x-\sqrt[3]{y}$, 而 $x=\sin t, y=t^4$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解：$\frac{dz}{dt}=z_x\frac{dx}{dt}+z_y\frac{dy}{dt}=e^x\cos t-\frac{4t^3}{3y^{\frac{2}{3}}}$.

**5. 若 $z=\frac{xy}{f(x^2-y^2)}$，证明：$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2z+y^2z$.

解：$z_x=\frac{yf-2x^2yf'}{f^2}, z_y=\frac{xf+2xy^2f'}{f^2}$，

则 $xy^2z_x+x^2yz_y=\frac{xy(x^2+y^2)}{f}=x^2z+y^2z$.

**6. 设 $u=f(xe^y, ye^x, xy\cos^2 x)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},du$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^y f_1+ye^x f_2+(y\cos^2 x-xy\sin 2x)f_3$ ，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^y f_1+e^x f_2+x\cos^2 x f_3,$$

$$du=\left[e^y f_1+ye^x f_2+(y\cos^2 x-xy\sin 2x)f_3\right]dx+\left[xe^y f_1+e^x f_2+x\cos^2 x f_3\right]dy.$$

**7. 求由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$z_x=-\frac{Fx}{Fz}=-\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{yz}}=\frac{z}{x+z}$， $z_y=-\frac{Fy}{Fz}=-\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{xy+yz}$.

**8. 设 $F(xy,y+z,xz)=0,$ 试求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},dz$.

解：$F(xy,y+z,xz)=0,$ 两边对 x 求导，得 $yF_1+z_xF_2+F_3(z+xz_x)=0$，

解得 $$z_x=-\frac{yF_1+zF_3}{F_2+xF_3},$$

两边对 y 求导，得 $xF_1+F_2(1+z_y)+F_3xz_y=0$.

解得 $z_y=-\frac{xF_1+F_2}{F_2+xF_3}$ ，所以 $dz=-\frac{yF_1+zF_3}{F_2+xF_3}dx-\frac{xF_1+F_2}{F_2+xF_3}dy$.

***9. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x,x+y+z,z+xy)=1$ 所确定，其中 F 具有连续一阶偏导数，$F_2+F_3\neq 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$F_1\,\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)F_2+(\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)F_3=0$，

$$\mathrm{d}z=-\frac{(F_1+F_2+yF_3)\,\mathrm{d}x+(F_2+xF_3)\,\mathrm{d}y}{F_2+F_3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1+F_2+yF_3}{F_2+F_3},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2+xF_3}{F_2+F_3}.$$

***10. 求由方程 $z^3-3xyz=a^3\quad(a\neq 0)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在坐标原点处沿由向量 $\bar{a}=\{-1,-2\}$ 所确定的方向的方向导数.

解：当 $x=0,y=0$ 时，$z_0=a\neq 0$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0.0)}=\left.\frac{yz}{z^2-xy}\right|_{(0,0)}=0,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0.0)}=\left.\frac{xz}{z^2-xy}\right|_{(0,0)}=0，\ \therefore\frac{\partial z}{\partial a}=0.$$

***11. 设 $xu-yv=0,yu+xv=1,(x^2+y^2\neq 0)$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解： $\begin{cases} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v + y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{xv - yu}{x^2 + y^2} \end{cases}$

类似地 $\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} - v - y\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{yu - xv}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{xu + yv}{x^2 + y^2} \end{cases}$

第 11 章 （之 5）（总第 63 次）

教材内容：§11.5　多元函数微分法在几何上的应用

**1. 曲面 $x^2 - 2y^2 + z^2 - xyz - 4x + 2z = 6$ 在点 $A = (0,1,2)$ 处的切平面方程为 （　　）

（A） $3(x-1) + 2(y-2) - 3z + 11 = 0$　　　（B） $3x + 2y - 3z = 4$

（C） $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y-1}{2} + \dfrac{z-2}{-3} = 0$　　　（D） $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$

答：(A).

**2. 设函数 $F(x,y,z)$ 可微，曲面 $F(x,y,z) = 0$ 过点 $M = (2,-1,0)$，且 $F_x(2,-1,0) = 5, F_y(2,-1,0) = -\sqrt{2}, F_z(2,-1,0) = -3$. 过点 M 作曲面的一个法向量 $\vec{n}$，已知 $\vec{n}$ 与 x 轴正向的夹角为钝角，则 $\vec{n}$ 与 z 轴正向的夹角 γ =______ .

答：$\dfrac{\pi}{3}$.

***3. 设曲线 $x = 2t + 1, y = 3t^2 - 1, z = t^3 + 2$ 在 $t = -1$ 对应点处的法平面为 S，则点 $P = (-2,4,1)$ 到 S 的距离 $d =$______ .

答：2.

**4. 求曲线 $L: x = a\cos t, y = b\sin t, z = ct$ 在点 $M_0 = (a,0,2\pi c)$ 处的切线和法平面方程.

解：$\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-a\sin t\Big|_{t=0}=0,$

$\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=-b\cos t\Big|_{t=0}=b,\qquad \dfrac{dz}{dt}\Big|_{t=0}=c$.

∴切线方程为：$\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-0}{b}=\dfrac{z-2\pi c}{c}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{z-2\pi c}{c}\end{cases}$，

法平面方程为：$by+c(z-2\pi c)=0$.

***5. 求曲线$L: xy+yz+zx=11,\quad xyz=6$在点$M_0=(1,2,3)$处的切线和法平面方程.

解：设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-11$，$G(x,y,z)=xyz-6$，

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}y+z & x+z\\ yz & xz\end{vmatrix}=xz(y+z)-yz(x+z)=z^2(-y+x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}x+z & y+x\\ zx & xy\end{vmatrix}=xy(x+z)-xz(x+y)=x^2(y-z),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}x+y & y+z\\ xy & zy\end{vmatrix}=zy(x+y)-xy(y+z)=y^2(z-x).$$

∴ $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_{M_0}=-9,\quad \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{M_0}=-1,\quad \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_{M_0}=8$，

∴切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{-9}$，

法平面方程为 $(x-1)(-1)+(y-2)8+(z-4)(-9)=0$，

即 $x-8y+9z-12=0$.

***6. 求曲面$4x^2+y^2+4z^2=16$在点$P=(1,2\sqrt{2},-1)$处的法线在yOz平面上投影方程.

解：曲面在点$P=(1,2\sqrt{2},-1$处的法线方向向量

$\vec{n}=\{8,4\sqrt{2},-8\}=4\{2,\sqrt{2},-2\},$

法线方程为：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-2}$.

法线在 yOz 平面上投影方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z+1}{-2}$.

***7. 求曲线 $x=t^3, y=2t^2, z=3t$ 上的点，使曲线在该点处的切线平行于平面 $x+2y-z=1$.

解：设所求的点对应于 $t=t_0$，则对应的切线方向向量为： $\vec{s}=\{3t_0^2, 4t_0, 3\}$.

因为 $\vec{s}$ 垂直于平面法向量 $\vec{n}=\{1,2,-1\}$，所以 $\vec{s}\cdot\vec{n}=3t_0^2+8t_0-3=0$，

解得： $t_0=\frac{1}{3}$ 和 $t_0=-3$. 所求点为： $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{9},1\right)$ 和 $(-27,18,-9)$.

**8．求曲面 $z=\frac{6}{xy}$ 上平行于平面 $6x-3y-2z+6=0$.的切平面方程.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{6}{xy}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{6}{xy^2}$,

$$\therefore \text{由条件，得：} \left.\begin{aligned} -\frac{6}{x^2y}&=6k \\ -\frac{6}{y^2x}&=-3k \\ -1&=-2k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$$

$\therefore$切平面方程为： $6(x-1)-3(y+2)-2(z+3)=0,$

即 $6x-3y-2z-18=0$.

***9. 求函数 $z=e^{x^2+y^2}$ 在点 $M_0=(x_0,y_0)$ 沿过该点的等值线的外法线方向的方向导数.

解：等值线方程为 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$,

在 $M_0=(x_0,y_0)$ 处的法线斜率为 $k=\frac{y_0}{x_0}$，即法线方向向量为 $\vec{n}=\{1,\frac{y_0}{x_0}\}$ 或 $\{x_0,y_0\}$,

方向余弦为： $\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$ $\cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial n}=e^{x_0^2+y_0^2}\cdot 2x_0\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}+e^{x_0^2+y_0^2}\cdot 2y_0\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\qquad =2e^{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}\ .$$

***10. 求函数 $z=\sqrt{y+\sin x}$ 在 $P=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 点沿 $\vec{a}$ 方向的方向导数，其中 $\vec{a}$ 为曲线 $x=2\sin t$， $y=\pi\cos 2t$ 在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处的切向量（指向 t 增大的方向）.

解： $\tan\alpha=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{-2\pi\sin 2t}{2\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=-\pi$，

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}$， $\sin\alpha=\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+1}}$，

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\left.\frac{\cos x}{2\sqrt{y+\sin x}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=0$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\left.\frac{1}{2\sqrt{y+\sin x}}\right|_{\left(\frac{\pi}{2},1\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，

所以 $\frac{\partial z}{\partial a}=0\times(\frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}})+\frac{1}{2\sqrt{2}}\times(-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}})=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi^2+1}}$.

***11. 设 $f(y,z),g(z)$ 都是可微函数，求曲线 $\begin{cases}x=f(y,z)\\ y=g(z)\end{cases}$ 在对应于 $z=z_0$ 点处的切线方程和法平面方程.

解： $z=z_0$ 对应点 $\left(f[g(z_0),z_0],g(z_0),z_0\right)$， 对应的切线方向向量：

$$\vec{S}=\left\{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0],g'(z_0),1\right\}.$$

切线方程： $\frac{x-f[g(z_0),z_0]}{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0]}=\frac{y-g(z_0)}{g'(z_0)}=z-z_0$，

法平面方程： $\left\{f_y[g(z_0),z_0]g'(z_0)+f_z[g(z_0),z_0]\right\}\left\{x-f[g(z_0),z_0]\right\}$

$+g'(z_0)[y-g(z_0)]+(z-z_0)=0$.

****12. 在函数 $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的等值线中哪些曲线与椭圆 $x^2+8y^2=16$ 相切？

解：对等值线 $u_0=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 两边微分得 $-\frac{dx}{x^2}-\frac{dy}{y^2}=0$， 即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2}$，

同样对$x^2+8y^2=16$两边微分，有 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{8y}$，

令$-\dfrac{y^2}{x^2}=-\dfrac{x}{8y}$，得 $x=2y$，

代入$x^2+8y^2=16$，得 $x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$， $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

∴ $u_0=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．

***13．试证明曲面$xyz=a^3$上任一点处的切平面在三个坐标轴上截距之积为定值．

解：由$xyz=a^3$， 得 $z=\dfrac{a^3}{xy}$，

∴在点(x_0,y_0,z_0)处法向量为：$-\left\{\dfrac{a^3}{{x_0}^2y_0},\dfrac{a^3}{{y_0}^2x_0},1\right\}$，

∴切平面为：

$$\frac{a^3}{{x_0}^2y_0}(x-x_0)+\frac{a^3}{x_0{y_0}^2}(y-y_0)+z-z_0=0,$$

又 ∵$x_0y_0z_0=a^3$，

∴ 切平面方程化为：$\dfrac{x}{3x_0}+\dfrac{y}{3y_0}+\dfrac{z}{3z_0}=1$，

∴ 截距之积为： $27x_0y_0z_0=27a^3$（定值）．

***14．证明曲面$F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$的所有切平面都通过一个定点，这里$F(u,v)$具有一阶连续偏导数．

解：曲面上点(x_0,y_0,z_0)处的切平面法向量：

$$\vec{n}=\left\{\frac{F_1}{z_0-c},\frac{F_2}{z_0-c},-\frac{1}{(z_0-c)^2}\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{(z_0-c)^2}\left\{(z_0-c)F_1,(z_0-c)F_2,-\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right]\right\}.$$

切平面方程为：　$(z_0-c)F_1(x-x_0)+(z_0-c)F_2(y-y_0)$

$$-\left[(x_0-a)F_1+(y_0-b)F_2\right](z-z_0)=0\,.$$

易知$x=a,y=b,z=c$满足上述方程，即曲面的所有切平面都通过定点(a,b,c).

第 11 章 （之 6）（总第 64 次）

教学内容：§11.6 泰勒展开

1．填空：

*（1）设$u=xy+\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$=________ .

答：　$\dfrac{2y}{x^3}$.

*（2）设$u=x\ln xy$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$= ________.

答：　$\dfrac{1}{y}$.

*（3）设$u=x^2\sin y+y^2\cos x$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$= ________ .

答：　$2x\cos y-2y\sin x$.

*（4）设$u=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$=_______ .

答：0 　.

**（5）设$z=e^x\sin y+e^{-x}\cos y$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$= ________.

答：0.

**2．设$z=f(x,u)$具有连续的二阶偏导数，而$u=xy$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解: $z_x=f_x+yf_u$，　　　$z_{xx}=f_{xx}+2yf_{xu}+y^2 f_{uu}$.

**3．设 $z = x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

解一：　$z_y = \dfrac{x}{y}$，　　$z_{yx} = \dfrac{1}{y}$，　　　$z_{yx^2} = 0$.

解二：　$z_x = \ln(xy) + 1$，　　　$z_{x^2} = \dfrac{1}{x}$，　　$z_{yx^2} = 0$.

**4．设 $z = y^2 f(xy^2) + xf(x^3y^4)$，　求 $z_{xy}(\dfrac{1}{2},2)$.

解：$z_x = y^4 f'(xy^2) + f(x^3y^4) + 3x^3y^4 f(x^3y^4)$，

$$\begin{aligned} z_{xy} &= 4y^3 f'(xy^2) + y^4 f''(xy^2)\cdot 2yx + f'(x^3y^4)\cdot 4y^3x^3 \\ &\quad + 12x^3y^3 f'(x^3y^4) + 3x^3y^4 f''(x^3y^4)\cdot 4x^3y^3 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore z_{xy}(\tfrac{1}{2},2) &= 32f'(2) + 32f''(2) + 4f'(2) + 12f'(2) + 24f''(2) \\ &= 48f'(2) + 56f''(2) . \end{aligned}$$

**5．函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2x+2y}{2x-2y} = \dfrac{x+y}{y-x}$，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{(1+y')(y-x)-(y'-1)(x+y)}{(y-x)^2} \\ &= \frac{-2(x^2+2xy-y^2)}{(y-x)^3} = \frac{2}{(x-y)^3} . \end{aligned}$$

***6．求方程 $x + z = e^{y+z}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ z=z (x, y) 的所有的二阶偏导数.

解：$1 + \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{y+z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$，　　　　$\therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{e^{y+z}-1}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-e^{y+z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(e^{y+z}-1)^2} = -\frac{e^{y+z}}{(e^{y+z}-1)^3} ,$$

因为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{y+z}(1+\dfrac{\partial z}{\partial y})$， $\therefore \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{e^{y+z}}{1-e^{y+z}}=-1+\dfrac{1}{1-e^{y+z}}$.

则 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{e^{y+z}(\dfrac{\partial z}{\partial y}+1)}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{e^{y+z}}{(1-e^{y+z})^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-e^{y+z}(\dfrac{\partial z}{\partial y}+1)}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{-e^{y+z}}{(1-e^{y+z})^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{e^{y+z}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(1-e^{y+z})^2}=\frac{e^{y+z}}{(e^{y+z}-1)^3}.$$

***7．对于由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=(x,y)$，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：由公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$ 两边对 x 求偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{(F_{xx}+F_{xz}\dfrac{\partial z}{\partial x})F_z-F_x(F_{zx}+F_{zz}\dfrac{\partial z}{\partial x})}{F_z^{\ 2}}\\&=\frac{F_x(F_{zx}+F_{zz}\dfrac{-F_x}{F_z})-(F_{xx}+F_{xz}\dfrac{-F_x}{F_z})F_z}{F_z^{\ 2}}\\&=\frac{F_xF_zF_{zx}-F_{zz}(F_x)^2-(F_z)^2F_{xx}+F_{xz}F_xF_z}{F_z^{\ 3}}\\&=\frac{2F_xF_zF_{xz}-(F_x)^2F_{zz}-(F_z)^2F_{xx}}{F_z^{\ 3}}(\text{一般约定}F_{xz}=F_{zx})\text{。}\end{aligned}$$

***8．设 $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$, 验证 $u_{tt}=a^2u_{xx}$.

解：$u_x=\varphi'(x+at)+\psi'(x-at)$,

$$\begin{aligned}u_{xx}&=\varphi''(x+at)+\psi''(x-at)\\u_t&=\varphi'(x+at)\cdot a+\psi'(x-at)(-a)\\u_{tt}&=\varphi''(x+at)\cdot a^2+\psi'(x-at)(-a)^2\\&=[\varphi''(x+at)+\psi'(x-at)]a^2\end{aligned}$$

$\therefore\ u_{tt}=a^2u_{xx}$.

第 11 章 （之 7）（总第 65 次）

教学内容： §11.7.1 多元函数的极值

1．选择题：

*(1) 设函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$，则点 $(0,0)$ 是函数 z 的 （　　）

（A）极大值点但非最大值点；　　（B）极大值点且是最大值点；

（C）极小值点但非最小值点；　　（D）极小值点且是最小值点.

答：(B)

**(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，在点 $P_0=(x_0,y_0)$ 处，有

$$f_x(P_0)=0, f_y(P_0)=0, f_{xx}(P_0)=f_{yy}(P_0)=0, f_{xy}(P_0)=f_{yx}(P_0)=2$$，则（　　）

（A）点 P_0 是函数 z 的极大值点；　　（B）点 P_0 是函数 z 的极小值点；

（C）点 P_0 非函数 z 的极值点；　　（D）条件不够，无法判定.

答：(C)

**（3）“$f(x_0,y_0)$ 同时是一元函数 $f(x,y_0)$ 与 $f(x_0,y)$ 的极大值”是“$f(x_0,y_0)$ 是二元函数 $f(x,y)$ 的极大值”的 （　　）

（A）充分条件，非必要条件；　　（B）必要条件，非充分条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非必要条件，又非充分条件.

解：（B）

**2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{1}{2}x^2+3xy-y^2-5x+5y+e^z+2z=4$ 确定，则函数 z 的驻点是 ________ .

答：（$-\frac{5}{11}$，$\frac{20}{11}$）

**3. 求函数$z=2x^2-3xy+2y^2+4x-3y+1$的极值.

答：由$\begin{cases} z_x=4x-3y+4=0 \\ z_y=-3x+4y-3=0 \end{cases}$，得驻点 $(-1,0)$.

$$D=\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=7>0,$$

$$z_{xx}(-1,0)=4>0.$$

所以函数在点$(-1,0)$处取极小值$z(-1,0)=-1$.

***4. 求函数 $f(x,y)=4xy-2x^2y+2xy^2-x^2y^2$ 的极值.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=4y-4xy+2y^2-2xy^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=4x-2x^2+4xy-2x^2y$，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4y-2y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4-4x+4y-4xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x-2x^2.$$

令$\begin{cases} 4y-4xy+2y^2-2xy^2=0 \\ 4x-2x^2+4xy-2x^2y=0 \end{cases}$，解得驻点：$(1,-1),(0,0),(2,0),(0,-2),(2,-2)$.

$H\big|_{(1,-1)}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0, A=2>0$，$\therefore (1,-1)$为极小值点，$f(1,-1)=-1$.

类似可求其他各点处的H值：

$$H\big|_{(0,0)}=-16<0,\ H\big|_{(2,0)}=-16<0,\ \ H\big|_{(0,-2)}=-16<0,\ H\big|_{(2,-2)}=-16<0。$$

$\therefore$ $(0,0),(2,0),(0,-2),(2,-2)$ 为鞍点.

**5. 求方程 $x^2+y^2+z^2+2x-6z-6=0$ 所确定的函数$z=f(x,y)$的极值：

解：两边对x、y求偏导：$2x+2zz_x+2-6z_x=0$ (1)

$$2y+2zz_y-6z_y=0 \qquad (2)$$

$$\begin{cases} z_x = \dfrac{x+1}{3-z} = 0 \\ z_y = \dfrac{y}{3-z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

代入原式得 $z = 7, z = -1$.

将（1）对 x 求偏导： $2 + 2z_x^2 + 2zz_{xx} - 6z_{xx} = 0$，

将（2）对 y 求偏导： $2 + 2z_y^2 + 2zz_{yy} - 6z_{yy} = 0$，

将（2）对 x 求偏导： $2z_x z_y + 2zz_{xy} - 6z_{xy} = 0$，

$$\therefore\ z_{xx} = \frac{1+z_x^2}{3-z}, \qquad z_{yy} = \frac{1+z_y^2}{3-z}, \qquad z_{xy} = \frac{z_x z_y}{3-z}.$$

当 $x = -1, y = 0$ 时，$z_{xx} = \dfrac{1}{3-z} < 0, z_{yy} = \dfrac{1}{3-z}, z_{xy} = 0$

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3-z} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3-z} \end{vmatrix} > 0,$$

故 $z = 7$ 时，$z_{xx} = \dfrac{1}{3-7} < 0$，函数有极大值 7，

故 $z = -1$ 时，$z_{xx} = \dfrac{1}{3+1} > 0$，函数有极小值 -1.

***6. 试证函数 $z = \left(1 + e^y\right)\cos x - ye^y$ 有无穷多个极大点而没有极小点.

解： $z_x = -(1+e^y)\sin x = 0 \quad \Rightarrow x = k\pi$，

$$z_y = e^y \cos x - e^y - ye^y = 0 \ \Rightarrow y = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi \\ -2, & x = (2k+1)\pi \end{cases}.$$

$z_{xx} = -(1+e^y)\cos x$， $z_{xy} = -e^y \sin x = 0$， $z_{yy} = e^y(\cos x - 1) - e^y - ye^y$，

$x = 2k\pi$ 时

$$H = \begin{vmatrix} -(1+e^y) & 0 \\ 0 & -e^y(1+y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} > 0，\ z_{xx} = -2 < 0，$$

$x = (2k+1)\pi$ 时

$$H = \begin{vmatrix} 1+e^y & 0 \\ 0 & -e^y(3+y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} < 0，$$

所以函数有无穷多个极大值点$(2k\pi,0)$， 无极小值点.

第 11 章（之 8）（总第 66 次）

教学内容：§11.7 [§11.7.2-§11.7.3] 最值，条件极值，拉格朗日乘子法

**1. 函数$f(x,y,z)=z-2$在$4x^2+2y^2+z^2=1$条件下的极大值是　　(　　)

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

答：(C).

**2. 求函数$u=x-2y+2z$在指定约束条件$x^2+y^2+z^2=9$下的极值.

解：$L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$,

令$\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0$，　　$\dfrac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y=0$，

$\dfrac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda y=0$，　　$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-9=0$，

$\therefore x=-\dfrac{1}{2\lambda}, y=\dfrac{1}{\lambda}, z=\dfrac{-1}{\lambda}$.

代入$x^2+y^2+z^2-9=0$，　得$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$，$(x,y,z)=\pm(-1,2,-2)$.

$\therefore u(-1,2,-2)=-9$为极小值，　$u(1,-2,2)=9$为极大值.

***3. 求函数$f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y+5$在区域

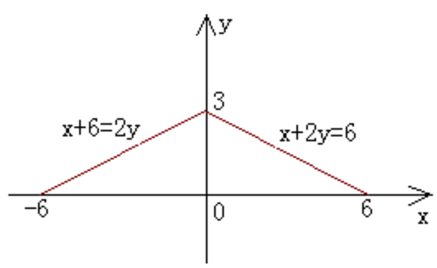
$D=\{(x,y)|2y-6\le x\le 6-2y, 0\le y\le 3\}$

上的最小值，最大值.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-2$ ，　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y-4$，

$\therefore$　临界点为（1，2），　$f(1,2)=0$.

以下求边界上的最值



（1）$x+6=2y$，$0\le y\le 3$：

$$f(x,y)=(2y-6)^2+y^2-2(2y-6)-4y+5$$
$$=5y^2-32y+53$$

由 $\frac{d}{dy}(5y^2-32y+53)=10y-32<0$ 可知：

当 $y=0$，取最大值 $f(-6,0)=53$，当 $y=3$，取最小值 $f(0,3)=2$.

（2） $x=6-2y,\quad 0\le y\le 3$：

$$f(x,y)=(-2y+6)^2+y^2-2(-2y+6)-4y+5$$
$$=5y^2-24y+29$$

当 $y=0$，取最大值 $f(6,0)=41$，

当 $y=\frac{24}{10}$，取最小值 $f(\frac{6}{5},\frac{12}{5})=\frac{1}{5}$.

（3）当 $y=0$，$-6\le x\le 6$： $f(x,y)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$.

当 $x=-6$，取最大值 $f(-6,0)=53$， 当 $x=1$，取最小值 $f(1,0)=4$.

综合得：当 $x=1,y=2$ 时取最小值 $f(1,2)=0$，

当 $x=-6,y=0$ 时取最大值 $f\left(-6,0\right)=53$.

**4. 求函数 $z=x^2-2y^2+2x+2$ 在闭域 $D:x^2+4y^2\le 4$ 上的最大值和最小值.

答：由 $\begin{cases} z_x=2x+2=0 \\ z_y=-4y=0 \end{cases}$ 得 D 内驻点 $(-1,0)$，且 $z(-1,0)=1$.

在边界 $x^2+4y^2=4$ 上， $z_1=\frac{3}{2}x^2+2x\quad(-2\le x\le 2)$，

$z_1'=3x+2=0$，得驻点 $x=-\frac{2}{3}$，

$z_1(-2)=2\qquad z_1(2)=10\qquad z_1(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$，

$x=\pm 2$ 时 $y=0,x=-\frac{2}{3}$ 时 $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$,

比较后可知, 函数 z 在点 $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2}),(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{2})$ 取最小值

$$z(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\sqrt{2})=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\sqrt{2})=-\frac{2}{3},$$

在点 $(2,0)$ 取最大值 $z(2,0)=10$.

**5. 求表面积为 S，而体积为最大的圆柱体的体积.

解：设圆柱体的底圆半径为r，高为h．则圆柱体的体积

$$V=\pi r^2 h,\quad 且\quad 2\pi r^2+2\pi rh=S.$$

令$L=\pi r^2 h+\lambda\left(2\pi r^2+2\pi rh-S\right)$，

由$\begin{cases}L_r=2\pi rh+4\lambda\pi r+2\lambda\pi h=0\\ L_h=\pi r^2+2\lambda\pi r=0\\ L_\lambda=2\pi r^2+2\pi rh-S=0\end{cases}$，

得 $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$,$h=2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$．

$$V\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}},2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)=2\pi\left(\frac{S}{6\pi}\right)^{3/2}$$

由于实际问题必定存在最大值，因此当圆柱体的底圆半径与高分别取$\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$，$2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$

时，　有最大体积$V_{\max}=2\pi\left(\dfrac{S}{6\pi}\right)^{3/2}$．

**6. 周长为 6p 的长方形，绕其一边旋转得一旋转体，试证明其体积不超过$4\pi p^3$.

证：设长方形的长为 a，宽为 b，

$$\max.V=\pi a^2 b$$
$$s.t.\quad 2(a+b)=6p$$

令$L=\pi a^2 b+\lambda$（$a+b-3p$），

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial a}&=2\pi ab+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial b}&=\pi a^2+\lambda=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2b=2p,$$

$\therefore\quad V\max=\pi(2p)^2 p=4\pi p^3$.

**7. 在椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$位于第一卦限的部分内，作各侧面平行于坐标面的内接长方体，问长方体的尺寸如何，方能使其体积为最大？（$a>0,b>0,c>0$）

解：设长方体的长、宽、高分别为x,y,z，则长方体与椭球的交点为 (x,y,z)，

所以长方体的体积 $V=xyz$， 且$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

令 $L=xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$

由$\begin{cases} L_x=yz+\dfrac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ L_y=xz+\dfrac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ L_z=xy+\dfrac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ L_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$

得 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$，于是 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$， $y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$， $z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，

由于实际问题的最大值必定存在，因此当内接长方体的长、宽、高分别取

$\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}$时，其体积最大.

**8. 在抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=4$ 的交线上，求出到原点距离最大和最小的点.

解：目标函数：$u=x^2+y^2+z^2$，

$$s.t.\ \begin{aligned} x^2+y^2-z=0 \\ x+y+z-4=0 \end{aligned}.$$

令$L(x,y.z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-4)$，

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2x\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2y\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2z-\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x^2+y^2-z=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x+y+z-4=0 \qquad (5)$$

由（1）（2）可得 $\lambda_1=-1$ 或 $x=y$，

当$\lambda_1=-1$时，由（1）（3）可得 $\lambda_2=0$或$z=\dfrac{-1}{2}$代入（4）可见无解.

当$\lambda_1\neq-1$时，由$x=y$可得 $(x,y,z)=(1,1,2)$或$(-2,-2,8)$，

容易验证 $u_{\max}=u(-2,-2,8)=72,\quad u_{\min}=u(1,1,2)=6$，

∴距离最大的点为（-2，-2，8），距离为 $6\sqrt{2}$，

距离最小的点为（1，1，2），距离为$\sqrt{6}$.

***9. 试证明n个正数$x_1,x_2,\cdots x_n$的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

证：$\forall a>0$，我们求在满足条件$x_1+x_2+\cdots+x_n=na\quad(x_i>0)$时，$u=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$的极大值.

令$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-na)$，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_2\cdots x_n+\lambda x_1=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1x_3\cdots x_n+\lambda x_2=0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n}=x_1\cdots x_{n-1}+\lambda x_n=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n-na=0$$

解得：$x_1=x_2=\cdots=x_n=a$． 容易验证此时，$x_1,x_2,\cdots x_n$取极大值，

即 $$x_1x_2\cdots x_n\leq a^n=(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^n,$$

∴ $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

第 12 章 （之 1）（总第 67 次）

教学内容: §12．1 二重积分概念与性质

**1．解下列各题：

(1) 若 D 是以 $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1)$ 为顶点的三角形区域，利用二重积分的几何意义可得到 $\iint\limits_D (1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

答：$\dfrac{1}{6}$

(2) 设 $f(t)$为连续函数，则由平面 z=0，柱面 $x^2+y^2=1$ 和曲面 $z=f^2(xy)$ 所围立体的体积可用二重积分表示为____________________________________.

答：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f^2(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+\cos^2 x+\sin^2 y}$ 则 I 满足 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}\le I\le 2$ (B) $2\le I\le 3$

(C) $D\le I\le\dfrac{1}{2}$ (D) $-1\le I\le 0$

答：(A).

(4) 设 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 及 $I_3=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$ 其中 D 是由直线 x=0，y=0，$x+y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x+y=1$ 所围成的区域，则 I_1，I_2，I_3 的大小顺序为 ( )

(A) $I_3<I_2<I_1$； (B) $I_1<I_2<I_3$； (C) $I_1<I_3<I_2$； (D) $I_3<I_1<I_2$.

答：（B）.

(5) 设 $D: x^2+y^2\le a^2\,(a>0)$, 当 $a=$_________时，$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\pi$.

（A） 1； (B) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$； (C) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$； (D) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

答：（B）.

**2．解下列问题：

(1) 利用二重积分性质，比较二重积分的大小：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中，D 为任一有界闭区间.

解：令 $u=x^2+y^2$，且 $f(u)=e^u-(1+u)$，则有 $f'(u)=e^u-1$.

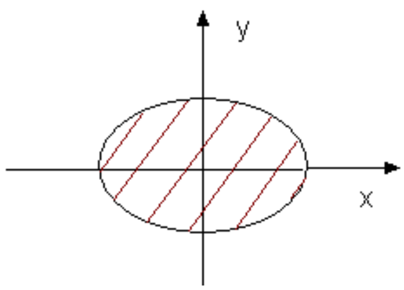
$\because u\ge 0$，　$\therefore$ $e^u-1\ge 0$, 即 $f'(u)\ge 0$，　$f(u)$ 是增函数.

$\because$ $f(0)=e^0-1=0$，　$\therefore$ $f(u)-f(0)\ge 0$ 即 $e^u-(1+u)\ge 0$，

$\therefore e^{x^2+y^2}\ge 1+x^2+y^2$，　因此 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma\ge\iint\limits_D (1+x^2+y^2)d\sigma$.

(2) 利用二重积分性质，估计二重积分的值：

$$\iint\limits_D (1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma，\quad D=\{(x,y)|9x^2+16y^2\le 144\}.$$



解：先求出目标函数 $f(x,y)=x^2+y^2+1$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$ 上的最小值和最大值，

由于区域 D 上的点到坐标原点 $O=(0,0)$ 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，

$\therefore 0\le\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{4^2+0}=4$，

$\therefore 1\le f(x,y)\le 17$，

又因为该区域的面积为　$D=\pi\times 3\times 4=12\pi$，

$$\therefore\quad 12\pi\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le 17\times 12\pi=204\pi .$$

***3．试利用积分值与积分变量名称无关，解下列问题：

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{\sin(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

解：因为 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt[3]{\sin(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{y^2+x^2\le 1}\sqrt[3]{\sin(y-x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-I$，所以 $I=0$.

(2) $\iint\limits_{x^2\le 1, y^2\le 1} \dfrac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：$I=\iint\limits_{x^2\le 1, y^2\le 1} \dfrac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{y^2\le 1, x^2\le 1} \dfrac{a\mathrm{e}^y+b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$,

$$I=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_{x^2\le 1, y^2\le 1} \frac{a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{y^2\le 1, x^2\le 1} \frac{a\mathrm{e}^y+b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2\le 1, y^2\le 1} \frac{(a+b)\mathrm{e}^x+(a+b)\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint\limits_{x^2\le 1, y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(a+b) .$$

***4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，试利用积分中值定理求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

解：积分区域 $D: x^2+y^2\le r^2$ 为有界区域，且 $f(x,y)$ 连续，

$\therefore$ 由积分中值定理可知：存在点 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)S_D$，

即：$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)d\sigma=\pi r^2 f(\xi,\eta)$，

又 $\because$ 当 $r\to 0$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

$\therefore$ $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)d\sigma=f(0,0)$.

第 12 章 （之 2）（总第 68 次）

教学内容 ： §12．2．1 二重积分在直角坐标系下的计算方法

1．解下列各题：

**（1）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a}{2}}^{a}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\ (a>0)$

可交换积分次序得__________________________.

答：原式$=\int\limits_0^a \mathrm{d}x\int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

**（2）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则二次积分 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1+x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ （　　）

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-1}^{\sqrt{y^2-1}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{y-1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-1}^{-\sqrt{y^2-1}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

答：(C)

**（3）设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换二次积分 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$ 的积分次序的结果为

（　　）

（A）$\int_1^e dy\int_0^{\ln x}f(x,y)dx$；　(B) $\int_1^e dy\int_0^{\ln x}f(x,y)dx$；

(C) $\int_1^e dy\int_0^{\ln x}f(x,y)dx$；　(D) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)dx$.

答：(D)

**（4）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 可交换积分次序为　（　　）

（A）$\int_0^1 dy\int_0^{y}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y}f(x,y)dx$；

（B）$\int_0^1 dy\int_0^{x^2}f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-x}f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$；

（D）$\int_0^1 dy\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dx$.

答：(C)

**（5）设函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上连续，使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ 成立的充分条件是　（　　）

（A）$f(-x,y)=f(x,y)$，　$f(x,-y)=-f(x,y)$；

（B）$f(-x,y)=-f(x,y)$，$f(x,-y)=f(x,y)$；

（C）$f(-x,y)=-f(x,y)$，$f(x,-y)=-f(x,y)$；

（D）$f(-x,y)=f(x,y)$，$f(x,-y)=f(x,y)$.

答：（D）.

2．画出下列各题中给出的区域D，并将二重积分化成两种不同顺序的二次积分（假定在区域上连续）.

**（1）D由曲线 $xy=1, y=x, x=2$ 围成；

解：$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

**（2）$D=\{(x,y)|\max(1-x,x-1)\le y\le 1\}$

解：$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{x-1}^{1} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y} f(x,y)dx$

**（3） D：$x+y\le 1$，$x-y\le 1$，$x\ge 0$.

解：原式$=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy=\int_{-1}^{0} dy\int_0^{y+1} f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

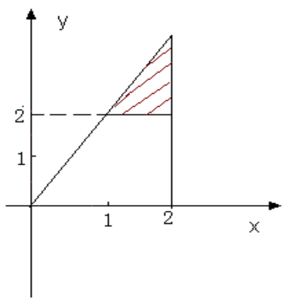
3．计算二次积分：

**(1) $\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} e^{x^2-2x}dx$.

解：$D:2\le y\le 4,\frac{y}{2}\le x\le 2$，变换积分次序得 $D^*:1\le x\le 2,\quad 2\le y\le 2x$，

原式$=\int_1^2 e^{x^2-2x}dx\int_2^{2x} dy=\int_1^2 e^{x^2-2x}(2x-2)dx$

$=\int_1^2 e^{x^2-2x}\mathrm{d}(x^2-2x)=e^{x^2-2x}\Big|_1^2=1-\frac{1}{e}$.



**(2) $\int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{x} x\sqrt{1-x^2+y^2}dy$.

解：原式$=\int_{-1}^{1} dy\int_y^1 x\sqrt{1-x^2+y^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1-|y|^3)dy\ =\frac{1}{2}$.

4．计算下列二重积分

**(1) $\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2-y}}$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2y\}$；

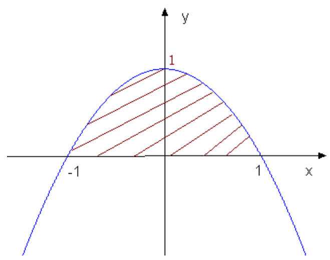
解：原式$=2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{2-y}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

**(2) 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中由 y=x 和 y=x^3 所围成的区域.

解：原式=$\int_0^1 e^{x^2}dx\int_{x^3}^{x}dy=\int_0^1(xe^{x^2}-x^3e^{x^2})dx\ =\dfrac{1}{2}e-1$.

**(3) 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\sqrt{1-y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le 1-x^2\}$.

解：$D=\{(x,y)|0\le y\le 1-x^2\}\Rightarrow D:0\le y\le 1$，



$$\text{原式}=\int_0^1\sqrt{1-y}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}x^2dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1-y}dy\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{1-y}\left[(1-y)\sqrt{1-y}+(1-y)\sqrt{1-y}\right]dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^2dy=-\frac{2}{3}\int_0^1(1-y)^2d(1-y)$$

$$=-\frac{2}{9}(1-y)^3\Big|_0^1=\frac{2}{9}$$

**(4) 计算二重积分 $\iint\limits_D|x-y|\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 2\}$.

解：直线 $y=x$ 把区域 D 分成 D_1（上）、D_2（下）两个部分，

$$\iint\limits_D|x-y|\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x-y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^2(y-x)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(y-x)^2\Big|_x^2\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{1}{2}(x-y)^2\Big|_0^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x^2-2x+2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

**(5) 计算二重积分 $\iint\limits_D x\sin(x+y)d\sigma$，其中 D 由直线 $x=\sqrt{\pi}$ 、抛物线 $y=x^2-x$ 及其在（0，0）点的切线围成.

解：抛物线 $y=x^2-x$ 在（0，0）处切线斜率 $y'(0)=-1$，此切线方程为 $y=-x$，

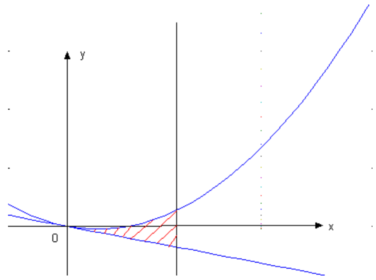
区域 D: $0\le x\le\sqrt{\pi}$， $-x\le y\le x^2-x$，

$$\iint\limits_D x\sin(x+y)d\sigma$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_{-x}^{x^2-x}x\sin(x+y)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}dx\int_{-x}^{x^2-x}x\sin(x+y)d(x+y)$$

$$=-\int_0^{\sqrt{\pi}}dx[x\cos(x+y)]\Big|_{y=-x}^{y=x^2-x}$$



$$=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(\cos 0-\cos x^2)dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}x(1-\cos x^2)dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\pi}{2}.$$

6．试利用积分区域的对称性和被积函数（关于某个单变量）的奇偶性，计算二重积分：

**(1) $\iint\limits_D(ax+by+c)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，$a,b,c$ 为常数.

解：$\iint\limits_D(ax+by+c)d\sigma=\iint\limits_D axd\sigma+\iint\limits_D byd\sigma+\iint\limits_D cd\sigma$，

$\because D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，既关于 y 轴对称，又关于 x 轴对称.

又$\because f(x)=ax$ 为奇函数，$g(y)=by$ 也为奇函数.

$\therefore$由积分区域对称性及被积函数的奇偶性可知：$\iint\limits_D axd\sigma=0,\quad \iint\limits_D byd\sigma=0$.

**(2) $\iint\limits_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)||x|\le 1,0\le y\le 2\}$.

解：$\iint\limits_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy=\iint\limits_D\frac{x^2}{1+x^6}dxdy+\iint\limits_D\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}dxdy$，

$\because D=\{(x,y)||x|\le 1,0\le y\le 2\}$，关于 y 轴对称，

又$u(x,y)=\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}$，关于 x 为奇函数，　　$\therefore\iint\limits_D\frac{x^7\sqrt{1+y}}{1+x^6}dxdy=0$，

$$\therefore\ \iint\limits_D\frac{x^2(1+x^5\sqrt{1+y})}{1+x^6}dxdy=\iint\limits_D\frac{x^2}{1+x^6}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2\frac{x^2}{1+x^6}dy$$

$$=2\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{1+(x^3)^2}\mathrm{d}x^3=\frac{4}{3}\arctan x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}.$$

第 12 章（之 3）（总第 69 次）

教学内容： §12．2．2 二重积分在极坐标系下的计算方法

1． 填空与选择

**(1) 设 D：$0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$，根据二重积分的几何意义，则

$$\iint\limits_{D} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \underline{\qquad\qquad}.$$

答：$\dfrac{1}{6}\pi$.

**(2) 设区域 D 是 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 与 $x^2+y^2 \leqslant 2x$ 的公共部分，试写出 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下先对 ρ 积分的累次积分________________.

解：记 $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho$，则

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{1} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho.$$

**（3）若区域 D 为 $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$，设 $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho$，

则二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成累次积分为 （ ）

(A) $\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$ ；

(B) $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$；

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$；

(D) $2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} F(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho$.

答：（C）.

** (4)若区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant 2x$，则二重积分 $\iint\limits_{D} (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ 化成累次积分为（ ）

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} (\cos\theta + \sin\theta)\sqrt{2\rho\cos\theta}\,\rho \mathrm{d}\rho$；

(B) $\int_{0}^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} \rho^3 \mathrm{d}\rho$；

(C) $2\int_{0}^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\cos\theta}\rho^{3}\mathrm{d}\rho$；

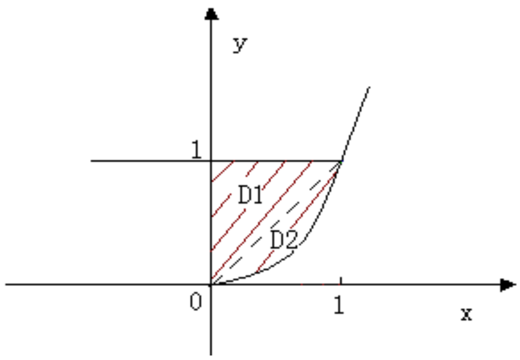
(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\cos\theta}\rho^{3}\mathrm{d}\rho$.

答：（D）.

2．化下列二重积分为极坐标下的二次积分

**(1) $\iint\limits_{D} f(xy)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$.

解：令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$



在区域 D1 上 $\rho\sin\theta=(\rho\cos\theta)^2$ 即

$$\rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\quad(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

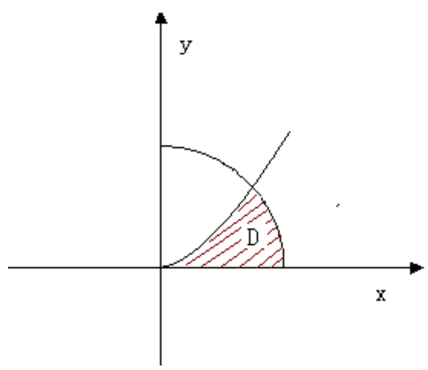
在区域 D2 上 $\rho\sin\theta=1$ 即

$$\rho=\frac{1}{\sin\theta}\quad(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),$$

$$\iint\limits_{D} f(xy)d\sigma=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}}f(\rho^2\sin\theta\cos\theta)\rho d\rho .$$

**(2). $\iint\limits_{D} f(x+y)d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)|\ \sqrt{y}\le x\le\sqrt{2-y^2}, 0\le y\le 1\}$.



解：令 $x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$，由

$$y=x^2\Rightarrow\rho\sin\theta=(\rho\cos\theta)^2\Rightarrow\rho=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

由 $x^2+y^2=2\Rightarrow\rho=\sqrt{2}$，

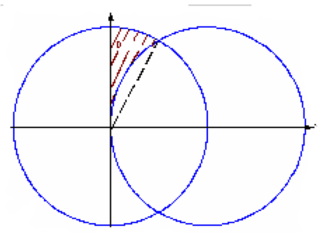
$$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{2}\cos^2\theta,$$

$1-\cos^2\theta=2\cos^4\theta$，解得：$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，

$$\iint\limits_{D} f(x+y)d\sigma=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)\rho d\rho .$$

3． 用极坐标计算下列积分

**(1) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$；



解：将二次积分 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$ 看作二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化来，

$D:0\le x\le 1$，$\sqrt{4x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$ ，

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，则： $4\cos\theta\le\rho\le 2$，

如图，两圆交点 $(x,y)=(1,\sqrt{3})$，即 $(\rho,\theta)=(2,\frac{\pi}{3})$，所以

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{4\cos\theta}^{2}\rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{3}\rho^3)\Big|_{4\cos\theta}^{2}d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{8}{3}-\frac{64}{3}\cos^3\theta)d\theta=\frac{8}{3}\times\frac{\pi}{6}-\frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{9}\pi-\frac{64}{3}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3})+\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{3}[(\sin\frac{\pi}{2})^3-(\sin\frac{\pi}{3})^3]$$

$$=\frac{4}{9}\pi-\frac{128}{9}+8\sqrt{3}.$$

**(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}dx$.

解：$D=\left\{(x,y)\Big|y\le x\le\sqrt{1-y^2},0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\left\{(\rho,\theta)\Big|0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$，

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{y}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\theta\cdot\rho d\rho d\theta=\frac{\pi^2}{64}.$$

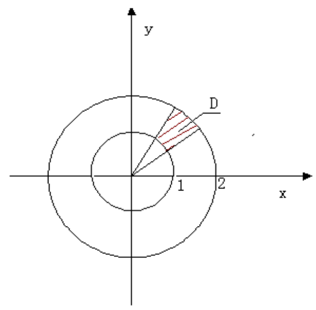
**4．设 $f(x,y)$ 是连续函数，将二次积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho,\quad (a>0)$$

化为在直角坐标系下先对 y 后对 x 的二次积分.

解：原式= $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$.

5． 计算下列二重积分



***(1) $\iint\limits_D \frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)|\ 1\le x^2+y^2\le 4, x\le y\le \sqrt{3}x\}$.

解：在极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 下，

$x\le y\le\sqrt{3}x$，有 $1\le\tan\theta\le\sqrt{3}$，即 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$，

又 $\because$ $1\le x^2+y^2\le 4$， 则 $1\le\rho^2\le 4$，即 $1\le\rho\le 2$，所以

$$\iint\limits_D \frac{e^{\arctan\frac{y}{x}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 \frac{e^{\arctan(\tan\theta)}}{\rho} d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} e^{\theta} d\theta = e^{\theta}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{4}} .$$

***(2) $\iint\limits_D e^{xy}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|1\le xy\le 2, x\le y\le 2x\}$.

解：$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}}} e^{\rho^2\sin\theta\cos\theta}\rho d\rho$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}e^{\rho^2\cos\theta\sin\theta}\Big|_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}}}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\left(e^2-1\right)d\theta=\frac{e^2-e}{2}\ln 2$$

6． 计算下列平面区域的面积：

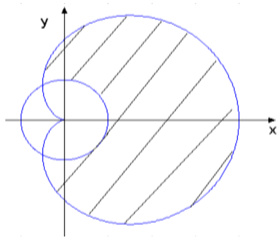
*(1) 计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x+2$ 围成区域的面积.

解： $\because x^2=x+2$ 即 $x=-1$, $x=2$.

$\therefore$交点为(－1,1)与(2，4)

A= $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy$ = $\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx$ = $4\frac{1}{2}$.

**(2) $D=\{(\rho\cos\varphi,\rho\cos\varphi\}\mid\frac{1}{2}\le\rho\le 1+\cos\varphi\}$.



解：$A=\iint\limits_D d\sigma$

$$=2\left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho d\rho-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\rho d\rho\right)$$

$$=\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{8}\sqrt{3}\text{。}$$

7． 计算下列立体体积

**(1) 利用二重积分计算由下列曲面 $z=x^2+y^2,y=1,z=0,y=x^2$ 所围成的曲顶柱体的体积.

解： $v=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy$

$$=2\int\limits_0^1(x^2(1-x^2)+\frac{1}{3}(1-x^6))dx\ =\frac{88}{105}.$$

**(2) $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$

解：$V=\iint\limits_D\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)d\sigma-\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho d\rho-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho$$

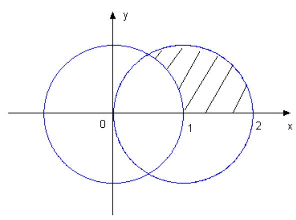
$$=2\pi\left(\int_0^1\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho d\rho-\frac{1}{4}\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{6}\pi\text{。}$$

8． 计算下列二重积分

***(1) $\iint\limits_D xyd\sigma$， 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|y\ge 0,x^2+y^2\ge 1,x^2+y^2-2x\le 0\right\}.$

解：$I=\int_0^{\frac{1}{3}\pi}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta\cos\theta d\rho$



$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\sin\theta\cos\theta\cdot\left[16(\cos\theta)^4-1\right]d\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{8}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9}{16}.$$

***(2) 计算二重积分 $\iint\limits_{\substack{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2\\ x\ge 0,y\ge 0}} |y-x|dxdy$.

解：因为 $|y-x| = \begin{cases} y-x,\text{当}1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2, y\ge x\text{确定的区域} \\ x-y,\text{当}1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2, 0\le y\le x\text{确定的区域} \end{cases}$.

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta\int_1^2 r^2dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta\int_1^2 r^2dr$$

$$=\frac{7}{3}\{[-\cos\theta-\sin\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+[\sin\theta+\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\}=\frac{7}{3}(-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)=\frac{14}{3}(\sqrt{2}-1).$$

***(3) 设 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，而 D 是平面区域 $x+y\le t$. 求 $F(t)$.

解： 设 $D^*: 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1$.

由题意易知 $F(t)$ 即为 $D\cap D^*$的面积，所以

$$F(t)=\begin{cases}0, t\le 0\\ \frac{1}{2}t^2, 0<t\le 1\\ -\frac{t^2}{2}+2t-1, 1<t\le 2\\ 1, t>2\end{cases}.$$

****9. 设 $f(t)$ 是连续函数，证明 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}f(u)du$.

证明：$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{1+x}f(x+y)dy+\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x}f(x+y)dy$.

令 $x+y=u$， 则

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1}^{1+2x}f(u)du+\int_0^1 dx\int_{2x-1}^{1}f(u)du$$

$$=\int_{-1}^{1}f(u)du\int_{\frac{u-1}{2}}^{\frac{u+1}{2}}dx=\int_{-1}^{1}f(u)du$$

第 12 章　（之 4）（总第 70 次）

教学内容： §12．3 三重积分的概念与性质；§12．4．1 直角坐标系下三重积分的计算

1． 选择题

*(1)　设

$I_1=\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v, I_2=\iiint\limits_{\Omega}(1+x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v, I_3=\iiint\limits_{\Omega}(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v$，

Ω 是由 $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ 所确定的区域，则用不等号表达 I_1,I_2,I_3 三者大小关系是　　　　　　　　　　（　）

（A）$I_1>I_2>I_3$；　（B）$I_1>I_3>I_2$；　（C）$I_2>I_1>I_3$；　（D）$I_3>I_2>I_1$。

答：(B)

**(2) 设 Ω_1：$x^2+y^2+z^2\leq R^2$，$z\geq 0$；Ω_2：$x^2+y^2+z^2\leq R^2$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$．　则　　　　　　　　　　（　　）

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} z^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} x^{99}\mathrm{d}V.$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} z^{99}\mathrm{d}V$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} x^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2} y^{99}\mathrm{d}V$.　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}(xyz)^{99}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}(xyz)^{99}\mathrm{d}V.$

答：(A)

2． 填空题

**（1）$I=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ -1\leqslant z\leqslant 1}}[x^3e^z\ln(1+x^2)+ye^{y^2}+2]\mathrm{d}v$ =__________________.

答： $I=4\pi$.

***（2）设 Ω 为空间有界闭区域，其上各点的体密度为该点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，则 Ω 关于直线 $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{0}=z$ 的转动惯量的三重积分公式为

____.

答：$\mathrm{I}=\iiint\limits_{\Omega}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\cdot\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\mathrm{d}v$

3．***（1）试将积分$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化成先对 x，再对 y，最后对 z 积分的三次积分式.

解：

$$\int_{0}^{1}\mathrm{d}z\int_{-z}^{z}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}x$$

***（2）把下列给定区域Ω上的三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$化为三次积分：$\Omega$由曲面

$z=2x^2+y^2-1$和$z=1-y^2$围成.

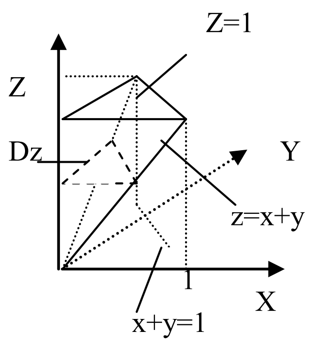
解：$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left\{\int_{2x^2+y^2-1}^{1-y^2}f(x,y,z)dv\right\}dxdy$$

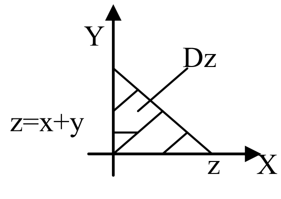
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{2x^2+y^2-1}^{1-y^2}f(x,y,z)dz\,.$$

***（3）将下列三次积分看作由三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$化来，试画出其积分区域$\Omega$，并将其改写成先$x$后$y$再$z$的三次积分：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_{x+y}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

解：Ω由平面$z=x+y$、$z=1$及坐标面yoz、xoz 所围而成.

原积分$=\int_0^1dz\iint\limits_{Dz}f(x,y,z)dxdy=\int_0^1dz\int_0^z dy\int_0^{z-y}f(x,y,z)dx$.





**4．计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\sin(y+z)dv$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le\sqrt{y},\ 0\le z\le\dfrac{\pi}{2}-y\right\}$.

解：Ω 由柱面 $y=x^2$、平面 $y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 及坐标面 xoy、yoz 所围而成.

$$\iiint\limits_{\Omega} x\sin(y+z)dv=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{\frac{\pi}{2}-y} x\sin(y+z)dz=\iint\limits_{D_{xy}} x\cos y dxdy$$

$$=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xdx\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\cos ydy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x(1-\sin x^2)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cos x^2\right)_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

这里 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|\,0\le x\le\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad x^2\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$

***5．计算 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{x}\mathrm{d}y\int_0^{y}\sin(\pi-z)^3\,\mathrm{d}z$.

解：

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}z\int_z^{\pi}\mathrm{d}y\int_y^{\pi}\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}z\int_z^{\pi}(\pi-y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\pi-z)^2\sin(\pi-z)^3\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{6}(1-\cos\pi^3)$$

***6．试利用积分区域Ω表达式对变量名称轮换的不变性，及被积函数的对称关系，并根据积分与积分变量名称无关的性质计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}[(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z]dv,$$

其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\}$.

解：由积分值与积分变量无关，并且积分区域对 x、y、z 具有轮换不变性，从而

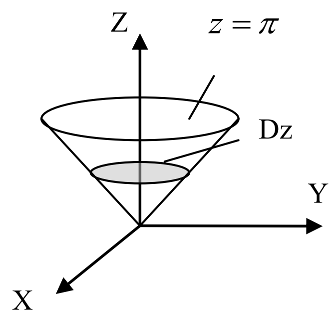
$$\iiint\limits_{\Omega} xdv=\iiint\limits_{\Omega} ydv=\iiint\limits_{\Omega} zdv,$$

故 $\iiint\limits_{\Omega}[(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z]dv$

$$=(b-c)\iiint\limits_{\Omega} xdv+(c-a)\iiint\limits_{\Omega} ydv+(a-b)\iiint\limits_{\Omega} zdv$$

$$=(b-c)\iiint\limits_{\Omega} xdv+(c-a)\iiint\limits_{\Omega} xdv+(a-b)\iiint\limits_{\Omega} xdv\quad=0.$$

**7．用先重后单方法计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \sin z \, \mathrm{d}v$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=\pi$ 围成.



解：$\iiint\limits_{\Omega} \sin z dv = \int_0^{\pi} dz \iint\limits_{D_z} \sin z dxdy$

$$= \int_0^{\pi} \pi \, z^2 \sin z dz = \pi^3 - 4\pi,$$

这里 $D_z = \{(x, y) | 0 \le x^2 + y^2 \le z^2\}$.

***8．设 $f(z)$ 在 $[-1, 1]$ 上有连续的导函数，试证：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} f'(z) \mathrm{d}v = 2\pi \int_{-1}^{1} z f(z) \mathrm{d}z$$

解：

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} f'(z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi(1-z^2) f'(z) \mathrm{d}z$$

$$= \pi f(z)(1-z^2) \Big|_{-1}^{1} + 2\pi \int_{-1}^{1} z f(z) \mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} z f(z) \mathrm{d}z$$

第 12 章 （之 5）（总第 71 次）

教学内容： §12.4.2～§12.4.3 用柱面坐标，球面坐标计算三重积分

1．**（1）设 Ω 是由 $0 \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2-y \le 0$ 所确定的闭区域，试将 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2) \mathrm{d}v$ 化成柱面坐标下的三次积分式.

解：$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} r \mathrm{d}r \int_0^{\sqrt{3}r} f(r^2+z^2) \mathrm{d}z$$

***（2）设 Ω 是由 $x^2+y^2 \le 2z$，$1 \le z \le 2$ 所确定的闭区域，试将 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2) \mathrm{d}v$ 化成柱面坐标下的三次积分式.

解： $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_1^2 f(r^2+z^2)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^2 r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2 f(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

或 $I=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}} f(r^2+z^2)r\,\mathrm{d}r$。

2．**（1）设Ω是由$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$，$0\le x\le y\le\sqrt{3}x$所确定的立体，试将$\iiint_\Omega f(y,z)\mathrm{d}v$化成球面坐标下的三次积分式.

解： $$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

**（2）Ω是由$x^2+y^2+z^2\le 2Rz$（$R>0$）所确定的立体，试将$\iiint\limits_\Omega f(x\cdot y)\mathrm{d}v$化成球面坐标下的三次积分式.

解： $$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} f(r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

**（3）试将柱面坐标下的三次积分$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$化成球面坐标下的三次积分式.

解： $$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a f[\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi]\rho^2\mathrm{d}\rho$$

3．**（1）将下列三次积分看作是由三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$化来，试说明，$\Omega$是由哪些曲面围成，并将它们化成柱面坐标和球面坐标的三次积分：

$$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z\ .$$

解：Ω由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=1$围成，

柱面坐标： $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 d\rho\int_\rho^1 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho dz$，

球面坐标： $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta dr$.

**（2）设Ω是由$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及$z=0$所围的闭区域，试将$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$分别化成球面、柱面坐标下的三次积分式.

解：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}} f(r^2)\mathrm{d}z$$

***（3）设Ω是由$x^2+y^2+z^2\le a^2$, $x^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{2}$ （$a>0$）及$z\ge 0$所确定的有界闭区域．试将$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$分别化成柱面及球面坐标下的三次积分式.

解：

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}\sin\varphi}} f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

4．**（1）计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\, x^2+y^2+z^2\le 2,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

解：$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}}\rho\, z^2\mathrm{d}z$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\left[\rho(2-p^2)^{\frac{3}{2}}-\rho^4\right]d\rho=\frac{\pi}{15}(8\sqrt{2}-4),$$

这里 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le Z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$

$$=\left\{(\rho,\varphi,z)\middle|\, 0\le\varphi\le 2\pi,0\le\rho\le 1,\rho\le z\le\sqrt{2-\rho^2}\right\}.$$

***（2）设Ω是由曲面 $x^2+y^2=2ax$，$x^2+y^2=2az$ （$a>0$）以及 $z=-1$ 所围的有界闭区域，试计算 $\iiint\limits_{\Omega}(xy+1)\mathrm{d}v$

解：由对称性 $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v=0$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\,\mathrm{d}r \int_{-1}^{\frac{r^2}{2a}} \mathrm{d}z$$

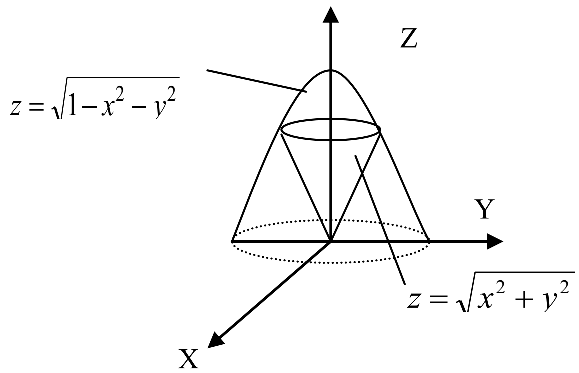
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\left(\frac{r^2}{2a}+1\right)\mathrm{d}r$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^4\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}(3a+4)$$

5. **（1）计算$\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$，其中$\Omega$是单位球$x^2+y^2+z^2\le 1$内满足$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$的部分.

解：用球面坐标



$$\iiint\limits_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 e^r r^2 \sin\theta dr$$

$$= \pi(2-\sqrt{2})(e-2)$$

***（2）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln[1+(x^2+y^2+z^2)^2]}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是上半单位球体$0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：$\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln[1+(x^2+y^2+z^2)^2]}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}v$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{r^3\ln(1+r^4)}{1+r^4}\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^1 \frac{r^3\ln(1+r^4)}{1+r^4}dr\right) = \frac{\pi\ln^2 2}{8} .$$

***（3）试将$\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 \mathrm{d}z$化成球面坐标下的三次积分式，并由此计算上面的积分值.

解：

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

亦可用柱面坐标解出如下：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r \mathrm{d}r \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{6} \int_0^1 [r(2-z^2)^{3/2} - r^4] \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{30}\left[-(2-r^2)^{5/2}\Big|_0^1 - r^5\Big|_0^1\right] = \frac{\pi}{30}(4\sqrt{2}-2) = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

***6．设Ω是半径为R的球体：$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$，试求积分$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2 \mathrm{d}v$.

解：由对称性$\iiint\limits_{\Omega} xy \mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} zx \mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} yz \mathrm{d}v = 0$，故

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2) \mathrm{d}v$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{0}^{R} r^4 \sin\varphi \mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{5}\pi R^5$$

***7．设$F(t) = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant t^2 \\ 0 \leqslant z \leqslant t}} z^2 f(x^2+y^2) \mathrm{d}v$，其中$f(t)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，求$\lim\limits_{t \to +0} \frac{F(t)}{t^5}$.

解：

$$F(t) = \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int\limits_{0}^{t} r \mathrm{d}r \int\limits_{0}^{t} z^2 f(r^2) \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi}{3} t^3 \int\limits_{0}^{t} f(r^2) r \mathrm{d}r$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{F(t)}{t^5} = \frac{\pi}{3} f(0)$$

****8.（选做题）利用三重积分, 计算下列立体Ω的体积：Ω 由曲面

$(x^2+y^2+z^2)^2=R^2(x^2+y^2)$ （$R>0$）围成.

解：由对称性知Ω关于各坐标面对称，记Ω在第一象限的立体为V_1.

在球面坐标系下，曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=R^2(x^2+y^2)$的方程为$r=R\sin\theta$，

所以Ω的体积:

$$V=8V_1=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{R\sin\theta}r^2\sin\theta\,dr$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\frac{1}{3}r^3\int_0^{R\sin\theta}d\theta=\frac{4\pi R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4\pi R^3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi^2R^3$$

第 12 章 （之 6）（总第 72 次）

教学内容： §12．5 重积分的应用

1．计算下列曲面面积

**(1) 试求半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 被抛物面$x^2+y^2=z$所截而适合$z\geq x^2+y^2$的一部分曲面Σ的面积 *S*.

解：$S=\oiint\limits_{\Sigma}dS$，而 Σ在 *xoy* 面上的投影域为 *D*：$x^2+y^2\leqslant1$.

面积元素为$dS=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{2-x^2-y^2}\right)^2+\left(\frac{-y}{2-x^2-y^2}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{2}dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$.

$$\therefore\quad S=\sqrt{2}\oiint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{2-r^2}}=\sqrt{2}\cdot2\pi\cdot(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi\text{。}$$

**(2) 平面$2x+2y-z=4$上被圆柱面$x^2+y^2-2x=0$截下的那一部分.

解：平面$2x+2y-z=4$被圆柱面$x^2+y^2-2x=0$截下的那一部分向 xoy 面的投影线为：

$$\begin{cases}z=0\\x^2+y^2-2x=0\end{cases}.$$

$z=2x+2y-4,\quad z_x=2,\quad z_y=2$，

$$\therefore\ S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}3dxdy=3\pi\ .$$

**(3) 锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$上被柱面$z^2=2y$截下的那一部分.

解：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2y$ 在 xoy 面投影曲面为

$$\begin{cases}z=0\\x^2+y^2=2y\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}z=0\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}.$$

$$\therefore S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\sqrt{2}\pi\ .$$

**(4) Ω由柱面$x^2+y^2=9$、平面$4y+3z=12$和$4y-3z=12$围成.

解：平面 $4y+3z=12$和$4y-3z=12$ 截下的柱面 $x^2+y^2=9$ 在 yoz 面的投影

$$D_1=\left\{(y,z)\middle|\,y\ge 1,z\le 4-\frac{4}{3}y,z\ge\frac{4}{3}y-4\right\},$$

平面 $4y+3z=12$和$4y-3z=12$ 与 $x^2+y^2=9$ 相交部分在 xoy 面投影是

$$D_2:x^2+y^2\le 9\ .$$

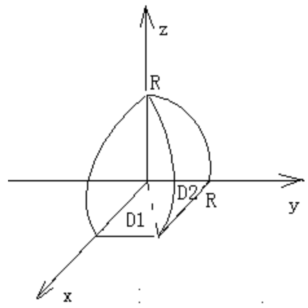
$$A=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+x_y{}^2+x_z{}^2}\,dydz+\iint\limits_{D_2}\sqrt{1+z_y{}^2+z_x{}^2}\,dxdy,$$

由对称性得

$$A=4\int_{-3}^{3}dy\int_0^{4-\frac{4}{3}y}\sqrt{1+\frac{y^2}{9-y^2}}\,dz+2\iint\limits_{x^2+y^2\le 9}\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,dxdy$$

$$=48\pi+30\pi=78\pi\ .$$

**(5) $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+z^2\le R^2, y^2+z^2\le R^2\}$.



解：解法一　$z^2=R^2-x^2$，　　$\therefore z=\sqrt{R^2-x^2}$ ，

$$A_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dxdy$$

$$=\int_0^R dx\int_0^x\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2}}dy$$

$$=\int_0^R x\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx$$

$$\overset{x=R\sin\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\theta\frac{R}{R\cos\theta}R\cos\theta d\theta=R^2$$

$z=\sqrt{R^2-y^2}$ ，　$A_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt{1+\frac{y^2}{R^2-y^2}}dxdy=\int_0^R dy\int_0^y\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dx=R^2$.

$\therefore\quad S=16R^2$

解法二

$y^2+z^2=R^2$，　　$\therefore y=\sqrt{R^2-z^2}$ ，

$$\frac{S}{16}=\iint\limits_{D_{zx}}\frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=R\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}x=R^2$$

$\therefore\quad S=16R^2$。

**2．求下列平面薄板 D 的质量：

$D=\{(x,y)|x^2+(y-1)^2\le 1\}$，　$\mu=y+|y-1|$；

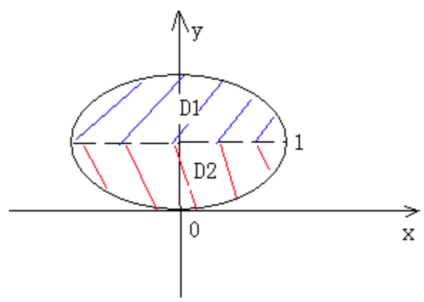
解：

$$m=\iint\limits_{D}\mu d\sigma=\iint\limits_{D_1}\mu d\sigma+\iint\limits_{D_2}\mu d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}(2y-1)d\sigma+\iint\limits_{D_2}1d\sigma$$

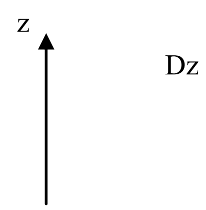
$$=\int_{-1}^1 dx\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}}(2y-1)dy+\frac{1}{2}\pi$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{4}{3}+\pi$$

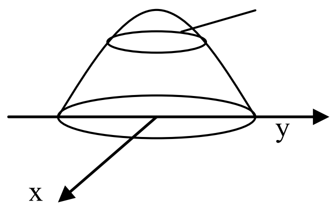


**3．计算立体 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-(x^2+y^2)\}$

的形心坐标.



解：由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$

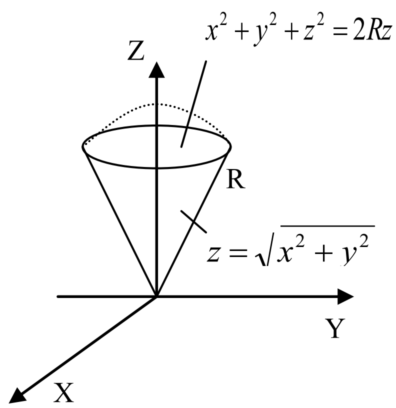


$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}=\frac{\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} zdxdy}{\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} dxdy}=\frac{\int_0^1 \pi z(1-z)dz}{\int_0^1 \pi(1-z)dz}=\frac{1}{3}$$

这里 $D_z=\{(x,y)\mid 0\le x^2+y^2\le 1-z\}$.

*** 4．设 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$（$R>0$）在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上方的部分，试求 Ω 的形心坐标.

解：由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$.



用球面坐标，有

$$M_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} zdv=\iiint\limits_{\Omega} r^3\sin\theta\cos\theta drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^3\sin\theta\cos\theta dr$$

$$=8\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^5\theta d\theta=\frac{7}{6}\pi R^4,$$

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dv=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^2\sin\theta dr$$

$$=\frac{16}{3}\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^3\theta d\theta=\pi R^3,$$

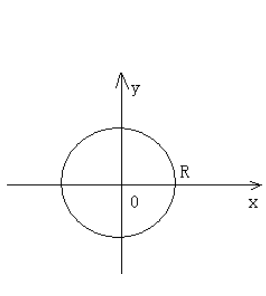
这里 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\sqrt{x^2+y^2}\le Z\le R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$

$$=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|0\le r\le 2R\cos\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le\varphi<2\pi\right\},$$

故 $\bar{Z}=\dfrac{M_{xy}}{V}=\dfrac{7}{6}R$.

**5．求半径为 R 质量为 M 的均匀圆盘（$\mu=$常数）关于下列各点的转动惯量：
（1）圆心； （2）圆周上一点.

解：（1）建立如图示的直角坐标系.



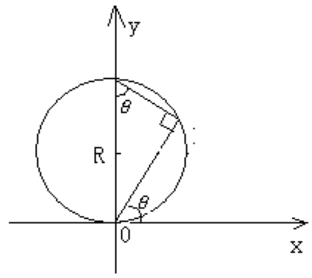
$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mu d\sigma=\mu\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)d\sigma \text{。}$$

$$D=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{1}{2}\mu\pi R^4=\frac{1}{2}\pi R^2\mu R^2=\frac{MR^2}{2} \text{。}$$

（2）建立如图示的直角坐标系．

极坐标方程 $\rho=2R\sin\theta$，

$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mu d\sigma$$



$$=\mu\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho$$

$$=\mu\int_0^{\pi}4R^4\sin^4\theta d\theta$$

$$\overset{\phi=\theta-\frac{\pi}{2}}{=}\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4R^4\sin^4\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)d\phi$$

$$=2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}4R^4\cos^4\phi d\phi=8R^4\mu\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\pi=\frac{3}{2}\mu\pi R^4=\frac{3}{2}MR^2 .$$

***6．质量为 M 的匀质圆锥体 Ω，由锥面 $Rz=H\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=H$ 围成，试求：

（1）质心坐标； （2）关于中心轴的转动惯量；

（3）关于底直径的转动惯量．

解：设 Ω 的密度为 μ，则 $\mu=\dfrac{M}{V}$． 由于 $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2H$，知 $\mu=\dfrac{3M}{\pi R^2H}$，

（1）由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega zdv}{M}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}z\rho dz}{M}=\frac{\frac{1}{4}\pi R^2H^2}{\frac{1}{3}\pi R^2H}=\frac{3}{4}H .$$

（2）$$I_z=\mu\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dv=\mu\iiint\limits_\Omega\rho^3d\rho d\varphi dz=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}\rho^3dz$$

$$=\frac{\mu}{10}\pi HR^4=\frac{3}{10}R^2M .$$

（3） 由 x、y 的对称性，不妨假定底直径 L 平行于 x 轴．则

$$I_L=\mu\iiint\limits_{\Omega}\left[y^2+(z-H)^2\right]dv$$（Ω 中点(x, y, z）到 L 的距离平方为 $y^2+(z-H)^2$）

$$=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}\rho\left[\rho^2\sin^2\varphi+(z-H)^2\right]dz$$

$$=\mu(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^R\rho^3\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}dz+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}(z-H)^2dz)$$

$$=\mu(\frac{\pi}{20}R^4H+\frac{\pi}{30}R^2H^3)=\frac{M}{20}(3R^2+2H^2).$$

***7.（选做题） 在半径为 $2a$，质量为 M 的均匀球体内，挖去两个内切于大球又互相外切的半径为 a 的小球，求剩余部分关于它们的公共直径的转动惯量.

解：由题意，设大球的方程为 $x^2+y^2+z^2=4a^2$，两小球的方程为

$x^2+y^2+(z\pm a)^2=a^2$．由 x 、 y 的对称性，可知

$$I_Z=8\iiint\limits_{\Omega_1}\left[x^2+y^2\right]dv$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{2a}r^2\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta dr$$

$$=16\pi a^5=\frac{3}{2}a^2M,$$

这里

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+(z-a)^2\ge a^2,x^2+y^2+z^2\le 4a^2,x>0,y>0,z>0\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta,\varphi)\middle|2a\cos\theta\le r\le 2a,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

第 13 章 （之 1） （总第 73 次）

教学内容： §13.1 第一型曲线积分

**1. 解下列各题：

（1）设 L 为 $y=x^2$ 上从点 $O=(0,0)$ 到 $A=(1,1)$ 的一段弧．则 $I=\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$ （ ）

（A）$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$　　　　　　（B）$\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+y}\,\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$　　　　　　（D）$\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{y}}\,\mathrm{d}y$

答： (C)

（2） 设 L 是 xoy 面上圆周 $x^2+y^2=1$ 的顺时针方向，则 $I_1=\oint_L x^3\,\mathrm{d}s$ 与 $I_2=\oint_L y^5\,\mathrm{d}s$ 的大小关系是__________________.

答：$\underline{I_1=I_2}$（都等于 0）.

（3）若已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L (b^2x^2+a^2y^2)\mathrm{d}s=$____________.

答：a^2b^2l．$\oint_L (b^2x^2+a^2y^2)\mathrm{d}s=a^2b^2\oint_L (\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})\mathrm{d}s=a^2b^2\oint_L \mathrm{d}s$.

2．计算下列曲线积分：

**（1） 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中 L 是星形线 $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 经点 A(2，0)，C(0，2)，B$(-2,0)$ 的 ACB 弧段.

解　$\int_L x\,\mathrm{d}s$

$=\int_0^{\pi} 2\cos^3 t\ \sqrt{(6\sin t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t．6\sin t\cos t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^3 t(-6\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t$

$=0$.

**(2) $\int_L \sqrt{x+y}ds$，其中 L 为直线段 $y=\pi x,(0\le x\le 1)$.

解：

$$\int_L \sqrt{x+y}ds$$

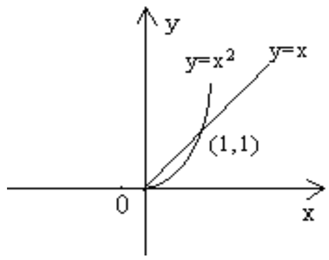
$$=\int_0^1 \sqrt{x+\pi x}\cdot\sqrt{1+\pi^2}dx=\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\int_0^1 \sqrt{x}dx$$

$$=\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{1+\pi}\sqrt{1+\pi^2}}{3}.$$

**(3) $\int_L xds$，其中 L 为区域 $D=\{(x,y)|x^2\le y\le x\}$ 的整个边界曲线.

解：$\int_L xds=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}dx+\int_0^1 x\cdot\sqrt{2}dx$

$$=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



**4．若已知双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta\ (-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4})$，其上任一点处的密度，等于该点到原点的距离，求：该双纽线关于极轴的转动惯量.

解：双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta(-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4})$，其上任一点密度为 $\mu(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

该双纽线关于极轴的转动惯量为：

$$I_x=\int_L y^2\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\sin^2\theta\sqrt{a^2\cos 2\theta}\sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\theta}}d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^4\cos 2\theta\sin^2\theta d\theta=2a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 4\theta)d\theta=\frac{a^4}{8}(4-\pi)。$$

***5． 已知摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$ 上任一点 (x,y) 处密度等于该点的纵坐标，试求：

（1）该摆线弧的质量；
（2）该摆线弧的质心坐标；
（3）该摆线弧关于 x 轴的转动惯量.

解：摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$ 其上任一点 (x,y) 处密度 $u(x,y)=y$.

（1）质量：$m=\int_L u(x,y)ds=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot\sqrt{[x'(t)^2]+[y'(t)]^2}dt$

$$=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1-\cos t}dt=\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$=8a^2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=16a^2\cdot\frac{2!!}{3!!}=\frac{32}{3}a^2$$

（2）由对称性可知 $\bar{x}=\pi a$，

$$m_x=\int_L yu(x,y)ds=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}a^3(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}dt=\frac{256}{15}a^3$$

$$\bar{y}=\frac{m_x}{m}=\frac{8}{5}a,$$

$\therefore$ 质心坐标为 $(\pi a,\frac{8}{5}a)$.

（3）该摆线弧关于 x 轴的转动惯量

$$I_x=\int_L y^2u(x,y)ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$
$$=\sqrt{2}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{7}{2}}d\theta=\frac{1024}{35}a^4$$

**6. 计算曲线积分：$\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 C 为曲线 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$（$0\le t\le 2\pi$）.

解：$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t)$，$y'(t)=e^t(\cos t+\sin t)$，$z'(t)=e^t$，

$$ds=\sqrt{e^{2t}(1+1+1)}dt=\sqrt{3}e^tdt,$$

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2t}+e^{2t}}\sqrt{3}e^tdt$$

$$=\sqrt{6}\int_0^{2\pi}e^{2t}dt=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(e^{4\pi}-1\right).$$

**7．设圆柱面螺旋线 $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$ 上，任一点 $P=(x,y,z)$ 处的线密度为 $\mu(x,y,z)=z$，试表达并求出在点 $A=(1,0,0)$ 与点 $B=(0,1,\frac{\pi}{2})$ 之间这段曲线的弧长和质量.

解：弧长 $s=\int_L ds$，质量 $m=\int_L zds$.

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\qquad ds=\sqrt{1+1}dt=\sqrt{2}dt.$$

$$\therefore \quad s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,\quad m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cdot tdt=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2.$$

第 13 章 （之 2）（总第 74 次）

教学内容：§13.2 第一型曲面积分

1.解下列各题：

**(1) 设Σ为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限的部分，则$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=$ (　　)

(A) $4\int_0^2 dx\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$　　　(B) $\frac{\sqrt{61}}{3}4\int_0^2 dx\int_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy$

(C) $\frac{\sqrt{61}}{3}4\int_0^{2(\frac{y}{3}-1)}dx\int_0^3 dy$　　　(D) $\frac{\sqrt{61}}{3}4\int_0^2 dx\int_0^3 dy$

答：(B).

**(2) 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在$z\geqslant h$部分，$0<h<a$，则$\iint\limits_{\Sigma}zdS=$ (　　)

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a^2-h^2}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,d$　　　(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\sqrt{a^2-r^2}\,rdr$

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\sqrt{a^2-h^2}}^{\sqrt{a^2-h^2}}a\,rdr$　　　(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}a\,rdr$

答：(D).

**(3) 已知椭球面$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1$的面积为$A$，则曲面积分

$$\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(3x+2y-6z+1)^2\mathrm{d}S=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

解：$37A$．可根据积分区域的对称性和被积函数（关于某个变量的）奇偶性来解.

$$\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(3x+2y-6z+1)^2\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(9x^2+4y^2+36z^2+1-24yz-36zx+12xy+6x+4y-12z)\mathrm{d}S$$

$$=36\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2)\mathrm{d}S+\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}\mathrm{d}S=37\oiint\limits_{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+z^2=1}\mathrm{d}S=37A.$$

2．计算下列曲面积分

**(1) $\iint\limits_{S}xyz\,dS$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限的部分.

解 ：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\therefore\ \iint\limits_{s}xyzds=\iint\limits_{Dxy}xy\sqrt{R^2-x^2-y}\cdot\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy$$

$$=R\iint\limits_{Dxy}xydxdy=R\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}xydxdy=\frac{1}{8}R^5.$$

**(2) $\oiint\limits_{S}(x^2+y^2)dS$，其中 S 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 及平面 $z=1$ 所围成区域的边界曲面.

解：$\oiint\limits_{S}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS$，

S_1 是 $\begin{cases}z=1\\x^2+y^2\le 1\end{cases}$ 围成的平面区域,

$$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{2}$$

S_2 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 夹在平面 $z=1$ 与 $z=0$ 之间的部分，

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)\ ds=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2dxdy}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

原式$=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\pi$.

**(3) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{\sqrt{9+4x^2+4y^2}}dS$ 其中 Σ 是曲面 $z=\ \dfrac{1}{3}(x^2+y^2)$ 中介于 z=0 及 z=2 之间的部分曲面.

解：Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2 \leqslant 6$，

面积元素：$dS=\dfrac{1}{3}\sqrt{9+4x^2+4y^2}dxdy$.

$$\therefore \iint_{\Sigma}=\frac{1}{9}\iint_{D}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{6}}r^3dr$$

$$=\frac{1}{9}*2\pi*\frac{(\sqrt{6})^4}{4}=2\pi\ .$$

**(4) 计算 $\oiint_{\Sigma}(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4})dS$ 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, a 为正数.

解：由对称性以及积分与变量名称的无关性知：

$$\oiint_{\Sigma}x^2dS=\oiint_{\Sigma}y^2dS=\oiint z^2dS=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{a^2}{3}\oiint_{\Sigma}dS=\frac{4\pi}{3}a^4\ .$$

$$\therefore \oiint_{\Sigma}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\frac{4\pi}{3}a^4=\frac{13}{12}\frac{4\pi}{3}a^4=\frac{13\pi}{9}a^4\ .$$

**3. 试求带均匀密度 μ 的圆柱面 $S:x^2+y^2=R^2,-h\le z\le h$ 对各坐标轴的转动惯量

I_x,I_y,I_z .

解：由对称性知：$I_x=I_y$，

$$I_x=\mu\iint_{S}\left(y^2+z^2\right)ds=\mu\iint_{S_{\text{前}}}\left(y^2+z^2\right)ds+\mu\iint_{S_{\text{后}}}\left(y^2+z^2\right)ds$$

$$=2\mu\iint_{D_{yz}}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$$

$$=2\mu\int_{-h}^{h}\int_{-R}^{R}\left(y^2+z^2\right)\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dydz$$

$$=2\mu\left(\int_{-h}^{h}\int_{-R}^{R}y^2\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dydz+\int_{-h}^{h}z^2dz\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dy\right)$$

$$\overset{y=R\sin\theta}{=}\ 2\mu\left(2h\times 2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\sin^2\theta\sqrt{\frac{R^2}{R^2\sin^2\theta}}R\cos\theta d\theta$$

$$+\frac{2}{3}h^3\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{R^2}{R^2\cos^2\theta}}R\cos\theta d\theta$$

$$=2\mu\left(4h\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\sin^2\theta d\theta+\frac{4}{3}h^3R\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=4\pi\mu Rh\left(\frac{R^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)=M\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{3}h^2\right)。$$

$$I_z=\mu\iint_S\left(x^2+y^2\right)ds=\mu\iint_S R^2ds=\mu R^2\iint_S ds$$

$$=\mu R^2\cdot 4\pi hR=4\pi\mu Rh\cdot R^2=MR^2\ 。$$

** 4. 求单叶双曲面壳 $x^2+y^2-z^2=1\left(|z|\le 1\right)$ 关于 z 轴的转动惯量．已知其密度为

$$\mu=\frac{|z|}{x^2+y^2}\ .$$

解：$I_z=\iint_S(x^2+y^2)\mu ds=\iint_S(x^2+y^2)\frac{|z|}{x^2+y^2}ds$

$$=2\iint_{S上}(x^2+y^2)\frac{z}{x^2+y^2}ds$$

$$=2\iint_D(x^2+y^2)\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{2x^2+2y^2-1}{x^2+y^2-1}}dxdy$$

$$=2\iint_{1\le x^2+y^2\le 2}\sqrt{2x^2+2y^2-1}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2\rho^2-1}\rho d\rho=\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3}-1)$$

**5. 设锥面壳 $z=\sqrt{x^2+y^2}\left(0\le z\le 1\right)$ 上点 $\left(x,y,z\right)$ 处的密度为 $\mu=z$，

求：（1） 锥面壳的质量；

（2） 锥面壳的质心坐标；

（3）锥面壳关于 z 轴的转动惯量．

解：（1）$m=\iint_S zdS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^2dr=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

（2）$Dxy:x^2+y^2\le 1$，

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{s} x\mu ds}{\iint\limits_{s} \mu ds}=\frac{\iint\limits_{s} xzds}{\iint\limits_{s} zds}=\frac{\iint\limits_{Dxy} x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy}{\iint\limits_{Dxy} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\iint\limits_{Dxy} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{\sqrt{2}\iint\limits_{Dxy} \sqrt{x^2+y^2}dxdy}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdrd\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2drd\theta}=0\text{。}$$

同理 $\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{S} z\mu ds}{\iint\limits_{S} \mu ds}=\frac{\iint\limits_{S} z^2ds}{\iint\limits_{S} zds}=\frac{\sqrt{2}\iint\limits_{Dxy} x^2+y^2dxdy}{\iint\limits_{Dxy} \sqrt{x^2+y^2}dxdy}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2dr}=\frac{3}{4}\text{。}$$

所以质心坐标（$0,0,\frac{3}{4}$）.

（3）$I_z=\iint\limits_{S}\left(x^2+y^2\right)zds=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^4dr=\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi$.

第 14 章 （之 1）（总第 75 次）

教学内容：§14.1 第二型曲线积分

**1．设 $L:\begin{cases}x=\sqrt{\cos x},\\ y=\sqrt{\sin t},\end{cases}0\le t\le\frac{\pi}{2}$, 则 $\int_L x^2y\mathrm{d}y-y^2x\mathrm{d}x=$ （ ）

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t\sqrt{\sin t}-\sin t\sqrt{\cos t}\right]\mathrm{d}t$； （B）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t+\sin^2 t\right]\mathrm{d}t$；

（C）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos t-\sin t\right]\mathrm{d}t$； （D）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos^2 t-\sin^2 t\right]\mathrm{d}t$.

答：(B).

2．计算下列曲线积分：

**（1）计算$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$的逆时针方向.

解：令$x=a\cos t, y=a\sin t$,则：$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$.

**（2） 计算 $\int_L(2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$ ，其中L是曲线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$的一段弧.

解：原式$=\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t]\mathrm{d}t$

$$=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t$$
$$=-2\pi a^2.$$

**(3)计算$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中$L$是从$O(0，0)$沿曲线$x=\begin{cases}\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2-y,1<y\leqslant 2\end{cases}$，到$B(0，2)$.

解： L_1：$x=\sqrt{y}$，$0\leqslant y\leqslant 1$；

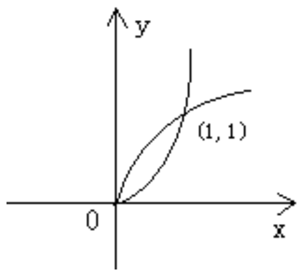
L_2：$x=2-y$，$1\leqslant y\leqslant 2$；

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_{L1}+\int_{L2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(y+y^2)\mathrm{d}y+\int_1^2[(2-y)^2+y^2]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{8}{3}$$
$$=\frac{7}{2}.$$

**(4)$\oint_L \frac{x}{x+1}dx+2xydy$，其中$L$是由$y=\sqrt{x}$与$y=x^2$构成的简单闭曲线.

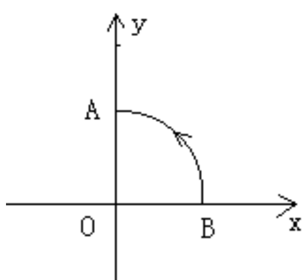
解：$\oint_L \frac{x}{x+1}dx+2xydy$

$$=\int_0^1(\frac{x}{x+1}+4x^4)dx+\int_1^0(\frac{x}{x+1}+x)dx$$
$$=\int_0^1(4x^4-x)dx=(\frac{4}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$



**(5)$\int_L \frac{x^2y^{\frac{3}{2}}dy-xy^{\frac{5}{2}}dx}{(x^2+y^2)^3}$，其中$L$是圆$x^2+y^2=R^2$在第一象限中自点$B=(R,0)$到点$A=(0,R)$的弧段$(R>0)$.

解：



$$\int_L \frac{x^2 y^{\frac{3}{2}} dy - x y^{\frac{5}{2}} dx}{(x^2+y^2)^3} \xlongequal[\substack{y=R\sin\theta \\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}}]{x=R\cos\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^{\frac{9}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos\theta}{R^6} d\theta$$

$$=\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta \, d\sin\theta = \frac{2}{5R\sqrt{R}}.$$

**3. 分别计算质点在力 $\vec{f}=y^2\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}$ 作用下，沿下列各种路径自点 $A=(0,0)$ 移动到 $B=(1,1)$ 时，f 所作的功：

（1）$y=x^{\alpha}(\alpha>0)$；（2）$x=\dfrac{e^y-1}{e-1}$；　(3)　$y=\tan\dfrac{\pi x}{4}$.

解：力 $\vec{f}=y^2\cdot\vec{i}+2xy\vec{j}$.　$A=(0,0)$,　$B=(1,1)$，

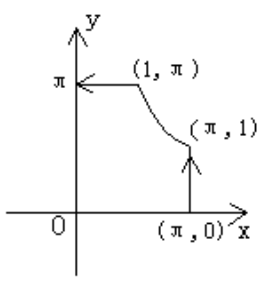
（1）$W_1=\int_{L_1} y^2dx+2xydy=\int_0^1\left[x^{2\alpha}+2x\cdot x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}\right]dx=\int_0^1(1+2\alpha)x^{2\alpha}dx=1$.

（2）$W_2=\int_{L_2} y^2dx+2xydy=\int_0^1\left[y^2\cdot\dfrac{e}{e-1}+2\cdot\dfrac{e^y-1}{e-1}\cdot y\right]dy=\dfrac{1}{e-1}y^2(e^y-1)\Big|_0^1=1$.

(3)　$W_3=\int_{L_3} y^2dx+2xydy=\int_0^1\left(\tan^2\dfrac{\pi}{4}x+2x\tan\dfrac{\pi}{4}x\cdot\sec^2\dfrac{\pi}{4}x\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\left[\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x-x+x\tan^2\frac{\pi x}{4}-\frac{4}{\pi}\tan\frac{\pi}{4}x+x\right]\Bigg|_0^1=1.$$

**4. 计算曲线积分 $\int_L y\cos xydx+x\sin xydy$，其中 L 自点 $A=(\pi,0)$ 沿直线到点 $B=(\pi,1)$，在沿双曲线 $xy=\pi$ 到点 $C=(1,\pi)$，又沿直线到点 $D=(0,\pi)$.



解：$\int_L y\cos xydx+x\sin xydy$

$$=\int_0^1\pi\sin\pi ydy+\int_\pi^1\left[\frac{\pi}{x}\cos\pi+x\sin\pi(-\frac{\pi}{x^2})\right]dx+\int_1^0\pi\cos\pi x\,dx$$

$$=(-\cos\pi y)\big|_0^1+(-\pi\ln x)\big|_\pi^1+\sin\pi x\big|_1^0=2+\pi\ln\pi.$$

***5. 质点在力场 f 的作用下，从点 $A=(a,0)$ 沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限内运动到点

$B=(0,b)$，试求力场 f 所作的功. 假定在任一点 $P=(x,y)$ 处 f 的大小等于 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 而方向指向原点.

解：$\vec{f}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}\right)=\dfrac{-x\vec{i}-y\vec{j}}{x^2+y^2}$

$$w=\int_L \vec{f}d\vec{s}=\int_L \frac{-x}{x^2+y^2}dx+\frac{-y}{x^2+y^2}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-a\cos t(-a\sin t)-b\sin t(b\cos t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(b^2-a^2)d\sin^2 t}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(\ln b^2-\ln a^2)=\ln\frac{a}{b}.$$

**6．计算曲线积分 $\boldsymbol{I}=\int\limits_C \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 C 是曲线 $\boldsymbol{r}(t)=t\,\boldsymbol{i}+t^2\,\boldsymbol{j}+t^3\,\boldsymbol{k}$ 自点 $(0,0,0)$ 到点 $(1,1,1)$，而向量场 f 为：$\boldsymbol{f}(x,y,z)=2xz\,\boldsymbol{i}-xy\,\boldsymbol{j}+yz^2\,\boldsymbol{k}$.

解：
$$\begin{cases}x=t\\ y=t^2 \qquad t:0\to 1\\ z=t^3\end{cases}$$

$$I=\int_0^1\left(2t\cdot t^3-t\cdot t^2\cdot 2t+t^2\cdot t^6\cdot 3t^2\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(2t^4-2t^4+3t^{10}\right)dt=\frac{3}{11}.$$

**7．计算曲线积分：$\int\limits_C \dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 C 为曲线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$（$\pi\le t\le 2\pi$）.

解：原式$=\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\frac{t\cos t(\cos t-t\sin t)+t\sin t(\sin t+\cos t)}{\sqrt{t^2+t^2}}dt=\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

第 14 章（之 2）（总第 76 次）

教学内容：§14.2 格林公式

1.选择

*(1) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$负向一周，则曲线积分 （ ）

$$\oint_L (x^3-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-y^3)\mathrm{d}y=$$

(A) $-\dfrac{\pi a^4}{2}$ (B) $-\pi a^4$

(C) πa^4 (D) $\dfrac{2\pi a^3}{3}$

答：(A)

**(2) 设 L 是 $|y|=1-x^2$ 表示的围线的正向，则 $\oint_L \dfrac{2x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}=$ （ ）

(A) 0. (B) 2π . (C) -2π . (D) $4\ln 2$.

答：(A)

2．求下列曲线积分：

*(1)计算曲线积分 $\oint_L y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，式中 L 是由 $x^2+y^2\leqslant x, x^2+y^2\leqslant y$ 所确定的公共闭区域的正向边界.

解： 记 $O(0,0)$. $A(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

记 L_1 为从 $O(0,0)$沿 $x^2+y^2=y$ $(x\geqslant 0)$至 $A(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

记 L_2 为从 $A(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$沿 $x^2+y^2=x$ $(x\leqslant\dfrac{1}{2})$ 至 $O(0,0)$.

$$\text{原式}=\int_{L1}+\int_{L2}y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}y^2.\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^0(x-x^2)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{48}+(-\frac{2}{48})$$

$$=-\frac{1}{48}.$$

*(2) 计算曲线积分 $\oint_L (y^2-x^2)(\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x)$，式中 L 是由 $y=|x|$ 及 $y=x^2-2$ 所围成的有界闭区域的正向边界.

解： 在 $y=|x|$ 上，$y^2-x^2=0$.
在 $y=x^2-2$ 上，$dy=2x\mathrm{d}x$
即 $dy-2x\mathrm{d}x=0$.

故 原式 $=\int_{y=|x|}+\int_{y=x^2-2}(y^2-x^2)(\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x)$
$=0+0$
$=0$.

**(3) 计算曲线积分 $\oint_L |y|\,\mathrm{d}x+|x|\,\mathrm{d}y$ ，其中 L 是以 $A(1,0)$，$B(0,1)$及 E $(-1,0)$为顶点的三角形正向周界.

解：$L_1: ABOA \qquad L_2: OBEO$

$$\text{原式}=\oint_{L_1}(ydx+xdy)+\oint_{L_{21}}(ydx-xdy)$$

$$=\iint_{D_1}0d\sigma+\iint_{D_2}(-2)d\sigma=0+(-2)\times\frac{1}{2}=-1$$

3．利用曲线积分计算下列曲线所围成平面图形的面积：

**（1）用曲线积分计算由闭曲线L所围成的图形的面积，其中$L:\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=b\sin^3 t\end{cases}$.

解：$A=\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+b\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t)dt$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{3}{8}\pi ab\ .$$

***（2）笛卡尔叶形线 $x=\dfrac{at}{1+t^3},y=\dfrac{at^2}{1+t^3}(0\le t\le+\infty)$.

解：面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2t^2-t^5}{(1+t^3)^3}-\frac{t^2-2t^5}{(1+t^3)^3}\right]dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^3}dt$$

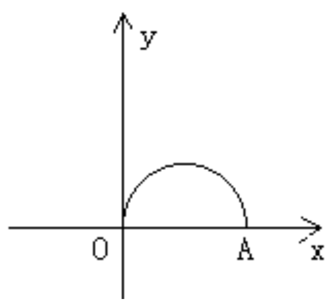
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{a^2}{6}\frac{1}{(1+t^3)}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{a^2}{6}$$

4．在下列各题中适当补上一条曲线，使积分路径成闭曲线，再考虑用格林公式：

**（1）$\int_L(xy-\sin x\sin y)dx+(x^2+\cos x\cos y)dy$，其中$L$自$O(0,0)$点出发，沿曲线

$y=x-x^2$ 至点 $A(1,0)$；

解：补上直线 AO：从点 A（1，0）沿x轴到点O（0，0），



于是

$$\int_L + \int_{AO} = \oint_{L+AO} = -\iint_D x d\delta = -\int_0^1 x dx \int_0^{x-x^2} dy$$

$$= -\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = -(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{12}$$

而 $\int_{AO} = \int_1^0 0 dx = 0$，

$$\therefore \int_L = \oint_{L+AO} - \int_{AO} = -\frac{1}{12}.$$

***（2） 计算曲线积分 $\int_L xy^2 \mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$ ，式中 L 是从 $O=(0,0)$ 沿曲线 $y=\tan x$ 到 $A=(\frac{\pi}{4},1)$ 的有向弧段.

解： $\mathrm{d}y = sec^2 x \mathrm{d}x$，

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x(sec^2 x - 1) - x \cdot sec^2 x] \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} - x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi^2}{32}.$$

***5. 计算曲线积分 $\int_L \frac{y\mathrm{d}x + (a\pi - x)\mathrm{d}y}{(x - \pi a)^2 + \pi^2 y^2}$ ，式中 L 是从原点 $O=(0,0)$ 沿摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 到达 $A=(2\pi a,0)$ 的一拱有向弧段(a>0).

解：$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x-\pi a)^2 - \pi^2 y^2}{[(x-\pi a)^2 + \pi^2 y^2]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，点 $(\pi a, 0)$ 除外.

故在不包括点 $(\pi a, 0)$ 的单连通区域内积分与路径无关.

取 L_1 为曲线 $\begin{cases} x = \pi(a + a\cos t) \\ y = a\sin t \end{cases}$ t 从 π 到 0.

则 $\int_L = \int_{L_1} = \int_\pi^0 \frac{a\sin t(-a\pi \sin t) - (a\pi \cos t \cdot a\cos t)}{a^2 \pi^2} \mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi}\int_\pi^0 \mathrm{d}t = 1.$

***6. 把第二型（对坐标的）曲线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 化为第一型（对弧长的）曲线积分 ，式中 L 是从 $O=(0,0)$ 沿上半 圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到 $A=(1,1)$ 的有向弧段.

解： $y' = \dfrac{1-x}{y}$，

$ds = \dfrac{1}{y}dx$，

$\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = y = \sqrt{2x - x^2}$，

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-2x+x^2} = |1-x| = 1-x$，

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
$$= \int_L [P(x,y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x,y)(1-x)]ds\ .$$

第 14 章 （之 3）（总第 77 次）

教学内容：§14.2 格林公式（续）

1．选择题

**（1） 曲线积分$\int_L (4x^3 + 2y^3)dx + 6xy^2 dy$的值 （　　）

(A) 与曲线 L 及起点、终点均有关；
(B) 与曲线 L 无关，仅与其起点及终点有关；
(C) 与曲线 L 及起点无关，仅与终点无关；
(D) 与曲线 L 及起点终点都无关.

答：（B）

$$(\because \frac{\partial(4x^3+2y^3)}{\partial y} = 6y^2 = \frac{\partial(6xy^2)}{\partial x})$$

**（2） 设 C 是从 $A(1，1)$到 $B(2，3)$的直线，则$\int_C (x+3y)\,dx + (y+3x)\,dy =$（　　）

(A) $\int_1^2 [(x+2x-1)+(2x-1+3x)]dx$；

(B) $\int_1^2 (x+2x+1)dx + \int_1^3 (y+3\cdot\dfrac{y+1}{2})dy$；

(C) $\int_1^2 [(x+6x)+(2x+3x)]dx$；

(D) $\int_1^2 (x+3)dx + \int_1^3 (y+6)dy$.

答：（D）.

（3）若可微函数$u(x,y)$的全微分为

$du(x,y) = (x^2 + pxy - y^2)dx + (3x^2 + qxy + y^2)dy$，则 （　　）

（A） $p=6, q=-2$；　　（B） $p=3, q=-1$；

（C） $p=-6, q=2$；　　（D） $p=-3, q=1$.

答：（A）.

**2．验证下列曲线积分的积分路径无关性，并据此而另取一特殊路径 L' 以计算其值：

$\int_L \frac{(1-y)dx + xdy}{(x+y-1)^2}$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=4$ 在第一象限自 $A=(2,0)$ 至 $B=(0,2)$ 的一段圆弧．

解：$P=\frac{1-y}{(x+y-1)^2}$，$Q=\frac{x}{(x+y-1)^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x+y-1}{(x+y-1)^3},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-x+y-1}{(x+y-1)^3},$$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分在区域 $x+y>1$ 或 $x+y<1$ 内与路径无关．

$$\int_L \frac{(1-y)dx+xdy}{(x+y-1)^2}=\int_{(2,0)}^{(2,2)}+\int_{(2,2)}^{(0,2)}=\int_0^2\frac{2dy}{(y+1)^2}+\int_2^0\frac{-dx}{(x+1)^2}=2.$$

**3. 验证：存在 $u(x,y)$ 使 $(2xe^y+y)\mathrm{d}x+(x^2e^y+x-2y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，并求 $u(x,y)$。

解：$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\mathrm{e}^y+1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，

故要存在 $u=u(x,y)$. 使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，

这里 $P=2x\mathrm{e}^y+y$. $Q=x^2\mathrm{e}^y+x-2y$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=(2x\mathrm{e}^y+y)\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^y+x-2y)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^y(2x\mathrm{d}x)+x^2(\mathrm{e}^y\mathrm{d}y)+y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2\cdot\mathrm{e}^y)+\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}y^2\\&=\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^y+xy-y^2)\end{aligned}$$

故 $u(x,y)=x^2\mathrm{e}^y+xy-y^2+C$ （C 为任意常数）

**4．试用求原函数增量 $u(B)-u(A)$ 的方法，计算下述与路径无关的曲线积分：

$$\int_{(1,1)}^{(1,2)}(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy.$$

解：$\int_{(1,1)}^{(1,2)}(3x^2-4xy+y^2)dx-(2x^2-2xy+9y^2)dy$

$$=(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)\Big|_{(1,1)}^{(1,2)}=(-23)-(-3)=-20.$$

5．求下列全微分方程得通解

**（1） $(\cos y-y\sin x)dx+(\cos x-x\sin y)dy=0$；

解：$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(\cos y-y\sin x)dx+(\cos x-x\sin y)dy$

$=\int_0^x dx+\int_0^y(\cos x-x\sin y)dy=x+y\cos x+x\cos y-x=y\cos x+x\cos y$，

故通解为 $y\cos x+x\cos y=C$.

**（2） $(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy=0$.

解：$\varphi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(e^y-ye^{-x}-1)dx+(e^{-x}+xe^y+1)dy$

$=\int_0^x(1-1)dx+\int_0^y(e^{-x}+xe^y+1)dy=ye^{-x}+xe^y-x+y$，

故通解为 $ye^{-x}+xe^y-x+y=C$.

**6. 试确定λ的值，使得 $\int_c \frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$ 的值与路径无关，其中 C 为与 X 轴不相交(或不相接触)；并计算

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda \mathrm{d}y.$$

解：$P=\frac{x}{y}(x^2+y^2)^\lambda$，$Q=-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^\lambda$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[2\lambda y^2-(x^2+y^2)]$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}[-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)]$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，推出 $2\lambda y^2-(x^2+y^2)=-2\lambda x^2-2(x^2+y^2)$，即 $\lambda=-\frac{1}{2}$

即当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，曲线积分与路径无关.

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,2)}\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^0\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{0^2}{y^2}(0^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2}\Big|_1^0=1-\sqrt{2}.$$

**7. 试检验下列向量场

$$\vec{f}(x,y)=(x-y\cos x)\vec{i}-\sin x\vec{j}$$

是否为梯度场？若是，则求出函数 $\varphi(x,y)$，使 $\mathrm{grad}\,\varphi=\boldsymbol{f}$.

解：$\vec{f}(x,y)=(x-y\cos x)\vec{i}-\sin x\vec{j}$，

$\because \dfrac{\partial}{\partial y}(x-y\cos x)=-\cos x=\dfrac{\partial}{\partial x}(-\sin x)$，

$\therefore$是梯度场．而且

$$\varphi(x,y)=C+\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x-y\cos x)dx-\sin xdy$$

$$=C+\int_0^x xdx+\int_0^y-\sin xdy=\frac{1}{2}x^2-y\sin x+C.$$

第 14 章 （之 4）（总第 78 次）

教学内容：§14.3 第二型曲面积分

**1．设Σ为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截得的第一卦限部分的前侧，则

$$\iint_\Sigma zdxdy+xdydz+ydxdz=\qquad\qquad(\quad)$$

（A）$3\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\int_0^3\mathrm{d}y\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

（B）$2\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=2\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$；

（C）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}r\,\mathrm{d}r$；　　（D）$3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\theta\,\mathrm{d}r$．

答：（B）

**2．计算曲面积分：$\iint_S(x+y-z-1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为马鞍面$z=xy$上

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$部分，积分沿S的上侧．

解：$\iint_S(x+y-z-1)^2dxdy$

$$=\iint_D(x+y-xy-1)^2dxdy\text{，其中}D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$$

$$=\iint_D(x-1)^2(y-1)^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\rho$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{8}d\varphi=\frac{1}{8}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{24}.$$

**3．计算曲面积分：$\iint\limits_{S} z(x^2+y^2)(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一、四卦限（$x\geq 0$，$z\geq 0$）的部分，积分沿 S 的上侧；

解：S 的单位正法向为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\frac{1}{R}\{x,y,z\}.$$

$$\therefore \iint\limits_{S} z\left(x^2+y^2\right)\left(dydz+dxdz\right)=\frac{1}{R}\iint\limits_{S}\left\{z\left(x^2+y^2\right),z\left(x^2+y^2\right),0\right\}\{x,y,z\}dS$$

$$=\frac{1}{R}\iint\limits_{S} z\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)dS.$$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}，\ z_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}，\ z_y=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

$$\therefore dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

$$\therefore 原式=\frac{1}{R}\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)\left(x+y\right)dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\rho^3\cdot\rho\left(\cos\theta+\sin\theta\right)d\rho=\frac{2R^5}{5}.$$

**4． 若 $v=a\,i+b\,j+c\,k$, 其中 a，b，c 为常数，S 为单位闭球面．试证 $\oiint\limits_{S}\vec{v}\cdot d\vec{s}=0$．

证：利用第一型与第二型曲面积分的联系及 S 的方程 $x^2+y^2+z^2=1$，S 的单位正法为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}=\{x,y,z\}.$$

可得 $\oiint\limits_{S}\vec{v}\cdot d\vec{s}=\oiint\limits_{S}\{a,b,c\}\cdot\vec{n}^0\,ds=\oiint\limits_{S}\left(ax+by+cz\right)ds$.

由于 ax 关于 x 为奇函数，且 S 关于 yz 坐标面对称，故 $\oiint\limits_{s} axds=0$．同理

$\oiint\limits_{S} byds=\oiint\limits_{S} czds=0$．从而有 $\oiint\limits_{S}\vec{v}\cdot d\vec{s}=0$.

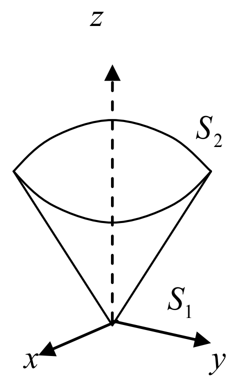
***5．计算下列闭曲面上的曲面积分（积分沿区域 Ω 之边界曲面 $\partial\Omega$ 的外侧）：

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\right\}$；

解：$$\iint\limits_{S_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{e^\rho}{\rho}\rho d\rho=-(e-1)2\pi\ .$$

$$\iint\limits_{S_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{e}{\rho}\rho\,d\rho=e2\pi\ .$$

$$\therefore\oiint\limits_{2\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=2\pi\ .$$



***6．用两种方法（按 14.3.3 中的公式化为二重积分,或先化为第一型曲面积分后再计算）

计算下列曲面积分：$\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为双叶双曲面 $z^2-x^2-y^2=1$（$z\ge 1$）上

$x^2+y^2\le 2ax$ 部分，积分沿 S 的下侧.

解法一：$$\iint\limits_S z^2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(1+x^2+y^2\right)dxdy$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left(1+\rho^2\right)\cdot\rho d\rho=-\left(a^2+\frac{3}{2}a^4\right)\pi\ .$$

解法二：S 的单位正法向为

$$\vec{n}^0=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$$

$\therefore$ 原式 $$=\iint\limits_S\frac{-z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS\ .$$

$$z=\sqrt{1+x^2+y^2}\ ,\quad z_x=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ ,\quad z_y=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ ,$$

$$dS=\sqrt{1+z_z^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy.$$

$$\therefore\quad \text{原式}=-\iint_{D_{xy}}\frac{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x^2+2y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left(1+x^2+y^2\right)dxdy=-\left(a^2+\frac{3}{2}a^4\right)\pi.$$

***7．计算下列闭曲面上的曲面积分（积分沿区域 Ω 之边界曲面 $\partial\Omega$ 的外侧）：

$\oiint\limits_{\partial\Omega}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3+y^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^3-y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad 0\le z\le 1\right\};$$

解：在曲面 $\partial\Omega$ 上 $x=0,y=0,z=0$ 及 $z=1$ 部分的 S 上 $\iint\limits_S xzdydz=0$，所以

$$\oiint_{\partial\Omega}xzdydz=\iint_{D_{yz}}z\sqrt{1-y^2}\,dydz=\int_0^1 zdz\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{\pi}{8}.$$

在曲面 $\partial\Omega$ 上 $x=0,z=0$ 及 $z=1$ 部分的 S 上 $\iint\limits_S\left(x^3+z^3\right)dzdx=0$，所以

$$\oiint_{\partial\Omega}\left(x^3+y^3\right)dzdx=-\iint_{D_{xz}}x^3dzdx+\iint_{D_{xz}}\left[x^3+\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dzdx=\frac{3\pi}{16}.$$

在曲面 $\partial\Omega$ 上 $x=0,y=0$ 及 $x^2+y^2=1$ 部分的 S 上 $\iint\limits_S\left(x^3-y^3\right)dxdy=0$，所以

$$\oiint_{\partial\Omega}\left(x^3-y^3\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}\left(x^3-y^3\right)dxdy-\iint_{D_{xy}}\left(x^3-y^3\right)dxdy=0,$$

$$\therefore\quad \text{原式}=\frac{5\pi}{16}.$$

第 14 章 （之 5）（总第 79 次）

教学内容：§14.4 奥-高公式

1． 解下列各题：

*（1）．向量场 $\boldsymbol{f}=\sin(x+y)\,\boldsymbol{i}+e^{yz}\,\boldsymbol{j}+zx\,\boldsymbol{k}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ =______________.

解：$\dfrac{\partial[\sin(x+y)]}{\partial x}=\cos(x+y)$，$\dfrac{\partial(e^{yz})}{\partial y}=ze^{yz}$，$\dfrac{\partial(zx)}{\partial z}=x$

$$\therefore\ div\,\vec{f}=\cos(x+y)+ze^{yz}+x.$$

**（2）．设 $A=\{4xy,3yz,2zx\}$, $B=\{x,y,z\}$, 则 div（$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$）=______________.

解：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4xy & 3yz & 2zx\\ x & y & z\end{vmatrix}$$
$$=\{3yz^2-2xyz,\ 2x^2z-4xyz,\ 4xy^2-3xyz\}.$$
$$\mathrm{div}(A\times B)=-2yz-4xz-3xy.$$

**（3）．设函数 $f(u,v,w)$对各变元具有二阶连续偏导数，则 div[grad$f(x,xy,z)$]=_________.

答：$f_{11}+2yf_{12}+(x^2+y^2)f_{22}+f_{33}$

**2. 计算曲面积分，$\oiint\limits_{\partial\Omega}x(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Ω 由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=\pm1$ 围成，而 $\partial\Omega$ 为立体 Ω 的边界曲面，积分沿 $\partial\Omega$ 的外侧.

解：由奥高公式，原式$=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2+z^2+x^2)dV$

$$=\int_{-1}^{1}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(2z^2+\rho^2)\rho d\rho=\frac{7}{3}\pi.$$

**3．计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^3z-xz^3)dydz+y^3zdxdz+z^4dxdy$，其中 Σ 是球体Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 的表面的外侧.

解：由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma}=\iiint\limits_{\Omega}[(3x^2z-z^3)+3y^2z+4z^3]\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$
$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^5\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=\pi\cdot2^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=8\pi.$$

**4．计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(y+z)dxdy+(x-z)dydz$，其中 Σ 是平面 $x+z=1$ 曲面 $y=\sqrt{x}$ 及坐标面 $y=0$, $z=0$ 所围成立体Ω 的外表面.

解：由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma} = \iiint\limits_{\Omega}(1+0+1)\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \int_0^{1-x} \mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} (1-x)\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{8}{15}.$$

**5．计算$\oiint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\sqrt{x^2+z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$是由 $x^2+y^2+z^2\geqslant a^2$，$x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2$

及$y \geq \sqrt{x^2+z^2}$所确定的立体Ω的表面的外侧，a为正数.

解：

$$\oiint\limits_{\Sigma} = \iiint\limits_{\Omega}(2y+\sqrt{x^2+z^2})\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_a^{2a} (2\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi \cdot \int_a^{2a}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\pi+2}{8} \cdot \frac{15}{4}a^4 = \frac{15}{16}(\pi+2)a^4.$$

***6．计算曲面积分：$\iint\limits_{S}(x^3+e^y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - z(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$

为曲面$z=1-x^2-y^2$在$z\geq 0$的部分，积分沿S的上侧.

解：记$S':\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$方向取下侧，则

$$\oiint\limits_{S+S'} = \iiint\limits_{V}\left(3x^2 - zx^2 - 2zx^2\right)dV$$

$$= \int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\sqrt{1-z}}\left(3\rho^2\cos^2\varphi - 3z\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho = \frac{3}{16}\pi.$$

$$\iint\limits_{S_1} = -\iint\limits_{D_{xy}}\left(-x^2y^2\right)dxdy = \frac{\pi}{24}.$$

$$\therefore \iint\limits_{S}` = \frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{24} = \frac{7\pi}{48}.$$

***7．计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 满足

$z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ 的那部分曲面的上侧．

解：补平面块 Σ_1：$z=1$, $x^2+y^2\leqslant 1$，下侧．

$$\iint\limits_{\Sigma_1} = \iint\limits_{\Sigma_1} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi,$$

Σ 和 Σ_1 围成半球体 Ω，由高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} = 2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_1^2 z\,\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z-z^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;= 2\int_1^2 z\cdot\pi(2z-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma} = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} = \frac{11}{6}\pi-(-\pi) = \frac{17}{6}\pi$$

**8．计算通量：$\Phi = \oint\!\!\!\oint\limits_{\boldsymbol{S}} \dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{S}$ 为半径等于 4 的球面，$\boldsymbol{r}$ 为曲面 S 上点 (x,y,z) 的径向量．

解：$$\Phi = \oint\!\!\!\oint\limits_{S} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \oint\!\!\!\oint\limits_{S} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{4} = \frac{1}{4}\iiint\limits_{V} 3dV = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3 = 64\pi\,.$$

***9．求流速为 $\boldsymbol{v} = x^2\,\boldsymbol{i} + y^2\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$ 的不可压缩流体（流体密度 $\mu(x,y,z)\equiv$ 常数）在单位时间内，流经上半单位球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 上侧的流量．

解：$\Phi = \iint\limits_{S} \mu\vec{f}\cdot d\vec{s}$．记 $S_1:\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 方向取下侧，则

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{S+S_1} \mu\vec{f}\cdot d\vec{s} = \mu\iiint\limits_{V}(2x+2y+2z)dV = 2\mu\iiint\limits_{V} zdV$$

$$= 2\mu\int_0^1 zdz \iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} d\sigma = 2\mu\int_0^1 \pi(1-z^2)zdz = \frac{\pi}{2}\mu\,.$$

$$\iint\limits_{S_1} \mu\vec{f}\cdot d\vec{s} = -\mu\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 0dxdy = 0\,.$$

$$\therefore \quad \iint_S \mu \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{\pi\mu}{2}.$$

其中Ω为Σ所围的立体区域.

第 14 章 （之 6）（总第 80 次）

教学内容： §14.5 斯托克斯公式

1．解下列各题：

＊（1）设 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，则下列表达式中有意义的是 （ ）

（A） $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, r)$； （B）grad(rot $\boldsymbol{r}$)；

（C）div(div $\boldsymbol{r}$)； （D）rot(div $\boldsymbol{r}$).

答：(A).

＊（2）向量场 $\boldsymbol{f}=(x+y+z)(x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k})$ 的旋度为________________.

解：$$\mathrm{rot}\vec{f}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2+xy+xz & xy+y^2+yz & xz+yz+z^2 \end{vmatrix}=\{z-y,x-z,y-x\}.$$

＊（3）设向量场 $\boldsymbol{F}=[x^2+ln(1+y^2)]\boldsymbol{i}-z\sin x\boldsymbol{j}+(e^{xy}-2xz)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{G}=(z^2+x\cos x^2)\boldsymbol{i}+y^2e^y\boldsymbol{j}++(2xz+\mathrm{arctg}z)\boldsymbol{k}$, 则 （ ）

(A) $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ 都是无旋场. (B) $\boldsymbol{F}$ 是无旋场，$\boldsymbol{G}$ 是无源场.

(C) $\boldsymbol{F}$ 是无源场，$\boldsymbol{G}$ 是无旋场. (D) $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 都是无源场.

答：(C)

＊＊（4）设函数 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，则 $\mathrm{rot}[\mathrm{grad} f(x,xy,xyz)]=$__________.

答： $\vec{0}$.

＊＊2．验证曲线积分 $I=\int_{(2,1,2)}^{(-1,0,4)}(yz+2)\mathrm{d}x+(xz-3)\mathrm{d}y+(xy+5)\mathrm{d}z$ 满足与路径无关的条件，求出其值.

解： $P=yz+2$，$Q=xz-3$，$R=xy+5$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=z=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=y=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=x=\frac{\partial R}{\partial y},$$

且 P,Q,R 都是 C^1 类函数.

$\therefore$ 曲线积分与积分路径无关.

$\therefore \quad I=\int_2^{-1}(2+2)dx+\int_1^0(-2-3)dy+\int_2^4 5dz=3$.

**3．向量场 $\boldsymbol{f}=e^x[\cos(y-z)\,\boldsymbol{i}-\sin(y-z)\,\boldsymbol{j}+\sin(y-z)\,\boldsymbol{k}]$ 是否为无旋场？为什么？

解：因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$、$\dfrac{\partial R}{\partial x}$、$\dfrac{\partial P}{\partial z}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial z}$、$\dfrac{\partial R}{\partial y}$ 连续且

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin(y-z)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\dfrac{\partial R}{\partial x}=e^x\sin(y-z)=\dfrac{\partial P}{\partial z}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=-e^x\cos(y-z)=\dfrac{\partial R}{\partial y}$.

所以给定向量场是无旋场.

**4．验证向量场 $\boldsymbol{A}=\{4x^3+2xyz+y^2z,x^2z+2xyz,x^2y+xy^2+4z^3\}$ 为无旋场．并求 $u(x,y,z)$，使（1）$u(0,0,0)=1$，（2）$\mathrm{d}u=\boldsymbol{A}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$.

解：因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$、$\dfrac{\partial R}{\partial x}$、$\dfrac{\partial P}{\partial z}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial z}$、$\dfrac{\partial R}{\partial y}$ 连续且

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 4x^3+2xyz+y^2z & x^2z+2xyz & x^2y+xy^2+4z^3\end{vmatrix}=\vec{0},$$

所以 A 为无旋场.

$u(x,y,z)$

$=u(0,0,0)+\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\{4x^3+2xyz+y^2z,x^2z+2xyz,x^2y+xy^2+4z^3\}\cdot\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\}$

$=1+\int_0^x 4x^3\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^x(x^2y+xy^2+4z^3)\mathrm{d}z=1+x^4+x^2yz+xy^2z+z^4$.

**5．计算 $\int_\Gamma yz(2x+y+z)dx+zx(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$，其中 Γ 为从原点出发的在圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的任意一条到点 $A=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$ 的有向光滑曲线.

解：$P=yz(2x+y+z)$，$Q=zx(x+2y+z)$，$R=xy(x+y+2z)$，

$\because \quad \dfrac{\partial R}{\partial y}=x^2+2xy+2xz=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$,

$\dfrac{\partial P}{\partial z}=2xy+y^2+2yz=\dfrac{\partial R}{\partial x}$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2zx+2yz+z^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$\therefore$ 曲线积分与路径无关.

$$\therefore \int_\Gamma=\int_{(0,0,0)}^{\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},1\right)}=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}0\cdot0\cdot(2x+0+0)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}0\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot(\frac{\sqrt2}{2}+2y+0)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^1\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}+2z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt2+2z\right)\mathrm{d}z=\frac12+\frac{\sqrt2}{2}.$$

***6．计算 $\oint_\Gamma(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧的位于 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0$ 部分 Σ 的正向边界，$a>0$.

解：$P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$，取 Σ 为：$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, $z\geqslant0$. 上侧．由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma=-2\iint_\Sigma(y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性， $\iint_\Sigma y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma z\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_\Sigma x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_\Sigma x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\therefore \oint_\varGamma=-12\iint_\Sigma x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因 Σ 在 xoy 面上的投影域为 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$.

$$\therefore \oint_\varGamma=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r$$

$$=-12\cdot1\cdot\frac{a^3}{3}=-4a^3.$$

***7．试证：$\oint_C(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)=\pi\sqrt3$．其中 C 是平面曲线 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=1$，其正向使确定出所在平面的正法向指向上.

$$\text{解：}\oint_C zdx+xdy+ydz=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & x & y\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S dydz+dzdx+dxdy=\iint_S \{1,1,1\}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}ds=\sqrt{3}\iint_S ds=\pi\sqrt{3}\ .$$

***8．计算 $\oint_\Gamma x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$， 其中$\Gamma$ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5, z=x^2+y^2+1$ 的交线，对着 z 轴正向看Γ 的方向为顺时针方向．

解：Γ 所围的平面块Σ为 $z=2,\ x^2+y^2\leqslant1$, 方向向下． ∵ $P=x^2yz,\ Q=x^2+y^2,\ R=x+y+1$.

$$\therefore\ \oint_\Gamma=-\iint_\Sigma(1-0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x^2y-1)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(2x-x^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由于Σ在 yoz 面及 zox 面上均无投影域，故

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\ \iint_\Sigma (x^2y-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0.$$

而Σ在 xoy 面上的投影域为 D： $x^2+y^2\leqslant1$.

$$\therefore\ \oint_\Gamma=-\iint_\Sigma(2x-x^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D(2x-x^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

第 15 章 （之 1） （总第 81 次）

教学内容： §15.1 引言，§15.2 周期函数的傅立叶级数展开（周期为 2π ）

**1．已知以2π为周期的函数$f(x)$的傅里叶系数为a_n, b_n，并设$g(x)=-f(-x)$，则函数$g(x)$的傅里叶系数α_n，β_n必满足关系式 （ ）

(A) $\alpha_n=a_n$，$\beta_n=b_n$； (B) $\alpha_n=-a_n$，$\beta_n=-b_n$；

(C) $\alpha_n=a_n$，$\beta_n=-b_n$； (D) $\alpha_n=-a_n$，$\beta_n=b_n$.

答案 （D）.

解 因为$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，所以 $g(x)=-f(-x)$

$$=-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(-nx)+b_n\sin(-nx)]=-\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ .$$

可知正确的选项为（D）.

**2．设函数$f(x)$的周期为2π，在区间$[-\pi,\pi]$上表达式为$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \sin 2x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

则其傅立叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 中的系数 $b_n=$ ____________ .

答案 $b_2=\frac{1}{2}$，$b_n=0(n\neq 2)$.

解 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-2)x-\cos(n+2)x]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-2)x}{n-2}-\frac{\sin(n+2)x}{n+2}\right]_0^{\pi}=0\text{，}\ n\neq 2\text{，}$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

注 本来傅立叶系数有统一的公式，不用一个一个系数分别计算，但这里在使用统一公式计算 b_n 时，遇到了分母为 $n-2$ 的情况，所以 b_2 必须得另行计算.

**3．若区间 $[a,b]$ 上的正交函数系中每个函数之平方在区间 $[a,b]$ 上的积分值均为1，就称之为 $[a,b]$ 上的标准（或规范）正交函数系．试证：

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}x,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots\right\}$$

是区间 $[-l,l]$ 上的标准正交函数系.

证：
$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}x\bigg|_{-l}^{l}=0\text{，}$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot(-\frac{l}{k\pi})\cos\frac{k\pi}{l}x\bigg|_{-l}^{l}=0\text{，}$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\sin\frac{m+n}{l}\pi x+\sin\frac{n-m}{l}\pi x]dx=0\text{，}$$

当 $n\neq m$ 时

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m}{l}\pi xdx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{n+m}{l}\pi x+\cos\frac{n-m}{l}\pi x\right]dx=0$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi}{l}xdx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\cos\frac{n-m}{l}\pi x-\cos\frac{n+m}{l}\pi x]dx=0$$

∴ 此函数系是正交函数系.

又 $$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}dx=1,$$

$$\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\right]^2=\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}\cos^2\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{1+\cos\frac{2n}{l}\pi x}{2}dx=1+\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{l}{2n\pi}\cos\frac{2n}{l}\pi xd(\frac{2n\pi}{l}x)=1$$

$$\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]^2dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{l}x}{2}dx=1$$

∴ 此正交函数系是标准正交函数系.

**4. $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，根据它在一个周期 $(0,2\pi]$ 上的定义式

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\pi,\\ 0, & \pi<x\le 2\pi,\end{cases}$$

将它展开成 Fourier 级数.

解 由 Fourier 级数系数的计算公式，可得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=1,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots,\\ \dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\end{cases}$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\cdots+\dfrac{\sin 3x}{3}+\cdots\right),\ 0<x<\pi,\pi<x<2\pi$.

**5. $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，根据它在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上的定义式

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$$

将它展开成 Fourier 级数.

解：由 Fourier 级数系数的计算公式，$a_1=0$ ，当 $n=0,2,3,4,5,\cdots$ 时，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\right]\mathrm{d}\,x\overset{n\neq 1}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)}$$

， 所以，$a_{2n-1}=0$， $a_{2n}=\dfrac{-2}{\pi(4n^2-1)}$.

又 $$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,\mathrm{d}\,x=0,\quad n=2,3,\cdots$$

由 $f(x)$ 满足 Fourier 级数收敛于 $f(x)$ 的条件，故对 $x\in[-\pi,\pi]$,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

***6. 已知以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的表达式是 $f(x)=\cos ax$，试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数[必须分两种情况来进行讨论：（1） a 是整数；（2） a 不是整数].

解：（1）若 a 是整数，则其傅里叶级数就是 $f(x)=\cos|a|x \qquad (-\pi\le x\le\pi)$.

（2）若 a 不是整数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos axdx=\frac{1}{a\pi}\sin ax\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\sin a\pi}{a\pi},$$

$n\neq 0$ 时， $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n}+\frac{\sin(a-n)x}{a-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}2a\sin a\pi}{(n^2-a^2)\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(n+a)x+\sin(n-ax)\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+a)x}{n+a}-\frac{\cos(n-a)x}{n-a}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\therefore f(x)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)2a\sin a\pi}{n^2-a^2}\cos nx,$$

$$\therefore f(x)=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)2a\sin a\pi}{n^2-a^2}\cos nx, x\in[-\pi,\pi].$$

**7．试将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的表达式是 $f(x)=x-\pi$．

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(x-\pi)dx \overset{x-\pi=u}{=\!=\!=} \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}udu=0$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-\pi)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx-\int_0^{2\pi}\cos nxdx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin xdx-\int_0^{2\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right]=-\frac{2}{n}$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\sin nx,\quad x\in(0\,,2\pi)$$

**8．试将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的表达式是：

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2},\\ 2\pi, & \dfrac{3\pi}{2}\le x<2\pi.\end{cases}$$

解：
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)dx\right]=\frac{3}{4}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{3n}{2}\pi-2)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\sin nxdx\right]=0$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{3}{8}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}n\pi-2\right)\cos nx,\quad x\in(0,2\pi)$$

第 15 章 （之 2） （总第 82 次）

教学内容：15.2.3 周期 2L 的函数；15.3 有限区间上函数的傅立叶级数展开

**1. 下列各函数 $f(x)$ 都是定义在区间 $(0,2\pi)$ 上函数，则与它们对应的傅立叶级数的形式的特点为 （ ）

（A）函数 $f(x)=2\pi x$ 的傅立叶级数一定是一个正弦级数；

（B）函数 $f(x)=x^2$ 的傅立叶级数一定是一个余弦级数；

（C）函数 $f(x)=2\pi x-x^2$ 的傅立叶级数，既不是正弦级数，也不是余弦级数；

（D）函数 $f(x)=\pi-x$ 的傅立叶级数一定是一个正弦级数.

答案 （D）

解 只要分别作出各给定函数 $f(x)$ 的周期延拓，研究所得到新函数 $f^*(x)$，容易看出：

（A）中的 $f^*(x)$ 不是奇函数；（B）中的 $f^*(x)$ 不是偶函数；

（C）中的 $f^*(x)$ 是偶函数；（D）中的 $f^*(x)$ 是奇函数.

**2. 利用函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅立叶级数

$$\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right],$$

可得常数项级数的求和公式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=$ ________ .（注函数记号 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ ）

答案 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{\tanh\pi}-1\right)$.

解 记 $$S(x)=\frac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right],$$

在上式中取 $x=\pi$，得 $S(\pi)=\dfrac{\sinh\pi}{\pi}\left[1+2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right]$，另一方面，根据狄利克莱定理有

$$S(\pi)=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{\pi})=\cosh\pi,$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh\pi}-1\right).$$

***3．设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le-\dfrac{\pi}{2}\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$，已知 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)=$______ .

答：$\dfrac{3\pi}{4}$． $\left[S\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)=S\left(\dfrac{9\pi}{4}-2\pi\right)=S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-S\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

**4．设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x-1, & 1\le x<2\end{cases}$ 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 4 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $S(7)=$____________.

答：$S(7)=-\dfrac{1}{2}$，$\left(S(7)=S(7-8)=S(-1)=-S(1)=-\dfrac{1}{2}[f(1-0)+f(1+0)]\right)$.

**5． 将函数 $f(x)=a+bx$（$0<x<P$）（为周期函数在一周期长区间上的表达式）展开成傅里叶级数．

解：（1）$x\in(0,p),\quad T=p,\quad l=\dfrac{p}{2}$,

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx=2a+bp$$

$n=1,2,\cdots$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx=\frac{2}{p}\int_0^p(a+bx)\cos\frac{2n\pi}{p}xdx=0$$

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx=\frac{2}{p}\int_0^p(a+bx)\sin\frac{2n\pi}{p}xdx=-\frac{bp}{n\pi}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2a+bp}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{bp}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{p}x,\quad(-\infty<x<\infty,\quad x\ne 0,\pm p,\pm 2p,\cdots).$$

**6. 将函数 $f(x)=\sin x$，（$0\le x\le \pi$）（周期函数在一周期长区间上的表达式）展开成傅里叶级数.

解 ：$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\dfrac{4}{\pi}$，

$$
\begin{aligned}
&n=1,2,\cdots,\\
&a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{2n\pi}{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos 2nxdx\\
&\quad=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right]dx=\frac{-4}{\pi(4n^2-1)},\\
&b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin 2nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x\right]dx=0.
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx$，　　（$-\infty<x<\infty$）.

**7. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le h,\\ 0 & h<x\le\pi,\end{cases}$　（$h>0$）；分别展开成（1）余弦级数；（2）正弦级数.

解：（1）　$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{h}dx+\int_h^{\pi}0dx\right]=\dfrac{2h}{\pi}$，

$n=1,2,\cdots$时，　$a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nxdx=\dfrac{2}{n\pi}\sin nh,$

所以余弦级数为　$f(x)=\dfrac{h}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin nh\cdot\cos nx,x\in[0,h)\cup(h,\pi].$

（2）　$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nxdx=\dfrac{2}{n\pi}(1-\cos nh),$

所以正弦函数为　$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}(1-\cos nh)\sin nx,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi]$.

**8. 将函数 $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$ 分别展开成（1）余弦级数；（2）正弦级数.

解：（1）$n=0$ 时，$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\dfrac{\pi}{2}$，

$n \neq 0$ 时，$a_n = \dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx\right] \quad = \dfrac{2}{n^2\pi}(2\cos\dfrac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)$，

所以余弦级数为 $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2\pi}(2\cos\dfrac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1)\cos nx, x \in [0, \pi]$,

（2）$b_n = \dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx\right] = \dfrac{4}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}$,

所以正弦级数为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin nx, \quad x \in [0, \pi]$.

***9．将函数展开为正弦级数：$f(x) = \dfrac{1}{2}(\pi - x)$，$x \in [0, \pi]$．

解：构造奇函数 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\pi - x), x \in (0, \pi] \\ \dfrac{1}{2}(-\pi - x), x \in [-\pi, 0) \end{cases}$，间断点 $x = 0$，

$$a_n = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\sin nxdx = \frac{1}{n},$$

$$\therefore \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, \quad x \in (0, \pi].$$

***10．将下列函数展开为余弦级数：$f(x) = x - 1$，$x \in [0, 2]$，并求出常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和．

解：构造偶函数 $g(x) = \begin{cases} x - 1, x \in [0, 2] \\ -x - 1, x \in (-2, 0) \end{cases}$,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x - 1)dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x - 1)dx = 0,$$

$n=1,2,\cdots,$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}g(x)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{2}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],$$

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x,\quad x\in[0,2]\,,$$

当$x=2,\quad f(2)=2-1=1,$

$$f(2)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}(-1)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\qquad\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,\quad\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2},$$

即 $(1-\frac{1}{4})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\quad\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6}\,.$