

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**Московский государственный технический университет**

**им. Н. Э. Баумана**

**Национальный исследовательский университет**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

**Домашнее задание №1**

**По курсу: «Динамика КА»**

**Вариант №9**

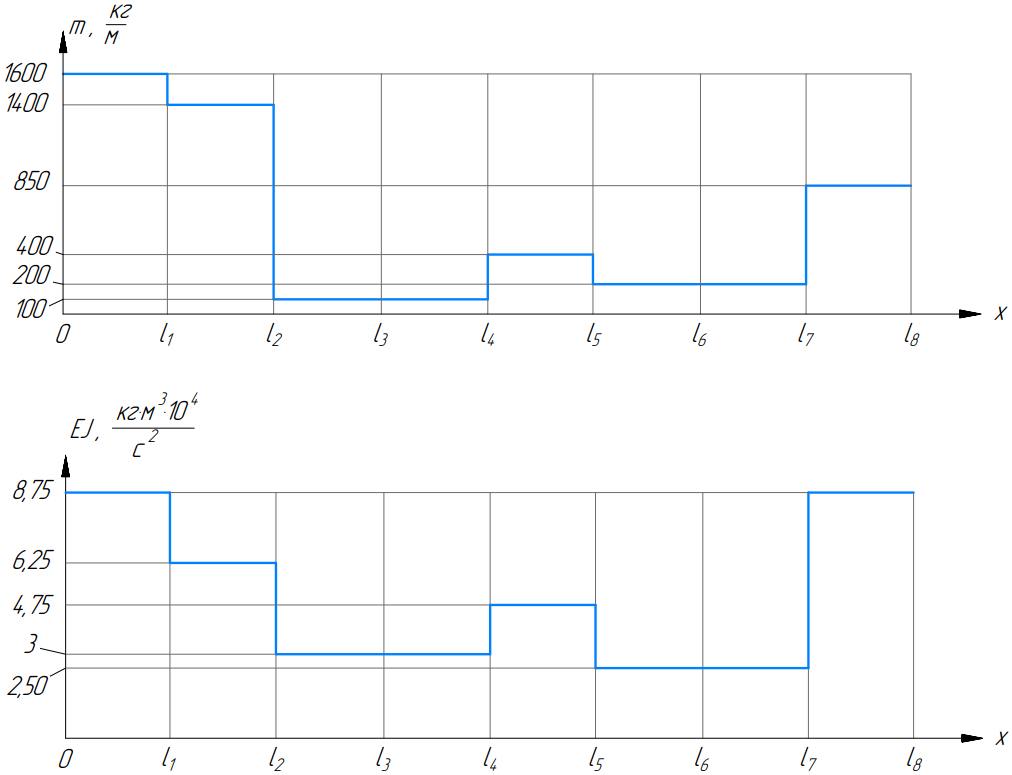
nvk24oleg@mail.ru

Выполнил: Серебрянников О.А.

Группа: РКТ2-81

Проверил: Борзых С. В.

# Условие



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 | 2 | 5 | 10 | 12 | 14 | 20 | 21 | 23 |

**Задание**: Определение частот и форм собственных колебаний балки:

1. По заданным распределениям масс и жесткостей по длине балки осуществить осреднение характеристик.
2. Для полученной однородной балки определить частоты и ненормированные формы колебаний (для двух твердых и пяти упругих тонов), результаты представить в виде таблицы.
3. Определить нормирующие множители, выполнить нормировку форм. Результаты представить в виде таблиц и графиков нормированных форм и их производных.

# Решение

## Осреднение характеристик

*Обща длина балки*:

*Средняя погонная масса балки:*

*Средняя (интегральная) погонная жёсткость балки:*

## Частоты и ненормированные формы колебаний

Для общего случая мы бы воспользовались уравнением поперечных вынужденных колебаний неоднородной упругой балки в частных производных:

Но после осреднения балки:

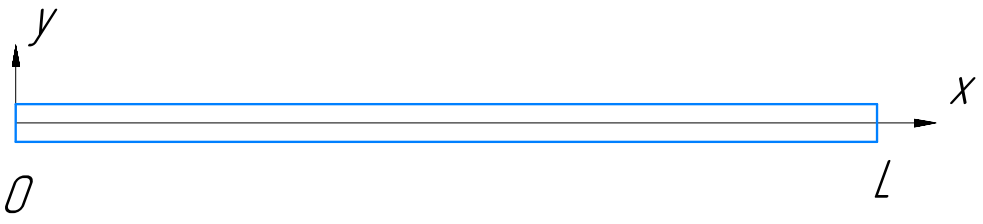


Рис. 1

Уравнение (1) превращается в уравнение собственных поперечных колебаний однородной балки:

Перемещение вдоль оси представим как сумму перемещений по тону.

Где представим как произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

Подставляя (4) в (2) и исключая , получим:

Пусть:

Тогда:

А уравнение (5) превращается:

Для уравнения (7) запишем характеристическое уравнение:

Или:

Тогда решение уравнения (7) имеет вид:

Что также можно представить через *функции Крылова*, то есть:

Где:

**Воспользуемся ГУ:** так как балка никак не закреплена по краям, то из рисунка 1:

Продифференцируем уравнение (8):

Подставим ГУ (9) в систему уравнений (10):

Учтём, что тогда уравнение (8) превращается:

Запишем частотный определитель системы (12), относительно неизвестных и .

Раскрыв его, получим:

Согласно свойству синусу и косинуса:

Согласно свойствам гиперболических синуса и косинуса:

Разделим на гиперболический косинус, так как он не принимает нулевого значения:

Решая (13) на ЭВМ, найдём первые 5 ненулевых корней (собственных чисел), что будут соответствовать первым 5-и упругим формам колебаний. Для первых двух твёрдых форм колебаний собственные числа и собственные частоты будут равны нулю. Следовательно, в итоге имеем таблицу (собственные частоты находим из формулы (6)):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Форма |  |  |  |
| 1тв | 0 | 0 | 0 |
| 2тв | 0 | 0 | 0 |
| 1упр | 4,7300 | 0,2057 | 0,3896 |
| 2упр | 7,8530 | 0,3414 | 1,0733 |
| 3упр | 10,9960 | 0,4781 | 2,1048 |
| 4упр | 14,1370 | 0,6147 | 3,4794 |
| 5упр | 17,2790 | 0,7513 | 5,1976 |

Таблица 1.

Но найденные значения для упругих колебаний, мы не можем просто подставить в систему уравнений (12), так как уравнения здесь линейно зависимы.

Положим, что:

C учётом этого уравнение (11) превращается в:

Для первых двух твёрдых форм известно:

Разбив балку на 10 равных отрезков и учитывая уравнения (14), (15) и таблицу 1, получим таблицу ненормированных форм колебаний:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Форма | Координаты точек балки, x | | | | | | | | | | |
| 0 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 | 23 |
| 1тв | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2тв | -1 | -0,80 | -0,60 | -0,40 | -0,20 | 0,00 | 0,20 | 0,40 | 0,60 | 0,80 | 1,00 |
| 1упр | 1 | 0,5371 | 0,0975 | -0,2722 | -0,5204 | -0,6078 | -0,5200 | -0,2715 | 0,0985 | 0,5381 | 1,0010 |
| 2упр | 1 | 0,2275 | -0,3971 | -0,6620 | -0,4832 | -0,0003 | 0,4827 | 0,6620 | 0,3977 | -0,2266 | -0,9990 |
| 3упр | 1 | -0,0520 | -0,6429 | -0,3968 | 0,3280 | 0,7112 | 0,3276 | -0,3972 | -0,6428 | -0,0514 | 1,0007 |
| 4упр | 1 | -0,2941 | -0,6004 | 0,2259 | 0,7000 | -0,0003 | -0,7001 | -0,2252 | 0,6007 | 0,2934 | -1,0009 |
| 5упр | 1 | -0,4833 | -0,3051 | 0,6754 | 0,1108 | -0,7069 | 0,1116 | 0,6751 | -0,3058 | -0,4827 | 1,0011 |

Таблица 2.

## Нормировка форм колебаний

Для нормированной формы j-ой точки балки справедливо выражение:

– это нормирующий множитель, определяющийся из выражения:

Причём – номер тона, а первые два нуля отвечают за первую и вторую твёрдую форму колебаний.

Формулу (17) переписать в нашем случае в таком виде:

C учётом того, что получим значение нормирующего множителя для соответствующей формы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Форма | 1тв | 2тв | 1упр | 2упр | 3упр | 4упр | 5упр |
|  | 0,0091 | 0,0128 | 0,0168 | 0,0175 | 0,0159 | 0,0162 | 0,0187 |

Таблица 3.

Тогда используя данные из таблиц 2 и 3 и зная формулу (16) получим:

Нормированные формы колебаний:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Координаты точек балки, x | | | | | | | | | | |
| 0,0 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 | 23,0 |
| 1тв | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 | 0,0091 |
| 2тв | -0,0128 | -0,0102 | -0,0077 | -0,0051 | -0,0026 | 0,0000 | 0,0026 | 0,0051 | 0,0077 | 0,0102 | 0,0128 |
| 1упр | 0,0168 | 0,0090 | 0,0016 | -0,0046 | -0,0087 | -0,0102 | -0,0087 | -0,0046 | 0,0017 | 0,0090 | 0,0168 |
| 2упр | 0,0175 | 0,0040 | -0,0069 | -0,0116 | -0,0085 | 0,0000 | 0,0084 | 0,0116 | 0,0070 | -0,0040 | -0,0175 |
| 3упр | 0,0159 | -0,0008 | -0,0102 | -0,0063 | 0,0052 | 0,0113 | 0,0052 | -0,0063 | -0,0102 | -0,0008 | 0,0159 |
| 4упр | 0,0162 | -0,0048 | -0,0097 | 0,0037 | 0,0113 | 0,0000 | -0,0113 | -0,0036 | 0,0097 | 0,0048 | -0,0162 |
| 5упр | 0,0187 | -0,0090 | -0,0057 | 0,0126 | 0,0021 | -0,0132 | 0,0021 | 0,0126 | -0,0057 | -0,0090 | 0,0187 |

Таблица 4.

Производные от нормированных форм колебаний:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Координаты точек балки, x | | | | | | | | | | | |
| 0,0 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 | 23,0 |
| 1тв | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2тв | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 |
| 1упр | -0,0034 | -0,0033 | -0,0030 | -0,0023 | -0,0013 | 0,0000 | 0,0013 | 0,0023 | 0,0030 | 0,0033 | 0,0034 |
| 2упр | -0,0060 | -0,0056 | -0,0036 | -0,0003 | 0,0028 | 0,0041 | 0,0028 | -0,0003 | -0,0036 | -0,0056 | -0,0060 |
| 3упр | -0,0076 | -0,0064 | -0,0013 | 0,0042 | 0,0047 | 0,0000 | -0,0047 | -0,0042 | 0,0013 | 0,0064 | 0,0076 |
| 4упр | -0,0100 | -0,0069 | 0,0029 | 0,0066 | -0,0011 | -0,0070 | -0,0011 | 0,0066 | 0,0029 | -0,0069 | -0,0100 |
| 5упр | -0,0140 | -0,0071 | 0,0086 | 0,0030 | -0,0098 | 0,0000 | 0,0098 | -0,0030 | -0,0086 | 0,0071 | 0,0140 |

Таблица 5.

Далее представлены графики для соответствующих тонов:

