

Теоретические вопросы

1. Дайте определение векторного пространства. Приведите пример.
2. Дайте определение линейно независимой системы векторов. Приведите примеры линейно независимой и линейно зависимой системы из трёх векторов.
3. Дайте определение базиса векторного пространства. Приведите пример базиса в \mathbb{R}^3 .
4. Дайте определение размерности векторного пространства.
5. Дайте определение евклидова пространства.
6. Докажите неравенство Коши-Буняковского.
7. Дайте определение матрицы перехода между базисами. Как меняются координаты вектора при замене базиса?
8. Дайте определение суммы и произведения матриц. Приведите пример. Сформулируйте основные свойства этих операций.
9. Сформулируйте теорему о делении многочленов от одной переменной с остатком. Приведите пример.
10. Докажите теорему Безу.
11. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример вычисления его матрицы.
12. Дайте определение квадратичной формы. Приведите пример вычисления её матрицы.
13. Докажите формулу изменения матрицы квадратичной формы при замене базиса.
14. Что такое ортогональная матрица? Напишите общую формулу действительной ортогональной матрицы размера 2×2 .

Типовые задачи

1. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -4x - 3y - z = 3 \\ -4x - 2y - z = 8 \\ 5x + 3y + z = -7 \end{cases}$$

Ответ: $x = -4, y = 5, z = -2$.

2. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -7x + 6y - 4z = -9 \\ -5x + 4y - 2z = -7 \\ -4x + 3y - z = -6 \end{cases}$$

Ответ: $x = 2z + 3, y = 3z + 2$.

3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решите матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Дополните векторы $v_1 = (5, 1, -3)$ и $v_2 = (5, -4, 7)$ до ортогонального базиса пространства \mathbb{R}^3 .

Ответ: $v_3 = (1, 10, 5)$.

6. Представьте комплексное число $\frac{10 - 15i}{\left(\frac{i-3}{2i-1} + i - 3\right)^2 + 1}$ в алгебраической форме.

Ответ: $2 + i$.

7. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & b & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & -b \\ -1 & a & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $-a - ab + a^3b + a^3 - b$.

8. Разложить многочлен $3x^4 - 20x^3 + 47x^2 - 41x + 8$ по базису, состоящему из степеней $(x - 2)^n$.

Ответ: $2 + 3(x - 2) - (x - 2)^2 + 4(x - 2)^3 + 3(x - 2)^4$.

9. Из списка векторов $v_1 = (3, -2, 1)$, $v_2 = (-2, 1, -9)$, $v_3 = (2, -1, 2)$, $v_4 = (-1, -1, 7)$, $v_5 = (-1, 0, 4)$ выделить те, которые образуют базис их линейной оболочки, и представить остальные векторы из списка в виде линейной комбинации векторов из полученного базиса.

Ответ: (v_1, v_3, v_5) — базис. $v_4 = v_1 - v_3 + 2v_5$, $v_2 = v_1 - 3v_3 - v_5$.

10. Разложить вектор $v = (9, 7, 10)$ по ортогональному базису $e_1 = (2, -2, 2)$, $e_2 = (-1, 3, 4)$, $e_3 = (-7, -5, 2)$.

Ответ: $v = 2e_1 + 2e_2 - e_3$.

11. Напишите матрицу оператора $\varphi : V \rightarrow U$, где $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 4\}$ и $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq 3\}$ заданного формулой $\varphi(f) = f' + (x+1)f'' - (x^2-1)f'''$ относительно базиса $1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4$ пространства V и базиса $1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3$ пространства U .

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 & 63 & 216 \\ 0 & 0 & 4 & 30 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

12. Найдите длины векторов $v = (1, -3, 2)$, $u = (3, -3, -4)$ и угол φ между ними.

Ответ: $|v| = \sqrt{14}$, $|u| = \sqrt{34}$, $\varphi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{34}}\right)$.

13. Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $2x^2 + 17y^2 - z^2 - 12xy + 8xz - 20yz$ к нормальному виду.

Ответ: $2(x - 3y + 2z)^2 - (y - 2z)^2 - 5z^2$.

14. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 35 & 7 & -26 \\ -72 & -12 & 58 \\ 32 & 7 & -23 \end{pmatrix}.$$

Ответ: Собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 3$. Собственные векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

15. Решите систему методом Крамера

$$\begin{cases} -(2+i)x + (i-2)y &= -2 - 15i \\ -(4+2i)x + (i-3)y &= -2 - 26i \end{cases}$$

Ответ: $\Delta = i - 3$, $\Delta_x = -9 - 7i$, $\Delta_y = -10i$, $x = 2 + 3i$, $y = 3i - 1$

16. Решите уравнение с разделяющимися переменными $y' = \frac{y}{x^2 + 1}$.

Ответ: $y = Ce^{\arctg x}$.

17. Решите уравнение с разделяющимися переменными $y^2 y' + 2 \ln x = x$.

Ответ: $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 2x \ln x + 2x + C$.

18. Решите однородное дифференциальное уравнение $(x^2 + xy)y' + xy = 0$.

Ответ: $y = \pm \sqrt{x^2 + C} - x$.