Финансовый университет. Прикладная информатика. 1 семестр. Билеты по математике.

Билет №1

Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при всех $n > N$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$.

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = A) := \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; (|x_n - A| < \varepsilon)$$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, так как $\left|\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2n}\right| = \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$ при $n > N = \dfrac{1}{2\varepsilon}$

Билет №2

См. билет №1

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, найдётся номер N' такой, что $\forall n > N' \; |A - x_n| < \varepsilon/2$. Аналогично, поскольку $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, найдётся номер N'' такой, что $\forall n > N'' \; |B - x_n| < \varepsilon/2$. Тогда при $n > \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|(A+B) - (x_n + y_n)| < \varepsilon$$

что в соответствии с определением предела доказывает утверждение

Билет №3

См. билет №1

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A_1$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = A_2$. Если $A_1 \neq A_2$, то фиксируем пересекающиеся окрестности $V(A_1)$ и $V(A_2)$ точек A_1, A_2.

В качестве таковых можно взять, например, δ-окрестности этих точек при $\delta < \dfrac{1}{2}|A_1 - A_2|$. По определению предела найдём числа N_1 и N_2 так, что $\forall n > N_1 \; (x_n \in V(A_1))$ и $\forall n > N_2 \; (x_n \in V(A_2))$. Тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ получим $x_n \in V(A_1) \cap V(A_2)$. Но это невозможно, поскольку $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$.

Билет №4

Последовательность x_n называется *ограниченной*, если существует число M такое что $|x_n| < M$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность x_n называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. Полагая в определении предела $\varepsilon = 1$, найдём номер N такой, что $\forall n > N \; (|x_n - A| < 1)$. Значит при $n > N$ имеем $|x_n| < |A| + 1$. Если теперь взять $M > \max\{|x_1|, \dots, |x_n|, |A| + 1\}$, то получим, что $\forall n > N (|x_n| < M)$.

Билет №5

См. билет №4

Пусть $|y_n| \le M \ \forall n$. Для любого $\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |x_n| \le \dfrac{\varepsilon}{M}$.

$$|x_n y_n| < |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Билет №6

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \iff x_n = A + \alpha_n$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = B \iff y_n = B + \beta_n$$

где α_n, β_n - бесконечно малые

$$x_n y_n = (A+\alpha_n)(B+\beta_n) = AB + A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n$$
$$A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n = \gamma_n$$

где γ_n какая-то бесконечно малая, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} AB + \gamma_n = AB$$

Билет №7

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \iff x_n = A + \alpha_n$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = B \iff y_n = B + \beta_n$$

где α_n, β_n - бесконечно малые

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} =$$
$$= \frac{B(A+\alpha_n) - A(B+\beta_n)}{B \cdot y_n} =$$
$$= \frac{AB + B\alpha_n - AB - A\beta_n}{B \cdot y_n} =$$
$$= \frac{1}{y_n} \cdot \alpha_n - \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot \beta_n = \gamma_n$$

где γ_n какая-то бесконечно малая, следовательно

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} + \gamma_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{A}{B} + \gamma_n = \frac{A}{B}$$

Билет №8

Для того, чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху

◃ То, что любая сходящаяся последовательность ограничена, было доказано в билете №4

▷ По условию множество значений последовательности $\{x_n\}$ ограничено сверху, значит, оно имеет верхнюю грань $s = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

По определению верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $x_N \in \{x_n\}$ такой, что $s - \varepsilon < x_N \le s$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, при любом $n > N$ теперь получаем $s - \varepsilon < x_N \le x_n \le s$, т.е. $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что $\lim_{n\to\infty} x_n = s$

Билет №9

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= \left[\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

а следовательно $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n$$

$$y_n = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Последовательность $\{x_n\}$ неубывающая и ограниченная сверху, а следовательно по теореме Вейерштрасса имеет предел

Билет №10 TODO

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ некоторая последовательность, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$

Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность

Билет №11 TODO

По Коши

Будем говорить, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ стремиться к A при x, стремящемся к a, или что A является пределом функции f при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in X$ такой, что $0 < |x - a| < \delta$, выполнено соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in X \; (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

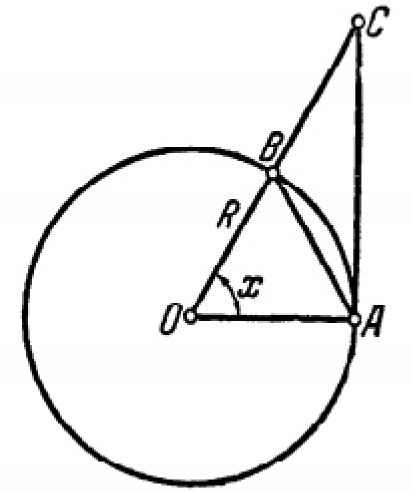
По Гейне

Соотношение $\lim_{X \ni x \to a} f(x) = A$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n \in X \setminus a$, сходящейся к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Билет №12

Аналогично билету №6

Билет №13



$$AC = \operatorname{tg} x$$
$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \sin x$$
$$S_{\triangle OAC} \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$
$$S_{\frown AB} = \frac{1}{2} x$$

при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, из рисунка следует, что

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

разделим на $\frac{1}{2} \sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

По лемме о двух милиционерах

$$\lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x$$
$$1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > 1 \implies \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Билет №14 TODO

Функция f непрерывна в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Билет №15

Первая теорема Вейерштрасса

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, то она ограничена снизу и сверху, т.е существуют такие постоянные и конечные числа m и M, что $m \leq f(x) \leq M$, при $x \in [a, b]$.

Предположим, что функция $f(x)$ при изменении x в промежутке $[a, b]$ оказывается неограниченной, скажем, сверху.

В таком случае для каждого натурального числа n найдётся в промежутке $[a, b]$ такое значение $x = x_n$, что $f(x_n) \geq n$.

По лемме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к конечному пределу:

$$x_{n_k} \to x_0 \ (k \to +\infty)$$

причем, очевидно, $a \leq x_0 \leq b$. Вследствие непрерывности функции в точке x_0, тогда должно быть и

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

а это невозможно, так как

$$f(x_{n_k}) \to +\infty$$

полученное противоречие доказывает теорему

Билет №16

Определение производной функции в точке.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Доказательство $(x^2)' = 2x$

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

Билет №17

Уравнение касательной к графику функции

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$
$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{n}{m}=\operatorname{tg}\alpha=k=\frac{df}{dx}(x_0)$$
$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{df}{dx}(x_0)$$
$$y=\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Билет №18

Теорема Ферма

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ *и* x_0 *— внутренняя точка множества* X. *Если* f *принимает в точке* x_0 *максимальное значение на* X *и* $f'(x_0)$ *существует и конечная, то* $f'(x_0)=0$

Предположим, что $f'(x_0)>0$, следовательно $\exists\delta\ x\in(x_0,x_0+\delta)\ f(x)>f(x_0)$, что противоречит условию.

Предположим, что $f'(x_0)<0$, следовательно $\exists\delta\ x\in(x_0-\delta,x_0)\ f(x)>f(x_0)$, что противоречит условию.

Следовательно $f'(x_0)=0$

Билет №19

Теорема Ролля

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *непрерывная функция, такая что* $f(a)=f(b)$, $f'(x)$ *существует и конечно для* $x\in(a,b)$. *Тогда существует точка* $c\in(a,b)$ *такая, что* $f'(c)=0$.

Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдутся точки $x_m,x_M\in[a,b]$, в которых она принимает соответственно минимальное и максимальное из своих значений на этом отрезке. Если $f(x_m)=f(x_M)$, то функция постоянна на $[a,b]$, и поскольку в этом случае $f'(c)\equiv 0$, то утверждение, очевидно, выполнено. Если же $f(x_m)<f(x_M)$, то, поскольку $f(a)=f(b)$, одна из точек x_m,x_M обязана лежать на интервале (a,b). Её мы обозначим через c. По теореме Ферма $f'(c)=0$.

Билет №20

Теорема Лагранжа

Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема в интервале* (a,b), *то найдётся точка* $c\in(a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Для доказательства рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

которая, очевидно, непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале (a,b) и на его концах принимает равные значения: $F(a)=F(b)=f(a)$. Применяя теорему Ролля, найдём точку $c\in(a,b)$, в которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$