

## Список задач

- (1) Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^3 + n - 1} \sqrt{n^5 + n^3 - 2}}{n^2 \sqrt{n^4 + 1}}$ .
- (2) Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + n^2 - 1} - \sqrt{n^3 - 3n^2 - 1}}{\sqrt{n^5 - n^3} - \sqrt{n^5 + 2n^3 + n - 1}}$ .
- (3) Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 - 4n^3 + n^2 - n + 9}{4n^3 + 2n^2 - n + 1} - \frac{12n^4 - n^3 + 2n^2 - 5n + 1}{8n^3 + 5n^2 + 2n - 3}$ .
- (4) Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 + 2n - 1}{2n^3 - n^2 + n + 1} \right)^{\frac{n^2 + 1}{3n - 1}}$ .
- (5) Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} \right)^n$ .
- (6) Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1}{2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$ .
- (7) Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) + \cos(\sqrt{2}x) - 1}{x^4}$ .
- (8) Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + x^2) - 2 \sin(x^2) + x^4}{x \ln(1 + x) \sin(x^2) + x^3 e^{-x} - x^3}$ .
- (9) Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{(x^2 + 2)^2} - e^{-x^2}}{\cos x \sin x^2 - x^2}$ .
- (10) Вычислите производную функции  $\cos((x + 1)^{20} \sin x^5 \ln x)$ . Упрощать и преобразовывать ответ не нужно.
- (11) Вычислите производную функции  $\sin\left(\frac{x^2 \ln x}{\cos x}\right)$ . Упрощать и преобразовывать ответ не нужно.
- (12) Вычислите производную функции  $\ln((\cos x)^{\sin x^2})$ . Упрощать и преобразовывать ответ не нужно.
- (13) Вычислите интеграл  $\int \frac{\cos(\cos(\ln |2x + 1|)) \sin(\ln |2x + 1|)}{2x + 1} dx$ .
- (14) Вычислите интеграл  $\int \cos 5x \cos 3x dx$ .
- (15) Вычислите интеграл  $\int \frac{dx}{\cos 10x + 1}$ .
- (16) Вычислите интеграл  $\int \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 3e^x}{e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1} dx$ .

(17) Вычислите интеграл  $\int \frac{x^5 + 8x^3 + 7x^2 + 4x^4 + x + 1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2} dx$ .

(18) Вычислите интеграл  $\int \frac{2x^4 - x^3 - x^2 + 5x - 8}{x^3 - 3x + 2} dx$ .

(19) Вычислите сумму ряда:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 20n - 21}$ .

(20) Исследовать следующий ряд на сходимость:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$ .

(21) Исследовать следующий ряд на сходимость:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)!}{(2n)^{5n}}$ .

(22) Вычислите площадь фигуры, заданной неравенствами  $\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 \leq y \leq \sin x$ .

(23) Вычислите площадь фигуры, заданной неравенствами  $2x^2 - x - 6 \leq y \leq x^2$  и  $y \geq -x^2 + 2x$ .

(24) Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = \sin x$  и  $y = \frac{8x^2}{\pi^3}$ .

(25) Найдите максимум и минимум функции  $f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 + y^3$  на множестве  $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, y \leq 1 + x\}$ .

(26) Определите промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = e^{-x^2+3x}$ . Укажите промежутки выпуклости.

(27) Найдите точки разрыва функции  $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|(x^2 + x - 2)}{|x^2 - 4|(x^2 + 2x - 3)}$  и определите их типы.

(28) Найдите точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & \text{если } x \in (-\infty, 1] \\ x^2 + x, & \text{если } x \in (1, 5) \\ \frac{x^2 + 3x - 10}{6 - x}, & \text{если } x \in [5, +\infty) \end{cases}$$

и определите их типы.

## Ответы

(1) 2.

(2)  $-\frac{4}{3}$ .

(3)  $-\frac{11}{16}$ .

(4)  $\sqrt[6]{e}$ .

(5) 0.

(6)  $-\frac{1}{6}$ .

(7)  $-\frac{1}{3}$ .

(8) 6.

(9)  $-\frac{1}{2}$ .

(10)  $-\sin((x+1)^{20} \sin x^5 \ln x) \left( 20(x+1)^{19} \sin x^5 \ln x + \right.$   
 $\left. + 5x^4(x+1)^{20} \cos x^5 \ln x + \frac{(x+1)^{20} \sin x^5}{x} \right).$

(11)  $\cos\left(\frac{x^2 \ln x}{\cos x}\right) \left( \frac{2x \ln x}{\cos x} + \frac{x}{\cos x} + \frac{x^2 \ln x \sin x}{\cos^2 x} \right).$

(12)  $2x \cos x^2 \ln(\cos x) - \frac{\sin x \sin x^2}{\cos x}.$

(13)  $-\frac{\sin(\cos(\ln|2x+1|))}{2} + C.$

(14)  $\frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 8x}{16} + C.$

(15)  $\frac{\operatorname{tg} 5x}{10} + C.$

(16)  $\ln(e^x + 1) + 2 \operatorname{arctg}(e^x) + C.$

(17)  $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+2| - 2 \operatorname{arctg} x + \ln|x+1| + C.$

(18)  $x^2 - x + 2 \ln|x+2| + \frac{1}{x-1} + 3 \ln|x-1| + C.$

(19)  $\frac{1}{60}.$

$$(20) \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} < 1. \text{ Сходится.}$$

$$(21) \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^5}{2^5 e^5} < 1. \text{ Сходится.}$$

$$(22) \quad 1 - \frac{\pi}{6}.$$

$$(23) \quad \frac{23}{3}.$$

$$(24) \quad 2 - \frac{\pi}{4}.$$

$$(25) \quad \text{Стационарные точки } (0, 0), (-12/31, 18/31), (-1/3, 2/3), (0, 2/3), (-1, 0), (0, 1). \\ \text{Максимум } 0, \text{ минимум } -1.$$

$$(26) \quad \text{Возрастает на промежутке } (-\infty, 3/2), \text{ убывает на промежутке } (3/2, +\infty). \text{ Вы-} \\ \text{пукла вниз на промежутке } (-\infty, (3 - \sqrt{2})/2) \cup ((3 + \sqrt{2})/2, +\infty). \text{ Выпукла вверх} \\ \text{на промежутке } ((3 - \sqrt{2})/2) \cup ((3 + \sqrt{2})/2).$$

$$(27) \quad 1, 2 — \text{устранимые разрывы}; -2 — \text{разрыв первого рода}; -3 — \text{разрыв второго} \\ \text{рода.}$$

$$(28) \quad 1 — \text{разрыв первого рода}; 6 — \text{разрыв второго рода.}$$