

Список теоретических вопросов

- (1) Дайте определение предела числовой последовательности. Исходя из него, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.
- (2) Дайте определение предела числовой последовательности. Исходя из него, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ при условии существования последних двух пределов.
- (3) Дайте определение предела числовой последовательности. Докажите единственность предела в предположении его существования.
- (4) Дайте определения ограниченной и бесконечно малой последовательности. Докажите, что последовательность, имеющая конечный предел, является ограниченной.
- (5) Дайте определения ограниченной и бесконечно малой последовательности. Докажите, что произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей является бесконечно малой.
- (6) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ при условии существования последних двух пределов.
- (7) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ при условии существования последних двух пределов и отсутствии деления на ноль.
- (8) Докажите теорему Вейерштрасса о существовании предела ограниченной сверху возрастающей последовательности.
- (9) Используя теорему Вейерштрасса докажите, существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- (10) Докажите, что из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
- (11) Дайте определение предела функции в точке по Коши и по Гейне. Докажите эквивалентность этих определений.
- (12) Сформулируйте основные свойства пределов функций, связанные с арифметическими действиями. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ при условии существования последних двух пределов.
- (13) Приведите геометрическое доказательство предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- (14) Дайте определение функции, непрерывной в точке. Приведите примеры функций определённой на всей оси действительных чисел: непрерывной везде, кроме одной точки; непрерывной только в одной точке; нигде не непрерывной.
- (15) Докажите, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом отрезке ограничена и достигает своих экстремумов.
- (16) Дайте определение производной функции в точке. Исходя из этого определения, докажите, что $(x^2)' = 2x$.

- (17) Выведете уравнение касательной к графику функции.
- (18) Докажите теорему Ферма.
- (19) Докажите теорему Ролля.
- (20) Докажите теорему Лагранжа.
- (21) Дайте определение определённого интеграла. Докажите, что для его существования необходима ограниченность интегрируемой функции.
- (22) Дайте определение сумм Дарбу. Докажите, что любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней суммы Дарбу.
- (23) Докажите критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу.
- (24) Докажите, что любая непрерывная функция на ограниченном замкнутом отрезке равномерно непрерывна.
- (25) Докажите, что любая непрерывная функция на ограниченном замкнутом отрезке интегрируема.
- (26) Докажите, что любая возрастающая ограниченная функция на ограниченном замкнутом отрезке интегрируема.
- (27) Перечислите основные свойства определённого интеграла. Докажите теорему о среднем.
- (28) Докажите формулу Ньютона-Лейбница.
- (29) Дайте определение расстояния в \mathbb{R}^n . Докажите для него неравенство треугольника.
- (30) Дайте определение открытых и замкнутых множеств в \mathbb{R}^n . Перечислите их основные свойства.
- (31) Дайте определение предела функции нескольких переменных. Докажите его единственность.
- (32) Дайте определения частных производных и дифференцируемой функции от нескольких переменных. Приведите пример не дифференцируемой в точке функции, имеющей в этой точке конечные частные производные.
- (33) Докажите, что функция, имеющая непрерывные частные производные в окрестности точки, дифференцируема.
- (34) Докажите формулу для производной сложной функции нескольких переменных.
- (35) Дайте определение сходящегося ряда. Докажите необходимый признак сходимости ряда.
- (36) Докажите признаки сравнения для числовых рядов с положительными членами.
- (37) Докажите признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.
- (38) Докажите признак Коши сходимости рядов с положительными членами.

- (39) Докажите интегральный признак сходимости рядов с положительными членами.
- (40) Докажите признак Раабе сходимости рядов с положительными членами.
- (41) Докажите признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов.
- (42) Выведите формулу для радиуса сходимости степенного ряда.