

# Zadania z meczu 2024

Bity z kosmosu (BIT)

- Dawid Kot
- Adam Szymaszkiewicz
- Maciej Mokrzycki
- Adam Paraszkiwicz

## Zadania

### Zadanie 1: Ukryta permutacja

Dana jest ukryta permutacja  $p$  długości  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^3$ ). W jednym zapytaniu możesz podać ciąg  $a$  długości  $n$  spełniający  $1 \leq a_i \leq n$  (a nie musi być permutacją). W odpowiedzi dostaniesz  $|\{i \in \{1, \dots, n\} : p_i = a_i\}|$ , czyli liczbę pozycji, na których  $a$  ma taką samą wartość jak  $p$ . Znajdź permutację  $p$  zadając co najwyżej 6666 zapytań. Permutacja  $p$  jest wybierana przed uruchomieniem programu i nie zmienia się w zależności od zadawanych pytań.

### Zadanie 2: Graf ważony

Dany jest nieskierowany graf ważony o  $n$  wierzchołkach i  $m$  pokolorowanych krawędziach ( $1 \leq n, m \leq 5 \cdot 10^5$ ), gdzie  $i$ -ta krawędź ma kolor  $c_i$  i długość  $l_i$  ( $1 \leq c_i \leq m; 1 \leq l_i \leq 10^9$ ). Teraz możesz wykonać  $k$  ( $1 \leq k \leq 10^5$ ) kroków, przy czym w  $i$ -tym kroku możesz przejść przez dowolną liczbę krawędzi tak długo, jak wszystkie są koloru  $a_i$  oraz ich łączna waga nie przekracza  $b_i$  ( $1 \leq a_i \leq m; 1 \leq b_i \leq 10^9$ ). Dla każdego wierzchołka powiedz, czy da się do niego dotrzeć wykonując co najwyżej  $k$  kroków zaczynając z wierzchołka 1.

### Zadanie 3: Permutacje

Dane są dwie permutacje  $a, b$  długości  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^6$ ). Powiedz ile jest permutacji  $c$  długości  $n$ , że dla każdego  $1 \leq i \leq n$   $c_i = a_i$ , lub  $c_i = b_i$ .

### Zadanie 4: Szeregi Potęgowe

Ile jest  $n$ -elementowych ( $1 \leq n \leq 10^6$ ) ciągów liczb całkowitych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  takich, że dla każdego  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq a_i \leq M$  oraz  $\sum_{i=1}^n a_i \leq K$  ( $1 \leq M \leq 10^6; n \leq K \leq n \cdot M$ )? Jako odpowiedź podaj resztę z dzielenia liczby takich ciągów przez  $10^9 + 7$ . Podzadanie za 5 punktów:  $1 \leq n, M \leq 1000$ .

### Zadanie 5: Ciąg rosnący

Dany jest  $n$ -elementowy ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $1 \leq n \leq 10^6; 1 \leq a_i \leq 10^9$ ). Możemy wykonywać na nim operacje, gdzie jedna operacja polega na wzięciu pary dwóch sąsiednich elementów  $(a_k, a_{k+1})$  i zastąpieniu ich przez jeden element o wartości  $a_k + a_{k+1}$ . Ile minimalnie operacji trzeba wykonać, aby elementy ciągu były w porządku niemalejącym?

**Zadanie 6: Bijekcja**

Dany jest ciąg  $n$  liczb całkowitych ( $1 \leq n \leq 10^6$ )  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $1 \leq a_i \leq 10^9$ ). Stwierdzić, czy istnieje bijekcja  $\phi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , że  $a_{\phi(1)} \bmod a_{\phi(2)} \bmod \dots \bmod a_{\phi(n)} \neq 0$ .

**Zadanie 7: Plansza**

Dana jest plansza  $n \times m$  ( $1 \leq n, m \leq 1000$ ). Na każdym polu znajduje się strzałka w lewo, prawo, górę, lub dół. Z każdego pola można przeskoczyć na dowolne inne pole odległe o co najwyżej  $k$  ( $1 \leq k \leq 1000$ ) zgodnie z kierunkiem strzałki. Dla każdego pola stwierdź, czy zaczynając na nim można wyskoczyć poza planszę.

**Zadanie 8: Graf dwudzielny**

Dany jest graf prosty o wierzchołkach  $1, 2, \dots, n$  ( $1 \leq n \leq 600$ ), jednak nie znamy jego krawędzi. Dostępne są zapytania. Zapytanie odpowiada na pytanie „Dla  $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , ile jest krawędzi o obu końcach w  $X$ ”. Stwierdzić w co najwyżej 20 000 zapytań, czy graf jest dwudzielny i podać dowód swojej tezy. Jeśli graf jest dwudzielny, zaprezentować podział jego wierzchołków na dwa niezależne zbiory, a jeśli nie jest, wskazać cykl nieparzystej długości.

**Zadanie 9: Największa suma podciagu**

Dany jest  $n$ -elementowy ( $1 \leq n \leq 10^6$ ) ciąg liczb całkowitych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $|a_i| \leq 10^9$ ). Jaka jest największa możliwa suma spójnego podciagu  $a$  o nieparzystej długości?

**Zadanie 10: Fajne słowo**

Rozważmy słowo  $s$  składające się z liter  $A$  lub  $B$ . Słowo jest fajne, gdy dla każdego jego podsłowa  $t$   $|\#t(A) - \#t(B)| \leq 2$ , gdzie  $\#w(x)$  oznacza liczbę wystąpień litery  $x$  w słowie  $w$ . Ile jest fajnych słów długości  $n$  ( $1 \leq n \leq 10^6$ )?

**Zadanie 11: Klawiatura**

Mamy klawiaturę z 26 literami  $a, b, \dots, z$ . Klawiatura jest zepsuta i czasami po wciśnięciu klawisza z literką  $\alpha$ , zamiast tego jest pisana literka  $\text{next}(\alpha)$ , gdzie  $\text{next}(a) = b, \text{next}(b) = c, \dots, \text{next}(z) = a$ . Monitor też nie działa, więc podczas pisania wiadomości nie widać, jaka literka zostanie zapisana. W jaki sposób dysponując taką klawiaturą przesłać dowolną wiadomość tak, by dało się ją jednoznacznie odkodować. Wysłana wiadomość powinna być tak krótka jak to możliwe.