Unikanie wzorców w permutacjach (pattern avoidance).

Dawid Kot

26 stycznia 2025

1 Wprowadzenie.

Zagadnienie *unikania wzorców* w permutacjach (ang. *pattern avoidance*) polega na tym, że dla pewnego zadanego wzorca (np. `123`, `321`, `1324` itd.) chcemy rozpatrywać lub zliczać te permutacje zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które *nie zawierają* zadanej struktury jako podciągu (zachowującego porządek indeksów).

Przykładowo, permutacja π *unika* wzorzec `123` (`123`-avoiding), jeżeli nie istnieje w niej żadna trójelementowa sekwencja (w kolejności występowania), która jest ściśle rosnąca. Permutacja π *unika* wzorzec `321` (`321`-avoiding), jeśli nie da się w niej znaleźć trzech indeksów $i < j < k$ z $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$.

W dalszej części przedstawiamy podstawy unikania wzorców oraz pokazujemy, dlaczego `123`-avoiding i `321`-avoiding mają ścisły związek z *liczbami Catalana*. Następnie prezentujemy *dowód pingwinowy*, który daje intuicyjną bijekcję między wzorcem `321`-avoiding a tzw. *górami katalońskimi*.

2 Podstawowe definicje.

2.1 Permutacja.

Permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy bijekcję π z tego zbioru w siebie, często zapisywaną w postaci

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)),$$

gdzie $\{\pi(1), \dots, \pi(n)\} = \{1, \dots, n\}$.

2.2 Wzorzec w permutacji.

Mówimy, że permutacja π *zawiera wzorzec* `abc` (np. `123`) jeśli istnieje w niej trójelementowy *podciąg* (niekoniecznie spójny w sensie indeksów, ale utrzymujący kolejność indeksów) $\pi(i),\ \pi(j),\ \pi(k)$ z $i < j < k$, który ma *taki sam porządek* jak `abc`. Dla `123` byłoby to

$$\pi(i) < \pi(j) < \pi(k).$$

Jeżeli takiego podciągu nie ma, to permutacja π *unika* (*avoids*) wzorzec `abc`.

Przykład:

- Permutacja $(3, 1, 2, 4)$ **zawiera** wzorzec `123`, bo np. podciąg $(1, 2, 4)$ na pozycjach (2,3,4) tworzy ciąg rosnący.
- Permutacja $(3, 2, 1)$ **unika** wzorzec `123`, ponieważ nie ma żadnych trzech elementów w rosnącej kolejności.

2.3 Klasycznie badane wzorce.

Najczęściej spotykane i analizowane wzorce to:

- `12`, `21` – krótkie, dwuelementowe,
- `123`, `132`, `213`, `231`, `312`, `321` – trójelementowe,
- dłuższe: `1234`, `3214` itd.

Klasy `123`-avoiding i `321`-avoiding występują w wielu miejscach w kombinatoryce.

3 Unikanie `123` i związek z liczbami Catalana.

Jednym z najważniejszych faktów w tej dziedzinie jest to, że liczba permutacji $\{1, \ldots, n\}$ unikających `123` (tj. `123`-avoiding) równa się *n-tej liczbie Catalana*, oznaczanej przez C_n. Liczba ta ma postać:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

i tworzy słynny ciąg: $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$.

3.1 Liczby Catalana - szybkie obliczanie.

1. **Wzór binomialny:**

   $$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}.$$

   Jeżeli modulo m jest **liczbą pierwszą**, możemy użyć szybkiego potęgowania (ang. *fast exponentiation*) i odwracania modulo (ang. *modular inverse*), by tę liczbę policzyć w $O(n)$ czy $O(\log n)$. Dla ogólnego m (gdy nie jest pierwsze) sytuacja jest trudniejsza.

2. **Rekurencja (wersja szybka):**

   $$C_0 = 1, \quad C_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+2}\,C_k.$$

   Pozwala liczyć kolejne Catalany w czasie $O(n)$, ale wymaga dzielenia. Jeśli chcemy pracować *wyłącznie* w arytmetyce modulo m, które nie jest pierwsze, pojawia się problem odwracania liczb (dzielenia).

3. **Klasyczne równanie**:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i}.$$

To podejście jest w $O(n^2)$, co bywa za wolne przy większych n.

3.2 Szybkie obliczanie przy nie-pierwszej m.

Jeżeli m nie jest liczbą pierwszą, to standardowa metoda odwrotności modulo (np. z wykorzystaniem twierdzenia Fermata) nie działa. Możemy jednak użyć *rozkladu na czynniki* (prime factorization) wszystkich składników w $\binom{2n}{n}$, by uniknąć dzielenia.

W dużym skrócie:

1. **Przygotowujemy tablicę rozkładów** (np. z pomocą sita) wszystkich liczb do $2n$.

2. **Akumulujemy** wykładniki czynników pierwszych dla $(n+1), (n+2), \ldots, (2n)$ (czyli czynniki licznika) *z odpowiednim znakiem plus*, a także odejmujemy wykładniki dla $(n!)$, czyli $(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n)$ (czynniki mianownika), i dodatkowo uwzględniamy podział przez $(n+1)$.

3. **Wynik finalny** to iloczyn wszystkich *pozostałych* (niezredukowanych do zera) czynników pierwszych w odpowiednich potęgach, wymnażany modulo m. *Nie* musimy wykonywać żadnych operacji odwrotności $\mod m$.

4 Unikanie 321 też daje Catalana.

Permutacje 321-avoiding to z kolei takie, w których nie ma trójki $\pi(i) > \pi(j) > \pi(k)$ przy $i < j < k$. Okazuje się, że liczba takich permutacji również jest równa C_n. Można to wytłumaczyć np. dwustronnym odwracaniem ciągu (zamieniając π na permutację odwrotną), co odwzorowuje 123-avoiding w 321-avoiding.

5 Dłuższe wzorce.

Dla wzorców długości 4 czy 5 sprawa staje się dużo trudniejsza. Istnieją wyniki teoretyczne opisujące rozmaite klasy wzorców (np. 1342-avoiding), ale to już wykracza poza najprostsze zastosowania.

6 Dowód bijekcji 321-avoiding a tzw. góry katalońskie (metafora pingwinowa).

Poniżej przedstawiamy nieformalny, lecz obrazowy *dowód pingwinowy*, który ukazuje bijekcję między permutacjami unikającymi 321 (tzn. nie ma trzech malejących elementów) a tzw. *gó-*

rami katalońskimi (czyli wykresami charakterystycznymi dla dróg w kratownicy lub ścieżek Catalana).

6.1 Opis problemu pingwinów.

Mamy ciąg S pingwinów (każdy ma przydzielony unikalny *wzrost* z $\{1, 2, \ldots, n\}$) tak, że w całym ciągu nie występuje trójka pingwinów o wzrostach malejących od lewej do prawej. Można więc powiedzieć, że S *unika* wzorzec `321`.

Liderzy i klastery (ang. *clumps*). Pingwin *jest liderem*, jeżeli jest wyższy od wszystkich pingwinów stojących *na lewo* od niego. Kluczowa obserwacja: jeżeli pingwin x **nie** jest liderem, to musi on być *niższy* niż wszyscy pingwini na prawo od siebie (inaczej wytworzyłby konfigurację `321`).

W związku z tym pingwiny naturalnie *grupują się* po lewej stronie do najbliższego lidera. To rozbija ciąg na kilka klastrów, gdzie pierwszym elementem każdego klastra jest lider.

6.2 Przykład.

Weźmy permutację (względnie ciąg pingwinów) $S = 3\,1\,4\,5\,2$. Można podzielić go na:

$$(3\,1) \quad (4) \quad (5\,2).$$

W każdym nawiasie pierwszy pingwin to lider. Zauważmy, że poza liderem w każdym klastrze wszystkie pingwiny muszą być *niższe* od wszystkich osobników na prawo, co uniemożliwia pojawienie się `321`.

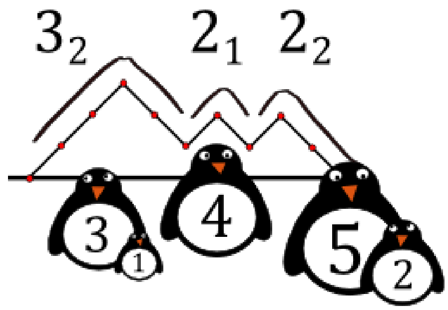
6.3 Budowa gór katalońskich.

Do każdego klastra przypisujemy *wysokość szczytu* oraz „głębokość spadku w dolinie" w taki sposób:

- wysokość szczytu jest określona pozycją lidera w porządku wzrostu względem *wszystkich* pingwinów stojących na prawo (łącznie z nim).
- liczba pingwinów w klastrze określa, o ile niżej opadniemy w dolince poniżej danego szczytu (tzw. zagłębienie).

Rysujemy to jako ciąg *gór i dolin*, a ostatni klaster wraca do „poziomu 0".

Na rysunku (por. Fig. 1) widać, jak klastery $(3, 1)$, (4), $(5, 2)$ przekładają się na kolejne szczyty. Pierwszy lider 3 jest trzecim co do wzrostu wśród wszystkich $\{3, 1, 4, 5, 2\}$ i klaster ma rozmiar 2, więc rysujemy szczyt wysokości 3 i zstępujemy o 2 w dolinę. Drugi lider 4 to „drugi co do wzrostu" wśród pozostałych, ... i tak dalej, aż do ostatniego lidera 5.



Rysunek 1: Ilustracja bijekcji pingwinów unikających `321` z tzw. górami katalońskimi. Obraz zaczerpnięty z [1].

6.4 Wnioski z bijekcji.

Widać, że:

- Każdej permutacji `321`-avoiding odpowiada jedyna taka konfiguracja szczytów i dolin (*gór katalońskich*).
- Każdą taką górę katalońską można łatwo „odczytać w drugą stronę” i odzyskać pingwiny oraz ich klastery.

Fakt istnienia tej *unikalnej* korespondencji daje bijekcję. A ponieważ liczba ścieżek/gór katalońskich na n odcinkach jest równa C_n (liczbie Catalana), to również permutacje unikające `321` występują w liczbie C_n.

7 Szybkie testy unikania wzorca w zadaniach.

7.1 Dla małych wzorców (3-elementowych)

Można (teoretycznie) sprawdzić w $O(n^2)$, czy permutacja zawiera lub unika `123` lub `321`, np. przeszukując pary i utrzymując pewne minimum/maksimum. Bardziej zaawansowane struktury (drzewa Fenwicka, segment tree) mogą skrócić niektóre kroki, choć rzadko pojawia się to w praktyce w typowych konkursach z bardzo dużym n.

7.2 Dłuższe wzorce.

Wzorce 4-elementowe i większe zazwyczaj komplikują problem w stopniu, który rzadko staje się tematem stricte implementacyjnym w zawodach (chyba że n jest dość małe).

8 Dodatkowe fakty o unikaniach w kontekście permutacji i ich kwadratów.

Interesującym zagadnieniem jest rozpatrywanie sytuacji, w której ta sama permutacja π unika danego wzorca, a także π^2 (iloczyn π z samą sobą) unika tego wzorca. Przykłady pokazują, że:

- **Dla wzorca monotonicznie rosnącego (np. `12...k`)** istnieje pewna maksymalna długość n, przy której można znaleźć takie permutacje, by zarówno π unikało wzorzec, jak i π^2 unikało go. Dla większego n już nie da się tego uzyskać. (Wyniki wskazują m.in. na granicę rzędu $(k-1)^3$.)

- **Dla wzorca** `312` (lub symetrycznego `231`) da się wyznaczyć *dokładny wzór* na liczbę permutacji długości n, które *oba* (tj. π i π^2) unikają ten wzorzec. Mianowicie, jeśli $\mathrm{Sav}_n(312)$ oznacza liczbę takich permutacji, to ich zwykła funkcja tworząca (ang. generating function) ma postać:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sav}_n(312)\, z^n \;=\; \frac{-\,z^3 \;+\; z^2 \;+\; z \;-\; 1}{z^4 \;-\; 2z^3 \;+\; z^2 \;+\; 2z \;-\; 1}.$$

  Pierwsze wartości ciągu $\mathrm{Sav}_n(312)$ (od $n=1$) to kolejno $1, 2, 4, 9, 19, 41, \ldots$, a wzrost jest wykładniczy (podstawa ok. 2.13).

- **Dla wzorca** `321` można wykazać, że istnieje dość liczna klasa permutacji, które *oba* (tj. π i π^2) unikają `321`, a ich liczność rośnie wykładniczo co najmniej z bazą ok. 2.3.

- **Wzorzec** `132` bywa najbardziej zagadkowy pod tym względem; wstępne badania wskazują szybki (też wykładniczy) przyrost liczby takich permutacji, choć nie ma zamkniętej formuły na ich liczbę.

Widzimy zatem, że problem unikania wzorca przez permutację π *oraz* przez π^2 otwiera nowe możliwości badawcze i jest o wiele trudniejszy niż samo unikanie wzorca wyłącznie przez π.

9 Podsumowanie.

- *Unikanie wzorców* to dziedzina z teorii permutacji, gdzie szczególnie wyróżniają się wzorce `123` i `321` – liczba takich permutacji to C_n, czyli n-ta liczba Catalana.

- Przydatna w różnych problemach zliczania struktur (np. drzewa, ciągi nawiasów, ścieżki w kratownicy) czy przy analizie warunków na ciąg (np. brak potrójnych malejących elementów).

- Tzw. dowód pingwinowy daje interesującą interpretację geometryczno-kombinatoryczną dla `321`-avoiding. Pingwiny „grupują się” do liderów, a to pozwala wygenerować *góry katalońskie*.
- Dzięki bijekcji wiemy, że `321`-avoiding występuje w liczbie równej C_n, czyli $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
- Analiza *unikania wzorca przez* π *i przez* π^2 pozwala na nowe, ciekawe obserwacje – np. graniczne rozmiary dla wzorca rosnącego, jawne formuły dla pewnych wzorców trójelementowych, czy otwarte pytania przy wzorcu `132`.

Literatura

[1] https://math.stackexchange.com/questions/155867/penguin-brainteaser-321-avoiding-perm