Ecuații și Inecuații

În matematică, o **ecuație** este o propoziție matematică ce afirmă că două expresii matematice sunt **egale** doar pentru anumite valori ale variabilelor implicate în acestea. Valorile variabilelor pentru care egalitatea este adevărată poartă numele de **soluții** sau **rădăcini**.

Pentru rezolvarea unor ecuații, în condițiile în care nu se menționează domeniul din care face parte necunoscuta x, este obligatoriu aplicarea condițiilor de existență pentru a determina valorile pe care le poate lua x.

- **Numitorul fracțiilor trebuie să fie diferit de 0**
- **Termenii de sub radicali (de ordin par) trebuie să fie pozitivi (sau 0)**
- **Bazele logaritmilor trebuie să fie pozitive și diferite de 1**
- **Termenii din logaritmi trebuie să fie strict pozitivi**
    + **altele la diferite funcții**

Ecuații Iraționale

Se numește ecuație irațională o ecuație în care necunoscuta figurează sub unul sau mai mulți radicali.

$\sqrt{x} - 2x^2 + 3 = 0$; $3\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x-3} = x + 1$; $\sqrt[3]{x} - x + 5 = 0$; $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2}$
sunt ecuații iraționale.

Etape de rezolvare:

- Condițiile de existență

  Dacă în ecuație există **radicali de ordin par**, expresiile de sub radicali trebuie să fie pozitive sau 0. Dacă rezolvarea condițiilor de existență este prea complicată, nu se va rezolva, dar obligatoriu rezultatele ecuației se vor verifica la final.

- Rezolvarea ecuației

  Se ridică ambii membri ai ecuației la puteri convenabile pentru a elimina necunoscutele de sub radicali. În general, termenii cu radical se izolează într-o parte a ecuației pentru a fi eliminat radicalul prin ridicarea la putere.

- Verificarea soluțiilor

  La final, rezultatele ecuației se vor verifica în ecuația inițială.

Ecuații exponențiale

Se numește ecuație exponențială o ecuație în care necunoscuta se află la un exponent.

Există mai multe tipuri de ecuații exponențiale:

1. **Ecuații de forma** $a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$

   Ecuația este echivalentă cu f(x) = g(x). Se va rezolva această ecuație.

   Exemplu:

   $3^{2x+1} = 3^{-x^2} \Leftrightarrow 2x + 1 = -x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ cu soluția $x = -1$

2. **Ecuații de forma** $a^{f(x)} = b,\ a > 0,\ a \neq 1$

   Dacă b ≤ 0, ecuația nu are soluții.

   Altfel, ecuația are cel puțin o soluție. Pentru a rezolva, se logaritmează ambii membri (în baza a) și reiese ecuația $f(x) = \log_a b$ care se poate rezolva.

   Exemplu:

   $(3^x - 1)(3^x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 0\ sau\ 3^x + 1 = 0$

   $3^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Rightarrow log_3 \Rightarrow x = \log_3 1 \Rightarrow x = 0$

   $3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = -1$imposibil

   Deci x = 0 soluție finală

3. **Ecuații de forma** $c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

   Se notează $a^x = t$ și se rezolvă ecuația de gradul 2

   $c_1 t^2 + c_2 t + c_3 = 0$

   După aflarea rădăcinilor $t_{1,2}$ se rezolvă ecuația $a^{f(x)} = t$

   Exemplu:

   $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

   $2^x = t$

   deci $t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \{1, 8\}$

   $t_1 = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

   $t_2 = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

   $x \in \{0, 3\}$soluție finală

4. **Ecuații de forma**

$c_1 a^{f(x)} + c_2 b^{f(x)} + c_3 = 0,\ a,\ b > 0,\ a,\ b \neq 1,\ ab = 1$

În aceste ecuații se observă că $b = \frac{1}{a}$. Se notează $a^{f(x)} = t$ și se scrie ecuația sub forma $c_1 t + \frac{c_2}{t} + c_3 = 0$, rescrisă sub forma

$c_1 t^2 + c_3 t + c_2 = 0.$

Se rezolvă această ecuație de gradul 2. După aflarea rădăcinilor $t_{1,2}$ se rezolvă ecuația $a^{f(x)} = t$

Exemplu

$(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = 10$

se observă că $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x \cdot (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = (\sqrt{25 - 24})^x = 1^x = 1$

se notează $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x = a$, $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = b$cu $b = \frac{1}{a}$

deci $a + \frac{1}{a} - 10 = 0 \Rightarrow a^2 - 10a + 1 = 0$

se calculează a, iar apoi se rezolvă ecuația $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x = a$

5. **Ecuații de forma**

$c_1 a^{f_1(x)} + \ldots + c_k a^{f_k(x)} = d_1 b^{g_1(x)} + \ldots + d_l b^{f_l(x)}$, $a,\ b > 0,\ a,\ b \neq 1$

În aceste ecuații se grupează în fiecare membru termenii de aceeași bază, iar apoi se dă factor comun exponențiala de exponent cel mai mic, ajungându-se la o ecuație de forma $a^{f(x)} = \alpha b^{g(x)}$care se poate rezolva.

Exemplu

$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30 \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x(1 + 2 + 4 + 8) = 30 \Rightarrow 2^x = \frac{30}{15} \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

6. **Ecuații exponențiale cu soluție unică**

Aceste ecuații se rezolvă aducându-se la forma $f(x) = c$, $f(x)$ o funcție strict monotonă. Se observă o soluție x_0 iar pentru că funcția este strict monotonă nu există altă soluție pentru ecuație.

Exemplu

$3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$

se observă x = 3 soluție a ecuației. Funcția f(x) ($3^{x-1} + 5^{x-1}$) este crescătoare deoarece este suma a două funcții exponențiale cu baze supraunitare (care sunt crescătoare). De aceea, x = 3 este singura soluție a ecuației.

Inecuații exponențiale

Pentru rezolvarea inecuațiilor exponențiale se utilizează monotonia funcției exponențiale.

- Funcția exponențială este **crescătoare** când a > 1;
- Funcția exponențială este **descrescătoare** când 0 < a < 1.

Se folosesc următoarele scheme de rezolvare

$$\begin{cases} a^{g(x)} > a^{h(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) < h(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{g(x)} > a^{h(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) > h(x) \\ a > 1 \end{cases}$$

În cazul inecuațiilor mai complicate de forma $f(x) \leq 0 \ (\geq 0)$

- **se rezolvă ecuația f(x) = 0**
- **se realizează tabelul de semn al funcției**
- **dacă funcția nu se anulează pe un interval, are semn constant pe acesta. Pentru fiecare interval se calculează o valoare convenabilă f(x), iar semnul lui f(x) va fi același pe acel interval.**

Exemplu:

$$\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$$

condiții de existență $3^x + 5 \neq 0$„A”

$3^{x+1} - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Se aduce ecuația la forma $\frac{1}{3^x+5} - \frac{1}{3^{x+1}-1} < 0$

Se rezolvă ecuația f(x) = 0 și se obține soluția x = 1. Se construiește tabelul de semn al funcției.

x	-∞ -1 1 ∞
f(x)	+ + + + + + + + + + / - 0 + + + + + + + + +

deci f(x) < 0 pentru $x \in (-1, 1)$

Ecuații logaritmice

Ecuațiile logaritmice sunt acelea în care necunoscuta figurează în expresii ce apar ca argumente ale logaritmilor sau ca baze ale logaritmilor.

În rezolvarea ecuațiilor logaritmice sunt utile următoarele formule:

$$log(f(x)g(x)) = \begin{cases} log(f(x)) + log(g(x))\ pentru\ f(x) > 0, g(x) > 0 \\ log(-f(x)) + log(-g(x))\ pentru\ f(x) < 0, g(x) < 0 \end{cases}$$

$$log(\frac{f(x)}{g(x)}) = \begin{cases} log(f(x)) - log(g(x))\ pentru\ f(x) > 0, g(x) > 0 \\ log(-f(x)) - log(-g(x))\ pentru\ f(x) < 0, g(x) < 0 \end{cases}$$

$$log(f^2(x)) = \begin{cases} 2log(f(x))\ pentru\ f(x) > 0 \\ 2log(-f(x))\ pentru\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Exemplu:

$$log_2(x + 2)^2 = 6$$

1. **Condiții de existență**

   $(x + 2)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -2$

2. **Se analizează pe cazuri**

   1. $x > -2 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow log_2(x + 2)^2 = 2log_2(x + 2)$

   $2log_2(x + 2) = 6 \Rightarrow log_2(x + 2) = 3 \Rightarrow x + 2 = 2^3 \Rightarrow x = 6 > -2 \Rightarrow S_1 = \{6\}$

   2. $x < -2 \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow log_2(x + 2)^2 = 2log_2(- x - 2)$

   $2log_2(- x - 2) = 6 \Rightarrow log_2(- x - 2) = 3 \Rightarrow - x - 2 = 2^3 \Rightarrow x = -10 < -2 \Rightarrow S_2 = \{- 10\}$

3. **Se face reuniunea soluțiilor**

   $S = S_1 \cup S_2 = \{- 10, 6\}$

1. **Ecuații logaritmice de forma** $log_{g(x)}f(x) \ = \ a$

În acest tip de ecuații intervine sistemul

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) = (g(x))^a \end{cases}$$

Se rezolvă întâi ultima ecuație, după care se verifică existența soluțiilor acesteia în primele 3 relații.

Exemplu:

$log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$

Se rezolvă ecuația $x^2 - 3x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x \ = \ 0$ cu soluțiile $x = \{0, 4\}$
Se verifică soluțiile, dar $x + 1 \neq 1$nu este adevărat pentru x = 0, deci 0 nu este soluție.
Valoarea x = 4 verifică toate relațiile, deci x = 4 este soluție a sistemului.

2. **Ecuații logaritmice ce conțin logaritmi în aceeași bază**

$$log_{g(x)}f(x) = log_{g(x)}h(x)$$

Aceste ecuații sunt echivalente cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) = h(x) \end{cases}$$

În acest caz se rezolvă din nou mai întâi ecuația după care se verifică existența soluțiilor din primele 4 relații

Dacă ecuația nu se află la această formă mai simplă din prima, se vor aplica întâi condițiile de existență, după care se utilizează proprietățile logaritmilor pentru a se ajungle la forma simplă

$$log_a A - log_a B = log_a(\frac{A}{B}) \ log_a A + log_a B = log_a AB \ mlog_a A = log_a A^m$$

3. **Ecuații logaritmice ce conțin logaritmi în baze diferite**

Aceste ecuații se rezolvă aducând toți logaritmii la aceeași bază utilizând formula

$$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$$

După care se procedează ca la tipul al doilea de ecuații logaritmice.

Inecuații logaritmice

Inecuațiile logaritmice simple se rezolvă cu ajutorul cunoașterii monotoniei funcției logaritmice. Următoarele sisteme vor reprezenta schemele de rezolvare ale inecuațiilor logaritmice.

$$\begin{cases} log_a(f(x)) > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} log_a f(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} log_a f(x) < 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} log_a f(x) < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

În cazul inecuațiilor mai complicate de forma $f(x) \leq 0 \ (\geq 0)$, având în vedere că f(x) este continuă, se procedează ca la inecuațiile exponențiale:

- **se rezolvă ecuația f(x) = 0**
- **se realizează tabelul de semn al funcției**
- **dacă funcția nu se anulează pe un interval, are semn constant pe acesta. Pentru fiecare interval se calculează o valoare convenabilă f(x), iar semnul lui f(x) va fi același pe acel interval.**

Ecuații trigonometrice fundamentale

1. **Ecuația** $sin\, x = a$

   Mulțimea S de soluții a ecuației $sin\, x = a$ este:

   1) $S = \varnothing$ dacă $|a| > 1$
   2) $S = \{(-1)^k arcsin\, a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$dacă $|a| < 1$

Relații importante:

$sin(arcsin\, a) = a \, \forall\, a \in [-1, 1]$

$arcsin(-a) = -arcsin\, a$

Exemplu:

$sin\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \{(-1)^k arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2. **Ecuația** $cos\, x = b$

   Mulțimea S de soluții a ecuației $cos\, x = b$ este:

   1) $S = \varnothing$ dacă $|b| > 1$
   2) $S = \{\pm\, arccos\, b + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$dacă $|b| < 1$

Relații importante:

$cos(arccos\, b) = b \, \forall\, b \in [-1, 1]$

$arccos(-b) = \pi - arccos\, b$

3. **Ecuația** $tg\, x = c$

   Mulțimea S de soluții a ecuației $tg\, x = c$ este

   1) $S = \{arctg\, c + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Relații importante:

$tg(arctg\, c) = c$

$arctg(-c) = -arctg\, c$

4. **Ecuația** $ctg\, x = d$

   Mulțimea S de soluții a ecuației $ctg\, x = d$ este

   2) $S = \{arcctg\, d + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Relații importante:

$ctg(arcctg\, d) = d$

$arcctg(-d) = \pi - arcctg\, d$

$arctg\, x + arcctg\, x = \frac{\pi}{2}$!!

Tipuri simple de ecuații trigonometrice

Ecuațiile de forma

$$sin\,\alpha x = sin\,\beta x, cos\,\alpha x = cos\,\beta x, tg\,\alpha x = tg\,\beta x, arctg\,\alpha x = arctg\,\beta x$$

Au formule de rezolvare similare cu cele ale ecuațiilor de forma f(x) = a

$$sin\,\alpha x = sin\,\beta x \Rightarrow \alpha x = (-1)^k \beta x + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$cos\,\alpha x = cos\,\beta x \Rightarrow \alpha x = \pm\,\beta x + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$tg\,\alpha x = tg\,\beta x \Rightarrow \alpha x = \beta x + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$ctg\,\alpha x = ctg\,\beta x \Rightarrow \alpha x = \beta x + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

1. **Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații algebrice**

$$f(sin\,\alpha x) = 0;\ f(cos\,\alpha x) = 0;\ f(tg\,\alpha x) = 0;\ f(ctg\,\alpha x) = 0$$

Se notează funcția trigonometrică cu t, se rezolvă ecuația pentru a afla valoarea lui t, după care se rezolvă $sin/cos/tg/ctg(x) = t$ pentru a afla valorile lui x

Exemplu:

$$sin^2 x - 4sinx + 3 = 0$$

$sin\,x = t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = 3$iar apoi se rezolvă $sin\,x = 1$ și $sin\,x = 3$

2. **Ecuații omogene de gradul doi în sin x și cos x**

   $$a\,sin^2 x + b\,sin\,x\,cos\,x + c\,cos^2 x = 0$$

   - se împarte ecuația la $cos^2 x$, rezultând ecuația $a\,tg^2 x + b\,tg\,x + c = 0$, care se rezolvă ca în cazul 1.