Determinantul unei Matrici

1) Determinanți de ordinul 2:

Pentru aflarea unui determinant de ordinul 2, facem suma diagonalei principale, din care scadem suma diagonalei secundare.

Fie matricea A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci determinantul matricei A este: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = a · d - b · c

Exemplu: $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 5 · 3 - 2 · 1 = 15 - 2 = 13;

2) Determinanți de oridul 3:

Pentru aflarea unui determinant de ordinul 3, putem folosi 2 metode, anume: **Metoda Sarrus** sau **Metoda Triunghiurilor**, iar mai jos va fi prezentată **Metoda Sarrus**.

Fie matricea B = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, atunci determinantul matricei A este: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

La acest determinant trebuie să copiem primele 2 linii dedesubtul celei de-a 3-a, apoi să calculăm pe diagonală produsul celor 3 diagonale principale, din care scadem produsul celor 3 diagonale secundare, astfel:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ \;\; a \quad b \quad c \\ \;\; d \quad e \quad f \end{array} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f - (c \cdot e \cdot g + f \cdot h \cdot a + i \cdot b \cdot d)$$

Exemplu:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \;\; 2 \quad 0 \quad 3 \\ \;\; 1 \quad 5 \quad 1 \end{array} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 1 - (3 \cdot 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1) = 32 - 8 = 24;$$

3) Proprietățile determinanțiilor:

I) Determinantul unei matrici este egal cu determinantul aceleiași matrici transpuse:

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; A^t = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; => det A = det A^t;

II) Dacă determinantul are pe o linie / coloană doar elemente nule (0), valoarea acestuia va fi 0:

A = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; B = $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$; => det A = det B = 0;

III) Dacă determinantul are pe 2 linii / coloane aceeași termeni, valoarea acestuia va fi 0:

A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; B = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; => det A = det B = 0;

IV) Dacă înmulțim un scalar **α** cu un determinat, fiecare element al matricei se va înmulți cu scalarul:

A = α $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ => det A = $\begin{vmatrix} \alpha 5 & \alpha 2 & \alpha(-1) \\ \alpha 0 & \alpha 1 & \alpha 7 \\ \alpha 1 & \alpha 4 & \alpha(-8) \end{vmatrix}$

V) Pentru un determinant de ordinul 3, putem avea următoare situație:

det (3A) => 3^3 · det A => 27 · det A

Aceasta este o forumă specifică pentru aflarea mai ușoară, iar puterea 3 din 3^3 vine de la faptul că determinantul nostru este de ordinul 3 (3x3).

VI) Dacă într-un determinant pe o linie / coloană toți termenii au un factor comun, acesta poate fi scos în fața determinantului:

A = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ => A = 2 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; B = $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \\ 8 & 1 & 15 \end{vmatrix}$; => B = 2 · 5 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

VII) Dacă într-un determinant singurele elemente ≠ 0 sunt cele de pe diagonala principală, atunci valoarea acestuia va fi produsul elementelor de pe diagonală:

A = $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 5 · 2 · 1 = 10;

VII)* Dacă într-un determinant singurele elemente ≠ 0 sunt cele de pe diagonala secundară, atunci valoarea acestuia va fi ”**-**” produsul elementelor de pe diagonală:

A = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = -(5 · 2 · 1) = -10;

VIII) Dacă într-un determinant avem elemente ≠ 0 pe diagonala principală și deasupra diagonalei principale sau avem elemente ≠ 0 pe diagonala principală și dedesubtul diagonalei principale, atunci valoarea acestuia va fi produsul elementelor de pe diagonală:

A = $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 5 · 2 · 1 = 10; B = $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 5 · 2 · 1 = 10;

VIII)* Dacă într-un determinant avem elemente ≠ 0 pe diagonala secundară și deasupra diagonalei secundare sau avem elemente ≠ 0 pe diagonala secundară și dedesubtul diagonalei secundare, atunci valoarea acestuia va fi ”**-**” produsul elementelor de pe diagonală:

A = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = -(5 · 2 · 1) = -10; B = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = -(5 · 2 · 1) = -10;

IX) Dacă pe o linie / coloană avem un singur element nenul (restul elementelor sunt 0, doar unnul este ≠ 0), vom tăia linia și coloana unde se află acel element nenul.

A = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ = 2 · $(-1)^{1+1}$ · $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ = 2 · [4 · 6 - (2 · 3)] = 2 · (24 - 6) = 2 · 18 = 36;

X) Într-un determinant, dacă operăm între 2 sau mai multe linii / coloane, precum ”**+**”, ”**-**” cu un scalar a acestora, nu se schimbă valoarea determinantului.

$\begin{vmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L1 \pm L2 \\ L2 \\ L3 \end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L1 \\ L2 \pm L1 \\ L3 \pm L1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 \pm C2 & C2 & C3 \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 & C2 \pm C1 & C3 \pm C1 \end{vmatrix}$

(!) Când adunăm la o linie / coloană o altă linie / coloană, **NU** avem voie să mai adunăm la aceea linie / coloană altceva.

Spre exemplu: $\begin{vmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L1 \pm L2 \\ L2 \pm L3 \\ L3 \end{vmatrix}$ **NU** este corect;

Spre exemplu: $\begin{vmatrix} C1 & C2 & C3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 \pm C2 & C2 \pm C3 & C3 \end{vmatrix}$ **NU** este corect;

Determinantul Vandermonde

A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ = (a - b)(b-c)(c-a);

B = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ = abc $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ = abc · (a - b)(b-c)(c-a);

Exerciții Bacalaureat

Exemplu 1:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2-a\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

A(1) = $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1^2-1\\ 0 & 1 & 2\cdot 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ => det A(1) = $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Folosind proprietatea **VIII)**, det A(1) = 1 · 1 · 1 => det A(1) = 1;

Exemplu 2:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & a+1 & a\\ a & 6 & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+2y+z=3\\ 2x+(a+1)y+az=3\\ ax+6y+4z=a+3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

A(a) = $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & a+1 & a\\ a & 6 & 4\end{pmatrix}$ => det A(1) = $\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & a+1 & a\\ a & 6 & 4\end{vmatrix}$

=> 2 · (a + 1) · 4 + 2 · 6 · 1 + a · 2 · a - (1 · (a + 1) · a + a · 6 · 2 + 4 · 2 · 2)
=> 8a + 8 + 12 + 2a^2 - a^2 - a - 12a - 16
=> a^2 - 5a + 4
=> (a - 1)(a - 4)

=> det(A(a)) = (a - 1)(a - 4);

Exemplu 3:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1 & -2\\ a-1 & -1 & 1\\ 2a & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(2a+1)x+y-2z=a\\ (a-1)x-y+z=a+1,\\ 2ax-2y+z=1\end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

A(1) = $\begin{pmatrix}2+1 & 1 & -2\\ 1-1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ => det A(1) = $\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}$

=> 3 · (-1) · 1 + 0 · (-2) · 2 + 2 · 1 · 1 - (2 · 1 · 2 + 1 · (-2) · 3 + 1 · 1 · 0)

=> -3 + 2 - (4 - 6)

=> -1 - (-2)

=> -1 + 2

=> 1

=> det(A(1)) = 1;

Exemplu 4:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real a.

A(a) = $\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ => det A(a) = $\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

Folosind proprietatea **VIII)**, det $A(a) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow$ det $A(a) = 1$;