Subiect I.1. Progresii aritmetice și geometrice. Numere reale. Numere complexe.

• Progresii aritmetice

Def. Un șir de numere $(a_n)_{n\geq 1}$ se numește progresie aritmetică (notat ÷) dacă orice termen se obține din cel precedent prin adunarea unui număr constant (rația progresiei r)

$$\boxed{\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \dots \\ a_n = a_{n-1} + r,\ (\forall) n \geq 2 \end{array}}$$

a_1 = primul termen
a_n = termen de rang n
r = rația

ex (÷) 1, 4, 7, 10, 13, ... ($r=3$)

Termen general: $\boxed{\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)r \\ a_n = a_k + (n-k)r \end{array}}$ ex: $a_5 = a_1 + 4r$, $a_5 = a_3 + 2r$, $a_5 = a_8 - 3r$

Condiția: $\boxed{a_1, a_2, a_3\ (÷) \Leftrightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}}$

Suma a n termeni: $\boxed{\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$

• Progresia geometrică

Def. Un șir de numere $(b_n)_{n\geq 1}$ s.n. prog. geometrică (notat ÷÷) dacă orice termen se obține din cel precedent prin înmulțire cu un număr nenul constant (rația progresiei $q \neq 0$)

$$\boxed{\begin{array}{l} b_2 = b_1 \cdot q \\ b_3 = b_2 \cdot q \\ b_4 = b_3 \cdot q \end{array}}$$

$b_1 \neq 0$ primul termen
$q \neq 0$ rația
b_n = termen de rang n.

ex (÷÷) 1, 2, 4, 8, 16, ... ($q = 2$)

Termen general $\boxed{\begin{array}{l} b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \\ b_n = b_k \cdot q^{n-k} \end{array}}$ ex: $b_5 = b_1 \cdot q^4$, $b_5 = b_3 \cdot q^2$, $b_5 = b_8 \cdot q^{-3}$

Condiția: $\boxed{b_1, b_2, b_3\ (÷÷) \Leftrightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}}$

Suma a n termeni: $\boxed{\underbrace{b_1 + b_2 + \dots + b_n}_{S_n\ (q\neq 1)} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}$

• Numere reale

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \to$ mulț. nr. naturale

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \to$ mulț. nr. întregi

• $\left.\begin{array}{l} a \vdots b \\ b / a \end{array}\right\}$ dacă $r_{a:b} = 0$ (restul împărțirii lui a la b)

• $a \vdots b$ (a divizibil cu b), b/a (b divide a)

• Nr. divizibile cu 4 = multiplii lui 4 = $\{0, 4, 8, \dots\}$

• Divizorii lui 4 = $\{1, 2, 4\}$.

• $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \to$ mulț. nr. raționale

• $\mathbb{R}$ = mulț. nr. reale

$\xrightarrow{\quad 0 \quad 1 \quad} \infty$ axa nr. reale.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = nr. iraționale

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ = nr. raționale neîntregi

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ = nr. întregi negative

• Modulul nr. real

$x \in \mathbb{R} \to \boxed{|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}}$

Prop.
1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| = a,\ a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$
4. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
5. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ sau $x > a$.

• Partea întreagă a unui nr. real

$[x]$ = cel mai mare nr. întreg inferior lui x.

$\boxed{[x] = k;\ \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ k \leq x < k+1 \end{cases}}$ ex: $[2,7] = 2$, $[-1,8] = -2$

• Partea fracționară: $\boxed{\{x\} = x - [x]}$

• Numere complexe

$\boxed{\begin{array}{l} z = a + bi \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}} \to$ forma algebrică a unui nr. complex
a = partea reală, b = partea imaginară

$\boxed{i^2 = -1}$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$

$\boxed{i^{4k} = 1}$

egalitate: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

adunare: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

înmulțire: $(a+bi) \cdot (c+di) = ac - bd + i \cdot (ad + bc)$

conjugat: $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

împărțire: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2 + d^2}$
↳ amplific cu conjugata numitorului

modul: $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

• Rezolvarea ecuației de gradul II

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}}$, $x_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

ec. are 2 rădăcini complexe conjugate

Relațiile lui Viete: $\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}}$

Descompunerea $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$

Formarea ecuației cu rădăcinile x_1, x_2

ecuația: $\boxed{x^2 - sx + p = 0}$, $s = x_1 + x_2$, $p = x_1 \cdot x_2$

Subiect I 4

① Numere factoriale ($n!$ = n factorial)

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 1\cdot 2$
$3! = 1\cdot 2\cdot 3$
$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

Simplificare:
- eliminare: $\frac{6!}{4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 30$; $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1\cdot2 \cdots (n-1)\cdot n}{1\cdot2\cdots(n-1)}$
- descompunere: $\frac{6!}{4!} = \frac{4!\cdot5\cdot6}{4!} = 30$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}{(n-1)!}$

② Permutări
$\boxed{P_n = n!}$ (numărul mulțimilor ordonate care se pot forma cu n elemente)

③ Combinări
$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ (numărul submulțimilor de k elemente care se pot forma cu n elemente)

④ Aranjamente
$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$ (numărul submulțimilor ordonate de k elem. formate cu n elem.)

Condiții: $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k \geq 0$; n – ordin, k – rang

Obs: $P_0 = C_n^0 = A_n^0 = 0! = 1$
$C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $A_n^1 = n$, $A_n^2 = n(n-1)$

⑤ Proprietățile numerelor C_n^k
- $C_n^k = C_n^{n-k}$ (combinări complementare)
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ (formula de recurență)
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$
- $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

⑥ Regula sumei (Reuniunea mulțimilor)

$\boxed{card(A\cup B) = card(A) + card(B) - card(A\cap B)}$
card – numărul de elemente (cardinal)

$\boxed{\text{Dacă } A\cap B = \emptyset \Rightarrow card(A\cup B) = card(A) + card(B)}$

⑦ Regula produsului (Produs cartezian)
$\boxed{card(A\times B) = card(A)\cdot card(B)}$

(a,b) sau $\overline{ab}$: a se alege în m moduri, b se alege în p moduri $\Rightarrow$ $\overline{ab}$, (a,b) se alege în $(m\cdot p)$ moduri

⑧ Reguli de numărare
- bileți (enumerare termen cu termen)
- combinări = submulțimi
- aranjamente = submulțimi ordonate (aranjate)
- regula produsului = nr. de k cifre, sisteme ordonate, matrici

⑨ Probabilitatea unui eveniment
$\boxed{P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile (totale)}}}$

⑩ Binomul lui Newton (facultativ, teme)
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 \to$ b devine $(-b)$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$\boxed{(a+b)^n = \underset{T_1}{C_n^0 a^n} + \underset{T_2}{C_n^1 a^{n-1} b} + \dots + \underset{T_{k+1}}{C_n^k a^{n-k} b^k} + \dots + \underset{T_{n+1}}{C_n^n b^n}}$

- avem $(n+1)$ termeni
- restrâns avem: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$
- termen general: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$

$(k+1)$ = rangul termenului; C_n^k = coeficient binomial, $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$

⑪ Matematică financiară. Procente

Preț inițial $= S$ < mărește (adăugare simplă); micșorează $S = x$

S crește cu $p\%$: $S + p\%S = S_{final}$
S scade cu $p\%$: $S - p\%S = S_{final}$

Dobânzi (dobânda simplă)
$\underbrace{S_0 \quad D}_{S_f = S_0 + D}$

$\boxed{D = p\% S_0} \to D = \frac{p}{100} S_0$

D – dobânda; din $p\% = \frac{p}{100}$ (rata dobânzii)

În cazul când perioada de timp e mai mare n = nr. unități de timp

Dobânda simplă: $\boxed{D_n = n\cdot p\%\cdot S_0}$, $\boxed{S_n = S_0\left(1 + n\frac{p}{100}\right)}$

Dobânda compusă: $\boxed{S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$, $\boxed{S_n - S_0 = D_n}$

T.V.A taxa pe valoarea adăugată

Preț fără T.V.A	T.V.A

P_{total} (cu T.V.A)

$p\%$ = procentul T.V.A; $P_{total} = P_{vânzare}$

$\boxed{T.V.A = p\%\cdot P_{net}}$ (adăugare)

$\boxed{T.V.A = \frac{p}{100+p}\cdot P_{total}}$ (scăderea T.V.A)

Subiect I 3

- Puteri → { Ecuații binome; Ecuații exponențiale }

- Puteri cu exponent natural sau întreg

$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$ $\quad a^{-1} = \frac{1}{a} \ ;(a \neq 0)$
$a^1 = a$ $\quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \ ;(a \neq 0)$
$a^2 = a \cdot a$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ ;(a \neq 0)$
$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$
$a^n = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$

- Puteri cu exponent rațional

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \longrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \ ; \ a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \longrightarrow a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} \ ; \ \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \longrightarrow a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ ; \ \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-\frac{1}{3}}$

- Proprietățile puterilor. Formule de calcul

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $\quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

- Ecuații binome

$x^2 = a, a \geq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ (2 sol. opuse)
$x^3 = a, a \in \mathbb{R} \rightarrow x = \sqrt[3]{a}$ (soluție unică)

- Ecuații exponențiale

1. $\boxed{a^x = a^y \rightarrow x = y}$ (egalitate de puteri cu ac. bază)
2. $\boxed{a^x \cdot a^{x-1} = y}$ → prelucrez ca să notez $\boxed{a^x = y > 0}$

- Radicali → Ecuații iraționale

- Rădăcina pătrată ($\sqrt{a}$)

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$
Cond: $a \geq 0, b \geq 0$

- Rădăcina cubică ($\sqrt[3]{a}$)

$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$
$a, b \in \mathbb{R}$ (nu avem cond.)

$\sqrt{0} = 0, \sqrt{9} = 3, \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, $\quad \sqrt[3]{0} = 0, \sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{-8} = -2$
$\sqrt{-4}$ = nu există $\quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \ ; \sqrt[3]{9} = 2, \ldots$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2,8$

- Proprietăți

$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$
$\sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R}$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 a}$

$(\sqrt[3]{a})^3 = a, a \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
$b\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b^3 a}$

$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{ab} + b$ $\quad (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})^3 = a \pm 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} \pm b = a \pm b \pm 3\sqrt[3]{ab} \cdot (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})$

- Numere iraționale conjugate (au produs rațional)

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$
$b\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = ba$
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$
$(\sqrt[3]{a} \pm b)(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{a} \cdot b + b^2) = a \pm b^3$
$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

Formula radicalilor compuși (dubli)

$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$, unde $C^2 = A^2 - B$

- Ecuații cu radicali

① $\sqrt{x} = a \ |^2 \Leftrightarrow x = a^2$ (Cond: $\begin{cases} x \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$)
$\sqrt[3]{x} = a \ |^3 \Leftrightarrow x = a^3$ (nu avem cond.)

② $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = b \ |^2 \Rightarrow x \pm 2\sqrt{xy} + y = b^2$
izolez radicalul $\pm 2\sqrt{xy} = x + y - b^2 \ |^2$
Cond: $\begin{cases} x, y, b \geq 0 \\ x + y - b^2 \geq 0 \end{cases}$

- Logaritmi → Ecuații logaritmice

- Definiție:

$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$
Cond: $N > 0, a > 0, a \neq 1$

ex: $\log_2 8 = 3$ $\quad \log_3 1 = 0$ $\quad \log_2 \frac{1}{2} = -1$
$\log_3 0 = \nexists$, $\quad \log_3 (-1) = \nexists$ $\quad \log_1 2 = \nexists$

- Proprietăți

$\log_a 1 = 0$ $\quad \log_a \frac{1}{a} = -1$ $\quad a^{\log_a b} = b$
$\log_a a = 1$ $\quad \log_a a^n = n$

$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$
$k \cdot \log_a x = \log_a (x^k)$

- Schimbarea bazei: $\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$

- Logaritm zecimal $\boxed{\lg x = \log_{10} x}$
- Logaritm natural $\boxed{\ln x = \log_e x}$

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln \frac{1}{e} = -1$, $\ln e^x = x$
e = numărul lui Napier, Euler (se notează)
$e^{\ln x} = x$; $\ln(e^x) = x$

- Ecuații logaritmice

① $\boxed{\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y}$ (egalitate cu aceeași bază)
Cond: $x, y > 0$

② $\boxed{\log_a x = b \Rightarrow x = a^b}$
Cond: $x, y > 0$

③ $\left.\begin{array}{l} \log_a x + \log_a y = b \\ \log_a x - \log_a y = b \\ k \log_a x = \log_a y \end{array}\right\}$ Cond → Prelucrez → Ecuație rezolvată → Verific. cond. la final

Subiect I.6

① Triunghi echilateral

- toate laturile egale (l, l, l)
- unghiuri de mărimi egale $(60°, 60°, 60°)$
- medianele, înălțimi, bisectoare și mediatoarele coincid: $O = G = H = I$.

$$\boxed{h_\Delta = \frac{l\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \\ R &= OA = \frac{2}{3}h \\ r &= OM = \frac{1}{3}h \\ P_\Delta &= l + l + l = 3l \end{aligned}}$$

② Triunghi isoscel

- 2 laturi egale, unghiuri de la bază congruente
- AM = mediană, înălțime, bisectoare

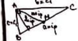
$\boxed{\Delta ABM \equiv \Delta ACM}$

M = mijlocul lui BC.

③ Triunghi dreptunghic

- un unghi drept $m = 90° \sim \frac{\pi}{2}$
- catete c_1, c_2; ipotenuză (ip)

$b = c_1$



- Teorema lui Pitagora: $\boxed{m(\hat{A}) = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2}$
- Reciproca T. Pitagora: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow m(\hat{A}) = 90°}$

- Funcții trigonometrice

$$\boxed{\sin B = \frac{\text{cat. opusă}}{\text{ip}} \quad tg\, B = \frac{c.op}{c.al} \quad \cos B = \frac{\text{cat. alăt}}{\text{ip}} \quad ctg\, B = \frac{c.al}{c.op}}$$

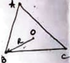
- Aria: $\boxed{A_\Delta = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{ip \cdot h_{ip}}{2}}$
- Mediana ipotenuzei: $\boxed{M_{ip} = \frac{ip}{2} = R}$

④ Triunghi oarecare

- $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ = mărimile unghiurilor; $A + B + C = 180° \sim \pi$ (radiani) $\boxed{\pi = 180°}$
- a, b, c = lungimile laturilor

$\boxed{P = a + b + c, \quad p = \frac{a+b+c}{2}}$ (semiperimetrul)

- r = raza cercului înscris
- R = raza cercului circumscris



1. Teorema fundamentală: $\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$
2. Teorema sinusurilor: $\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$
3. Teorema cosinusului (T. Pitagora generalizată)

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ sau } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$$

și analoagele pt $\cos B, \cos C, b^2, c^2$

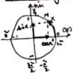
4. Aria triunghiului

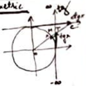
$$\boxed{A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad A_\Delta = \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\sphericalangle l_1 l_2)}{2} \qquad A_\Delta = p \cdot r = \frac{abc}{4R}}$$

5. Funcții trigonometrice $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$x \in (90°, 180°]$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin x = \sin(180° - x)$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cos x = -\cos(180° - x)$
$tg\, x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$ctg\, x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

⑤ Cercul trigonometric





$\sin x = y_M$ (ordonata punctului lui x)

$\cos x = x_M$ (abscisa punctului lui x)

$tg\, x = y_T$ (unde $OM \cap tg = \{T\}$)

$ctg\, x = x_C$ (unde $OM \cap ctg = \{C\}$)

Formule fundamentale

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \ (\forall) x \qquad tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

Formule trigonometrice

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \\ \sin 2x &= 2\sin x \cdot \cos x \end{aligned}}$$

↳ sinus amestecă și păstrează semnul.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}}$$

↳ cosinus nu amestecă dar schimbă semnul

$$\boxed{tg(a \pm b) = \frac{tg\, a \pm tg\, b}{1 \mp tg\, a \cdot tg\, b}; \quad tg\, 2x = \frac{2tg\, x}{1 - tg^2 x}}$$

RADICAL

1) $\sqrt{ax+b} = cx+d$

a) C.E. $ax+b \geq 0 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow x \in [-\frac{b}{a}, +\infty)$

$cx+d \geq 0 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow x \in [-\frac{d}{c}, \infty)$

$\Rightarrow x \in [-\frac{b}{a}, +\infty) \cap [-\frac{d}{c}, +\infty)$

b) $\sqrt{ax+b} = cx+d \;|^2 \Rightarrow ax+b = (cx+d)^2$

c) verifici care soluție $\in$ C.E

2) $\sqrt[3]{ax+b} = cx+d \;|^3 \Rightarrow ax+b = (cx+d)^3$

VECTORI

$\vec{u} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \vec{j}$ - forma

$\vec{u}\,(x_u, y_u)$ - coordonatele

Vectori coliniari

$\vec{u}, \vec{v}$ - coliniari $\Rightarrow \boxed{\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}}$

Vectori perpendiculari

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \boxed{x_{\vec{u}} \cdot x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} = 0}$

$$\boxed{\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}}$$

PUNCTE ȘI DREPTE

1) $\boxed{y = mx + n}$ $\begin{cases} m\text{- panta !} \\ n\text{ - ordonata la origine} \end{cases}$

2) Tipuri de drepte

a) paralele $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$

b) perpendiculare $d_1 \perp d_2 \Rightarrow \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$

3) Dreapta determinată (care conține) $A(x_A, y_A)$

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

4) Distanța de la $A(x_A, y_A)$ la dreapta (d)

$$\boxed{d(A, d) = \frac{|a x_A + b y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

PROGRESII

I ARITMETICE

$\div (a_n)_{n\geq 1} \quad a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$

$\boxed{r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2} = \ldots\ldots$ = diferența dintre doi termeni consecutivi

rația

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) r}$ => termenul general

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

=> suma primilor n termeni

Trei termeni consecutivi în p. a

a, b, c - consecutivi => $\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$

II GEOMETRICE

$\div\div (b_n)_{n\geq 1} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n$

$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ - termenul general

$\boxed{S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$ - suma primilor n termeni

Trei termeni consecutivi în p. g.

a, b, c - consecutivi => $\boxed{b = \sqrt{a \cdot c}}$

rația $\boxed{q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}} = \ldots\ldots$ = raportul dintre doi termeni consecutivi

LOGARITM

1) $\log_a b + \log_a c = \lg_a b \cdot c$

2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

3) $\log_a b^c = c \log_a b$

4) $\log_a a = 1$; $\ln_e = 1$; $\lg 10 = 1$

5) $\log_a 1 = 0$; $\ln 1 = 0$; $\lg 1 = 0$

ECUAȚII CU LOGARITM

! $(\forall)$ ec. cu log / ln / lg începe cu C.E

$\log_a (bx+c) = dx+e$

a) C.E. $bx+c > 0 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow x \in \left(-\frac{c}{b}, +\infty\right)$

$dx+e > 0 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow x \in \left(-\frac{e}{d}, +\infty\right)$

$\Rightarrow x \in \left(-\frac{c}{b}, \infty\right) \cap \left(-\frac{e}{d}, +\infty\right)$

b) dacă este cazul aplici formulele 1→5 până ajungi la :

$\log_a (bx+c) = d \Rightarrow bx+c = a^d$ la

c) verifici care soluții e C.E.

FUNCȚII

1) Vârful parabolei <=> punctul de minim/maxim

$V(x_V, y_V)$ $\boxed{x_V = \frac{-b}{2a}}$; $\boxed{y_V = \frac{-\Delta}{4a}}$

2) Valoarea minimă/maximă

$\boxed{f_{min}/f_{max} = y_V = \frac{-\Delta}{4a}}$

3) Punctul care aparține graficului

$A(x_A, y_A) \in G_f \Rightarrow \boxed{y_A = f(x_A)}$

4) Punctul de intersecție dintre G_f și G_g

$G_f \cap G_g \Rightarrow \boxed{f(x) = g(x)} \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow x = a$

$y = f(x) \Rightarrow y = f(a) = \ldots\ldots = b$

$G_f \cap G_g = A(a, b)$

5) Intersecția cu axele de coordonate

$\boxed{G_f \cap Ox} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = a$

$\Rightarrow G_f \cap Ox = A(a, 0)$

$\boxed{G_f \cap Oy} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y = f(0) = \ldots\ldots = b$

$\Rightarrow G_f \cap Oy = B(0, b)$

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \ldots \cdot m$

! $\boxed{0! = 1}$

1) Permutări $\boxed{P_m = m!}$

2) Aranjamente $\boxed{A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}}$

- submulțimi ordonate; nre. cu cifre distincte

3) Combinări $\boxed{C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}}$

- submulțimi; nre. cu „a" cifre

$$\frac{(m-1)!}{(m+2)!} = \frac{(m-1)!}{(m-1)!\,m \cdot (m+1)(m+2)}$$

PROBABILITĂȚI

$$\boxed{p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}}$$! $\left(\frac{\text{mic}}{\text{mare}}\right)$

cazuri favorabile → cele care îndeplinesc condiția din enunț

cazuri posibile → toate elementele mulțimii

ECUAȚIA DE GRADUL II

1) Are soluții reale

$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\Delta \geq 0}$

2) Are soluții reale distincte

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \boxed{\Delta > 0}$

3) Are soluții reale egale $\Leftrightarrow$ o singură soluție

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $x_1 = x_2 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$

4) NU are soluții reale

$x_1, x_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\Delta < 0}$

TRIUNGHIUL OARECARE

1) Raza cercului circumscris / sin (∢)

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

2) Laturi, măsura (∢), cos(∢)

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} \qquad \boxed{\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$$

$$\boxed{\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

3) Aria ΔABC

a) $A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$

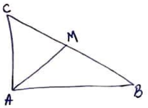
$$= \boxed{\frac{\text{latură} \cdot \text{latură} \cdot \sin(∢)}{2}}$$

b) $A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p = \frac{a+b+c}{2}$

c) $A_{\Delta ABC} = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțimea}}{2}$

d) ΔABC - echilateral $\Rightarrow$ $\boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$

TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

$\boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{\text{catetă} \cdot \text{catetă}}{2}}$

AM - mediană $\Rightarrow \boxed{AM = \frac{BC}{2}}$

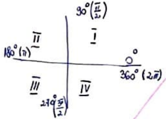
$\boxed{\sin = \frac{\text{catetă opusă}}{\text{ipotenuză}}}$

$\boxed{\cos = \frac{\text{catetă alăturată}}{\text{ipotenuză}}}$

$tg = \frac{\sin}{\cos}$

$ctg = \frac{\cos}{\sin}$

TRIGONOMETRIE



	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+

$\boxed{\sin x = +/- \sin(180° - x)}$ $\boxed{\cos x = +/- \cos(180° - x)}$

! $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$

$\sin x = \cos(90° - x)$ $\cos x = \sin(90° - x)$

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x}$ $\boxed{\frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x}$

RELAȚIILE LUI VIÈTE

$\boxed{\text{Grad II}}$ ax^2+bx+c ; x_1, x_2 rădăcini

$$\begin{cases} x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

! $\boxed{x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}$

!! Scrie o ec. de gr II cu rădăcinile x_1, x_2

$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

$$\begin{cases} S = x_1+x_2 \\ P = x_1 x_2 \end{cases}$$

1) CONTINUITATEA

$$f(x)=\begin{cases} \ldots\text{I}\ldots, & x>a \\ \ldots\text{II}\ldots, & x\leq a \end{cases}$$

$$l_s(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \ldots\text{II}\ldots = \ldots\ldots = b$$

$$l_d(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \ldots\text{I}\ldots = \ldots\ldots = b$$

$f(a)$ = înlocuiești în ramura cu $\geq/\leq$ = ... = b

$l_s(a)=l_d(a)=f(a) \Rightarrow f$ - continuă

2) OPERAȚII CU $+/-\infty$

$\boxed{\frac{\pm a}{\pm\infty}=0}$ $\boxed{\frac{\pm a}{0}=\pm\infty}$ $\boxed{e^{+\infty}=+\infty}$ $\boxed{e^{-\infty}=0}$!

3) NEDETERMINAREA $\boxed{\frac{0}{0}}$

- descompui expresia de la numărător și pe cea de la numitor în produs de paranteze

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

4) NEDETERMINAREA $\frac{\infty}{\infty}$

- dai factor comun forțat x la puterea cea mai mare la numitor și la numărător, de câte ori este nevoie

Exemplu: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+2x^2+7}{x^2+2x-3} = \frac{\infty^3+2\infty^2+7}{\infty^2+2\infty-3} = \frac{\infty}{\infty}$ (CN)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+7}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{2\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-\frac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^3}\right)}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{\infty\left(1+\frac{2}{\infty}+\frac{7}{\infty}\right)}{1+\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}} =$$

$$= \frac{\infty \cdot 1}{1} = \infty$$

INTERVALE DE MONOTONIE $\Leftrightarrow$ CRESCĂTOARE / DESCRESCĂTOARE

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f'(x)}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - -	|	- - - - -	0	+ + + + +	0	- - - - - - -	
$f(x)$		$\searrow$	|	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

Intervalele de monotonie

$x \in (-\infty, a) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare
$x \in (a, b] \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare
$x \in [b, c] \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescătoare
$x \in [c, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare

Puncte de extrem

$A(b, f(b))$ - punct de minim local $\Rightarrow \boxed{f(x) \geq f(b)}$
$B(c, f(c))$ - punct de maxim local $\Rightarrow \boxed{f(x) \leq f(c)}$

CONCAVITATE / CONVEXITATE

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f''(x)}$$

$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ - convexă

$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ - concavă

INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

(se folosește la înmulțire)

Cazuri: dacă sub integrală ai:

1) $e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$

2) $\sin x / \cos x \Rightarrow g'(x) = \sin x / \cos x$

3) $\ln x / \log x \Rightarrow g'(x) =$ cealaltă funcție

4) $\sin^a x / \cos^a x \Rightarrow g'(x) =$ cealaltă funcție

5) $\int_a^b \ln x \, dx \Rightarrow g'(x) = 1$

Etape:

1) $f(x) =$ ce a rămas din integrală $\Rightarrow f'(x) = \dots\dots$

2) $g'(x) = \dots\dots \Rightarrow g(x) = \int g'(x)\,dx = \dots\dots$

3) $I_1 = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$

ASIMPTOTE

I VERTICALĂ

$f:\mathbb{R}\setminus\{a\}$

$:[a,+\infty)$

$:(-\infty,a)$

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)} = \dots\dots$ $\begin{cases} = b \Rightarrow f \text{ nu admite A.V} \\ = +/- \infty \Rightarrow x = a \text{ - A.V.} \end{cases}$

II ORIZONTALĂ

$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)} = \dots\dots$ $\begin{cases} +/- \infty \Rightarrow f \text{ nu admite As. Or la } +/- \infty \\ = a \Rightarrow y = a \text{ - As. Or la } +/- \infty \end{cases}$

III OBLICĂ

$\boxed{y = mx + n}$

$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$; $\boxed{n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]}$

! Dacă f admite $\left[\begin{array}{l} \text{As. Or, nu admite As. Ob.} \\ \text{As. Ob, nu admite As. Or.} \end{array}\right.$

TABEL DE VARIAȚIE A SEMNULUI

GRAD I $ax+b$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	semn contrar lui a		0	semnul lui a	

$ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$

GRAD II ax^2+bx+c

a) $\boxed{\Delta>0} \Rightarrow x_1, x_2$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	semnul lui a	0	semn contrar	0	semnul lui a

b) $\boxed{\Delta=0} \Rightarrow x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	semn a		0	semn a	

c) $\boxed{\Delta<0} \Rightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		semnul lui a	

REGULI DE INTEGRARE

$$\int f+g \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$$

$$\int f-g \, dx = \int f \, dx - \int g \, dx$$

$$\int a \cdot f \, dx = a \int f \, dx$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

CAPCANE

$$\int_a^b F(x) \cdot f(x) \, dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_a^b$$

AJUTĂTOARE

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

$$\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

$$\sqrt[m]{x^p} = x^{\frac{p}{m}}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$