Inversa unei Matrici

Pentru determinarea inversei unei matrici, trebuie parcurși mai mulți pași:

1) Transcriem matricea:

Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

2) Verificăm determinantul matricei:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} \end{array} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 2 - (0 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 1) = 10$$

Dacă determinantul matricei este 0, atunci **NU** există inversă, altfel, matricea este **inversabilă**.

3) Scriem transpusa matricei:

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) Construim matricea adjunctă, notată cu A^*:

Matricea adjunctă se construiește cu ajutorul matricei transpuse, astfel:

Luăm pe rând toate elementele și tăiem linia și coloana pe care se află, ulterior calculând determinantul acelei noi matrice, adăugând **(-1)** la puterea sumei indicilor, astfel: Dacă luăm primul element, tăiem linia 1 și coloana 1, apoi facem determinantul matricei rămase, rezultatul fiind pozitiv, deoarece $\mathbf{-1^{(1+1)} = -1^2 = 1}$.

$A^* = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, unde literele de la **a** la **i** reprezintă noii termeni calculați după regula de mai sus.

a = $(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 · (3 · 1 - 4 · 2) = 3 - 8 = -5

b = $(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = -1 · (5 · 1 - 4 · 0) = -1 · 5 = -5

c = $(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 1 · (5 · 2 - 3 · 0) = 10 - 0 = 10

d = $(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -1 · (1 · 1 - 2 · 2) = -1 · (- 3) = 3

e = $(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 · (1 · 1 - 2 · 0) = 1 - 0 = 1

f = $(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = -1 · (1 · 2 - 0 · 1) = -1 · 2 = -2

g = $(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 1 · (1 · 4 - 3 · 2) = 4 - 6 = -2

h = $(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ = -1 · (1 · 4 - 5 · 2) = -1 · (- 6) = 6

i = $(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ = 1 · (1 · 3 - 5 · 1) = 3 - 5 = -2

5) Construim matricea inversă, notată cu A^{-1}:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^{*}}$$

Știm că determinantul matricei A este 10, deci $\boldsymbol{\frac{1}{det\ A}}$ va fi $\boldsymbol{\frac{1}{10}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -5 & 10 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{10} & \frac{-5}{10} & \frac{10}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{6}{10} & \frac{-2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

Exerciții Bacalaureat

Exemplu 1:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$ și $(A(a))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

Știm că o matrice este inversabilă dacă și numai dacă determinantul acesteia este ≠ 0, așa că vom calcula valaorea determinantului

det A(q) = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & q \\ 1 & -q & 0 \end{vmatrix}$

=> 1 · 1 · 0 + 0 · q · 3 + 1 · 0 · q - (3 · 1 · 1 + q · (-q) · 1 + 0 · 0 · 0)
=> 0 + 0 + 0 - (3 - q^2)
=> q^2 - 3

Deoarece q este număr rațional, pentru orice q, det (A(q)) ≠ 0, deci, matricea este inversabilă.

Exemplu 2:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (2a+1)x + y - 2z = a \\ (a-1)x - y + z = a+1 \\ 2ax - 2y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

Știm că o matrice **nu** este inversabilă atunci când determinantul acesteia este = 0, așa că vom calcula valaorea determinantului.

det A(a) = $\begin{vmatrix} 2a+1 & 1 & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & 1 \end{vmatrix}$

=> (2a + 1) · (-1) · 1 + (a - 1) · (-2) · (-2) + 2a · 1 · 1 - ((-2) · (-1) · 2a + 1 · (-2) · (2a + 1) + 1 · (-1) · (a - 1))

=> -2a - 1 + 4a - 4 + 2a - (4a - 4a - 2 + a - 1)

=> 3a - 2

Numărul real *a* pentru care matricea nu este inversabilă, înseamnă că 3a - 2 = 0, unde avem 3a = 2, iar a = $\frac{2}{3}$.