Sisteme de ecuații liniare

Sistemele de ecuații liniare se pot regăsi atât în rezolvarea unor cerințe conforme, cât și alături de matrici și determinanți.

Sisteme Generale (Neomogene)

1) Transcriem matricea și sistemul:

Fie matricea **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x + 5y + 0z = 1 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + 4y + z = 5 \end{cases}$

Putem observa că matricea A este reprezentată în sistemul alăturat, ignorând egalitățile. Astfel, pentru linia 1, **x** reprezintă necunoscuta, a cărei indice îi aparține 1, iar **y** reprezintă necunoscuta a cărei indice îi aparține 5, precum **z** reprezintă o necunoscută care, de fapt, este 0, adică nu vom scrie niciun **z** pe prima linie a sistemului.

Egalitățile, adică ce avem după **=** sunt reprezentate de matricea coloană a termenilor liberi, anume: B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2) Cazul I - Sistem Compatibil Determinant:

Calculăm determinantul matricei **A**. Dacă acesta este ≠ 0, facem Cramer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

= 1 · 3 · 1 + 1 · 4 · 0 + 2 · 5 · 2 - (0 · 3 · 2 + 2 · 4 · 1 + 1 · 5 · 1) = 10

Dacă determinantul matricei este 0, atunci trecem la Cazul II.

Tot ce trebuie să facem acum este să aflăm **Δx**, **Δy** și **Δz**. Pentru a face asta, înlocuim elementele din matricea **B** pe fiecare coloană reprezentată de **x**, **y** și **z**, pe rând, apoi facem determinantul noilor matrici.
La final, valorile lui **x**, **y** și **z** vor fi:

x = $\boldsymbol{\frac{\Delta x}{\Delta S}}$**, y =** $\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta S}}$**, z =** $\boldsymbol{\frac{\Delta z}{\Delta S}}$, unde **ΔS** reprezintă determinantul matricei inițiale, respectiv matricea **A**.

$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 35$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$\boldsymbol{\Rightarrow x = \frac{35}{10} = \frac{7}{2},\ y = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2},\ z = \frac{0}{10} = 0 \Rightarrow S : \{(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0)\}}$$

3) Cazul II - Sistem Compatibil Nedeterminat:

Calculăm determinantul matricii **A**. Dacă acesta este = 0, trebuie să verificăm dacă rangul matricei **A** este egal cu rangul matricei **Ã**. Dacă acestea **NU** sunt egale, nu există soluții (Kronecker-Capelli).

Pentru acest exemplu vom considera:

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -24 & 8 \\ 33 & -12 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 7x - 24y + 8z = 8 \\ 33x - 12y + 4z = 4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -24 & 8 \\ 33 & -12 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Matricea extinsă, respectiv: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 7 & -24 & 8 & 8 \\ 33 & -12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

Pentru a determina rangul matricei, căutăm minori mai mici decât matricea inițială, în cazul nostru căutăm minori mai mici decât 3, cel puțin unul, deorece matricea având determinantul 0, **NU** mai poate avea rang 3, dar poate avea 2. Dacă **NU** are nici un astfel de minor, rangul ei va fi 1, dacă și numai dacă avem cel puțin un element ≠ 0.

Putem obsera M1 = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -24 \end{vmatrix}$ = 2 · (-24) - 7 · (-3) = -48 + 21 = - 27 ≠ 0 => Rang 2

Acum trebuie să aflăm rangul matricei extinse, care, în cazul nostru **NU** poate fi 4, deoarece nu avem o matrice de tip 4x4, însă poate fi 3.

Verificăm minori, pe rând:

M1 = $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -24 & 8 \\ 33 & -12 & 4 \end{vmatrix}$ = M2 = $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -24 & 8 \\ 33 & -12 & 4 \end{vmatrix}$ = M3 = $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -24 & 8 & 8 \\ -12 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ = 0

De aici deducem că **NU** avem rang 3, dar avem rang 2, deorece am aflat asta de data trecută, respectiv: M1 = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -24 \end{vmatrix}$ = - 27 ≠ 0 => Rang 2

Deci, pe scurt, Rang A = Rang Ã

După ce am făcut acest lucru, ne mai rămâne să aflăm soluțiile. Deoarece avem rang 2, trebuie să lucrăm cu o matrice de 2x2, astfel, **z** devine un **α** (alfa), iar sistemul va devini:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - \alpha \\ 7x - 24y = 8 - 8\alpha \\ 33x - 12y = 4 - 4\alpha \end{cases}$$

Deoarece recunoaștem minorul 1 (M1) ca fiind ≠ 0, putem lucra cu primele 2 linii și 2 coloane ale sistemului (deoarece minorul 1 este alcătuit din primele 2 linii și 2 coloane ale matricii), astfel, vom avea:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 - \alpha \\ 7x - 24y = 8 - 8\alpha \end{cases}$$

Înmulțim cu (-8) prima linie și avem:

$$\begin{cases} -16x + 24y = -8 + 8\alpha \\ 7x - 24y = 8 - 8\alpha \end{cases}$$

Adunăm linilii și vom aveam:

-9x = 0 **=> x = 0**

Înlocuind în prima linie, vom avea:

$2 \cdot 0 - 3y = 1 - \alpha$
$-3y + \alpha = 1$
$\mathbf{y = \frac{\alpha - 1}{3}}$

Cum z rămâne α, la final avem: $\mathbf{S : \{(0, \frac{\alpha-1}{3}, \alpha)\}}$

Sisteme Omogene

Sistemele omogene sunt sistemele care au termenii liberi = 0.

1) Transcriem matricea și sistemul:

Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x + 5y + 0z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$

Putem observa că matricea **A** este reprezentată în sistemul alăturat, ignorând egalitățile. Astfel, pentru linia 1, **x** reprezintă necunoscuta, a cărei indice îi aparține 1, iar **y** reprezintă necunoscuta a cărei indice îi aparține 5, precum **z** reprezintă o necunoscută care, de fapt, este 0, adică nu vom scrie niciun **z** pe prima linie a sistemului.

Egalitățile, adică ce avem după **=** sunt reprezentate de matricea coloană a termenilor liberi, anume: B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Cazul I - Sistem Compatibil Determinant:

Calculăm determinantul matricei **A**. Dacă acesta este ≠ 0, avem soluții unice, unde x_0, y_0 și z_0 sunt 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \cdot 2 - (0 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 1) = 10$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

=> S : {(0, 0, 0)}

Dacă determinantul matricei este 0, atunci trecem la Cazul II.

3) Cazul II - Sistem Compatibil Nedeterminant:

Calculăm determinantul matricii **A**. Dacă acesta este = 0, atunci avem un sistem compatibil nedeterminat.

Fiecare sistem omogen este compatibil, deci, **Rang A** va fi mereu egal cu **Rang Ã**.

Pentru acest exemplu vom considera:

Fie matricea A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \\ 4x + 8z = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Verificăm un minor pentru a vedea dacă este ≠ 0.

M1 = $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 1 · 5 - 2 · (-3) = 5 + 6 = 11 ≠ 0 => Rang 2

Deoarece avem rang 2, trebuie să lucrăm cu o matrice de 2x2, astfel, **z** devine un **α** (alfa), iar sistemul va devini:

$\begin{cases} x - 3y = -2\alpha \\ 2x + 5y = -4\alpha \\ 4x = -8\alpha \end{cases}$

Deoarece recunoaștem minorul 1 (M1) ca fiind ≠ 0, putem lucra cu primele 2 linii și 2 coloane ale sistemului (deoarece minorul 1 este alcătuit din primele 2 linii și 2 coloane ale matricii), astfel, vom avea:

$\begin{cases} x - 3y = -2\alpha \\ 2x + 5y = -4\alpha \end{cases}$

Înmulțim cu (-2) prima linie și avem:

$\begin{cases} -2x + 6y = 4\alpha \\ 2x + 5y = -4\alpha \end{cases}$

Adunăm linilii și vom aveam:

11y = 0 **=> y = 0**

Înlocuind în prima linie, vom avea:

X - 3 · 0 = -2α

=> x = -2α

Cum z rămâne α, la final avem: **S : $\{(-2\alpha, 0, \alpha)\}$**

Exerciții Bacalaureat

Exemplu 1:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+2z=4\\ 3x+ay+2z=1\\ 2x+ay+5z=b\end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

Un sistem este compatibil nedeterminat, dacă și numai dacă determinantul matricii ce reprezintă sistemul este = 0.

det A(a) = $\begin{vmatrix}2 & a & 2\\ 3 & a & 2\\ 2 & a & 5\end{vmatrix}$ => -3a

Acum, după aflarea determinantului, trebuie să-l egalăm cu 0, deci avem: -3a = 0, de unde reiese că **a = 0**, fiind primul număr determinat, astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat. După ce am aflat acest lucru, știm că rangul matricei A nu mai este 3, așa că verificăm dacă este 2.

M = $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}$ = 2 · 2 - 3 · 2 = 4 - 6 = -2 ≠ 0 => Rang 2

Știm că un sistem este compatibil nedeterminat dacă și Rangul matricei extinse este același cu rangul matricei, adică 2. Pentru ca acest rang să fie 2, avem nevoie obligatoriu ca determinantul tuturor minorilor matricei extinse de 3x3 să fie 0, deci, facem determinantul unui minor în care se află b, apoi egalăm rezultatul cu 0 și aflăm b.

M = $\begin{vmatrix}2 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & b\end{vmatrix}$ = 38 - 2b => **b = 19**

Deci, în final spunem că sistemul este compatibil nedeterminat pentru **a = 0** și pentru **b = 19**.

Exemplu 2:

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\dfrac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

Pentru **m = 9**, calculăm determinantul matricei.

det A(9) = $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 9 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}$ = 0, deci avem un sistem compatibil nedeterminat cu o infinitate de soluții, soluții ≠ (0, 0, 0).

Acum, după aflarea determinantului verificăm rangul matricei, care este cel puțin mai mic sau egal cu 2.

M = $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 9\end{vmatrix}$ = 1 · 9 - 2 · 2 = 9 - 4 = 5 ≠ 0 => Rang 2

După ce am determinat rangul, aflăm soluțiile lui x, y și z, transformând valoarea lui z în α, astfel sistemul devenind:

$$\begin{cases}x + 2y = -\alpha\\ 2x + 9y = -\alpha\\ x - 3y = -2\alpha\end{cases}$$

Deoarece recunoaștem minorul 1 (M1) ca fiind ≠ 0, putem lucra cu primele 2 linii și 2 coloane ale sistemului (deoarece minorul 1 este alcătuit din primele 2 linii și 2 coloane ale matricii), astfel, vom avea:

$$\begin{cases}x + 2y = -\alpha\\ 2x + 9y = -\alpha\end{cases}$$

Înmulțim cu (-2) prima linie și avem:

$$\begin{cases}-2x - 4y = 2\alpha\\ 2x + 9y = -\alpha\end{cases}$$

Adunăm liniile și vom aveam:

5y = α **=> y = $\frac{\alpha}{5}$**

Înlocuind în prima linie, vom avea:

$X + 2 \cdot \frac{\alpha}{5} = -\alpha$

=> x = $\frac{-7\alpha}{5}$

Cum z rămâne α, la final avem: **S : {($\frac{-7\alpha}{5}$, $\frac{\alpha}{5}$, α)}**

Înlocuim acum soluțiile în ce trebuie să aflăm:

$$\frac{(\frac{-7\alpha}{5})^2 + (\frac{\alpha}{5})^2 - \alpha^2}{(\frac{-7\alpha}{5})^2 + (\frac{\alpha}{5})^2 + \alpha^2} = \frac{\frac{49\alpha^2}{25} + \frac{\alpha^2}{25} - \alpha^2}{\frac{49\alpha^2}{25} + \frac{\alpha^2}{25} + \alpha^2} = \frac{\frac{50\alpha^2}{25} - \alpha^2}{\frac{50\alpha^2}{25} + \alpha^2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha^2}{2\alpha^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha^2}{3\alpha^2} = \frac{1}{3}$$