Şiruri:

138. Teorema lui Weierstrass: Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

139. Criteriul cleştelui:

Fie $(a_n)_n, (b_n)_n, (x_n)_n$ şiruri de numere reale. Dacă $a_n \le x_n \le b_n, (\forall) n \ge n_0$ şi dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \in R$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

140. Criteriul raportului:

Fie $(a_n)_n$ cu $a_n > 0, (\forall) n$. Presupunând că există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci:

i) dacă $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

ii) dacă $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,

iii) dacă $l = 1 \Rightarrow$ nu ne putem pronunţa asupra limitei şirului $(a_n)_n$.

141. Criteriul Cesaro – Stolz:

Fie şirul $(a_n)_n$ şi şirul $(b_n)_n$ strict crescător şi nemărginit cu $b_n > 0, (\forall) n$. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (finită sau infinită), atunci, există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ şi în plus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

142. Criteriul radicalului:

Fie $(a_n)_n$ cu $a_n > 0, (\forall) n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finită sau infinită. Atunci şirul $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

143. Limite remarcabile: Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $x_n \ne 0, (\forall) n \in N$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{tg\ x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{arctg\ x_n}{x_n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a, \quad a > 0, a \ne 1.$$

Limite de funcţii:

144. Teoremă (Heine): Fie $f : D \to R, a \in D'$ şi $l \in \overline{R}$, atunci:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $(\forall)(x_n)_n \subset D \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ există $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ şi este egală cu *l*.

145. Limite remarcabile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{arctg\ x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, a \ne 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^r - 1}{x} = r.$$

Permutări:

146. Perechea $(i,\ j)$, cu $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$, se numeşte inversiune a permutării $\sigma \in S_n$ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul de inversiuni se notează cu $m(\sigma)$.

Ex:

$$\text{Pentru } \sigma = \begin{array}{cccc} i & & j & \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \\ \sigma(i) & & \sigma(j) & \end{array}$$

inversiune

147. Semnul unei permutări $\sigma \in S_n$ este $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

148. O permutare $\sigma \in S_n$ se numeşte
- permutare pară dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$
- permutare impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$

149. Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, oarecare, atunci $\varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$

Matrice:

150. Orice matrice $A \in M_2(R)$, verifică relaţia : $A^2 - tr(A)A + \det(A) I_2 = O_2$.

151. O matrice pătratică A, este inversabilă (nesingulară) dacă $\det(A) \neq 0$.

152. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

153. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{\bullet}$, unde $A^{\bullet}$ este formată din complemenţii algebrici ai elementelor matricei A^T.

Determinanţi:

154. Regula lui Sarrus (valabilă doar la determinanţi de ordin 3)

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

155. Regula minorilor: (valabilă la determinanţi de orice ordin)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Proprietăţile determinanţilor

156. $\det A^T = \det A,\ (\forall) A \in \boldsymbol{M}_n(C)$

157. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A,\ (\forall) A \in \boldsymbol{M}_n(C),\ (\forall)\lambda \in C^{\bullet}$

158. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B,\ (\forall) A, B \in \boldsymbol{M}_n(C)$

159. Dacă la una din liniile (coloanele) unui determinant se adună o altă linie (coloană) înmulţită eventual cu un număr , valoarea determinantului nu se schimbă.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{C_1=C_1+mC_3}{=} \begin{vmatrix} a_{11}+ma_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

160. Dacă într-un determinant inter-schimbăm două linii (coloane) valoarea determinantului se înmulţeşte cu **-1**.

161. Un determinant poate fi scris ca sumă de alţi doi determinanţi:

$$\begin{vmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aplicaţii ale determinanţilor în geometrie:

162. Aria unui triunghi cu $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ (în plan) este:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

163. Condiţia de coliniaritate a trei puncte $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ în plan:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sisteme liniare:

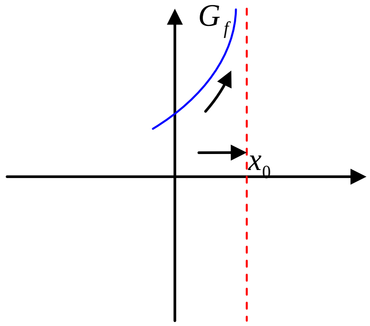
164. Def. Fie $A \in M_{m,n}(C)$; un număr natural $r \le \min(m,n)$ se numeşte *rangul matricei A* dacă cel puţin un determinant (minor) de ordin *r* este nenul, iar toţi minorii de ordin mai mare decât *r* sunt nuli.

165. Sistem
- compatibil: $rang\, A = rang\, \overline{A}$
  - determinat: $rang\, A = rang\, \overline{A} =$ numărul de necunoscute
  - nedeterminat: $rang\, A = rang\, \overline{A} \neq$ numărul de necunoscute
- incompatibil: $rang\, A \neq rang\, \overline{A}$

.

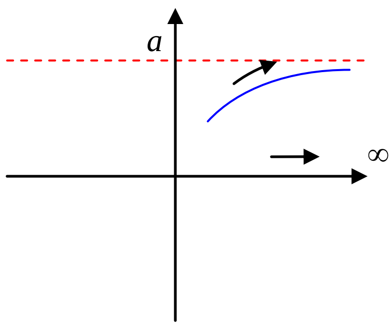
Asimptote:

166. Asimptotă verticală:



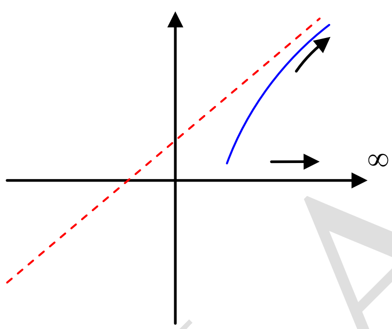
Dacă x_0 este un punct de acumulare finit ce nu aparţine domeniului unei funcţii *f* , în care $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty$ atunci dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală pentru funcţia *f*.

167. Asimptotă orizontală:



Dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ şi a este finit, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei (analog spre $-\infty$).

168. Asimptotă oblică:



Dacă dreapta $y = mx + n$ este asimptotă a funcţiei *f* spre $+\infty$ atunci

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right].$$

(analog spre $-\infty$)

Funcţii continue:

169. Teoremă: : Fie $E \subset R, f : E \to R, x_0 \in E \cap E'$, atunci *f* este continuă în x_0 dacă şi numai dacă $(\exists) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

170. Teorema lui Weierstrass de mărginire: Dacă $f : [a,b] \to R$ este o funcţie continuă, atunci:

a) *f* este mărginită, ($(\exists) m, M \in \mathbf{R}$ astfel încât $m \le f(x) \le M$)

b) îşi atinge marginile ($(\exists) x_1, x_2 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_1) = m,$ şi $f(x_2) = M$)

171. Teoremă: Dacă $f : [a,b] \to R$ este o funcţie continuă şi , $f(a)$ şi $f(b)$ au semne contrare, atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = 0$.

Funcţii derivabile:

172. Def. Fie $f : D \subseteq R \to R$ şi $x_0 \in D \cap D'$. Spunem că f are derivată în punctul x_0 dacă există

limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not.}{=} f'(x_0) \in \overline{R}$.($f'(x_0)$ – este numită derivata funcţiei f în punctul x_0.

173. Def. Funcţia f este derivabilă în punctul x_0 dacă are derivată, $f'(x_0)$, iar aceasta este un număr real (finit).

174. Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii, f, într-un punct $M(x_0, f(x_0))$ este:

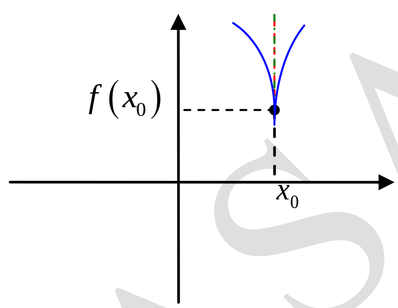
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

175. Teorema: Dacă funcţia $f : I \to R$, I interval, este derivabilă în $x_0 \in I$ atunci f este continuă în x_0

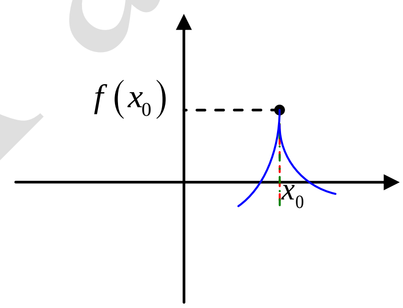
176. Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de întoarcere* pentru G_f dacă:

. $f_s'(x_0), f_d'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$ şi $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$.

Ex: $f_s'(x_0) = -\infty$, $f_d'(x_0) = +\infty$

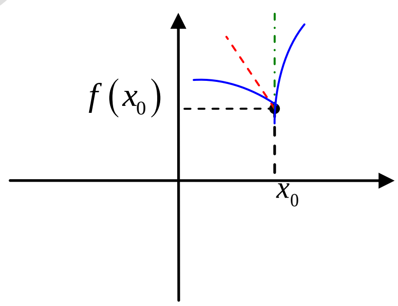


$f_s'(x_0) = -\infty$, $f_d'(x_0) = +\infty$

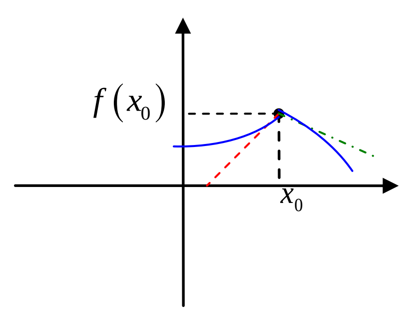


177. Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct unghiular* dacă $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ şi cel puţin una dintre ele este finită..

Ex: $f_s'(x_0) < 0$, $f_d'(x_0) = +\infty$



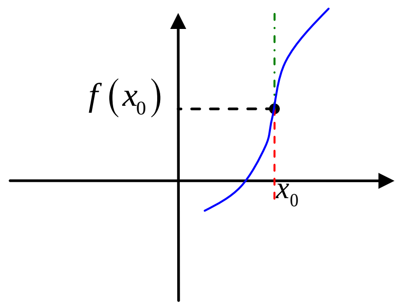
$f_s'(x_0) > 0$, $f_d'(x_0) < 0$

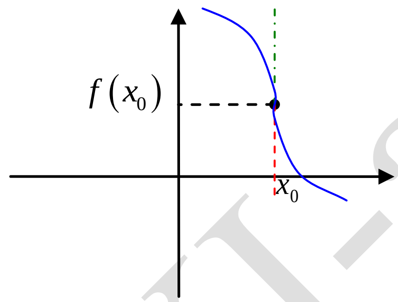


178. Punctul $M(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de inflexiune* dacă:

i) f este continuă în x_0, iar $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in \{-\infty, +\infty\}$

Ex: $f_s'(x_0) = +\infty$, $f_d'(x_0) = +\infty$ $\qquad$ $f_s'(x_0) = -\infty$, $f_d'(x_0) = -\infty$

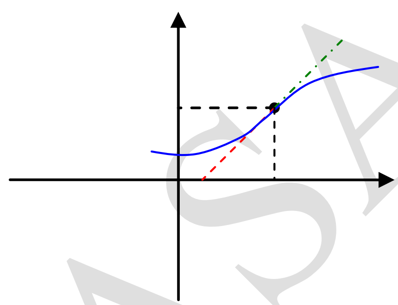


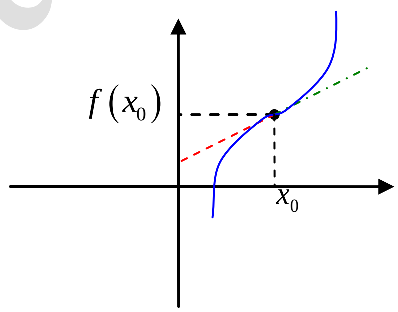


sau

ii) $f : I \to R$ de două ori derivabilă pe I, $f''(x_0) = 0$, iar pentru $x \in I, x < x_0, f''(x) < 0$ şi pentru $x \in I, x > x_0, f''(x) > 0$ sau invers

Ex: $f''(x) > 0, x < x_0$, $f''(x) < 0, x > x_0$ $\qquad$ $f''(x) < 0, x < x_0$, $f''(x) > 0, x > x_0$





179. Operaţii cu funcţii derivabile: Fie f, g derivabile pe D, atunci:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$; $\qquad$ $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, c-o constantă reală;

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $\qquad$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $g(x) \neq 0, (\forall) x \in D$.

180. Derivabilitatea funcţiei compuse: Dacă $f : D \to E$ şi $g : E \to R$ sunt derivabile atunci funcţia compusă $g \circ f : D \to R$ este derivabilă şi $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, $(\forall) x \in D$.

181. Derivabilitatea funcţiei inverse: Fie $I, J \subset R$ două intervale şi $f : I \to J$ o funcţie strict monotonă cu $f(I) = J$. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ şi $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

182. Derivatele funcţiilor elementare (definite pe domeniul maxim de derivabilitate):

$c' = 0, \quad \text{c - constant}$

$x' = 1$

183. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in R^{*}$

184. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

185. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a, \ a > 0, a \neq 1,$ caz particular $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

186. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \ a > 0, a \neq 1,$ caz particular $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

187. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

$\left(\cos x\right)' = -\sin x$

188. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$

$\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$

189 . $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}$

$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}$

190 $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1 + x^{2}}$

$\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^{2}}$

191 Formula lui Leibniz: Fie $f, g : D \to R$ de n ori derivabile, atunci

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)} = C_{n}^{0} f^{(n)} g^{(0)} + C_{n}^{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + C_{n}^{0} f^{(n-2)} g^{(2)} + \ldots + C_{n}^{n} f^{(0)} g^{(n)}.$$

192 Teorema lui Fermat Fie $I \subset R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie derivabilă într-un punct de extrem local x_0 din interiorul intervalului I ($x_0 \in I$ şi nu este capăt al intervalului); atunci $f'(x_0) = 0$.

193. Teorema lui Rolle: Fie $f : [a, b] \to R$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:

i) f este continuă pe $[a, b]$,

ii) f este derivabilă pe (a, b),

iii) $f(a) = f(b)$.

Atunci: $(\exists) c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$

194. Consecinţele teoremei lui Rolle:

C. 1. Între două zerouri consecutive ale funcţiei se află cel puţin un zero al derivatei.

C. 2. Între două zerouri consecutive ale derivatei se află cel mult un zero al funcţiei.

195. Teorema lui Lagrange: Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:

i) f este continuă pe $[a,b]$,

ii) f este derivabilă pe (a,b).

Atunci: $(\exists)c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

196. Consecinţa 1. (funcţia constantă)

Fie $I\subseteq R$ un interval şi fie $f,g:I\to R$ două funcţii derivabile, atunci:

a) Funcţia f este constantă dacă şi numai dacă $f'(x)=0,(\forall)x\in I$

b) Funcţiile f şi g diferă printr-o constantă (adică $(\exists)c\in R$ astfel încât $f(x)=g(x)+c,(\forall)x\in I$) dacă şi numai dacă $f'(x)=g'(x),(\forall)x\in I$.

197 Consecinţa 2. (monotonia funcţiilor derivabile)

Fie $I\subseteq R$ un interval şi fie $f:I\to R$ două funcţie derivabilă, atunci

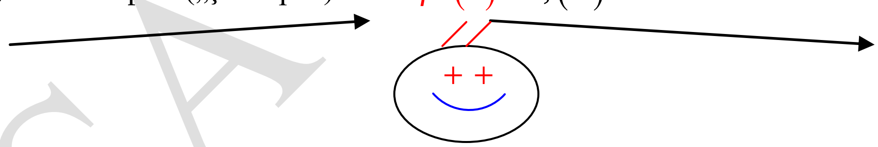
a) f este crescătoare dacă şi numai dacă $f'(x)\geq 0,(\forall)x\in I$

b) f este descrescătoare dacă şi numai dacă $f'(x)\leq 0,(\forall)x\in I$.

Ex:

x	x_0
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + 0- -
$f(x)$	$f(x_0)$

198. O funcţie $f:I\to R$ este a) convexă pe I („ţine apa”) dacă $f''(x)>0,(\forall)x\in I$.



b) concavă pe I („nu ţine apa”) dacă $f''(x)<0,(\forall)x\in I$