Funcții numerice particulare

Funcţia putere cu exponent natural

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Proprietăţile acestei funcţii diferă în funcţie de paritatea exponentului. Precum în manualul scris de Mircea Ganga, aceste proprietăţi vor fi prezentate într-un tabel.

Funcţia	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{2k}$ $k \in \mathbb{N}^*$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{2k+1}$ $k \in \mathbb{N}^*$
Intersecţia cu axele	O(0,0)	
Paritatea	f(-x) = f(x) - pară	f(-x) = -f(x) - impară
Simetria Graficului	Simetric faţă de Oy	Simetric faţă de O
Convexitate şi Concavitate	convexă	concavă pe (-∞, 0] convexă pe [0, ∞)
Puncte Remarcabile	(-1, 1), (0, 0), (1, 1)	
Ordonarea puterilor pe (0, 1) şi (1, ∞)	0 < x < 1 $\to$ $x^{n+1} < x^n$ x > 1 $\to$ $x^{n+1} > x^n$	
Monotonie	strict descresc. pe (-∞, 0] strict cresc. pe [0, ∞)	strict crescătoare pe $\mathbb{R}$
Semnul Funcţiei	f(x) > 0, x ≠ 0 f(x) = 0, x = 0	f(x) < 0, x < 0 f(x) > 0, x > 0 f(x) = 0, x = 0
Continuitate	curbă continuă	
Trasarea Graficului	prin puncte	

Funcţia putere cu exponent întreg negativ

Funcţia	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^{2k}}$ $k \in \mathbb{N}^*$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^{2k+1}}$ $k \in \mathbb{N}^*$
Intersecţia cu axele	Nu taie axele	
Paritatea	f(-x) = f(x) - pară	f(-x) = -f(x) - impară
Simetria Graficului	Simetric faţă de Oy	Simetric faţă de O
Convexitate şi Concavitate	convexă	concavă pe (-∞, 0] convexă pe [0, ∞)
Puncte Remarcabile	(-1, 1), (1, 1)	(-1, -1), (1, 1)
Asimptote	x = 0 asimptotă verticală y = 0 asimptotă orizontală	
Ordonarea puterilor pe (0, 1) şi (1, ∞)	0 < x < 1 $\to x^{n+1} < x^n \to \frac{1}{x^{n+1}} > \frac{1}{x^n}$ x > 1 $\to x^{n+1} > x^n \to \frac{1}{x^{n+1}} < \frac{1}{x^n}$	
Monotonie	strict cresc. pe (-∞, 0) strict desc. pe (0, ∞)	strict desc. pe (-∞, 0) strict desc. pe (0, ∞)
Semnul Funcţiei	f(x) > 0, x ≠ 0	f(x) < 0, x < 0 f(x) > 0, x > 0
Continuitate	curbă continuă pe (-∞, 0) și pe (0, ∞)	
Trasarea Graficului	prin puncte	
Bijectivitate	Nu	Da

Funcţia radical

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **funcţia radical de ordin impar**

Funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \sqrt[2n]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **funcţia radical de ordin par**

Funcţia	$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ $f(x) = \sqrt[2n]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ $n \in \mathbb{N}^*$
Intersecţia cu axele	O(0, 0)	
Paritatea	Nu	f(-x) = -f(x) - impară
Simetria Graficului	Nu	faţă de O
Convexitate şi Concavitate	concavă pe domeniu	convexă pe (-∞, 0] concavă pe [0, ∞)
Puncte Remarcabile	(0, 0), (1, 1)	(-1, -1), (0, 0), (1, 1)
Monotonie	strict cresc. pe domeniu	strict cresc. pe domeniu
Semnul Funcţiei	f(x) > 0, x > 0 f(x) = 0, x = 0	f(x) < 0, x < 0 f(x) > 0, x > 0 f(x) = 0, x = 0
Continuitate	curbă continuă	
Trasarea Graficului	prin puncte	
Bijectivitate	Da	
Funcţia inversă	$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^{2n}$	$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = x^{2n+1}$

Funcţia logaritmică

Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = log_a x, a > 0, a \neq 1$ se numeşte funcţia **logaritmică de bază a.**

Funcţia	$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = log_a x$ $0 < a < 1$	$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = log_a x$ $a > 1$
Intersecţia cu axele	A(1, 0) G_f nu taie axa Oy	
Convexitate şi Concavitate	convexă	concavă
Monotonie	strict descresc. pe (-∞, 0] strict cresc. pe [0, ∞)	strict crescătoare pe $\mathbb{R}$
Semnul Funcţiei	$0 < x < 1 \to f(x) > 0$ $x = 1 \to f(x) = 0$ $x > 1 \to f(x) < 0$	$0 < x < 1 \to f(x) < 0$ $x = 1 \to f(x) = 0$ $x > 1 \to f(x) > 0$
Continuitate	curbă continuă	
Bijectivitate	bijectivă	
Funcţie inversă	$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty), f^{-1}(x) = a^x$	
Asimptote	x = 0 asimptotă verticală	
Trasarea Graficului	prin puncte sau prin simetria cu graficul funcţiei inverse (exponenţiale) în raport cu prima bisectoare (d: x = y)	

Funcţia sinus

$$f : \mathbb{R} \to [-1,\ 1],\ f(x) = sin(x)$$

Această funcţie este periodică, de perioadă principală 2π. Astfel, pentru studiul proprietăţilor funcţiei se va studia întâi intervalul domeniului de definiţie $[0;\ 2\pi]$

Intervalul de definiţie	$[0;\ 2\pi]$	$\mathbb{R}$
Intersecţia cu axele	O(0, 0) B(π, 0)	O(0, 0) B($k\pi$, 0), k $\in \mathbb{Z}$
Paritate	Nu are paritate	Impară
Simetria Graficului	Nu	Simetrică în raport cu O
Convexitate şi Concavitate	concavă pe $[0;\ \pi]$ convexă pe $[\pi;\ 2\pi]$	concavă pe $[2k\pi;\ (2k+1)\pi]$ convexă pe $[(2k+1)\pi;\ 2(k+1)]\pi]$
Monotonie	s. c. pe $[0,\ \frac{\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ s.d. pe $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$	s.c. pe $[\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}]$ s.d pe $[\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{(2k+3)\pi}{2}]$
Mărginire	-1 < f(x) < 1 min f(x) = -1 = $f(\frac{3\pi}{2})$ max f(x) = 1 = $f(\frac{\pi}{2})$	-1 < f(x) < 1 min f(x) = -1 = $f(\frac{(2k+3)\pi}{2})$ max f(x) = 1 = $f(\frac{(2k+1)\pi}{2})$
Semnul Funcţiei	sin(x) > 0 pt. $x \in [0,\ \pi]$ sin(x) < 0 pt. $x \in [\pi,\ 2\pi]$	sin(x) > 0 pt. $x \in [2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ sin(x) < 0 pt. $x \in [(2k+1)\pi,\ 2(k+1)\pi]$
Continuitate	curbă continuă	
Bijectivitate	Nu	
Restricţie bijectivă	Se foloseşte restricţia bijectivă $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ pentru introducerea funcţiei inverse arcsin	
Trasarea Graficului	prin puncte, cu ajutorul periodicităţii	

Funcţia arcsinus

$$f : [-1,\ 1] \to [-\tfrac{\pi}{2};\ \tfrac{\pi}{2}],\ f(x) = arcsin(x)$$

Proprietăţi	
Intersecţia cu axele	O(0, 0)
Paritate	Impară
Simetria Graficului	Simetrică în raport cu O
Convexitate şi Concavitate	concavă pe [-1; 0] convexă pe [0; 1]
Monotonie	strict crescătoare pe domeniu
Mărginire	$-\frac{\pi}{2}$ < f(x) < $\frac{\pi}{2}$ min f(x) = $-\frac{\pi}{2}$ = f(-1) max f(x) = $\frac{\pi}{2}$ = f(1)
Semnul Funcţiei	arcsin(x) < 0 pt. $x \in [-1,\ 0)$ arcsin(x) > 0 pt. $x \in (0,\ 1]$
Continuitate	curbă continuă
Bijectivitate	Da
Funcţie inversă	$sin(arcsinx) = x,\ x \in [-1;\ 1]$ $arcsin(sinx) = x,\ x \in [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$

Funcţia cosinus

$$f : \mathbb{R} \to [-1,\ 1],\ f(x)\ =\ cos(x)$$

Această funcţie este periodică, de perioadă principală 2π. Astfel, pentru studiul proprietăţilor funcţiei se va studia întâi intervalul domeniului de definiţie [0; 2π]

Intervalul de definiţie	[0; 2π]	$\mathbb{R}$
Intersecţia cu axele	A(0, 1) $B(\frac{\pi}{2}, 0)$, $C(\frac{3\pi}{2}, 0)$	A(0, 1) $(\frac{(2k\pm1)\pi}{2}, 0)$, k $\in \mathbb{Z}$
Paritate		Pară
Simetria Graficului	-	Simetrică în raport cu Oy
Convexitate şi Concavitate	concavă pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ şi $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ convexă pe $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$	concavă pe $[\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}]$ convexă pe $[\frac{(2k+1)}{2}; \frac{(2k+3)]}{2}]$
Monotonie	s. c. pe $[0,\ \pi]$ s.d. pe $[\pi, 2\pi]$	s.c. pe $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ s.d pe $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$
Mărginire	-1 < f(x) < 1 min f(x) = -1 = $f(\pi)$ max f(x) = 1 = $f(0)$	-1 < f(x) < 1 min f(x) = -1 = $f((2k+1)\pi)$ max f(x) = 1 = $f(2k\pi)$
Semnul Funcţiei	cos(x) > 0 pt. $x\ \in\ [0,\ \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ cos(x) < 0 pt. $x\ \in\ (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$	cos(x) > 0 pt. $x\ \in\ [\frac{(2k-1)\pi}{2},\ \frac{(2k+1)\pi}{2}]$ cos(x) < 0 pt. $x\ \in\ [\frac{(2k+1)\pi}{2},\ \frac{(2k+3)\pi}{2}]$
Continuitate	curbă continuă	
Bijectivitate	Nu	
Restricţie bijectivă	Se foloseşte restricţia bijectivă $[0; \pi]$ pentru introducerea funcţiei inverse arccos	
Trasarea Graficului	prin puncte, cu ajutorul periodicităţii	

Funcţia arccosinus

$$f : [-1,\ 1] \rightarrow [0; \pi],\ f(x) = arccos(x)$$

Proprietăţi	
Intersecţia cu axele	A(1, 0), C(0, $\frac{\pi}{2}$)
Paritate	Nu are paritate (dar arccos(-x) = π - arccos(x))
Simetria Graficului	Simetrică în raport cu C(0, $\frac{\pi}{2}$)
Convexitate şi Concavitate	concavă pe [-1; 0] convexă pe [0; 1]
Monotonie	strict descrescătoare pe [-1, 1]
Mărginire	0 < f(x) < π min f(x) = 0 = g(1) max f(x) = π = g(-1)
Semnul Funcţiei	arccos(x) > 0
Continuitate	curbă continuă
Bijectivitate	Da
Funcţie inversă	$cos(arccosx) = x,\ x \in [-1;\ 1]$ $arccos(cosx) = x,\ x \in [0; \pi]$

Funcţia tangentă

$$f : \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Această funcţie este periodică, de perioadă principală π. Astfel, pentru studiul proprietăţilor funcţiei se va studia întâi intervalul domeniului de definiţie $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Intervalul de definiţie	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	pe D
Intersecţia cu axele	O(0, 0)	O(kπ, 0)
Paritate	Impară	
Simetria Graficului	Simetrică în raport cu O	
Convexitate şi Concavitate	concavă pe $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ convexă pe $[0, \frac{\pi}{2})$	concavă pe $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi]$ convexă pe $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$
Monotonie	s.c pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	s.c pe $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
Mărginire	nu este mărginită	
Asimptote	$x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ asimptote verticale	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ asimptote verticale
Continuitate	curbă continuă	curbă discontinuă
Bijectivitate	Da	Nu
Trasarea Graficului	prin puncte, cu ajutorul periodicităţii	

Funcţia arctangentă

$$f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ f(x) = arctg(x)$$

Proprietăţi	
Intersecţia cu axele	O(0, 0)
Paritate	impară
Simetria Graficului	Simetrică în raport cu O(0, 0)
Convexitate şi Concavitate	concavă pe (-∞; 0] convexă pe [0; ∞)
Monotonie	strict crescătoare
Mărginire	$-\frac{\pi}{2}$ < f(x) < $\frac{\pi}{2}$
Asimptote	y = $-\frac{\pi}{2}$ asimptotă orizontală la $-\infty$ y = $\frac{\pi}{2}$ asimptotă orizontală la ∞
Semnul Funcţiei	arctg(x) < 0, x < 0 arctg(x) > 0, x > 0
Continuitate	curbă continuă
Bijectivitate	Da
Funcţie inversă	$tg(arctgx) = x,\ x \in \mathbb{R}$ $arctg(tgx) = x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Funcţia cotangentă

$$f : \mathbb{R} - \{(k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

Această funcţie este periodică, de perioadă principală π. Astfel, pentru studiul proprietăţilor funcţiei se va studia întâi intervalul domeniului de definiţie (0, π)

Intervalul de definiţie	(0, π)	pe D
Intersecţia cu axele	(0, $\frac{\pi}{2}$)	$(0,\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$
Paritate	Nu are paritate	Impară
Simetria Graficului	Nu	Simetrică în raport cu O
Convexitate şi Concavitate	convexă pe $[0,\ \frac{\pi}{2})$ concavă pe $(\frac{\pi}{2}, \pi]$	convexă pe $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ concavă pe $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi]$
Monotonie	strict descrescătoare pe domeniu	s.d pe ($k\pi, \pi + k\pi$)
Mărginire	nu este mărginită	
Asimptote	$x = 0, x = \pi$ asimptote verticale	$x = k\pi$ asimptote verticale
Continuitate	curbă continuă	curbă discontinuă
Bijectivitate	Da	Nu
Trasarea Graficului	prin puncte, cu ajutorul periodicităţii	

Funcţia arccotangentă

$$f:(0,\pi)\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)\ =\ arcctg(x)$$

Proprietăţi	
Intersecţia cu axele	O(0, $\frac{\pi}{2}$)
Paritate	Nu are paritate (dar arcctg(-x) = π - arcctg(x))
Simetria Graficului	Simetrică în raport cu (0, $\frac{\pi}{2}$)
Convexitate şi Concavitate	concavă pe (-∞; 0] convexă pe [0; ∞)
Monotonie	strict descrescătoare
Mărginire	0 < f(x) < π
Asimptote	y = 0 asimptotă orizontală la $+\infty$ y = π asimptotă orizontală la $-\infty$
Semnul Funcţiei	arcctg(x) > 0
Continuitate	curbă continuă
Bijectivitate	Da
Funcţie inversă	$ctg(arcctgx)\ =\ x,\ x\in\mathbb{R}$ $arcctg(ctgx)\ =\ x,\ x\in(0,\pi)$