Formule & Teorie MATEMATICĂ

CUPRINS

NOTIȚE

Formule de calcul prescurtat. Inegalități

Formule de calcul prescurtat

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\ ,\ x \neq 1$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1})$ $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1})$	

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + C_n^2\, a^{n-2}b^2 + ... + C_n^n\, b^n$	

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}\ ,\ c = \sqrt{a^2 - b}$$

Inegalități

1. Inegalitatea mediilor: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \leq \dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

2. CBS: $(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)\,(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$

1. Modul. Partea întreagă și fracționară

1. Modulul unui număr real: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x \leq 0 \end{cases}$

1.1. Proprietăți

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| < a,\ a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a,\ a)$
- $|x| > a,\ a > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a,\ \infty)$
- $|x| = a,\ a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$

2. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

$$\boxed{[x] \leq x < [x] + 1 \Leftrightarrow x - 1 < [x] \leq x} \quad \boxed{\{x\} = x - [x]}$$

2.1. Proprietăți

- $[a + b] \geq [a] + [b]$
- $[a + n] = [a] + n,\ n \in \mathbb{Z}$
- $[a] = [b] \Rightarrow |a - b| < 1$
- $\{a\} \in [0, 1)$
- $\{a + n\} = \{a\} + n \Leftrightarrow n \in$
- $\{a\} = \{b\} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

Identitatea lui Hermite: $[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + ... + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$

2. Progresii

1. Progresii aritmetice: $(a_n)_{n\geq1}$ **- progresie aritmetică** $\Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)\,r$	$S_n = \dfrac{n\,(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n\,(2a_1 + (n-1)\,r)}{2}$
$a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$	

2. Progresii geometrice: $(b)_{n\geq1}$ **- progresie geometrică** $\Leftrightarrow b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

$b = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}$	$S_n = \dfrac{b_1\,(q^n - 1)}{q - 1}\ ,\ q \neq 1$	$b_1 \cdot b_n = b_k \cdot b_{n-k+1}$

3. Funcția de gradul I și II

Funcția de gradul I: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,\ b\in\mathbb{R}$

1. Monotonia funcției de gradul I

$a>0\Rightarrow f$ **strict crescătoare**

$a<0\Rightarrow f$ **strict descrescătoare**

2. Semnul funcției de gradul I

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		Semnul contrar lui a	0	Semnul lui a	

Funcția de gradul II: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$

1. Monotonia funcției de gradul II

$a>0\Rightarrow f$ **strict descrescătoare** pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$

$\Rightarrow f$ **strict crescătoare** pe $\left(-\frac{b}{2a},\infty\right)$

$a<0\Rightarrow f$ **strict descrescătoare** pe $\left(-\frac{b}{2a},\infty\right)$

$\Rightarrow f$ **strict crescătoare** pe $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$

2. Axa de simetrie

$$x=-\frac{b}{2a}$$

3. Puncte de extrem. Imaginea funcției de gradul II: $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$a>0\Rightarrow x_{min}=-\frac{b}{2a},\ y_{min}=-\frac{\Delta}{4a}$
$\Rightarrow Im_f=\left[-\frac{\Delta}{4a},\ \infty\right]$

$a<0\Rightarrow x_{max}=-\frac{b}{2a},\ y_{max}=-\frac{\Delta}{4a}$
$\Rightarrow Im_f=\left[-\infty,\ -\frac{\Delta}{4a}\right]$

4. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă

a. $\Delta>0\Rightarrow p\cap d=\{A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)\}$, d - **secantă**

b. $\Delta=0\Rightarrow p\cap d=\{T(x,\ y)\}$, d - **tangentă** la parabolă

c. $\Delta<0\Rightarrow p\cap d=\{\varnothing\}$, d - dreaptă **exterioară**

5. Semnul funcției de gradul II:

$\Delta=0$	Semnul lui a
$\Delta<0$	Semnul lui a
$\Delta>0$	Tabelul de jos

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Semnul lui a	0	Semnul contrar lui a	0	Semnul lui a	

6. Soluțiile ecuației de gradul II: $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0\Rightarrow$ ecuația are **2 soluții reale**: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0\Rightarrow$ ecuația are **1 soluție**: $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

$\Delta<0\Rightarrow$ ecuația **nu are soluții reale**

7. Relațiile lui Viète:

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$	$P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$
${x_1}^2+{x_2}^2=S^2-2P$	${x_1}^3+{x_2}^3=S^3-3SP$
$x^2-Sx+P=0$	

8. Descompunerea în factori: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

9. Forma canonică: $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

10. Semnul funcției de gradul II:

- $ax^2+bx+c>0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a>0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c<0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a<0\end{cases}$

11. Semnul soluțiilor:

$\boxed{P>0}$

$S>0\Rightarrow x_1>0,\ x_2>0$
$S<0\Rightarrow x_1<0,\ x_2<0$

$\boxed{P<0}$

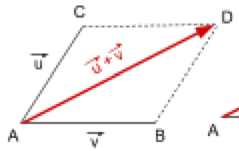
$S>0\Rightarrow x_1<0,\ x_2>0,\ |x_1|<|x_2|$
$S<0\Rightarrow x_1<0,\ x_2>0,\ |x_1|>|x_2|$
$S=0\Rightarrow x_1=-x_2$

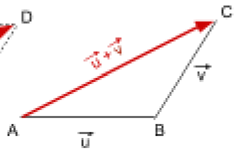
$\boxed{P=0}\Rightarrow x_1=0$

4. Vectori

1. Adunarea vectorilor

Regula **paralelogramului**:	$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$
Regula **triunghiului**:	$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$





2. Proprietăți

- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $|\vec{v} + \vec{u}| \leq |\vec{v}| + |\vec{u}|$
- $|\vec{v} + \vec{u}| = |\vec{v}| + |\vec{u}|$ ⇔ **au același sens**

3. Puncte coliniare

$A - B - C \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{AB} = k\vec{AC}$	$A - B - C - D \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{AB} = k\vec{CD}$

4. Versorul unui vector:	$\vec{AB} = \frac{1}{AB} \cdot \vec{AB}$
5. Formula vectorială a medianei:	$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$
6. Condiția centrului de greutate:	$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
7. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment:	$\vec{OM} = \frac{1}{k+1}\vec{OA} + \frac{k}{k+1}\vec{OB}$, $k = \frac{AM}{MB}$
8. Vectorul de poziție al mijlocului unui segment:	$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$
9. Vectorul de poziție al centrului de greutate unui triunghi:	$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$
10. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris în triunghi:	$\vec{PI} = \frac{1}{a+b+c}(a\vec{PA} + b\vec{PB} + c\vec{PC})$
11. Relația dintre H, O, G:	$\vec{OH} = 3\vec{OG}$
12. Relația lui Sylvester:	$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
13. Vectorul de poziție al lui $A(x,y)$:	$r_A = \vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$
14. Modului unui vector:	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$
15. Vectori egali:	$\vec{v} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$; $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
16. Adunarea vectorilor de poziție:	$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$
17. Înmulțirea vectorilor de poziție:	$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot cos(\vec{u}, \vec{v})$
18. Înmulțirea cu un scalar:	$a \cdot \vec{v} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$
19. Condiția de paralelism:	$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$
20. Condiția de perpendicularitate:	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
21. Expresia analitică:	$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$
22. Cosinusul unghiului dintre 2 vectori:	$cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert}$

5. Trigonometrie

$sin: \mathbb{R} \to [-1,\ 1]$

$cos: \mathbb{R} \to [-1,\ 1]$

$tg: \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$ctg: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$arcsin: [-1,\ 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

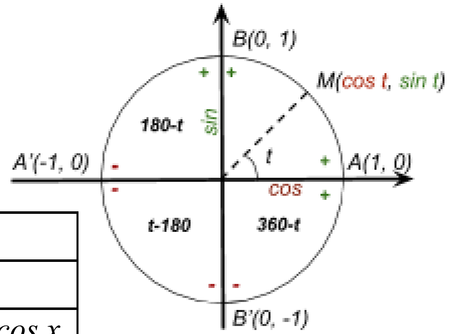
$arccos: [-1,\ 1] \to [0,\ \pi]$

$arctg: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$arcctg: \mathbb{R} \to (0,\ \pi)$

$tg\ t = \frac{sin\ t}{cos\ t}$	$ctg\ t = \frac{cos\ t}{sin\ t}$

$\boxed{sin^2 t + cos^2 t = 1}$



$cos(-t) = cos\ t$	$tg(-t) = -tg\ t$
$sin(-t) = -sin\ t$	$ctg(-t) = -ctg\ t$
$arcsin(-x) = -arcsin\ x$	$arccos(-x) = \pi - arccos\ x$
$arctg(-x) = -arctg\ x$	$arcctg(-x) = \pi - arcctg\ x$

x^o	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\ x$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos\ x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0	-1	0	1
$tg\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	×	0	×	0
$ctg\ x$	×	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	×	0	×

$cos(90^o - t) = sin\ t$	$cos(180^o - t) = -cos\ t$	$cos(t - 180^o) = -cos\ t$	$cos(360^o - t) = cos\ t$
$sin(90^o - t) = cos\ t$	$sin(180^o - t) = sin\ t$	$sin(t - 180^o) = -sin\ t$	$sin(360^o - t) = -cos\ t$
$tg(90^o - t) = ctg\ t$	$tg(180^o - t) = -ctg\ t$	$tg(t - 180^o) = tg\ t$	$tg(360^o - t) = -tg\ t$
$ctg(90^o - t) = tg\ t$	$ctg(180^o - t) = -ctg\ t$	$ctg(t - 180^o) = ctg\ t$	$ctg(360^o - t) = -ctg\ t$

$cos(a+b) = cos\ a \cdot cos\ b - sin\ a \cdot sin\ b$	$cos\ a + cos\ b = 2cos\ \frac{a+b}{2} \cdot cos\ \frac{a-b}{2}$
$cos(a-b) = cos\ a \cdot cos\ b + sin\ a \cdot sin\ b$	$cos\ a - cos\ b = -2sin\ \frac{a-b}{2} \cdot sin\ \frac{a+b}{2}$
$sin(a+b) = sin\ a \cdot cos\ b + cos\ a \cdot sin\ b$	$sin\ a + sin\ b = 2sin\ \frac{a+b}{2} \cdot cos\ \frac{a-b}{2}$
$sin(a-b) = sin\ a \cdot cos\ b - cos\ a \cdot sin\ b$	$sin\ a - sin\ b = 2sin\ \frac{a-b}{2} \cdot cos\ \frac{a+b}{2}$
$cos\ 2x = cos^2 x - sin^2 x = 2cos^2 x - 1 = 1 - 2sin^2 x$	$sin\ 2x = 2sin\ x \cdot cos\ x$
$cos\ \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ x}{2}}$	$sin\ \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ x}{2}}$
$cos\ 3x = cos\ x(4cos^2 x - 3)$	$sin\ 3x = sin\ x(3 - 4sin^2 x)$
$cos\ x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$	$sin\ x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$
$sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$	$cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$
$tg\ x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$	$tg\ 2x = \frac{2tg\ x}{1 - tg^2 x}$
$tg\ \frac{x}{2} = \frac{sin\ x}{1 + cos\ x}$	$tg(a-b) = \frac{tg\ a - tg\ b}{1 + tg\ a \cdot tg\ b}$
$sin\ a \cdot cos\ b = \frac{sin(a+b) + sin(a-b)}{2}$	$sin\ a \cdot sin\ b = \frac{cos(a-b) + cos(a+b)}{2}$
$cos\ a \cdot cos\ b = \frac{cos(a+b) + cos(a-b)}{2}$	$arcsin\ x + arccos\ x = \frac{\pi}{2}$
$arctg\ x + arcctg\ x = \frac{\pi}{2}$	$sin(arccos\ x) = \sqrt{1 - x^2}$
$cos(arcsin\ x) = \sqrt{1 - x^2}$	$arctg\ (\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$

$sin\ x = a$	dacă $a \notin [-1, 1] \Rightarrow S = \emptyset$
	dacă $a \in [-1, 1] \Rightarrow S = \{(-1)^k \cdot arcsin\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$cos\ x = a$	dacă $a \notin [-1, 1] \Rightarrow S = \emptyset$
	dacă $a \in [-1, 1] \Rightarrow S = \{\pm arccos\ a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$tg\ x = a$	$S = \{arctg\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$cos\ f(x) = sin\ g(x) \Rightarrow cos\ f(x) = cos\ (\frac{\pi}{2} - g(x))$

$ctg\ x = a$	$S = \{arcctg\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

1. **Teorema cosinusului**:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$	$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

2. **Teorema sinusurilor**:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. **Aria unui triunghi**:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

$$S = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \qquad S = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

4. **Raza cercului circumscris**:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\triangle ABC}}$$

5. **Raza cercului înscris**:

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

6. **Formula medianei**:

$$m_A^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \qquad m_B^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m_C^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

7. **Coordonatele mijlocului unui segment**:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

8. **Coordonatele centrului de greutate**:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

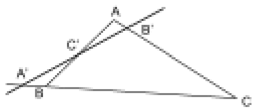
9. **Coordonatele punctului care împarte un segment**:

$$x_M = \frac{x_A + k\,x_B}{1+k} \qquad y_M = \frac{y_A + k\,y_B}{1+k}$$

10. **Distanța dintre 2 puncte**:

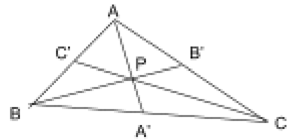
$$d(A,\ B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

11. **Teorema lui Menelau**:



$$A' - B' - C' \text{ coliniare} \Leftrightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

12. **Teorema lui Ceva**:



$$AA' \cap BB' \cap CC' = \{P\} \Leftrightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$tg\ x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$ctg\ x$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

Ecuații liniare în sin și cos:

$$a \cos t + b \sin t = c \mid : \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos t + \cos \alpha \cdot \sin t = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha + t) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6. Puteri, radicali și logaritmi. Ecuații

Puteri

1. Proprietăți

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

2. Ecuații exponențiale

1.	$a^{f(x)} = b,\ b > 0$	$b = a^{g(x)} \Rightarrow a^{f(x)} = a^{g(x)} \overset{inj}{\Rightarrow} f(x) = g(x)$
		$a^{f(x)} = b \mid log_a \Rightarrow log_a f(x) = log_a b \Rightarrow f(x) = log_a b$

2. $\alpha\, a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \gamma = 0$ - notăm $a^{f(x)} = t \Rightarrow \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$

3. $\alpha\, a^{2f(x)} + \beta(a \cdot b)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0 \mid : b^{2f(x)} \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \beta\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \gamma = 0$
notăm $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t \Rightarrow \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$

4. Ecuații cu soluție unică (monotonie/injectivitate)
5. Alte tipuri (ecuații cu cel mult 2 soluții / inegalitatea mediilor)

Radicali

1. Proprietăți

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[n \cdot k]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[n]{a^p}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a},\ \sqrt[p]{a}$ - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot c]{a^c} = \sqrt[n]{a^c}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$

2. Ecuații iraționale

1. Domeniul de definiție: $\sqrt[2k]{a} = b, \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ 2k \in \mathbb{N}^*, k \geq 1 \end{cases}$ $\quad \sqrt[2k+1]{a} = b, \begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Ridicăm la putere ambii membri ai ecuației

3. Verificăm soluțiile

Logaritmi

1. Proprietăți

- $log_a x + log_a y = log_a(xy)$
- $log_{a^k} x^n = \frac{n}{k}\, log_a x$
- $log_a x - log_a y = log_a \dfrac{x}{y}$
- $log_a b = \dfrac{1}{log_b a}$, $log_a b = \dfrac{log_x b}{log_x a}$
- $log_a x^n = n\, log_a x$
- $a^{log_b c} = c^{\,log_b a}$
- $log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}\, log_a x$
- $log_a^k x^n = n^k\, log_a^k x$

2. Ecuații logaritmice ($log_a x$)

1. Domeniul de definiție: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

2. Eliminăm logaritmul

- $log_a x = log_a y \overset{inj}{\Rightarrow} x = y$
- $log_a x = y \overset{inj}{\Rightarrow} x = a^y$
- notații

3. Verificăm soluțiile

Ecuații trigonometrice

1)	$sin\ x = a$	dacă $a \notin [-1, 1] \Rightarrow S = \varnothing$
		dacă $a \in [-1, 1] \Rightarrow S = \{(-1)^k \cdot arcsin\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2)	$cos\ x = a$	dacă $a \notin [-1, 1] \Rightarrow S = \varnothing$
		dacă $a \in [-1, 1] \Rightarrow S = \{\pm arccos\ a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
3)	$cos\ f(x) = sin\ g(x)$	$cos\ f(x) = cos\ (\frac{\pi}{2} - g(x)) \Rightarrow (2)$
4)	$tg\ x = a$	$S = \{arctg\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
5)	$ctg\ x = a$	$S = \{arcctg\ a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

7. Numere complexe

1. **Forma algebrică**: $\boxed{z = a + ib}$

2. **Egalitatea a 2 numere**: $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ $\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

3. **Modulul unui număr complex**: $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

   3.1. Proprietăți

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

4. **Conjugatul unui număr complex**: $\boxed{\overline{z} = a - ib}$

   4.1. Proprietăți

- $\boxed{|z|^2 = z \cdot \overline{z} \Rightarrow \overline{z} = \frac{|z|^2}{z}}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
- $z \in i\,\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5. **Rezolvarea ecuației de gradul II în $\mathbb{C}$**: $\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

6. **Forma trigonometrică**:

$z = r(\cos t + i \sin t)$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
	$t = arctg\ \frac{b}{a} + k\pi$

7. **Operații cu numere în forma trigonometrică**

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)]$	$z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-t) + i \sin(-t))$

8. **Formula lui Moivre**: $\boxed{(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin t}$

9. **Rădăcinile de ordin n**: $\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n}\right)}$

10. **Ecuații binome**: $\boxed{z^n - c = 0 \Leftrightarrow z^n = c}$

8. Funcții

1. **Imaginea funcției:** $\boxed{Im\, f = \{ f(x) \mid x \in A \} = \{ y \in B \mid \exists\ x \in A : f(x) = y \}}$
2. **Funcția injectivă:** $\boxed{f \text{ **injectivă** } \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$
   - f strict monotonă $\Rightarrow f$ **injectivă**
   - funcția de gradul I este injectivă (strict monotonă)
   - funcția de gradul II **nu** este injectivă (strict monotonă)
   - f injectivă $\Leftrightarrow$ orice paralelă la axa O_x taie G_f în **cel mult 1 punct**
   - f injectivă $\Leftrightarrow\ \forall\ y \in B$, ec $f(x) = y$ **are cel mult o soluție**
3. **Funcția surjectivă:** $\boxed{f \text{ **surjectivă** } \Leftrightarrow\ \forall\ y \in B,\ \exists\ x \in A : f(x) = y}$
   - funcția de gradul I este surjectivă
   - funcția de gradul II **nu** este surjectivă
   - f surjectivă $\Leftrightarrow$ orice paralelă la axa O_x taie G_f în **cel puțin 1 punct**
   - f surjectivă $\Leftrightarrow\ \forall\ y \in B$, ec. $f(x) = y$ **are cel puțin o soluție**
4. **Funcția bijectivă:** $\boxed{f \text{ **bijectivă** } \Leftrightarrow f \text{ injectivă și surjectivă}}$
5. **Funcția inversabilă:** $\boxed{f \text{ **inversabilă** } \Leftrightarrow\ \exists\ f^{-1} : B \to A \ \Leftrightarrow f \text{ bijectivă}}$

   5.1. Determinarea inversei: $\boxed{\begin{array}{l} f : A \to B \Rightarrow f^{-1} : B \to A,\ f^{-1}(x) = t \mid f(\ ) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(t) \Leftrightarrow f(t) = x \Rightarrow t = \ldots \end{array}}$
6. **Intersecția cu axele:** $\boxed{G_f \cap O_x : y = 0 \ \Leftrightarrow f(x) = 0}$ $\boxed{G_f \cap O_y : x = 0 \Leftrightarrow f(0)}$
7. **Intersecția graficelor a 2 funcții:** $\boxed{G_f \cap G_g : f(x) = g(x)}$
8. **Compunerea a 2 funcții:** $\boxed{g(f(x)) \ \Leftrightarrow\ (g \circ f)(x)}$
9. **Funcția periodică:** $\boxed{f \text{ **periodică** } \Leftrightarrow f(x+T) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ T > 0}$
10. **Funcția (im)pară:** $\boxed{f \text{ **pară** } \Leftrightarrow f(-x) = f(x)}$ $\boxed{f \text{ **impară** } \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)}$
11. **Axa de simetrie:** $\boxed{x = a \text{ **axă de simetrie pentru** } G_f \Leftrightarrow f(a+x) = f(a-x)}$

9. Combinatorică. Matematici financiare

1. **Permutări:** $\boxed{P_n = n!,\ 0! = 1}$
2. **Aranjamente:** $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$
3. **Combinări:** $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$	$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$ $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$	$C_n^k = C_n^{n-k}$ $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
Suma coeficienților $= f(1)$		

Fie **A** o mulțime cu n elemente și **B** o mulțme cu m elemente:

4. **Numărul funcțiilor** $f : A \to B$: $\boxed{m^n}$
5. **Numărul funcțiilor bijective** $f : A \to B$: $\boxed{P_n = n!}$
6. **Numărul funcțiilor injective** $f : A \to B$: $\boxed{A_n^m}$
7. **Numărul funcțiilor strict (des)crescătoare** $f : A \to B$: $\boxed{C_n^m}$
8. **Numărul submulțimilor:** $\boxed{2^n}$
9. **Numărul submulțimilor cu** k **elemente:** $\boxed{C_n^k}$
10. **Binomul lui Newton:** $\boxed{(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1} b + \ldots + C_n^n\, b^n}$
11. **Termenul de rang** k: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k\, a^{n-k}\, n^k}$

Matematici financiare

1. **Dobânda simplă:** $\boxed{D_n = \dfrac{S_0 \cdot n \cdot p}{100}}$ $\boxed{S_n = S_0 + D_n}$
2. **Dobânda compusă:** $\boxed{D_n = S_0[(1 + \dfrac{p}{100})^n - 1]}$ $\boxed{S_n = S_0 + D_n}$
3. **Probabilități:** $\boxed{p = \dfrac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}}$

10. Geometrie analitică

1. **Panta dreptei AB**: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; $d: ax + by + c = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b}$; $y = mx + n \Rightarrow m - panta$
2. **Ecuația dreptei AB**: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$; $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$
3. **Ecuația dreptei care trece prin** $A(x_A, y_A)$: $y - y_A = m(x - x_A)$
4. **Ecuația tangentei într-un punct** a: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
5. **Condiția de paralelism**: $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$
6. **Condiția de perpendicularitate**: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_2 \cdot m_1 = -1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$
7. **Coordonatele mijlocului lui AB**: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$
8. **Coordonatele punctului care împarte AB într-un raport** k: $x_M = \frac{1}{k+1} x_A + \frac{k}{k+1} x_B$; $y_M = \frac{1}{k+1} y_A + \frac{k}{k+1} y_B$
9. **Intersecția a 2 drepte**: $d_1 \cap d_2 = \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$
   - $d_1 \cap d_2 = \{ A(x_0, y_0) \} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
   - $d_1 \cap d_2$ coincid $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
10. **Distanța de la un punct la o dreaptă**: $d(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
11. **Aria unui triunghi**: $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{|\Delta|}{2}$
12. **Condiția de coliniaritate a 3 puncte**: $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$; A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \Delta = 0$
13. **Condiția de concurență a 3 drepte**: $d_k : a_k x + b_k y + c_k = 0$; $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{P\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

11. Permutări. Transpoziții

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

1. **Produsul a 2 permutări**: $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(\beta(1)) & \alpha(\beta(2)) & \dots & \alpha(\beta(n)) \end{pmatrix}$

   1.1. Proprietăți
   - compunerea funcțiilor este **asociativă**
   - permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$
   - orice permutare din S_n este inversabilă (funcții bijective)

2. **Ordinul grupului**: numărul elementelor lui ($ord\, S_n = n!$)

   $\alpha \in S_n,\ ord\,\alpha = k \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^k = e \\ \alpha^2 \neq e, \alpha^3 \neq e, \dots, \alpha^{k-1} \neq e \end{cases}$

3. **Inversiuni**: (i, j) se numește **inversiune** a permutării $\Leftrightarrow i < j$ și $\alpha(i) > \alpha(j)$
4. **Semnul unei permutări**: $\begin{cases} permutare\ pară, & dacă\ \varepsilon(\alpha) = +1 \\ permutare\ impară, & dacă\ \varepsilon(\alpha) = -1 \end{cases}$

   $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{m(\alpha)}$, $m(\alpha)$ - numărul de inversiuni

Transpoziții: orice permutare de forma $(ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$

Proprietăți: $(ij)^2 = e$; $(ij)^{-1} = (ij)$

12. Matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

1. **Matrice egale**: $\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}}$, $\forall\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$
2. **Matricea transpusă**: $\boxed{A^t = (a_{ji})}$ (linia i din A $\rightarrow$ coloana j din A^t)
3. **Adunarea matricelor**: $\boxed{A + B = C\,,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$, $\forall\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$

- **Elementul neutru**: $O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

4. **Înmulțirea cu un scalar**: $\boxed{\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})}$, $\forall\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$
5. **Înmulțirea matricelor**: $\boxed{A \cdot B = C\,,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$ $\boxed{AB \neq BA}$

- **Elementul neutru**: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

6. **Ridicarea la putere**: $\boxed{A^n = A^{n-1} \cdot A}$

Formulele de calcul prescurtat sunt valabile $\Leftrightarrow AB = BA$

Rangul unei matrice:

- Se numește **minor de ordin** k orice determinant format din elementele care se află la intersecția a k linii și k coloane

- $rang\ A = r \Leftrightarrow$ există un minor de rang r diferit de 0 și toți minorii de ordin $> r$, dacă există, sunt egali cu 0

- Rangul matricei A este $r \Leftrightarrow$ există un minor de ordinul $r \neq 0$ și toți minorii de ordinul $r + 1 = 0$

Inversa unei matrice: $\boxed{A \text{ inversabilă} \Leftrightarrow det\ A \neq 0}$

1. **Proprietăți**: $\boxed{det\,(A \cdot A^{-1}) = det\ I_n}$ $\boxed{det\ A \cdot det\ A^{-1} = 0 \Leftrightarrow det\ A = 0}$
2. **Determinarea inversei**:
   1. $det\ A \neq 0 \Rightarrow\ \exists\ A^{-1}$
   2. scriem matricea A^t
   3. determinăm matricea A^*
   4. determinăm $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^*}$

   sau $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$

Ecuații matriceale:

• $det\ A \neq 0$	• $AX = B \Rightarrow A^{-1} \| AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ • $XA = B \Rightarrow AX = B \mid A^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$
• $det\ A = 0$	se ia X în formă generală și se înlocuiește în ecuație

13. Determinanți

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

1. **Determinantul de ordinul 2**: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
2. **Determinantul de ordinul 3**: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$
3. **Dezvoltarea unui determinant după o linie sau coloană**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

4. **Proprietăți**:

$\det A^t = \det A$	$\det (AB) = \det A \cdot \det B$	$\det (A^k) = (\det A)^k$	$\det (\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$

1. *dacă o linie/coloană are elementele egale cu 0* $\Rightarrow \det A = 0$
2. *dacă un determinant are 2 linii/coloane identice* $\Rightarrow \det A = 0$
3. *dacă înmulțim elementele unei linii/coloane cu un număr diferit de 0, se obține un determinant egal cu produsul dintre acel număr și determinantul inițial.*
4. ***putem scoate factor comun de pe o linie/coloană***
5. *dacă elementele unei linii/coloane se înmulțesc cu un număr și se adună la altă linie/coloană, determinantul rămâne neschimbat*

5. **Determinantul circular**: $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3ab}$

6. **Determinantul Vandermonde**: $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)}$

7. **Teorema Cayley-Hamilton**: $\boxed{A^2 - tr(A) \cdot A + (\det A)\, I_2 = O_2}$ $\boxed{tr(A) = a + d}$

14. Sisteme de ecuații liniare. Sisteme simetrice

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_3 \end{array}\right)$$

1. **(S) incompatibil**	**⇔ nu are soluții ⇔**	$rang\ A \neq rang\ \bar{A}$ $\begin{cases} \det A = 0 \\ \exists\ min.car. \neq 0 \end{cases}$

2. **(S) compatibil**	**⇔ are cel puțin o soluție**	
• **determinat**	**⇔ are soluție unică ⇔**	$rang\ A = rang\ \bar{A} = nr\ nec$ $\det A \neq 0$
• **nedeterminat**	**⇔ are cel puțin 2 soluții ⇔**	$rang\ A = rang\ \bar{A} < nr\ nec$ $\begin{cases} \det A = 0 \\ \forall\ min.car. \neq 0 \end{cases}$

3. **(S) omogen**	⇔ B are toate elementele 0 (**soluție banală**, **nulă**)	
• **compatibil determinat**	admit numai sol. banală $(0,\ 0, \dots, 0)$ ⇔	$\begin{cases} rang\ A = nr\ nec \\ \det A \neq 0 \end{cases}$
• **compatibil nedeterminat**	admit și soluții nenule ⇔	$\begin{cases} rang\ A < nr\ nec \\ \det A = 0 \end{cases}$

Sisteme simetrice:

1. Notăm $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ și formăm sistemul în S și P
2. Rezolvăm sistemul cu necunoscutele S și P
3. Pentru a obține soluțiile sistemelor în x și y calculăm soluțiile ecuației $t^2 - St + P = 0$

15. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

1. **Regula lui Cramer**: pentru sistemele **compatibil determinate**
   - *calculăm* $det\ A$
   - *dacă* $det\ A \neq 0$ *se calculează* d_{x_k} *unde* d_{x_k} *este determinantul obținut din* $det\ A$ *înlocuind coloana* k *cu coloana termenilor liberi*

$$x_k = \frac{d_{x_k}}{det\ A}$$

2. **Metoda matriceală**
   - *dacă* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *se calculează* $det\ A$
   - *dacă* $det\ A \neq 0$ *se calculează* A^{-1}
   - *soluția sistemului este* $X = A^{-1} \cdot B$
3. **Teorema lui Kronecker-Capelli**: (S) **compatibil** $\Leftrightarrow$ $rang\ A = rang\ \overline{A}$
4. **Teorema lui Rouche**: (S) **compatibil** $\Leftrightarrow$ $\forall\ min\ car = 0$

Studiul compatibilității:

- Dacă A **este pătratică** și $det\ A \neq 0$ $\Rightarrow$ **Regula lui Cramer**
- Dacă A **nu este pătratică** sau $det\ A = 0$
  - determinăm $rang\ A$ și **minorul principal**
  - determinăm $rang\ \overline{A}$ și **minorul caracteristic** (m_i)

minor caracteristic *= minor care se obține prin adăugarea minorului principal cu coloana termenilor liberi și o linie rămasă liber*

Rezolvarea sistemelor compatibile:

- *determinăm* $rang\ A$, $rang\ \overline{A}$, ***min principal*** *și* ***min cararacteristic***
- *stabilim ecuațiile principale (care corespund min. principal) și cele secundare*
- *stabilim necunoscutele principale corespunzătoare ecuațiilor principale*
- *eliminăm ecuațiile secundare*
- *atribuim necunoscutelor secundare valori arbitrare* $(a,\ b, ...)$ *și le trecem în dreapta semnului egal*
- *calculăm valorile necunoscutelor principale, obținând soluția sistemului*
- *rezolvăm sistemul obținut*

16. Șiruri. Asimptote

1. **Monotonie**:
   - $(a_n)_{n\geq1}$ **monoton crescător** $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} - a_n \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
     a_1 - margine **inferioară**
   - $(a_n)_{n\geq1}$ **monoton descrescător** $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} - a_n \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$
     a_1 - margine **superioară**
2. **Șir mărginit**: $(a_n)_{n\geq1}$ **mărginit** $\Leftrightarrow$ $\exists\ a,\ b \in \mathbb{R} : a \leq a_n \leq b$
3. **Șir convergent**: $(a_n)_{n\geq1}$ **convergent** $\Leftrightarrow$ **are limită** un **număr real**
   $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\geq1}$ **monoton și mărginit**
4. **Șir divergent**: $(a_n)_{n\geq1}$ **divergent** $\Leftrightarrow$ **nu are limită/are limita** $\pm\infty$
5. **Limita șirurilor monotone**:
   - $(a_n)_{n\geq1}$ **strict crescător** și **nemărginit** $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
   - $(a_n)_{n\geq1}$ **strict descrescător** și **nemărginit** $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
   - $(a_n)_{n\geq1}$ **strict crescător** și **mărginit** $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\ a_n$
   - $(a_n)_{n\geq1}$ **strict descrescător** și **mărginit** $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\ a_n$

Asimptote:

1. **Asimptote orizontale**: $y = l$; $l = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
   - dacă $l \in \{\pm\infty\}$ $\Rightarrow$ **nu există asimptote orizontale**
   - dacă există asimptote orizontale spre $\pm\infty$ $\Rightarrow$ **nu există asimptote oblice**
2. **Asimptote oblice**: $y = mx + n$; $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$
3. **Asimptote verticale**: $y = a$; dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a\ sau\ x<a}} f(x) \in \{\pm\infty\}$

a - punct de acumulare pentru D

17. Limite

1. Limite remarcabile

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, a>1 \\ 1, a=1 \\ 0, a\in(-1,1) \\ nu\ exista\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n, a<1 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty, a>0 \\ 1, a=0 \\ 0, a<0 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p) = \lim\limits_{n\to\infty} a_0 n^p = \begin{cases} \infty, a_0>0 \\ -\infty, a_0<0 \end{cases}$		
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_{p-1}n + a_p}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_{k-1}n + a_k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, p=k \\ 0, p<k \\ \pm\infty, p>k \end{cases}$		

$\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{tg\, x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$	$\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{arctg\, x}{x} = 1$
Dacă $x\to\infty$, limitele sunt egale cu 0 ($\frac{mărginit}{\infty}$)			

2. Operații cu șiruri convergente

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$		$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ c\in\mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$		$\lim\limits_{n\to\infty} \log_b a_n = \log_b(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$
Produsul (raportul) dintre un **șir mărginit** și un **șir cu limita 0** ($\pm\infty$) este 0		

Adunări & scăderi	Înmulțiri & împărțiri	Puteri	Alte operații
$\infty+\infty=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$	$\infty^\infty=\infty$	$\ln 0=-\infty$, $\ln\infty=\infty$
$-\infty-\infty=-\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$	$\infty^{-\infty}=0$	$e^\infty=\infty$, $e^{-\infty}=0$
$a+\infty=\infty$	$a\cdot\infty=\infty,\ a>0$	$a^\infty=\infty,\ a>1$	$\sqrt[n]{\infty}=\infty$
$\infty+a=\infty$	$a\cdot\infty=-\infty,\ a<0$	$a^\infty=0,\ -1<a<1$	$\sqrt[2n+1]{-\infty}=-\infty$
$a-\infty=-\infty$	$\frac{a}{\pm\infty}=0$	$a^{-\infty}=0,\ a>1$	$arctg(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$
$-\infty+a=-\infty$	$\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\frac{1}{0^+}=\infty$	$\infty^a=\infty,\ a>0$	$arcctg(\infty)=0$
		$\infty^a=0,\ a<0$	$arcctg(-\infty)=\pi$
		$0^\infty=0$	

3. Nedeterminări

$\frac{\infty}{\infty}$	• se dă factor comun puterea cea mai mare • se dă factor comun forțat
$\frac{0}{0}$	• se fac calculele de sub limită • se folosesc limitele remarcabile • se amplifică cu conjugata • se simplifică fracția cu $x-a$ după descompunerea în factori a numitorului și numărătorului și se face substituția $x-a=t$
$\infty\cdot 0$	• se transformă în $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$ și se aplică limitele remarcabile • se aplică $f\cdot g = \frac{f}{g^{-1}} = \frac{g}{f^{-1}}$ și se transformă în $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$
$\infty-\infty$	• se fac calculele de sub limită și se amplifică cu conjugata
1^∞	• se aplică $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
0^0, ∞^0	• se formează $f^g = e^{g\cdot\ln f}$

4. Alte metode pentru calculul limitelor

1. Stolz-Cezaro	2. Criteriul radical	3. Criteriul raportului
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$
4. Criteriul cleștelui $\begin{cases} f(x)\le g(x)\le h(x), x\ne a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$		$l<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $l>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $l=1 \Rightarrow$ nu putem calcula cu crt. rap.

18. Funcții continue

$\boxed{f \text{ este } \textbf{continuă} \text{ în } a \Leftrightarrow l_s = l_d = f(a)}$

- a este punct de discontinuitate de **speța I** $\Leftrightarrow f$ este discontinuă în a și limitele laterale **există** și sunt **finite**
- a este punct de discontinuitate de **speța II** $\Leftrightarrow f$ este discontinuă în a și nu este de speța II (nu există o limită laterală sau limitele laterale nu sunt finite)

1. **Proprietăți**

- **Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul de definiție**
- f continuă pe $[a, b] \Rightarrow f$ mărginită pe $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$
- f continuă $\Rightarrow f$ are **Proprietatea lui Darboux** ($f(interval) = interval$)
- $\begin{cases} f: [a, b] \to \mathbb{R} \\ f \text{ continuă pe } [a, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în $[a, b]$
- f strict **monotonă** și **continuă** pe $D \Rightarrow f$ **injectivă**
- f **bijectivă** $\Leftrightarrow f$ strict **monotonă** $\Leftrightarrow f$ **inversabilă**
- dacă $f: I \to \mathbb{R}$ are PD și este monotonă $\Rightarrow f$ continuă pe I

19. Funcții derivabile

f are **derivată în** $a \Leftrightarrow f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \overline{\mathbb{R}}$
f este **derivabilă în** $a \Leftrightarrow f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$
f **derivabilă** în $a \Rightarrow f$ **continuă** în a

1. **Puncte**: dacă f nu este derivabilă, dar este continuă și are derivatele laterale în a, atunci:

- a - **punct unghiular** $\Leftrightarrow$ cel puțin **o derivată laterală** e **finită**
- a - **punct de întoarcere** $\Leftrightarrow f'_s(a)$ și $f'_d(a)$ sunt **infinite** și **diferite**
- a - **punct de inflexiune** $\Leftrightarrow f'_s(a)$ și $f'_d(a)$ sunt **infinite** și **egale**

2. **Operații cu funcții derivabile. Reguli de derivare**

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f', a \in \mathbb{R}$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(f \circ g)' = (f' \circ u) \cdot u'$	$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, f(x) = y$
$(f^g)' = (e^{g \ln f})' = f^g \cdot g' \cdot \ln f + f^{g-1} \cdot g \cdot f'$		

3. **Derivatele funcțiilor uzuale**

Funcția	Derivata
c	$c' = 0$
x	$x' = 1$
x^n	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
x^r	$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$
$\ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
a^x	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
e^x	$(e^x)' = e^x$
$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Funcția	Derivata
$\sqrt[n]{x}$	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$\cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$tg\, x$	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$ctg\, x$	$(ctg\, x)' = \frac{1}{\sin^2 x} = -1 - ctg^2 x$
$\arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg\, x$	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$arcctg\, x$	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4. **Teorema lui Fermat**: $\boxed{a \text{ este } \textbf{punct critic} \Leftrightarrow f'(a) = 0}$
5. **Teorema lui Darboux**: $\boxed{\text{dacă } f \text{ este derivabilă} \Rightarrow f' \text{ are } PD}$
6. **Teorema lui Rolle**:

f Rolle $\Leftrightarrow$ **continuă** pe $[a, b]$ și **derivabilă** pe (a, b)
f Rolle și $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f'(c) = 0$

7. **Teorema lui Lagrange**: $\boxed{f \text{ Rolle} \Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$
8. **Coloralul lui Lagrange**: $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)}$
9. **Regula lui l'Hôspital**: $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)/\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

4. Șirul lui Rolle

- Stabilim intervalul de studiu (a,b) al ecuației $f(x)=0$
- Rezolvăm ecuația $f'(x)=0$
- Calculăm $\lim\limits_{x\to a} f(x),\ f(x_1),\ f(x_2), ..., \lim\limits_{x\to b} f(x)$
- Alcătuim un tabel pentru $x,\ f'(x),\ f(x)$

x	a	x_1	x_2	x_3	$...$	b
$f'(x)$		0	0	0		
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$...$	$\lim\limits_{x\to b} f(x)$

- Dacă pe linia lui $f(x)$ apar două **semne alăturate identice**, atunci în interval **nu există rădăcini reale** ale ecuației $f(x)=0$
- Dacă pe linia lui $f(x)$ apar două **semne alăturate diferite**, atunci în interval **există o soluție reală** a ecuației $f(x)=0$

5. Panta tangentei la G_f în $T(a,\ f(a))$: $\boxed{f'(a)=m}$

6. Ecuația tangentei în $T(a,\ f(a))$: $\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

7. Monotonie. Puncte de extrem:

- f **crescătoare** ⇔ $f'(x)\geq 0$
- f **descrescătoare** ⇔ $f'(x)\leq 0$
- a **punct de extrem** ⇔ $f'(x)=0$

x	domeniul de definiție lui f și soluțiile ecuației $f'(x)=0$
$f'(x)$	semnele lui f'
$f(x)$	creșterea (↗) sau descreșterea (↘) lui f'

8. Convexitate. Concavitate. Puncte de inflexiune:

- f **convexă** ⇔ f **cresc.** ⇔ $f''(x)\geq 0$
- f **concavă** ⇔ f **desc.** $f''(x)\leq 0$
- a **punct de inflexiune** ⇔ $f''(x)=0$

x	domeniul de definiție lui f și soluțiile ecuației $f''(x)=0$
$f''(x)$	semnele lui f''
$f(x)$	convexitatea (∪) sau concavitatea (∩) lui f

20. Monoid. Grup. Izomorfism

1. Parte stabilă: H **parte stabilă a lui** $G \Leftrightarrow \forall\ x,y \in H \Rightarrow x*y \in H$

2. Asociativiate: $*$ **asociativă** $\Leftrightarrow (x*y)*z = x*(y*z),\ \forall\ x,y,z \in G$

3. Comutativitate: $*$ **comutativă** $\Leftrightarrow x*y = y*z,\ \forall\ x,y \in G$

4. Element neutru: $*$ **are element neutru** $\Leftrightarrow \exists\ e \in G : x*e = y*e,\ \forall\ x \in G$

5. Element simetrizabil: x **simetrizabil** $\Leftrightarrow \exists\ x' \in G : x*x' = x'*x, x \in G$

---

6. Monoid: $(G,\ *)$ **monoid** ⇔
- $*$ **bine definită / parte stabilă**
- $*$ **asociativă**
- $*$ **admite element neutru**

comutativ ⇔ $*$ **comutativă**

7. Grup: $(G,\ *)$ **grup** ⇔
- $*$ **bine definită / parte stabilă**
- $*$ **asociativă**
- $*$ **admite element neutru**
- $\forall\ x \in G$ **este simetrizabil**

abelian ⇔ $*$ **comutativă**

8. Ordinul unui grup: $\boxed{ord(x)=n}$ $\boxed{x^n = \begin{cases} e, n=0 \\ x^{n-1}*x, n>0 \end{cases}}$

9. Teorema lui Lagrange: $\boxed{x^{ord(G)}=e}$

10. Subgrup: H **subgrup al lui** $(G,*) \Leftrightarrow \forall\ x,y \in H \Rightarrow x*y' \in H$

11. Morfism. Endomorfism:
- f **morfism** $\Leftrightarrow f(x*y)=f(x)\circ f(y)$
- f **endomorfism** $\Leftrightarrow f(x*y)=f(x)*f(y)$

12. Izomorfism. Automorfism:
- f **izomorfism** $\Leftrightarrow f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ $\Leftrightarrow f$ **bijectivă**
- f **automorfism** $\Leftrightarrow f(x*y)=f(x)*f(y)$ $\Leftrightarrow f$ **bijectivă**

21. Inele și corpuri. Clase de resturi modulo

1. **Inel**: $(A,*,\circ)$ **inel** ⇔ $(A,\ *)$ **grup abelian**; $(A,\ \circ)$ **monoid**; $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\ \forall\ x,y,z\in$

2. **Inel fără divizori ai lui zero**: ⇔ $x\neq e_*\quad y\neq e_*\quad\Rightarrow x\circ y\neq e_*$

3. **Inel cu divizori ai lui zero**: ⇔ $x\neq e_*\quad y\neq e_*\quad\Rightarrow x\circ y=e_*$

4. **Corp**: $(K,*,\circ)$ **corp** ⇔ $(K,*,\circ)$ **inel**; $\forall\ x\in K\setminus\{e_*\}\ \Rightarrow\ \exists\ x'\in K: x\circ x'=x'\circ x=e_o$

5. **Morfism. Endomorfism**:
   - f **morfism** ⇔ $f(x*y)=f(x)\perp f(y)$ ⇔ $f(x\circ y)=f(x)\ \Delta\ f(y)$
   - f **endomorfism** ⇔ $f(x*y)=f(x)*f(y)$ ⇔ $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$

6. **Morfism. Endomorfism**:
   - f **izomorfism** ⇔ $f(x*y)=f(x)\perp f(y)$ ⇔ $f(x\circ y)=f(x)\ \Delta\ f(y)$ ⇔ f **bijectivă**
   - f **automorfism** ⇔ $f(x*y)=f(x)*f(y)$ ⇔ $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$ ⇔ f **bijectivă**

<u>Clase de resturi modulo</u>: $\mathbb{Z}_n=\{\widehat{0},\widehat{1},\dots,\widehat{n-1}\}$

- **opusul** elementului $\widehat{a}\in\mathbb{Z}_n=\widehat{n-1}$
- $\widehat{a}\in\mathbb{Z}_n$ **inversabil** ⇔ a este **relativ prim** cu n ⇔ $(a,\ n)=1$
- $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ **corp** ⇔ n **număr prim**

22. Primitive. Integrale

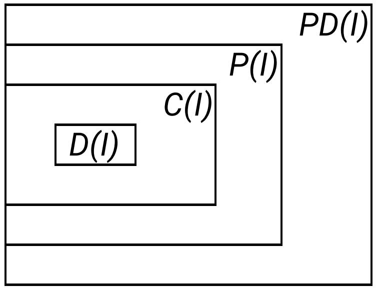
1. **Primitive**: F **primitivă a lui** f ⇔ f **derivabilă** pe I (f continuă pe I); $F'(x)=f(x),\ \forall\ x\in I$

- **Notație**: $F(x)=\int f(x)\,dx+C$

2. **Proprietăți**:

$\int f'(x)\,dx=f(x)+C$	$\int f(x)\,dx=\int F'(x)\,dx=F(x)+C$
f **continuă** ⇒ f **admite primitive**	
orice funcție care admite primitive are P.D.	

3. **Relații între clase de funcții reale**



$D(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f$ **derivabilă pe** $I\}$
$C(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f$ **continuă pe** $I\}$
$P(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f$ **admite primitive pe** $I\}$
$PD(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f$ **are P.D. pe** $I\}$

4. **Funcții care nu admit primitive**

• Dacă f **nu are P.D.** pe I	⇒ f nu admite primitive pe I
• Dacă $f(I)$ **nu este interval**	
• Dacă f are **discontinuități de speța I**	
• Dacă f este **sumă dintre o funcție care admite primitive** și **o funcție care nu admite primitive**	

5. **Funcții discontinue care admit primitive**: $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

6. **Integrala definită**: $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

Calculul integralelor

$\int \sqrt[n]{x}\, dx = \frac{nx\sqrt[n]{x}}{n+1} + C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{1}{(-n+1)\, x^{n-1}} + C$	$\int tg\, x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int ctg\, x\, dx = -\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = tg\, x + C$
$\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -ctg\, x + C$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\, arctg \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{x}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left\lvert x^2+a^2\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

1. Integrarea prin părți:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)$$

2. Schimbarea de variabilă:

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\, dx = F(u(x)) + C$$

$t = u(x)$ $dt = u'(x)\, dx$	$\Rightarrow \int f(t)\, dt \Rightarrow$ revenim la notație

$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt$	$t = u(x)$, $dt = u'(x)\, dt$ $\Rightarrow$ $x = a \Rightarrow t = u(a)$, $x = b \Rightarrow t = u(b)$

$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a [\,f(x)+f(-x)\,]\, dx$	$\int_a^b f^{-1}(x)\, dx = \int_a^b f^{-1}(f(t))\cdot f'(t)\, dt$	$x = f(t)$ $dx = f'(t)\, dt$

3. Integrarea funcțiilor raționale

1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$		se integrează $x^n, x^{n-1}, \ldots$
2) $f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}$	$t = x - a$ $dt = dx$	$n = 1 \Rightarrow \int f(x)\, dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$ $n \neq 1 \Rightarrow \int f(x)\, dx = \frac{A}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + C$
3) $f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$	forma canonică $t = x + \frac{b}{2a}$ $dt = dx$	$T_1)\ \int \frac{x}{(x^2+p^2)^n}\, dx \Rightarrow t = x^2+p,\ dt = 2x\, dx$ $T_2)\ \int \frac{x^2}{(x^2+p^2)^n}\, dx \Rightarrow$ **prin părți** $(f(x) = x)$ $T_3)\ \int \frac{1}{(x^2+p^2)^n}\, dx \Rightarrow \frac{1}{p^2}\int \frac{p^2}{(x^2+p^2)^n}\, dx \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{p^2}\int \frac{x^2+p^2}{(x^2+p^2)^n}\, dx - \frac{1}{p^2}\int \frac{x^2}{(x^2+p^2)^n}\, dx \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{p^2} I_{n-1} - \frac{1}{p^2} T_2$

4. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple ($\frac{P(x)}{Q(x)}$)

1. Se face împărțirea a lui P la Q: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, $C(x)$ - cât, $R(x)$ - rest
2. Descompunem în factori ireductibili $Q(x)$
3. Despărțim fracția în funcție de $Q(x)$: $\frac{A}{\ldots} + \frac{Bx+C}{\ldots\ldots} + \ldots$
4. Aducem la același numitor și egalăm coeficienții lui $x^3, x^2, x, \ldots$
5. Rezolvăm sistemul, înlocuim în 3 și integrăm fiecare fracție

5. Calculul unor primitive diverse

$\int R(e^{ax})\, dx \Rightarrow t = e^{ax}$ **sau** $x = \ln t$
$\int R(tg\, x)\, dx \Rightarrow t = tg\, x \Rightarrow x = arctg\, t,\ dx = \frac{1}{t^2+1}$
$\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx \Rightarrow$ formule $\sin x,\ \cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$
$\int \sin^n x \cos^{2k+1} x\, dx \Rightarrow t = \sin x$ | $\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx \Rightarrow t = \cos$
$\int \sin^{2k} x \cos^{2n} x\, dx \Rightarrow$ formule $\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}$
$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\, dx \Rightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \ldots,$ | $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\, dx \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

23. Proprietățile integralei definite

1. **Liniaritate**: $\boxed{\int_a^b [\,\alpha f(x) + \beta\, g(x)\,]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx}$

2. **Aditivitate la un interval**: $\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx}$

3. **Monotonie**: $\boxed{f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx}$ $\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a)}$

4. f **integrabilă pe** $[a,\ b]$ $\Rightarrow f$ **mărginită pe** $[a,\ b]$
   $\Leftrightarrow f$ **nu este mărginită pe** $[a,\ b] \Rightarrow f$ **nu este integrabilă**

5. f **continuă pe** $[a,\ b]$ $\Rightarrow f$ **integrabilă pe** $[a,\ b]$

6. f **monotonă pe** $[a,\ b]$ $\Rightarrow f$ **integrabilă pe** $[a,\ b]$

7. f **integrabilă pe** $[a,\ b]$
   $g(x) = f(x),\ \forall\ x \in [a,\ b] \setminus \{x_1,\ x_2, ..., x_n$ $\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \Rightarrow g$ **integrabilă**

8. $T > 0$ perioadă $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_a^T f(x)\, dx}$ $\boxed{\int_a^{nT} f(x)\, dx = n \int_a^T f(x)\, dx}$

9. f **continuă pe** $[a,\ b]$ $\Rightarrow \exists\ c \in [a,\ b] : \int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$

10. $f,\ g$ **continue pe** $[a,\ b]$ $\Rightarrow \exists\ c \in [a,\ b] : \int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$

11. $\boxed{\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)' = f(x)}$ $\boxed{\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt\right)' = f(a(x)) \cdot a'(x) - f(b(x)) \cdot b'(x)}$

12. **Aria suprafeței plane**: $\boxed{A = \int_a^b |\,f(x)|\, dx}$ $\boxed{A = \int_a^b |\,f(x) - g(x)|\, dx}$

13. **Volumul corpurilor de rotație**: $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$

14. **Suma Riemann**: $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + ... + f(\frac{n}{n})) = \int_0^1 f(x)\, dx}$

24. Polinoame

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

1. **Suma coeficienților polinomului**: $\boxed{f(1)}$
2. **Suma coeficienților de rang par**: $\boxed{\frac{f(1)+f(-1)}{2}}$
3. **Suma coeficienților de rang impar**: $\boxed{\frac{f(1)-f(-1)}{2}}$
4. **Termenul liber**: $\boxed{a_0 = f(0),\ a_1 = f\,'(0),\ a_2 = f''(0), ...}$
5. **Împărțirea polinoamelor**: $\boxed{\begin{array}{l} 1)\ D = Î \cdot C + R \\ 2)\ grad\ R < grad\ Î \end{array}}$
6. **Restul împărțirii la** $x - a$: $\boxed{f(a)}$

   a. **Schema lui Horner**:

	b	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_0
a	b_n	$a \cdot b_n + b_{n-1} = P_1$	$a \cdot P_1 + b_{n-2} = P_2$	....	$a \cdot P_{n-1} + b_0 = f(a)$

- linia a 2-a reprezintă **coeficienții câtului**

Determinarea restului folosind Teorema împărțirii cu rest

1. Scriem teorema împărțiri cu rest pentru a determina forma polinomului
2. Aflăm rădăcinile împărțitorului (îl egalăm cu 0 și aflăm soluțiile)
3. Formăm un sistem din care aflăm coeficienții restului

$$\begin{cases} f(x_1) = R(x_1) \\ f(x_2) = R(x_2) \\ \quad ... \end{cases}$$

7. **Divizibilitatea polinoamelor**: $\boxed{\begin{array}{l} f \,⋮\, g \Leftrightarrow R = 0 \\ \Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ dacă } Î = x - a \\ \Leftrightarrow f\,'(a) = 0 \text{ dacă } Î = (x-a)^2 \end{array}}$

   a. **Proprietate**: $f \,⋮\, g \Leftrightarrow$ **orice rădăcină a lui** g **este rădăcină și a lui** f