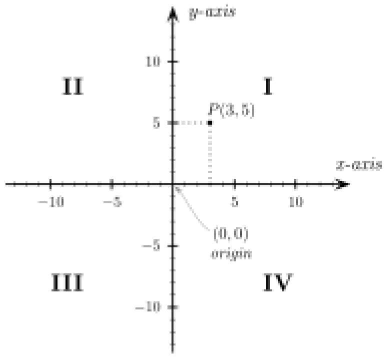
Geometrie Analitică

Reper Cartezian în Plan. Coordonate Carteziene



Axa este o dreaptă $x'x$care are fixat un punct O, numit origine și un versor $\vec{i}$, numit vector unitate.

Între numerele reale și mulțimea punctelor unei axe există o corespondență de 1 la 1 - fiecărui număr real x i se asociază un punct M pe axă, pentru care $OM = |x|$. De asemenea vectorul $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i}$.

Distanța dintre două puncte M, N de pe axă se exprimă prin: $MN = \left|x_M - x_N\right|$

Într-un reper cartezian, fiecărei perechi de valori (x, y) îi aparține un punct M de coordonate (x, y).

Vectorul de poziție al unui punct M este $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

Distanța între două puncte

Distanța dintre punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ are expresia

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplu:

Fie $M_1(-11, 5)$, $M_2(1, 0)$. Să se calculeze distanța dintre aceste două puncte.

$$M_1M_2 = \sqrt{[1 - (-11)]^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

Observații

1) dacă $x_1 = x_2$(punctele sunt pe o dreaptă paralelă cu Oy) formula distanței devine
$$M_1M_2 = \left|y_2 - y_1\right|$$
2) dacă $y_1 = y_2$(punctele sunt pe o dreaptă paralelă cu Ox) formula distanței devine
$$M_1M_2 = \left|x_2 - x_1\right|$$
3) dacă unul dintre puncte coincide cu originea reperului cartezian (e O), formula devine
$$M_1M_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Operații cu vectori legați

Fie $\overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1)$ și $\overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2)$ doi vectori legați.

Vectorului $\overrightarrow{r_1}$ îi corespunde numărul complex $z_1 = x_1 + i\, y_1$

Egalitatea a doi vectori legați

Vectorii sunt egali ($\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$) dacă și numai dacă $x_1 = x_2$și $y_1 = y_2$ (sau $z_1 = z_2$)

Adunarea a doi vectori legați

Suma a doi vectori legați $\overrightarrow{r_1}\,(x_1, y_1)$ și $\overrightarrow{r_2}\,(x_2, y_2)$ se notează cu $\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Adunarea vectorilor este asemenea adunării numerelor complexe, efectuându-se pe componente.

Înmulțirea cu scalar a unui vector legat

Înmulțirea vectorului legat $\overrightarrow{r_1}\,(x_1, y_1)$ cu un scalar α este vectorul notat $\alpha\overrightarrow{r_1}$, de coordonate $\alpha\overrightarrow{r_1}\,(\alpha x_1, \alpha\, y_1)$.
A înmulți un vector cu un scalar înseamnă a-i înmulți componentele cu acel scalar.

Coordonatele și modulul unui vector în plan

Fie două puncte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$ și are modulul (lungimea) $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Împărțirea unui segment într-un raport dat

Fie segmentul AB și M un punct pe acest segment, astfel încât $\frac{AM}{MB} = k$, atunci

$$x_M = \frac{x_a + kx_b}{1+k} \quad y_M = \frac{y_a + ky_b}{1+k}$$

de asemenea, vectorul de poziție al punctului M este

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B}}{1+k}$$

De aici reiese cazul particular:

Fie M mijlocul segmentului AB, atunci coordonatele punctului M sunt

$$x_M = \frac{x_a + x_b}{2} \quad y_M = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Centrul de greutate al unui triunghi

Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC. Atunci G are coordonatele

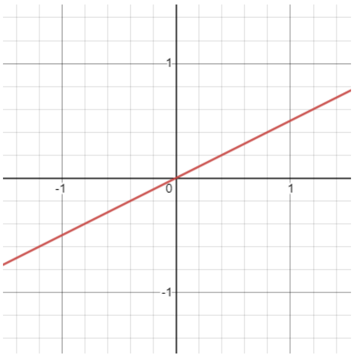
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

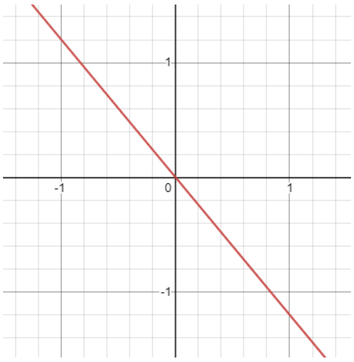
Ecuația dreptei în plan

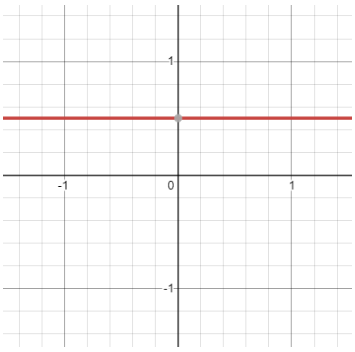
Panta unei drepte

Se numește panta unei drepte tangenta unghiului pe care aceasta îl face cu axa Ox
Pentru $\varphi \in [0^{\circ}, 180^{\circ}] - \{90^{\circ}\}$, notăm panta dreptei cu $m = tg\,\alpha$

Dacă m > 0, dreapta d urcă. Dacă m < 0, dreapta d coboară Dacă m = 0, dreapta e orizontală







Dreptele verticale nu au pantă!!!

Panta unei drepte care trece prin două puncte $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, cu $x_1 \neq x_2$ este

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Unghiul dintre două drepte

Tangenta unghiului cu care trebuie rotită o dreaptă pentru a deveni paralelă cu altă dreaptă are următoarea formulă:

$$tg\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Ca un caz particular, produsul pantelor a două drepte **perpendiculare** este $m_1 m_2 = -1$

De asemenea, două drepte sunt **parelele** dacă au pantele egale.

Ecuația explicită a unei drepte

Se numește ecuația explicită a unei drepte d ecuația de forma $d\colon\ y = mx + n$
Toate punctele de pe dreapta d sunt de forma $M(x,\ mx + n)$, m fiind panta dreptei.

Ecuația dreptei determinată de un punct și o pantă

Fie $A(x_1, y_1)$ un punct. Dreapta care trece prin punctul A și are panta m are ecuația

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Punctul $B(x_0, y_0)$ se află pe această dreaptă dacă se verifică egalitatea

$$y_0 - y_1 = m(x_0 - x_1)$$

Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte

Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ două puncte.

- dacă $x_1 \neq x_2$, ecuația dreptei determinată de cele două puncte este
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$
- dacă $x_1 = x_2$, ecuația dreptei determinată de cele două puncte este $x = x_1$

Ecuația generală a unei drepte

Ecuația explicită a unei drepte poate fi scrisă sub forma
$$ax + by + c = 0$$
Un punct $M(x_0, y_0)$ aparține dreptei d: $ax + by + c = 0$ dacă și numai dacă coordonatele sale verifică ecuația dreptei, adică $ax_0 + by_0 + c = 0$ este adevărat.

Concurența a două drepte

Două drepte concurente au un punct de intersecție notat $M(x_0, y_0)$. Punctul M aparține ambelor drepte, deci verifică ecuațiile ambelor drepte. Pentru a se afla coordonatele acestui punct, se rezolvă sistemul format din ecuațiile celor două drepte:

Exemplu: fie $d_1: 3x + y + 7 = 0$, $d_2 = 2x - y + 8 = 0$. Să se afle coordonatele punctului de intersecție a celor două drepte

$$\begin{cases} 3x_0 + y_0 + 7 = 0 \\ 2x_0 - y_0 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x_0 = -15 \Rightarrow x_0 = -3$$
$$-9 + y_0 + 7 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$$

Deci intersecția celor două drepte este $M(-3, 2)$

Paralelismul a două drepte

1) Fie două drepte $d_1: y = m_1x + n_1$, $d_2: y = m_2x + n_2$. Aceste două drepte sunt paralele dacă $m_1 = m_2$(pantele sunt egale) și $n_1 \neq n_2$(nu coincid). Dacă $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, atunci dreptele coincid.
2) Fie două drepte $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Aceste două drepte sunt paralele dacă
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Dacă fracțiile sunt egale, atunci dreptele coincid.

Coliniaritatea a trei puncte

Fie $A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B),\ C(x_C, y_C)$. Punctele sunt coliniare dacă pantele dreptelor AB și BC sunt egale, adică

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - y_B}$$

Distanța dintre un punct și o dreaptă

Pentru $M_0(x_0,\ y_0),\ d:\ ax\ +\ by\ +\ c\ =\ 0$, atunci distanța de la M_0 la dreapta d este egală cu

$$d\ =\ \frac{\left|ax_0 +\ by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Această formulă poate fi utilizată în calculul ariilor în triunghiuri, paralelograme și trapeze. Lungimea înălțimii unui triunghi este egală cu distanța de la un punct la segmentul care îi este opus.

Exemplu. Fie ABC triunghi cu vârfurile $A(0,\ 0),\ B(1,\ 2),\ C(3,\ 0)$. Să se calculeze aria acestui triunghi.

$A_{ABC} = \frac{AB \cdot d(C, AB)}{2}$; $AB\ =\ \sqrt{(1\ -\ 0)^2\ +\ (2\ -\ 0)^2} = \sqrt{5}.$

dreapta AB are ecuația $\frac{y-0}{1}\ =\ \frac{x-0}{2}$ deci $AB:\ y\ -\ \frac{1}{2}x\ =\ 0$

atunci distanța de la C la AB este $d\ =\ \frac{\left|0 - \frac{3}{2}\right|}{3}\ =\ \frac{1}{2}$

deci $A_{ABC} = \frac{\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$