Matrice

Definiţie

Fie mulţimile $N_m = \{1,\ 2,\ ...,\ m\}$, $N_n = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, $m,\ n\ \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte matrice de tip $(m,\ n)$ o funcţie $A\ : N_m \times N_n\ \rightarrow \mathbb{C}$. Valorile funcţiei $A(i,\ j)$ se notează cu $a_{i,j}$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

O matrice este reprezentată sub forma unui tabel cu valori, cu m linii şi n coloane.

Liniile matricei se notează cu L_i .
Coloanele matricei se notează cu C_j .

Mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane, elemente numere complexe se notează $M_{m,n}(\mathbb{C})$

Matrice Particulare

---

1. **Matricea linie (vector linie)**
   Este o matrice cu un singur rând, de forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

2. **Matricea coloană (vector coloană)**
   Este o matrice cu o singură coloană, de forma $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

3. **Matricea nulă**
   Este matricea a cărei elemente au valoarea 0. Se notează cu $O_{m,n}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Matrice pătratică**
   Este o matrice care are număr egal de linii şi coloane. Se notează cu A_n .

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Elementele matricei care au $i = j$ se află pe **diagonala principală**.

Suma elementelor de pe diagonala principală se notează cu $Tr(A)$ şi se numeşte urma matricei.

5. **Matricea unitate**

   Este matricea a cărei elemente de pe diagonala principală sunt egale cu 1, iar restul cu 0. Se notează cu I_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. **Matrice triunghiulară**

   Matricele pătratice care au toate elementele fie deasupra, fie sub diagonala principală nule (incluzând sau nu diagonala principală). Acestea sunt de forma:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

7. **Matrice diagonală**

   Matricea pătratică care are toate elementele care nu sunt pe diagonala principală nule.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Transpusa unei matrice

Pentru o matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, transpusa acestei matrice este cea obţinută din A prin interschimbarea liniilor în coloane. Prima linie a matricei A devine prima coloană a transpusei etc.

Transpusa matricei A se notează ${}^tA \in M_{n,m}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Adunarea matricelor

Adunarea matricelor se poate efectua doar între două matrice de aceeaşi dimensiune (acelaşi număr de linii şi coloane). Elementele de pe aceeaşi poziţie din cele două matrice se adună între ele.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 3i & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & i & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 6+2 & -3+4 \\ 2-3 & 3i+i & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -1 & 4i & 2 \end{pmatrix}$$

În acelaşi sens, poate fi definită şi scăderea a două matrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 3i & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & i & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 6-2 & -3-4 \\ 2-(-3) & 3i-i & 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 5 & 2i & 6 \end{pmatrix}$$

Înmulţirea cu scalar a matricelor

Înmulţirea unei matrice cu un scalar (cu o valoare) se face prin înmulţirea fiecărui element al matricei cu acea valoare. În acelaşi sens se poate defini şi împărţirea, aceasta fiind doar înmulţirea cu inversul.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 3i & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 6 & 5\cdot(-3) \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 3i & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 30 & -15 \\ 10 & 15i & 20 \end{pmatrix}$$

Înmulţirea cu scalar este asociativă şi distributivă în raport cu adunarea matricelor. Elementul neutru este 1.

Înmulţirea matricelor

Înmulţirea unui vector linie A şi a unui vector coloană B se defineşte astfel.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}); B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{C})$$

$$A \cdot B = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \in M_1(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 7 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 9 = $$
$$= 7 + 0 + 6 + 45 = 58$$

Această valorea este numită produsul scalar al celor doi vectori (cross-product în eng.).

Înmulţirea a două matrice se poate efectua doar în situaţia în care prima matrice are acelaşi număr de coloane cu numărul de linii din a doua matrice.

$$A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})); B = (b_{j,k}) \in M_{n,p}(\mathbb{C});$$
$$A \cdot B = C = (c_{i,j}) \in M_{m,p}(\mathbb{C})$$
$$c_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,p}$$

Pentru a afla valoarea elementului de pe poziţia (i, j) din produsul matricelor A şi B, se va calcula produsul scalar a Liniei i (L_i) şi Coloanei j (C_j) al matricelor A şi B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 13 \\ 51 & 9 \end{pmatrix}$$

Dacă se înmulţeşte o matrice cu M linii şi N coloane cu o matrice cu N linii şi P coloane, rezultatul va avea M linii şi P coloane.

$$L_1 \cdot C_1 = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + (-2)(-4) = 10 + 45 - 8 = 47$$
$$L_1 \cdot C_2 = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 = -2 + 15 + 0 = 13$$
$$L_2 \cdot C_1 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 9 + 0 \cdot (-4) = 15 + 36 + 0 = 51$$
$$L_2 \cdot C_2 = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = -3 + 12 + 0 = 9$$

Ridicarea la putere a matricelor

Pentru ca ridicarea la putere a unei matrice să aibă sens, trebuie să fie definită înmulţirea între matrice şi ea însăşi. De aceea, doar matricele pătratice pot fi ridicate la putere.

$$A^k = \begin{cases} A, k = 1 \\ A^{k-1} \cdot A, k \geq 2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Există mai multe modalităţi pentru a ridica o matrice la o putere nedeterminată (A^n).

1. **Metoda inducţiei matematice**

   fie matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   se calculează succesiv puterile lui A

   $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   din aceasta reiese propoziţia

   $$p(n) : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

   verificarea $p(1)$ este imediată, iar etapa de demonstraţie este următoarea:

   $$p(k) \to p(k+1)$$

   $$p(k) : A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; p(k+1) : A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   dar din definiţie $A^{k+1} = A^k A$, deci

   $$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ceea ce este adevărat, deci

   $$p(n) : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

   este adevărat.

2. **Metoda binomului lui Newton**

   Această metodă este folosită în general pentru ridicarea la putere a matricelor triunghiulare. Se scrie matricea ca sumă dintre matricea unitate şi o altă matrice şi se aplică formula binomului lui Newton.

   Pentru matricea anterioară

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n = \left(I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n$$

   Notăm

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Atunci

$$A^n = C_n^0 {I_2}^n + C_n^1 {I_2}^{n-1} B + C_n^2 {I_2}^{n-2} B^2 + \cdots + C_n^n B^n$$

   Dar ridicat la o putere mai mare sau egală decât 2, matricea B devine O_2, care este elementul nul al înmulţirii matricelor, atunci ecuaţia devine

$$A^n = C_n^0 {I_2}^n + C_n^1 {I_2}^{n-1} B = I_2 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În general, o matrice triunghiulară a cărei diagonală este exclusiv formată din 0 va deveni matrice nulă după ridicarea la putere. (dacă are n linii şi coloane, de la puterea a n-a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^m = ?$$

notăm $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$

atunci

$$A^m = (I_3 + B)^m = C_m^0 {I_3}^m + C_m^1 {I_3}^{m-1} B + C_m^2 {I_3}^{m-2} B^2 + \ldots + C_m^m B^m$$

calculăm puterile lui B

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

atunci

$$A^m = {I_3}^m + m \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3m & 5m \\ 0 & 0 & 7m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{21m(m-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3m & \frac{10m + 21m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & 7m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Metoda funcţiilor trigonometrice**

Această metodă utilizează o proprietate specială a matricelor de tipul

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \vee A_\alpha = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Aceste matrice, ridicate la putere sunt de forma

$$A_\alpha^n = \begin{pmatrix} cos(n\alpha) & sin(n\alpha) \\ -sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{pmatrix} \vee A_\alpha^n = \begin{pmatrix} cos(n\alpha) & -sin(n\alpha) \\ sin(n\alpha) & cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

Fie o matrice A de tipul

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

se calculează modulul numărului complex $Z = a + ib$

$$|Z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

matricea A se scrie sub forma

$$A = |Z| \begin{pmatrix} \frac{1}{|Z|} & \frac{\sqrt{3}}{|Z|} \\ -\frac{\sqrt{3}}{|Z|} & \frac{1}{|Z|} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

iar apoi se reduce la forma trigonometrică

$$A = 2 \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{3}) & sin(\frac{\pi}{3}) \\ -sin(\frac{\pi}{3}) & cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = 2^n \begin{pmatrix} cos(\frac{n\pi}{3}) & sin(\frac{n\pi}{3}) \\ -sin(\frac{n\pi}{3}) & cos(\frac{n\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Exerciții rezolvate

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3A - 4^t\mathrm{B} + 2C = ?$$

$$3A - 4^t\mathrm{B} + 2C = \begin{pmatrix} 3*1 \\ 3*(-2) \\ 3*3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4*(-3) \\ 4*1 \\ 4*0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2*2 \\ 2*(-1) \\ 2*4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-(-12)+4 \\ -6-4+(-2) \\ 9-0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2 $\quad 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 4X = 3I_2 \qquad X = ?$

se observă că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$-4X = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-4X = \begin{pmatrix} 3-2 & 0-0 \\ 0+4 & 3-2 \end{pmatrix}$$

$$-4X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3. $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = ?$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1\cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$BA = ?$ $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1\cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0\cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0\cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB - BA = ?$ $AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 2+1 \\ 0-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Tr(AB - BA) = ?$ $Tr(AB - BA) = -1 + 1 = 0$