Mulțimea numerelor complexe

Pe mulțimea: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\}$

$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definim două operații algebrice:

<u>1. Adunarea:</u>

$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

<u>2. Înmulțirea:</u>

$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}, \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Fiecare element al mulțimii $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care sunt definite operațiile algebrice prezentate mai sus se numește număr complex. Mulțimea numerelor complexe este mulțimea:

$\mathbb{C} = (\boldsymbol{z} | \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R})$

În particular, numerele complexe $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$ și $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ sunt fapt numerele reale $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{0}$.

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$

$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}$

Forma algebrică a numerelor complexe

Forma algebrică a unui număr complex este:

$\boldsymbol{Z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1}$

Numărul real $\boldsymbol{a}$ se numește <u>partea reală</u> a numărului complex și se scrie $\boldsymbol{a = Re(z)}$.

Numărul real $\boldsymbol{b}$ se numește <u>partea imaginară</u> și se notează $\boldsymbol{b = Im(z)}$.

Numărul $\boldsymbol{i}$ se numește <u>unitate imaginară</u>.

Operații cu numere complexe

$\boldsymbol{z = a + bi, z' = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}}$.

<u>Adunarea:</u>

$\boldsymbol{z + z' = (a + c) + (b + d)i}$

<u>Scăderea:</u>

$\boldsymbol{z - z' = (a - c) + (b - d)i}$

<u>Înmulțirea:</u>

$\boldsymbol{z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i}$

Puterile numărului $\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i^{4k} = 1}$

$\boldsymbol{i^{4k+1} = i}$

$\boldsymbol{i^{4k+2} = -1}$

$\boldsymbol{i^{4k+3} = -i}$

Conjugatul unui număr complex:

Dacă $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ este un număr complex, atunci conjugatul lui $\boldsymbol{z}$ este numărul:

$\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi}.$

Proprietăți ale numerelor complexe conjugate:

a) $\boldsymbol{z} + \bar{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{R}$
b) $\boldsymbol{z} \cdot \bar{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{R}$
c) $\overline{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}'} = \overline{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}'}$
d) $\overline{\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}'} = \overline{\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}'}$
e) $\overline{\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}'}\right)} = \frac{\bar{\boldsymbol{z}}}{\overline{\boldsymbol{z}'}}$
f) $\overline{\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}} = (\bar{\boldsymbol{z}})^{\boldsymbol{n}}$
g) $\overline{(\bar{\boldsymbol{z}})} = \boldsymbol{z}$

Observație:

Pentru a demonstra că un număr complex $\boldsymbol{z}$ este real, arătăm că numărul $\boldsymbol{z}$ este egal cu conjugatul său.

$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R} \leftrightarrow \boldsymbol{z} = \bar{\boldsymbol{z}}$

Raportul a două numere complexe:

Pentru a calcula raportul a două numere complexe, se amplifică cu conjugatul numitorului.

Modulul unui număr complex:

Dacă $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ este un număr complex, atunci modulul este numărul real pozitiv:

$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

Proprietăți ale modulului:

a) $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$
b) $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{0} \leftrightarrow \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$
c) $|\boldsymbol{z}| = |\bar{\boldsymbol{z}}|$
d) $|\boldsymbol{z}|^2 = \boldsymbol{z} \cdot \bar{\boldsymbol{z}}$
e) $|\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}'| = |\boldsymbol{z}| \cdot |\boldsymbol{z}'|$
f) $\left|\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}'}\right| = \frac{|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}'|}, \boldsymbol{z}' \neq \boldsymbol{0}$
g) $|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}| = |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{n}}$
h) $|\boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}'| \leq |\boldsymbol{z}| + |\boldsymbol{z}'|$

Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

Fie $z \in \mathbb{C}, z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

Fiecarui numar complex ii corespunde un unic punct în plan $M(a, b)$ care se numeşte **imaginea geometrică** a numărului complex z. Numărul complex z se numește **afixul** punctului M.

Modulul numărului complex z este modulul vectorului de poziție al punctului M:

$$|z| = OM = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Daca punctul A este **imaginea geometrică** a numărului complex z_1 si punctul B este **imaginea geometrică** a numarului complex z_2, atunci **lungimea segmentului** $[\boldsymbol{AB}]$ este:

$$AB = |z_1 + z_2|$$

Forma trigonometrică a unui număr complex

Fie $z \in \mathbb{C}, z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

Forma trigonometrică a numărului complex z este:

$z = r(\cos t + i \sin t)$

Unde:

$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

$t = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ argument redus.

Numerele r si t se numesc coordonate polare (r este rază polară și t argumentul polar).

Mulțimea tuturor argumentelor numărului complex z este:

$\arg(z) = \{t + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z})$

Pentru a determina agumentul redus, vom ține cont de **cadranul** în care este situată **imaginea geometrică** a numărului complex. Notăm cu $M(a, b)$ imaginea geometrică a numărului z.

$$M \in Cadran\ I \rightarrow\ t = arctg\ \frac{b}{a}$$

$$M \in Cadran\ II \rightarrow\ t = \pi - arctg\ \left|\frac{b}{a}\right|$$

$$M \in Cadran\ III \rightarrow\ t = \pi + arctg\ \left|\frac{b}{a}\right|$$

$$M \in Cadran\ IV \rightarrow\ t = 2\pi - arctg\ \left|\frac{b}{a}\right|$$

Înmulțirea numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$

$z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$

Atunci:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[cos(t_1 + t_2) + i\, sin(t_1 + t_2)]$

$\boldsymbol{|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|}$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \begin{cases} t_1 + t_2, \text{dacă } t_1 + t_2 \in [0, 2\pi) \\ t_1 + t_2 - 2\pi, \text{dacă } t_1 + t_2 \in [2\pi, 4\pi) \end{cases}$$

Dacă avem n numere complexe, atunci produsul acestora va fi:

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n[cos(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) + i\, sin(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)]$

Ridicarea la putere a numerelor complexe

$z \in \mathbb{C}, z = r(\cos t + i \sin t)$

Formula lui Molivre:

$z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt), n \in \mathbb{N}*$

$|z^n| = r^n = |z|^n$

$arg(z^n) = nt = n \cdot arg(z)$

Dacă numărul complex are modulul egal cu unu (r =1) atunci se obține relația:

$(cos\, t + i\, sin\, t)^n = cos\, nt + i\, sin\, nt$

Împărţirea numerelor complexe sub forma trigonometrica

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0$

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)$

$z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$

Câtul celor două numere complexe se determină folosind formula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = t_1 - t_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex

Fie $z \in \mathbb{C}^*, z = r(cos\ t + i\ sin\ t), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Un număr complex $u = p(cos\ 0 + i\ sin\ 0)$ este rădăcină de ordin n a numărului complex z dacă $u^n = z$.

Există n rădăcini distincte ale numărului complex z şi acestea sunt:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right), k = \overline{0, n-1}$$

Exerciții

-Preluate din modele de bac-

1.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p | **1.** Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $2z - z^2 = 2$.

$2z - z^2 =$

$= 2(1 + i) - (1 + i)^2$

$= 2 + 2i - (1 + 2i + i^2)$

$= 2 + 2i - (1 + 2i - 1)$

$= 2 + 2i - 2i$

$= 2$

2.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p | **1.** Arătați că numărul $a = (4 + 3i)^2 + (3 - 4i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$.

$a = (4 + 3i)^2 + (3 - 4i)^2$

$= 16 + 24i + 9i^2 + 9 - 24i + 16i^2$

$= 16 - 9 + 9 - 16$

$= 0$

($a = 0$, este număr natural)

3.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=3-i$. Arătați că $z^2-6z+10=0$.

$z^2 - 6z + 10 =$

$= (3-i)^2 - 6(3-i) + 10$

$= 9 - 6i + i^2 - 18 + 6i + 10$

$= 9 - 1 - 18 + 10$

$= 0$