Recapitulare Matematică

Bacalaureat

(M_stiintele naturii, tehnologic)

Prof. IONESCU SIMONA

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

NOŢIUNI TEORETICE PENTRU BACALAUREAT

Structurate pe tipuri de subiecte

<u>SUBIECT I</u>

Formule de calcul prescurtat

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$

Funcţia de gradul I

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax+b, a \neq 0$, $a,b \in R$, se numeşte funcţia de gradul I

Proprietăţi:Dacă a>0 f este strict crescătoare

Dacă a<0 f este strict descrescătoare

Conditia ca un punct sa apartina graficului unei functii:

$A(\alpha,\beta) \in G_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$

Funcţia de gradul II

Definiţie: $f:R \to R, f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0$, $a,b,c \in R$ se numeşte funcţia de gradul II.

Ecuatia graficului: $y= ax^2 + bx + c$

Imaginea graficului se numeste parabola.

Maximul sau minimul funcţiei de gradul II

Dacă a<0 atunci $f_{max} = \frac{-\Delta}{4a}, realizat$ pentru $x = \frac{-b}{2a}$

Dacă a >0 atunci $f_{min} = \frac{-\Delta}{4a}, realizat$pentru x = $\frac{-b}{2a}$;

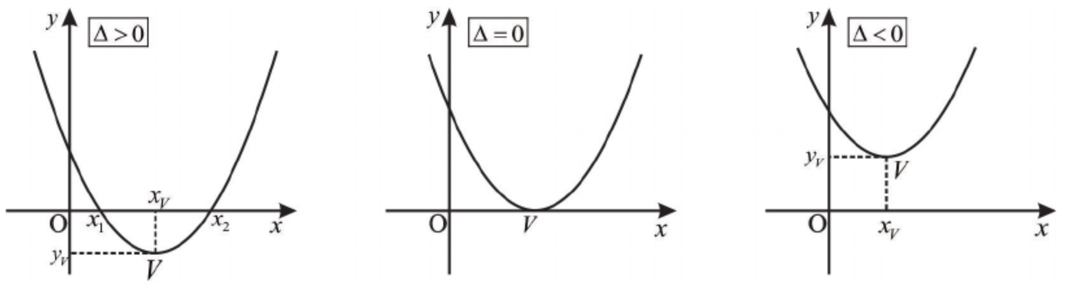
Vârful parabolei V($\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}$)

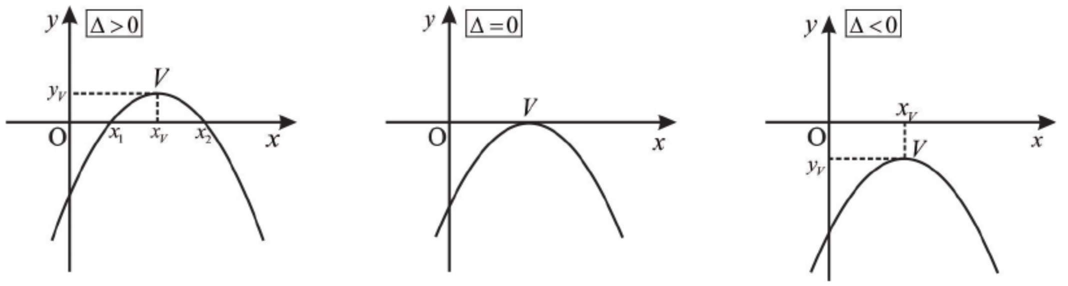
Axa de simetrie a parabolei este o dreapta verticala care trece prin varful parabolei si are ecuatia : $\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}$

Cele sase tipuri de grafice sunt diferentiate in functie de coeficientul ***a*** precum si de **Δ.**

Daca a>0, parabola "tine apa"(vezi randul de sus)

Daca a<0, parabola "nu tine apa" (vezi randul de jos)





Ecuaţia de gradul II: ax$^2 + bx + c = 0$;x$_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$

Relaţiile lui Viete:x$_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi diferite.

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale şi egale.

Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are rădăcini reale.

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale.

Intervale de monotonie :a<0

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	∞
f(x)	$\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$

a>0

$-\infty$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	∞
f(x)	$\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$

Semnul funcţiei de gradul II

$\Delta > 0$

x	- ∞		x_1		x_2		∞
f(x)		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\Delta = 0$

x	- ∞		$x_1 = x_2$		∞
f(x)		semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	- ∞		∞
f(x)		semnul lui a	

Imaginea funcţiei de gr.II

a<0,Imf=$(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$

a>0, Imf=[$\frac{-\Delta}{4a}$,∞)

Funcţii-proprietati generale

Definiţii: Fie f:A$\rightarrow$B

I. 1)**Funcţia f se numeşte injectivă**,dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu f(x$_1$) $= f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

2)**Funcţia f este injectivă** dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu x$_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

3)**Funcţia f este injectivă**, dacă orice paralelă la axa Ox,dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

4)Funcţia f nu este injectivă dacă $\exists x_1 \neq x_2 a.i. f(x_1) = f(x_2)$

II.1)**Funcţia *f* este surjectivă**, dacă $\forall$ y $\in$B, există cel puţin un punct x $\in$A, a.î. *f*(x)=y.

2) Funcţia *f* este surjectivă, dacă *f*(A) =B.

3) Funcţia *f* este surjectivă, dacă orice paralelă la axa Ox, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

III.1) **Funcţia *f* este bijectivă** dacă este injectivă şi surjectivă.

2) Funcţia *f* este bijectivă dacă pentru orice y $\in$B există un singur x $\in$A a.î. *f*(x) =y (ecuaţia *f*(x)=y,are o singură soluţie,pentru orice y din B)

3) Funcţia *f* este bijectivă dacă orice paralelă la axa Ox, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei într-un singur punct .

IV.Compunerea a două funcţii

Fie f:A→B,g:B→C

$g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

V. $1_A : A \rightarrow A$ prin $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.(aplicaţia identică a lui A)

Definiţie: Funcţia *f*: A→B este inversabilă , dacă există o funcţie g:B→A astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$, funcţia g este inversa funcţiei *f* şi se notează cu f^{-1}.

Teoremă: *f* este bijectivă <=> *f* este inversabilă.

Funcţii pare,funcţii impare,funcţii periodice.

Definiţii:

f:R→R se numeşte funcţie pară dacă f(-x) = f(x), $\forall$ x$\in R$

f:R→R se numeşte funcţie impară dacă f(-x) = -f(x), $\forall$ x$\in R$

f:A→R($A \subset R$) se numeşte periodică de perioadă $T \neq 0, dacă \forall x \in A$ avem x+T$\in A$ şi f(x+T)=f(x).Cea mai mică perioadă strict pozitivă se numeşte perioada principală.

Numărul funcţiilor f:A→B este $[n(B)]^{n(A)}$,n(A) reprezentâd numărul de elemente al mulţimii A.

Numărul funcţiilor bijective f:A→A este egal cu n!,n fiind numărul de elemente al mulţimii A.

Numărul funcţiilor injective f:A→B este A_n^k,unde n reprezintă numărul de elemente al mulţimii B, iar k al mulţimii A($k \leq n$)

Numarul functiilor strict crescatoare/strict descrescatoare f:A→B este C_n^k unde n reprezintă numărul de elemente al mulţimii B, iar k al mulţimii A ($k \leq n$)

Funcţia exponenţială

Definiţie f: R→ (0,∞), f(x)= a^x ,a>0,$a \neq 1$ se numeşte funcţie exponenţială.

Proprietăţi:

1)Dacă a>1 ⇒ f strict crescătoare

2)Dacă $a \in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare

3)Funcţia exponenţială este bijectivă

Funcţia logaritmică

Definiţie: f:(0,∞) →R, f(x)= $\log_a x$, a>0, $a \neq 1$ se numeşte funcţie logaritmică.

Proprietăţi:

1)Dacă a >1 ⇒ f strict crescătoare

2)Dacă $a \in (0,1) \Rightarrow$ f strict descrescătoare

3)Funcţia logaritmică este bijectivă

4)$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 5)$\log_a x^m = m\log_a x$,$m \in R$

6)$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ 7)$a^{\log_a x} = x$

Schimbarea bazei:$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$,$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Progresii aritmetice

Definiţie: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere reale a_n în care diferenţa oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit raţia progresiei aritmetice: $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \geq 1$

Se spune că numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Teoremă: şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii aritmetice: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Prop.: Numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ sau 2b=a+c

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$x_1 = u - r, x_2 = u, x_3 = u + r$; $u, r \in R$.

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$x_1 = u - 3r,\ x_2 = u - r,\ x_3 = u + r,\ x_4 = u + 3r,\ u, r \in R$.

Progresii geometrice

Definiţie : Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere reale $b_n, b_1 \neq 0$ în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit raţia progresiei geometrice: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, $q \neq 0$

Se spune că numerele $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Teoremă: şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$

Termenul general al unei progresii geometrice: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Prop.: Numerele a,b,c sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, $q \neq 1$ sau $S_n = n \cdot b_1$, *dacă* q = 1

Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$x_1=\frac{u}{q}, x_2 = u, x_3 = u \cdot q, q \neq 0$

Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică de forma:

$x_1=\frac{u}{q^3}, x_2 = \frac{u}{q}, x_3 = u \cdot q, x_4 = u \cdot q^3, q \neq 0$

Formule utile:

$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\cdots+n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

Modulul numerelor reale Proprietăţi:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

1. $|x| \geq 0, \forall x \in R$ **2.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ **3.** $|x| = |-x|$ **4.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **5.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$ **7.** $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), a > 0$ **8.** $|x+y| \leq |x| + |y|$

Partea întreagă

1.x = $[x]+\{x\}$, $\forall x \in R$, $[x] \in Z$ şi $\{x\} \in [0,1)$

2. $[x] \leq x < [x]+1$, $[x] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$

3. $[x+k]=[x]+k, \forall x \in R, k \in Z$

4. $\{x+k\}=\{x\}, \forall x \in R, k \in Z$

Numere complexe

1. Numere complexe sub formă algebrică

$z = a+bi$, $a,b \in R$, $i^2 = -1$, a=Re z , b=Im z

C- mulţimea numerelor complexe;C=$\{a+bi/a,b \in R\}$

Conjugatul unui număr complex: $\bar{z} = a - bi$

Proprietăţi:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5. $z \in R \Leftrightarrow z = \overline{z}$

6. $z \in R^* i \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Modulul unui număr complex: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proprietăţi:

1. $|z| \geq 0, \forall z \in C$ 2. $|z| = |\overline{z}|$ 3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|z^n| = |z|^n$ 5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Combinatorică

$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, $n \in N (0! = 1)$, $P_n = n!, n \in N^*$

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n; k, n \in N, n \geq 1$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n; k, n \in N$

Proprietăţi:1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \leq k \leq n; k, n \in N$ 2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $1 \leq k < n; k, n \in N$

Proprietăţi:

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ (numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente este 2^n).

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

Geometrie vectorială

Definiţie:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeaşi direcţie,acelaşi sens şi acelaşi modul. Doi vectori se numesc opuşi dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri contrare:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Definiţie:

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puţin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcţie. În caz contrar se numesc necoliniari.

Teoremă: Fie $\vec{a}\c{s}i\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v}$, există $\alpha, \beta \in R(unice)$ astfel încât $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$

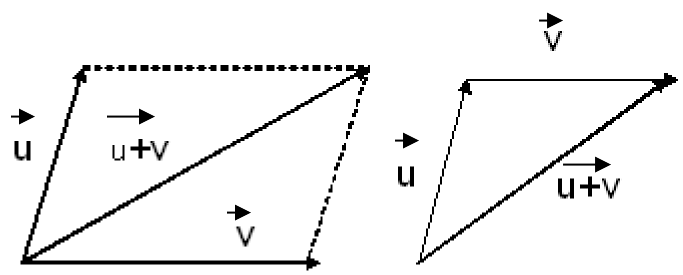
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ -modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A) - coordonatde$ vectorului $\overrightarrow{AB}$

Mijlocul segmentului AB:x $_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Centrul de greutate al triunghiului ABC:x $_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Adunarea vectorilor se poate face după regula paralelogramului sau triunghiului



Teoremă:Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt **coliniari** ⇔ $\exists \ \lambda \in R \ a.i. \ \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \exists \ \lambda \in R \ a.i. \ \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

AB $\parallel$ CD $\Leftrightarrow \exists \ \lambda \in R \ a.i. \ \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, v = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2, \left|\vec{u}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Daca $\vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}$,atunci $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ecuaţiile dreptei în plan

Ecuaţia carteziană generală a dreptei:**ax+by+c=0** (d)

Punctul M(x_M ,y_M) $\in d$ $\Leftrightarrow a \cdot x_M + by_M + c = 0$

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte:A(x_A, y_A) ,B(x_B, y_B)

AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$ =0

Ecuaţia dreptei determinată de un punct A(x_A, y_A) şi panta m : y-$y_A = m(x - x_A)$

Dreptele d_1,d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$

Dreptele d_1,d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2}$ = -1

Distanţa dintre punctele A(x_A, y_A) ,B(x_B, y_B) :AB= $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Distanţa de la punctul A(x_A, y_A) la dreapta h:ax+by+c=0:

d(A,h)= $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Punctele A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

Elemente de geometrie şi trigonometrie

Formule trigonometrice.Proprietăţi.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$$

-1 $\leq \sin x \leq 1, \forall x \in R$

-1 $\leq \cos x \leq 1, \forall x \in R$

$\sin(x+2k\pi) = \sin x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

$\cos(x+2k\pi) = \cos x, \forall x \in R, \forall k \in Z$

sin(a+b)=sinacosb+sinbcosa

cos(a+b)=cosacosb-sinasinb

sin(a-b)=sinacosb-sinbcosb

cos(a-b)=cosacosb+sinasinb

sin2x=2sinxcosx,

cos2x=$\cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

sina+sinb=2sin$\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ cosa+cosb=2cos$\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ sina-sinb=2sin $\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ cosa-cosb= -2sin$\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

tgx=$\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$ ctgx=$\frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$ tg(x+k$\pi) = tgx$

ctg(x+k$\pi) = ctgx$ tg$(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx$ ctg$(\frac{\pi}{2} - x) = tgx$ tg(a+b)= $\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$ tg(a-b)=$\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$ tg2x=$\frac{2tgx}{1+tg^2 x}$

sinx = $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ cosx = $\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

Valori principale ale funcţiilor trigonometrice

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Semnele funcţiilor trig.

sin:+,+,-,- tg.,ctg.:+,-+,-

cos:+,-,-,+

sin(-x)= -sinx (impară) cos(-x)=cosx(pară)

tg(-x)= -tgx ctg(-x)= -ctgx

Funcţii trigonometrice inverse

arcsin:[-1,1]$\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ arcsin(-x)= -arcsinx arcsin(sinx)=x, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sin(arcsinx)=x,x$\in [-1,1]$

arccos:[-1,1] $\rightarrow [0, \pi]$ arccos(-x)= $\pi - \arccos x$

arccos(cosx)=x, $\forall x \in [0, \pi]$ cos(arccosx)=x, $\forall x \in [-1,1]$

arcsinx+arccosx= $\frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1]$

arctg:R $\rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ arctg(-x)= -arctgx

arctg(tgx)=x, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tg(arctgx)=x, $\forall x \in R$

arcctg:R $\rightarrow (0, \pi)$ arcctg(-x)= $\pi - arcctgx$

arcctg(ctgx)=x, $\forall x \in (0, \pi)$ ctg(arcctgx)=x, $\forall x \in R$

arctgx+arcctgx= $\frac{\pi}{2}, \forall x \in R$

Ecuații trigonometrice

sinx = a,a$\in [-1,1] \Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in Z\}$

cosx = b,b$\in [-1,1] \Rightarrow x \in \{\pm \arccos b + 2k\pi, k \in Z\}$

tgx = c,c$\in R \Rightarrow x \in \{arctgc + k\pi, k \in Z\}$

ctgx = d,d$\in R \Rightarrow x \in \{arcctgd + k\pi, k \in Z\}$

sinax = sinbx$\Rightarrow ax = (-1)^k bx + k\pi, k \in Z$

cosax = cosbx$\Rightarrow ax = \pm bx + 2k\pi, k \in Z$

tgax = tgbx$\Rightarrow ax = bx + k\pi, k \in Z$

ctgax = ctgbx$\Rightarrow ax = bx + k\pi, k \in Z$

Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ =2R,unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Aria unui triunghi:

$\mathbf{A}_{\Delta}=\dfrac{b\cdot h}{2}$ $\mathbf{A}_{\Delta}=\dfrac{AB\cdot AC\sin(AB,AC)}{2}$ $\mathbf{A}_{\Delta}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,p=$\dfrac{a+b+c}{2}$

$\mathbf{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{|\Delta|}{2},\Delta=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$ $\mathbf{A}_{\Delta dreptunghic}=\dfrac{c_1\cdot c_2}{2}$ $\mathbf{A}_{\Delta echilateral}=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Raza cercului circumscris unui triunghi:R=$\dfrac{abc}{4S}$,unde S este aria triunghiului

Raza cercului înscris într-un triunghi:r =$\dfrac{S}{p}$,unde S este aria triunghiului iar p=$\dfrac{a+b+c}{2}$

SUBIECT II

Matrice

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n}\\ a_{21}a_{22}......a_{2n}\\ ....\ ....\\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn}\end{pmatrix}$-matrice cu m linii şi n coloane; $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

$A\in M_{m,n}(C)$,unde $M_{m,n}(C)$-reprezintă mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din C.

${}^tA\in M_{n,m}(C)$-reprezintă transpusa lui A şi se obţine din A prin schimbarea liniilor în

coloane(sau a coloanelor în linii).

Dacă m = n atunci matricea se numeşte pătratică de ordinul n şi are forma

A=$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}......a_{1n}\\ a_{21}a_{22}......a_{2n}\\ ....\ ....\\ a_{n1}a_{n2}.....a_{nn}\end{pmatrix}$- $A\in M_n(C)$

Tr(A)= $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$-reprezintă urma matricei A

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ se numeşte diagonala principală a matricei A,iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n},\cdots,a_{n1})$ se numeşte diagonala secundară a matricei A.

$I_n=\begin{pmatrix} 100\cdots\cdots 0\\ 010\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\\ 000\cdots\cdots 1\end{pmatrix}$-matricea unitate de ordinul n ; $O_{m,n}=\begin{pmatrix} 000\cdots\cdots 0\\ 000\cdots\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\\ 000\cdots\cdots 0\end{pmatrix}$-matricea nulă

Proprietăţi ale operaţiilor cu matrice.:

1)A+B=B+A , $\forall A, B \in M_{m,n}(C)$ (comutativitate)

2)(A+B)+C = A+(B+C) , $\forall A, B, C \in M_{m,n}(C)$ (asociativitate)

3)A+ $O_{m,n}$ = $O_{m,n}$ +A = A , $\forall A \in M_{m,n}(C)$

4) $\forall A \in M_{m.n}(C), \exists(-A) \in M_{m,n}(C)$ a.î. A+(-A) = (-A)+A= $O_{m,n}$, $\forall A \in M_{m,n}(C)$

5)(AB)C = A(BC) , $A \in M_{m,n}(C), B \in M_{n,p}(C), C \in M_{p,q}(C)$ (asociativitate)

6)a)A(B+C) = AB+AC , $A \in M_{m,n}(C), B, C \in M_{n,p}(C)$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

b)(B+C)A = BA+CA, $B, C \in M_{m,n}(C), A \in M_{n,p}(C)$

7) $AI_n = I_n A = A, \forall A \in M_n(C)$

8)a(bA) = (ab)A, $\forall a, b \in C, A \in M_{m,n}(C)$

9)(a+b)A=aA+bA, $\forall a, b \in C, A \in M_{m,n}(C)$

10)a(A+B)=aA+aB, $\forall a \in C, A, B \in M_{m,n}(C)$

11)aA = $O_{m,n} \Leftrightarrow a = 0$ sau A= $O_{m,n}$

12) ${}^t({}^tA) = A, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(aA) = a\,{}^tA, {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Puterile unei matrice:Fie $A \in M_n(C)$

Definim $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \cdots, A^n = A^{n-1} \cdot A, n \in N^*$

Relaţia Hamilton-Cayley: $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$,unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Determinanţi.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (determinantul de ordinul doi)

Determinantul de ordinul trei(regula lui Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

Sau regula triunghiului:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - dbi - hfa$$

Proprietăţi:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;

2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;

3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii(sau coloane) între ele obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.

4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;

5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulţite cu un element a, obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulţit cu determinantul

matricei iniţiale.

6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporţionale atunci determinantul matricei este nul;

7. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinaţie liniară de celelate linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.

8. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi element se obţine o matrice al cărei determinant este egal cu

determinantul matricei iniţiale;

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix}$

10)$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B, \forall\ A,B \in M_n(C)$

In particular, $\det(A)^n = n \cdot det(A)$

Definiţie:Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ .Se numeşte minor asociat elementului $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$

determinantul matricei obţinute din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.Se notează acest minor cu M_{ij}.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ se numeşte complementul algebric al elementului a_{ij}.

Matrice inversabile

Inversa unei matrice : $A \in M_n(C)$ se numeşte inversabilă dacă există o matrice notată $A^{-1} \in M_n(C)$ a.i. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

Teoremă: $A \in M_n(C)$ *inversabilă* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, A^* adjuncta matricei A. A^* se obţine din ${}^tA$ înlocuind fiecare element cu complementul său algebric.

Dacă $A, B \in M_n(C)$ sunt inversabile,atunci au loc relaţiile:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Sisteme de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} -coeficienţii necunoscutelor, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ - necunoscute, $b_1, b_2, \cdots, b_m$ -termenii liberi

$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$ -matricea sistemului, $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots\dots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\dots\dots a_{2n}b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots\dots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$ -matricea extinsă

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ matricea coloană a termenilor liberi, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ .matricea necunoscutelor.

AX=B -forma matriceală a sistemului

Definiţie:

- Un sistem se numeşte incompatibil dacă nu are soluţie;

- Un sistem se numeşte compatibil dacă are cel puţin o soluţie;

- Un sistem se numeşte compatibil determinat dacă are o singură soluţie(solutir unica);

- Un sistem se numeşte compatibil nedeterminat dacă are mai mult de o soluţie.

Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:

Un sistem de ecuaţii liniare este de tip Cramer dacă numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute şi determinantul matricei sistemului este nenul.

Teorema lui Cramer: Dacă det A este diferit de 0, notat $\Delta \neq 0$, atunci sistemul AX=B are o soluţie unică $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,unde Δ_i se obţine înlocuind coloana i cu coloana termenilor liberi.

Grupuri

Definiţie: Fie $*: M \times M \to M$ lege de compozitie pe M.

O submultime nevidă H a lui M ,se numeşte parte stabilă a lui M în raport cu legea “ $*$ ”dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

Proprietăţile legilor de compoziţie

Fie $*: M \times M \to M$ lege de compoziţie pe M.

Legea “$*$ “ se numeşte asociativă dacă $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

Legea “$*$ “ se numeşte comutativă dacă $x * y = y * x, \forall x, y \in M$

Legea “$*$ “ admite element neutru dacă exista $e \in M$ astfel .incat $.x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Definiţie:Cuplul (M, $*$) formează un monoid dacă are proprietăţile:

1)$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

2) există $e \in M$ a.i.$x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Dacă în plus, $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ atunci monoidul se numeşte comutativ.

Notaţie:U(M)={$x \in M / x$ este simetrizabil}

Definiţie:Cuplul (G, $*$) formează un grup dacă are proprietăţile:

1)$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

2) există $e \in M$ a.i.$x * e = e * x = x, \forall x \in G$

3) $\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.i. $x * x' = x' * x = e$

Dacă în plus $x * y = y * x, \forall x, y \in G$ atunci grupul se numeşte abelian sau comutativ.

Grupul claselor de resturi modulo n, $Z_n = \{\hat{1}, \hat{2}, \cdots, \widehat{n-1}\}$

$(Z_n, +)$ **– grup abelian**

$(Z_n, \cdot)$ **-monoid comutativ** ,în care $U(Z_n) = \{\hat{k} \in Z_n / c.m.m.d.c.(k,n) = 1\}$

Morfisme şi izomorfisme de grupuri

Definiţie:Fie (G, $*$) şi (G$'$,$\circ$) două grupuri.O funcţie f:G$\to G'$ se numeşte morfism de grupuri dacă are loc conditia $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G$

Dacă în plus f este bijectivă atunci f se numeşte izomorfism de grupuri.

Prop. Fie (G, $*$) şi (G$'$,$\circ$) două grupuri.Dacă f:G$\to G'$ este morfism de grupuri atunci:

1)f(e)=e$'$ unde e,e$'$ sunt elementele neutre din cele două grupuri.

2)$f(x') = [f(x)]' \ \forall x \in G$

Inele şi corpuri

Definiţie: Un triplet (A,$*$,$\circ$), unde A este o multime nevidă iar „$*$" şi „$\circ$" sunt două legi de compozitie pe A,este inel dacă:

1) (A,$*$)este grup abelian

2) (A,$\circ$)este monoid

3)Legea „$\circ$"este distributivă fata de legea „$*$":

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x) \forall x, y, z \in A$

Un inel (A,$*$,$\circ$), se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in A$

Definiţie :Un inel (K,$*$,$\circ$) cu $e_* \neq e_\circ$ se numeşte corp dacă $\forall x \in K, x \neq e_*, \exists x' \in K$ a.i. $x \circ x' = x' \circ x = e_\circ$ ($e_*, e_\circ$ fiind elementele neutre)

Un corp (K,$*$,$\circ$), se numeşte comutativ dacă satisface şi axioma: $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in K$

Inele de polinoame

Forma algebrică a unui polinom:f = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_i \in A$ un inel comutativ.

Definiţie:a $\in A$ se numeşte rădăcină a polinomului f dacă f(a)=0.

Teorema împărţirii cu rest: Fie K un corp comutativ,iar f şi g,cu g $\neq 0$, *polinoame*din K[X].Atunci există polinoamele q şi r din K[X] ,unic determinate,astfel încât f=gq+r cu gradr<gradg.

Dacă r = 0,adică f = gq ,atunci spunem că polinomul g **divide** polinomul f.

Teorema restului: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X] şi a un element din K $\Rightarrow$restul împărţirii lui f la X-a este f(a).

Consecinţă:a este radăcină a lui f $\Leftrightarrow$ X-a divide f.

Definiţie:Elementul a $\in K$ este rădăcină de ordinul p $\in N^*$ pentru polinomul f $\in K[X]$ dacă (X-a)^p divide pe f iar (X-a)$^{p+1}$nu divide pe f.

Teoremă: Elementul a $\in K$ este rădăcină de ordinul p $\in N^*$ pentru polinomul f $\in K[X]$
$\Leftrightarrow f(a)=0, f^{'}(a)=0,\cdots, f^{(p-1)}(a)=0$ şi $f^{(p)}(a)\neq 0$,unde f este fucţia polinomială asociată polinomului f.

Polinoame cu coeficienţi reali

Teoremă: Fie f $\in R[X]$,f $\neq 0$.Dacă z = a+ib,b $\neq 0$este o rădăcină complexă a lui f,atunci:

1) $\overline{z}$ = a-ib este de asemenea o rădăcină complexă a lui f

1)z şi $\overline{z}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Obs. : $(X-z)(X-\overline{z})/f$

Polinoame cu coeficienţi raţionali

Teoremă : Fie f $\in Q[X]$, f $\neq 0$.Dacă $x_0 = a+\sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f,unde a,b $\in Q, b\rangle 0, \sqrt{b}\notin Q$,atunci

1) $\overline{x_0} = a-\sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f 2)x_0, $\overline{x_0}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Obs. : $(X-x_0)(X-\overline{x_0})/f$

Polinoame cu coeficienţi întregi

Teoremă :fie f= $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0, a_n\neq 0$ **;**f $\in Z[X]$

1)Dacă $x_0 = \frac{p}{q}$ $(p, q$ numere prime între ele) este o rădăcină raţională a lui f,atunci

a)p divide termenul liber a_0

b)q divide pe a_n

2)Dacă $x_0 = p$ este o rădăcină întreagă a lui f,atunci p este un divizor al lui a_0.

Polinoame ireductibile

Definiţie: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X] cu gradf>0 se numeşte reductibil peste K dacă există g,q din K[X] cu gradg<gradf,gradq<gradf astfel încât f=gq.

Dacă f nu este reductibil peste K atunci se spune că f este ireductibil peste K.

Prop.: Polinoamele de grad 2 sau 3 din K[X] sunt ireductibile peste K $\Leftrightarrow$ nu au rădăcini în K.

Relaţiile lui Viete: Fie K un corp comutativ,f un polinom din K[X],

f = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$.Dacă $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sunt n rădăcini ale lui f în K atunci f = $a_n(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$ şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}\cdot a_n^{-1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}a_n^{-1}$$

....

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n a_0 a_n^{-1}$$

Dacă f = $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ f \in C[X] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{array}\right.$

f= $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ f \in C[X] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{array}\right.$

Ecuaţii reciproce

Definiţie:O ecuaţie de forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_n \neq 0$ pentru care $a_{n-i} = a_i, 0 \le i \le n$ se numeşte ecuaţie reciprocă de gradul n.

Orice ecuaţie reciprocă de grad impar are rădăcina -1.

Ecuaţia reciprocă de gradul IV are forma:a $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$

Se împarte prin x^2 şi devine a $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$;notez $x + \frac{1}{x} = t$ şi obţinem o ecuaţie de gradul II.

SUBIECT III

Limite de functii

Teoremă: O funcţie are limită într-un punct finit de acumulare dacă şi numai dacă are limite laterale egale în acel punct.

f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Teoremă: Fie f :D $\to R$,o funcţie elementară şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al lui D$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Limite uzuale.Limite remarcabile.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, k = m \\ 0, m > k \\ \frac{a_k}{b_m} \cdot (\pm\infty)^{k-m}, k > m \end{cases} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x} = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ daca } a > 1 \\ 0, \text{ daca } a \in (0,1) \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ daca } a > 1 \\ \infty, \text{ daca } a \in (0,1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, \text{ daca } a > 1 \\ -\infty, \text{ daca } a \in (0,1) \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ daca } a > 1 \\ \infty, \text{ daca } a \in (0,1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \text{arctg } x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{arctg } x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} arcctgx = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} arcctgx = \pi$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a>0, a\neq 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg } u(x)}{u(x)}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{arctg } u(x)}{u(x)}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a$, $a>0, a\neq 1$ unde $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$

Operaţii fără sens: $\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Funcţii continue

Definiţie Fie $f: D\to R$ şi $x_0\in \mathrm{D}$ punct de acumulare pentru D

f este continuă în $x_0\in\mathrm{D}$ dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Dacă f nu este continuă în $x_0\in\mathrm{D}$,ea se numeşte discontinuă în x_0 ,iar x_0 se numeşte punct de discontinuitate.

Definiţii: Un punct de discontinuitate $x_0\in\mathrm{D}$ este punct de discontinuitate de prima speţă pentru f ,dacă limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 există şi sunt finite.

Un punct de discontinuitate $x_0\in\mathrm{D}$ este punct de discontinuitate de speţa a doua dacă nu este de prima speţă.(cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei f în punctul x_0 nu este finită sau nu există)

Teoremă: Fie $f: D\to R$ şi $x_0\in\mathrm{D}$ punct de acumulare pentru D $\Rightarrow$ f continuă în x_0 $\Leftrightarrow l_s(x_0)=l_d(x_0)=$ f(x_0)

Teoremă:Funcţiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiţie.

Operaţii cu funcţii continue

Teoremă:Fie f,g:D $\to R$ continue pe D $\Rightarrow$f+g, $f\cdot g,\frac{f}{g}(g\neq 0),|f|,\max(f,g),\min(f,g)$ sunt funcţii continue pe D.

Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă.

Teoremă: Fie f:[a,b] $\to$ R o funcţie continuă a.î. f(a)f(b)<0 $\Rightarrow\exists\ c\in(a,b)$ pentru care f(c)=0.

Asimptote

1.Asimptote verticale

Definiţie: Fie f :E $\to R, a\in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la stanga pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)=\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)=-\infty$.

Definiţie: Fie f :E $\to R, a\in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală la dreapta pentru f,dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=-\infty$.

Definiţie : Fie f :E $\to R, a \in R$ punct de acumulare pentru E.Se spune că dreapta x = a este asimptotă verticală pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât şi la dreapta sau numai lateral.

2.Asimptote oblice

Teorema : Fie f :E $\to R,$ unde E conţine un interval de forma(a, ∞)

Dreapta y=mx+n,m $\neq 0$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul lui f dacă şi numai dacă m,n sunt numere reale finite,unde m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.Analog la - ∞.

3.Asimptote orizontale

Dacă $\lim_{x\to\infty} f(x)=l, l$ număr finit atunci y = l este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul lui f.

Analog la - ∞

Obs :O funcţie nu poate admite atât asimptotă orizontala cât şi oblică spre $+\infty$(-∞)

Funcţii derivabile

Definiţie:Fie f:D $\to R$,x $_0 \in D$ punct de acumulare pentru D. Derivata într-un punct:f $'(x_0)$ = $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

f este derivabilă în x_0 dacă limita precedentă există şi este finită.

▪Dacă f este derivabilă în x_0, graficul funcţiei are în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ tangentă a cărei pantă este $f'(x_0)$ .Ecuaţia tangentei este: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Teoremă: Fie f:D→R , x $_0 \in D$ punct de acumulare pentru D⇒f este derivabilă în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow$ $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)\in$ R(finite) $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\langle x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = . $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\rangle x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$.

Teoremă . Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Derivatele funcţiilor elementare

Functia	**Derivata**
c	0
x	1
$x^n, n\in \mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
$x^r, r\in \mathbf{R}$	rx^{r-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x (a>0, a\neq 1)$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Operaţii cu funcţii derivabile

Teoremă: Fie f,g:D$\rightarrow R$ derivabile pe D$\Rightarrow$f+g ,fg, $\frac{f}{g}$ (g$\neq 0$)sunt funcţii derivabile pe D.

Compunerea a două funcţii derivabile este o funcţie derivabilă.

Reguli de derivare

$$(f \pm g)' = f' \pm g' ;(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \ ;(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \ ;\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$$

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

Proprietăţile funcţiilor derivabile

Definiţie:Fie f:D→R.Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$(respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) pentru orice $x \in D \cap U$.

Dacă $f(x) \leq f(x_0)$(respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) pentru orice $x \in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Teoremă . (Fermat) Fie I un interval deschis şi $x_0 \in I$ un punct de extrem al unei funcţii ƒ: I→R. Dacă ƒ este derivabilă în punctul x_0 atunci $f'(x_0)=0$.

Definiţie:O funcţie ƒ: [a, b] →R (a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul compact [a, b] şi derivabilă pe intervalul deschis (a, b*)*.

Teorema lui Rolle

Fie ƒ: [a, b]→ R, a< b o funcţie Rolle astfel încât ƒ(a)= ƒ(b), atunci există cel puţin un punct $c \in$ (a, b) astfel încât ƒ'(c)=0.

Teorema(teorema lui J. Lagrange). Fie ƒ o funcţie Rolle pe un interval compact [a, b]. Atunci $\exists$ $c \in$ (a, b) astfel încât ƒ(b)- ƒ(a)= (b- a)ƒ'(c)

Consecinţe:

1.Dacă o funcţie derivabilă are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.

2.Dacă două funcţii derivabile au derivatele egale pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Rolul primei derivate

3. Fie *f* o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x) > 0 (f'(x) \geq 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) < 0 (f'(x) \leq 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

4.Fie $f:D \to R$,D interval şi $x_0 \in D$.Dacă

1)f este continuă în x_0

2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$

3)există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$ .Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0.

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

Rolul derivatei a doua

Teoremă: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.

Noţiunea de primitivă

Definiţie: Fie I $\subseteq$ R interval, *f* : I $\to$ R. Se numeşte primitivă a funcţiei f pe I, orice funcţie F : I $\to$ **R** derivabilă pe I cu proprietatea F $'$(*x*) = f (*x*), $\forall x \in$ I.

Teoremă.Orice funcţie continuă f : I $\to$ R posedă primitive pe I.

Tabel de integrale nedefinite

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ **,**n$\in N$,x$\in R$ $\qquad$ $\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ **,**a$\in R, a \neq -1$**,**x$\in (0,\infty)$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in (0,\infty)$ sau x$\in (-\infty,0)$ $\qquad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \rangle 0, a \neq 1, x \in R$

$\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty,-a)$ sau x$\in (-a,a)$ sau x$\in (a,\infty)$

$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in R$ $\qquad$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in (-a,a)$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, a \neq 0, x \in R$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty,-a)$ sau x$\in (a,\infty)$

$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in R$ $\qquad$ $\int \cos x dx = \sin x + C, x \in R$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C, \cos x \neq 0$ $\qquad$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C, \sin x \neq 0$

Integrala definită

Teoremă. Funcţiile continue pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Teoremă. Funcţiile monotone pe un interval $[a,b]$ sunt integrabile pe $[a,b]$.

Proprietăţile funcţiilor integrabile.

a**)(Proprietatea de liniaritate)**

Dacă f,g $:[a.b]\to R$ sunt integrabile şi $\lambda\in R\Rightarrow$

1) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$

b)Dacă $f(x)\ge 0, x\in[a,b]$ şi este integrabilă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$.

c)Dacă $f(x)\ge g(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$ şi dacă *f* şi *g* sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

d**)(Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul)**
Funcţia f : [a, b]→ **R** este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă, ∀ c ∈ (a, b) funcţiile $f_1=f|[a,c]$ şi $f_2=f|[c,b]$ sunt integrabile şi are loc formula:
$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

e)Dacă funcţia *f* este integrabilă pe $[a,b]$, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Teoremă (Formula Leibniz - Newton)
Dacă f : [a, b]→ **R** este o funcţie integrabilă şi f admite primitive pe [a, b] atunci pentru orice primitivă F a lui f pe [a, b] are loc formula Leibniz-Newton: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue

Dacă g : [a, b]→ R este o funcţie continuă,atunci funcţia G**:** [a, b]→R,

$G(x)=\int_a^x g(t)dt, x\in[a,b]$ are proprietăţile**:**

1)G este continuă pe [a, b] şi G(a) = 0

2)G este derivabilă pe [a, b] şi $G'(x) = g(x), \forall x \in [a,b]$

Reţinem: $\left(\int_a^x g(t)dt\right)' = g(x)$

Teoremă (Formula de integrare prin părţi)
Fie f , g : [a, b]→ **R** cu f , g derivabile cu derivatele continue, atunci are loc **formula de integrare prin părţi**:
$\int_a^b fg'dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'gdx$.

Teoremă:Fie f:[-a,a] → R, $a\rangle 0$ o funcţie continuă.Atunci

1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$ dacă f este funcţie pară.

2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,dacă f este funcţie impară.

Aria unei suprafete din plan
1**. Aria mulţimii** din plan D⊂ $\mathbf{R}^2$ mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, $y = 0$ şi graficul funcţiei $f : [a, b]\to$ R pozitivă şi continuă se calculează prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x)dx$.

2. În cazul $f : [a, b]\to$ R continuă şi de semn oarecare, avem: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)|dx$.

3. **Aria mulţimii** din plan mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficele funcţiilor $f, g : [a, b]\to$ R continue este calculată prin formula: $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx$.

Volumul unui corp de rotaţie Fie $f : [a, b]\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, atunci corpul C_f din spaţiu obţinut prin rotirea graficului lui f, G_f, în jurul axei Ox, are volumul calculat prin formula: .V(C_f)=$\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Matematica cl.a IX-a,aX-a.Algebra si geometrie. Programa M2

PROBLEME- *SUBIECT* ***.I.***

1.Mulţimi de numere.

1. Să se calculeze $a^2 + b^2$, ştiind că numerele a şi b au suma egală cu 4 şi produsul egal cu 3.
2. Să se determine a 2008-a zecimală a numărului 0,(285714).

3. Se consideră numărul $a=\log_2 3.$ Să se arate că $\log_2 18=2a+1.$
4. Să se calculeze $\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 9.$
5. Să se calculeze $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\frac{8}{27}}.$
6. Să se calculeze $\log_2 3-\log_2\frac{3}{2}.$
7. Să se verifice egalitatea $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+...+\lg\frac{9}{10}=-1.$
8. Să se calculeze $\log_3 5+\log_3 6-\log_3 10.$
9. Să se compare numerele 2^2 şi $\log_2 32.$
10. Să arate că numărul $(\sqrt[3]{2})^{\log_2 8}$ este natural.
11. Să se calculeze $\log_5 25-\log_3 9.$
12. Să arate că $\log_2 4+\log_3 9<\sqrt{36}.$
13. Să se calculeze $\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5.$
14. Să arate că numărul $\sqrt[3]{27}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ este natural.
15. Să se calculeze $\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+...+\log_3\frac{9}{8}.$
16. Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\log_5 25.$
17. Să se arate că $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1.$
18. Să se verifice că $\frac{\log_5 18-\log_5 2}{\log_5 3}=2.$
19. Să se arate că $\log_2\frac{1}{4}-\sqrt[3]{-8}=0.$
20. Să se determine valorile naturale ale lui *n* pentru care expresia $E(n)=\sqrt{10-3n}$ este bine definită.
21. Să se demonstreze că numărul $\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{9!}{2!\cdot 7!}$ este natural.
22. Să se calculeze $\sqrt[3]{9}-\frac{3}{\sqrt[3]{3}}.$
23. Să se arate că $\log_2 14+\log_2 3-\log_2 6=\log_2 7.$
24. Să se ordoneze crescător numerele $a=\sqrt{2}$ şi $b=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$
25. Să se arate că $\log_3 24=3a+1$, unde $a=\log_3 2$.

2.Funcţii.

1. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to R,\ \ f(x)=-x^2$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei *f*.
2. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ \ f(x)=x-3.$ Să se determine $f(-4)\cdot f(-3)\cdot ...\cdot f(3)\cdot f(4).$
3. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ \ f(x)=2x+1.$ Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1).$

4. Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = mx^2 - 8x - 3,$ unde *m* este un număr real nenul. Să se determine *m* ştiind că valoarea maximă a funcţiei *f* este egală cu 5.
5. Fie funcţiile $f: R \to R,\ f(x) = x + 3$ şi $g: R \to R,\ g(x) = 2x - 1.$ Să determine soluţia reală a ecuaţiei $2f(x) + 3g(x) = -5.$
6. Fie funcţiile $f, g: R \to R,\ f(x) = x^2 - x + 1$ şi $g(x) = x + 4.$ Să se calculeze coordonatele punctulului de intersecţie al graficelor funcţiilor *f* şi *g*.
7. Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 3 - 4x$. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $f(x) - 1 \geq 4x.$
8. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2x + 1.$ Să se determine punctul care aparţine graficului funcţiei f şi are abscisa egală cu ordonata.
9. Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = mx^2 - mx + 2,$ unde *m* este un număr real nenul. Să se determine numărul real nenul *m* ştiind că valoarea minimă a funcţiei este egală cu 1.
10. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2x - 1.$ Să determine soluţiile reale ale ecuaţiei $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0.$
11. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = ax + b.$ Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $3f(x) + 2 = 3x + 5,$ pentru $\forall x \in R.$
12. Să se determine $m \in R$, ştiind că reprezentarea grafică a funcţiei $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - mx + m - 1$ este tangentă axei *Ox*.
13. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 11x + 30.$ Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(6).$
14. Fie funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + 5x + m + 6$. Să se determine valorile numărului real m ştiind că $f(x) \geq 0$, pentru $\forall x \in R.$
15. Fie funcţia $f: [0;2] \to R,\ f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei *f*.
16. Să se determine $m \in R \setminus \{1\}$, ştiind că abscisa punctului de minim al graficului funcţiei $f: R \to R,$ $f(x) = (m-1)x^2 - (m+2)x + 1$ este egală cu 2.
17. Să se calculeze distanţa dintre punctele de intersecţie ale reprezentării grafice a funcţei $f: R \to R,$ $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ cu axa *Ox*.
18. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 6x + 5.$ Să se determine punctul de intersecţie al dreptei de ecuaţie $y = -4$ cu reprezentarea grafică a funcţiei *f*.
19. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2 + x$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$.
20. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x + 3$. Să se calculeze $f(2) + f(2^2) + \ldots + f(2^7)$.
21. Să se demonstreze că parabola funcţiei $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 1$ este situată deasupra axei *Ox*, oricare ar fi $m \in R$.
22. Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = 2011x - 2010.$ Să se verifice dacă punctul $A\left(\frac{2012}{2011};2\right)$ aparţine graficului funcţiei *f*.
23. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + 4x - 5$.
24. =Se consideră funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 3x + 1.$ Să se determine numerele reale *m* pentru care punctul $A(m;-1)$ aparţine graficului funcţiei *f*.
25. =Să se determine funcţia de gradul al II –lea al cărei grafic conţine punctele $A(1;3),\ B(0;5)$ şi $C(-1;11).$
26. Să se determine valoarea maximă a funcţiei $f: [-1;1] \to R,\ f(x) = -2x + 3.$
27. Să se determine punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f, g: R \to R,\ f(x) = x^2 - 3x - 1$ şi $g(x) = x + 4.$
28. Să se determine funcţia $f: R \to R,\ f(x) = ax + b$ al cărei grafic trece prin punctele $A(2;7)$ şi $B(-1;-2).$

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

3. Metode de numărare.

1. Să se calculeze $C_3^2 + P_3$.
2. Să se calculeze $C_5^4 + A_5^4$.
3. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2 = 28$, $n \in N$.
4. Să se determine numărul tuturor submulţimilor de 2 elemente ce se pot forma cu elemente din mulţimea $\{1,2,3,4,5\}$.
5. Se consideră 10 puncte, oricare 3 necoliniare. Câte drepte trec prin cel puţin 2 puncte din cele 10.
6. Să se calculeze numărul submulţimilor mulţimii $\{1,2,3,4\}$. care au un număr par nenul de elemente.
7. Să se determine numărul natural *n* ştiind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.
8. Să se determine numărul natural *n* ştiind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$.
9. Să se determine câte numere de câte trei cifre distincte se pot forma cu elemntele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.
10. Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elemntele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.
11. Să se rezolve ecuaţia $C_{n+2}^{n+1} = 2$, $n \in N$.
12. Să se calculeze $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$.
13. Să se calculeze $C_5^2 - A_4^2 + 6$.
14. Să se calculeze $A_5^2 - P_3$.
15. Să se rezolve ecuaţia $C_x^2 = 21$, $x \in N$.
16. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4\}$. Să se determine câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii *A*.
17. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Să se determine câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulţimii *A*.
18. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 2 elemente ale unei mulţimi cu 6 elemente.
19. Să se rezolve ecuaţia $A_n^2 = 12$, $n \in N$.
20. Să se calculeze $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4$.
21. Să se calculeze $C_{2008}^2 - C_{2008}^{2006}$.
22. Să se calculeze $C_{1000}^2 - C_{1000}^{998}$.
23. Să se calculeze $C_{2008}^2 - C_{2007}^2 - C_{2007}^1$.
24. Să se calculeze $0!+1!+2!+3!$.
25. Să se arate că $C_5^1 + 1 = 3!$.
26. Să se calculeze $C_6^2 - C_6^4$.
27. Să se calculeze $C_4^2 + C_4^3$.
28. Să se verifice că $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4$
29. Să se calculeze $C_8^5 - C_8^3$.
30. Să se calculeze $\frac{P_2 + C_4^1}{A_3^1}$.
31. Să se calculeze $\frac{2!+3!}{C_8^1}$.
32. Să se calculeze $2C_3^1 - A_3^2$.
33. Să se calculeze $C_4^2 + C_4^3$.

34. Să se determine valorile naturale ale numărului *n* astfel încât $C_n^0 + C_n^1 = 8$.

4.Probabilităţi. Procente

1. Se consideră toate numerele naturale de câte trei cifre scrise cu elemente din mulţimea $\{1;2\}$. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
2. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, ..., \sqrt[3]{30}\}$, acesta să fie număr raţional.
3. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ..., \sqrt{10}\}$, acesta să fie număr raţional.
4. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ..., \sqrt{11}\}$, acesta să fie număr iraţional.
5. Să calculeze probabilitatea ca un element al mulţimii $\{0;1;2;3;4;5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n! < 50$.
6. Să calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 şi C_4^3 acesta să fie divizibil cu 3.
7. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $\{1;2;3;4;5\}$ acesta să verifice inegalitatea $n^2 \le 2^n$.
8. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $\{1;2;3;4\}$ acesta să verifice inegalitatea $n! \ge n^2$.
9. Să calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele P_3, A_3^1 şi C_4^3 acesta să fie divizibil cu 3.
10. Să calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulţimii $\{3;4;5;6\}$ acesta să verifice inegalitatea $n(n-1) \ge 20$.
11. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element *n* al mulţimii $A = \{1,2,3,4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! < 5$.
12. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element *n* al mulţimii $\{11,12,...,20\}$ acesta să fie număr prim.
13. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre acesta să fie cub perfect.
14. Firma F_1 are un capital iniţial de 10 000 lei şi în anul 2007 a realizat un profit de 5000 lei. Exprimaţi în raport cu capitalul iniţial procentul pe care-l reprezintă profitul firmei.
15. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, ştiind că preţul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ul este de 19%
16. După o reducere cu 10% un produs costă 99 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.
17. După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv 20% preţul unui produs este de 660 lei. Să se determine preţul iniţial al produsului.
18. Prețul unui obiect este 180 lei. Cât va costa obiectul după o scumpire cu 20%?
19. Prețul unui obiect este 200 lei. Cât va costa obiectul după o scumpire cu 10%?
20. Prețul unui obiect este 300 lei. Cât va costa obiectul după o ieftinire cu 20%?
21. Prețul unui obiect este 400 lei. Cât va costa obiectul după o ieftinire cu 30%?
22. Prețul unui obiect este 350 lei. Cât va costa obiectul după două scumpiri succesive cu 10% ?
23. Prețul unui obiect este 800 lei. Cât va costa obiectul după două scumpiri succesive cu 20% ?
24. Prețul unui obiect este 200 lei. Cât va costa obiectul după două scumpiri succesive cu 10% respectiv 20% ?
25. Prețul unui obiect este 400 lei. Cât va costa obiectul după două scumpiri succesive cu 10% respectiv 15%?
26. Prețul unui obiect este 400 lei. Cât va costa obiectul după două ieftiniri succesive cu 10%?
27. Prețul unui obiect este 800 lei. Cât va costa obiectul după două ieftiniri succesive cu 20%?
28. După o ieftinire cu 20% prețul unui obiect devine 320 lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?
29. După o ieftinire cu 30% prețul unui obiect devine 210 lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?
30. După o scumpire cu 20% prețul unui obiect devine 660 lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?
31. După o scumpire cu 10% prețul unui obiect devine 198 lei. Care a fost prețul inițial al obiectului?

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

5.Progresii.

1. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului *x*, ştiind că $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ şi $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Să se determine al zecelea termen al şirului 1, 7, 13, 19, ...
3. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, ştiind că $a_1=1$ şi $a_2=3$.
4. Să se demonstreze că pentru orice $x\in R$ numerele $3^x-1, 3^{x+1}$ şi $5\cdot3^x+1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.
5. Să se calculeze suma 1+5+9+13+...+25.
6. Să se determine al nouălea termen al unei progresii geometrice, ştiind că raţia este egală cu $\frac{1}{3}$ şi primul termen este 243.
7. Să se calculeze suma $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}$.
8. Să se determine numărul real *x*, ştiind că 2^x-1, 4^x şi $2^{x+1}+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
9. Să se determine numărul real *x*, ştiind că $x-3$, 4, $x+3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
10. Să se calculeze suma 1+3+5+...+21.
11. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_3=5$ şi $a_6=11$. Să se calculeze a_9 .
12. Să se calculeze suma $1+2+2^2+2^3+..+2^7$.
13. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1=1$şi $a_5=13$. Să se calculeze a_{2008} .
14. Să se determine raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, ştiind că $a_{10}-a_2=16$.
15. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1=2$ şi $a_2=4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
16. Se consideră progresia geometică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_1=2$ şi $b_2=6$. Să se calculeze b_5.
17. Să se determine numărul real *x*, ştiind că şirul $1,2x+1,9,13,...$ este progresie aritmetică.
18. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1=6$şi $a_2=5$. Să se calculeze a_7 .
19. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_2=5$şi $r=3$. Să se calculeze a_8 .
20. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ în care $b_1=1$ şi $b_2=3$. Să se calculeze b_4.
21. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1=7$ şi $a_2=37$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
22. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1=3$ şi $a_3=7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
23. Să se calculeze suma 1 + 11 + 21 + 31 +...+ 111.
24. Să se determine numărul real *x* ştiind că numerele *x*+1, 2*x* – 3 şi *x* – 3 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
25. Să se determine numărul real pozitiv *x* ştiind că şirul 1, *x*, *x*+2, 8, ... este progresie geometrică.
26. Să se determine suma primilor 6 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, în care $a_1=2$ şi $a_2=5$.
27. Să se determine numărul real *x* ştiind că numerele 5 – *x*, *x* +7 şi 3*x* +11 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
28. Să se arate că numerele $\log_2 2,\ C_3^1$ şi 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
29. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferenţa dintre al doilea termen şi primul termen este egală cu 4.
30. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice ştiind că primul termen al progresiei este 7 şi al doilea termen este 9.

31. Să se determine raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $b_1 = 3$ şi $b_2 - b_1 = 3.$
32. Să se demonstreze că şirul cu termenul general $a_n = 2n+3,$ verifică relaţia $a_{n+1} - a_n = 2,$ pentru orice $n \in N^*$.
33. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ şi $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi dintr-o progresie geometrică.
34. Să se determine numărul real *x*, ştiind că numerele *x* – 1, 2*x* – 2 şi *x* + 3 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
35. Să se determine numărul real *x*, ştiind că numerele *x* – 1, *x*+1 şi 2*x* + 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
36. Să se determine produsul primilor trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ ştiind că primul termen este egal cu 1 şi raţia este *q*= – 2.

6.Ecuaţia de gradul al II – lea.

1. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, ştiind că x_1şi x_2 sunt soluţiei ecuaţiei $x^2 - x - 2 = 0.$
2. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$ ştiind că x_1şi x_2 sunt soluţiei ecuaţiei $x^2 - 2x - 2 = 0.$
3. Să se determine $m \in R$, ştiind că $\{x \in R \mid x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0\} = \{1\}$.
4. Să se demonstreze că dacă x_1 este soluţie a ecuaţiei $x^2 - 2008x + 1 = 0$, atunci $x_1 + \frac{1}{x_1} = 2008.$
5. Să se demonstreze că, dacă $a \in R^*$, atunci ecuaţia $ax^2 - (2a+1)x + a + 1 = 0$ are două soluţii reale distincte.
6. Să se demonstreze că pentru orice *a* real, ecuaţia de gradul al doilea $(1+\cos a)x^2 - (2\sin a)x + 1 - \cos a = 0$ admite soluţii reale egale.
7. Să se determine o ecuaţie de gradul al II –lea ale cărei soluţii x_1şi x_2 verifică simultan relaţiile $x_1 + x_2 = 2$ şi $x_1x_2 = -3.$
8. Să se demonstreze că ecuaţia $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0$ nu admite soluţii reale, oricare ar fi $a \in R^*$.
9. Să se determine $m \in R$, ştiind că soluţiile x_1, x_2 ale ecuaţiei $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$ verifică realţia $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11.$
10. Se consideră ecuaţia $x^2 + 3x - 5 = 0$ cu soluţiile x_1şi x_2. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$.
11. Se consideră ecuaţia $x^2 + mx + 2 = 0$ cu soluţiile x_1şi x_2. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$.
12. Să se formeze o ecuaţie de gradul al doilea, ştiind că aceasta are soluţiile $x_1 = 2$ şi $x_2 = 3$.
13. Se consideră ecuaţia $x^2 - x + m = 0$ cu soluţiile x_1şi x_2.Să se determine numărul *m* pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1} = -\frac{3}{4}.$
14. Să se determine valoriele reale ale numărului *m* pentru care *x*=5 este soluţie a ecuaţiei $m^2(x-1) = x - 3m + 2.$
15. Să se determine $m \in R$ astfel încât $x^2 - (m-3)x + m - 3 > 0,$ pentru orice *x* real.
16. Să se determine valorile reale ale parametrului *m* ştiind că soluţiile x_1şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 + (m-1)x + 3 = 0$ verifică egalitatea $x_1 = 3x_2$.
17. Să se calculeze valoarea expresiei $E(x) = x^2 - 4x - 1$ pentru $x = 2 + \sqrt{5}.$
18. Să se determine valorile reale ale parametrului *m* astfel încât ecuaţia $x^2 + mx + 9 = 0$ sadmită două soluţii egale.
19. Să se arate că soluţiile x_1şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$ verifică relaţia $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 2.$
20. Ştiind că x_1şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 2008x + 1 = 0,$ să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$

21. Să se determine valorile reale ale numărului *m* ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 - mx - m - 6 = 0$ verifică relaţia $4(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0.$
22. Să se demonstreze că pentru orice $m \in R$ ecuaţia $x^2 + mx - m^2 - 1 = 0$ are două soluţii reale distincte.
23. Ecuaţia $x^2 + px - p = 0,$ cu $p \in R,$ are soluţiile x_1 şi x_2. Să se verifice dacă expresia $x_1 + x_2 - x_1x_2$ este constantă.
24. Se consideră ecuaţia de gradul al II –lea $x^2 - x + m = 0$. Să se determine $m \in R$ astfel încât ecuaţia să admită soluţii de semne contrare.
25. Să se arate că produsul soluţiilor ecuaţiei $mx^2 - 2008x - m = 0$ este constant, $\forall m \in R^*$.
26. Să se determine numărul real *m* astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2 - mx - 1 = 0$ să fie numere reale opuse.
27. Să se determine parametrul real *m* astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + m = 0$ să fie inverse una alteia.
28. Să se determine $m \in R^*$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + m = 0$ să aibă semne opuse

7. Ecuaţii iraţionale.

1. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2+x} = x.$
2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+1} = 5 - x.$
3. Să se rezolve în *R* ecuaţia $\sqrt{x-5} = 2.$
4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2.$
5. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{7-x} = 1.$
6. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} = x - 1.$
7. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$.
8. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{5 - x^2} = 2.$
9. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x-2} = 0$.
10. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2 + 1} = 0$.
11. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x}.$
12. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$
13. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 2\sqrt{3}.$
14. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - x - 2}.$
15. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1} - 2 = 0.$
16. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{1-x} = -2$

8. Ecuaţii exponenţiale

1. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.
2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x + 2^{x+3} = 36$.
3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$
4. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+3} - 2^x = 28.$
5. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $125^x = \frac{1}{5}$.

6. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^{x-1}+2^{x}=12$.
7. Să se rezolve în *R* ecuaţia $2^{x}-14\cdot 2^{-x}=-5$.
8. Să se rezolve în *R* ecuaţia $4^{x+2}=2^{x^2+5}$.
9. Să se rezolve ecuaţia $9^{x}-4\cdot 3^{x}+3=0$.
10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x^2+3x-2}=8$.
11. Să se rezolve ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.
12. Să se rezolve ecuaţia $2^{x^2+x+1}=8$.
13. Să se rezolve ecuaţia $3^{1-x}=9$.
14. Să se rezolve ecuaţia $2^{x}+2^{-x}=\frac{5}{2}$.
15. Să se rezolve ecuaţia $3^{x}+2\cdot 3^{x+1}=7$.
16. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2^x}=\frac{4^x}{8}$.
17. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$.
18. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x}\cdot 5^{x}=15$.
19. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{2^x}=4$.
20. Să se rezolve ecuaţia $(3+2\sqrt{2})^{x}=(1+\sqrt{2})^{2}$.
21. Să se rezolve ecuaţia $3^{2x}+2\cdot 3^{x}-3=0$.
22. Să se rezolve ecuaţia $2^{\log_2 x}=4$.
23. Să se rezolve ecuaţia $\frac{1}{3^x}=9$.

9.Ecuaţii logaritmice.

1. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+4)=2$.
2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$.
3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$.
4. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(x^2-6)=\log_3(2x-3)$.
5. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(x^2-4x+4)=2$.
6. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x-3)=0$.
7. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(2x+5)=\log_2(x^2+3x+3)$.
8. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x^2-1)=1$.
9. Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x^2-4)=\log_2(x^2-3x+2)$.
10. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x^2-x-2)=2$.
11. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale pozitive ecuaţia $\log_2 x^2=2$.
12. Să se rezolve ecuaţia $\log_2\sqrt{x+1}=1$.
13. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$.
14. Să se rezolve reale ecuaţia $\log_2(x^2-x-2)-\log_2(2x-4)=1$.
15. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale eucaţia $\log_4(2^{x+1}-1)=0$.
16. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\sqrt[3]{x}=1$.
17. Să se rezolve ecuaţia $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

10.Inecuaţii.

1. Să se calculeze suma soluţiile întregi ale inecuaţiei $x^2-5x+5\le 1$.
2. Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $(x-1)^2+x-7<0$.
3. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $\frac{2x+3}{x^2+x+1}\ge 1$.
4. Să se determine mulţimea valorilor reale pentru care $-4\le 3x+2\le 4$.
5. Să se determine elementele mulţimii $A=\{x\in N \| |2x-1|\le 1\}$.
6. Să se arate că $(x-1)(x-2)>x-3,\ \forall x\in R$.
7. Să se rezolve inecuaţia $(2x-1)^2\le 9$.
8. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $x^2-9\le 0$.
9. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(2x-1)(x+1)\le -x+11$.
10. Să se determine soluţiile reale ale inecuaţiei $x^2-5x+6\le 0$.
11. Să se determine valorile reale ale lui *x* pentru care $x(x-1)\le x+15$.
12. Să se determine mulţimea valorilor lui *x* pentru care $-4<3x+2<4$.
13. Să se determine $m\in R$ astfel încât $x^2-(m-3)x+m-3>0$, pentru orice *x* real.
14. Să se rezolve inecuaţia $(x^2-1)(x+1)\ge 0$.

11.Vectori în plan.

1. Fie punctele $A(2;-1)$ şi $B(-1;3)$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}+b\vec{j}$.
2. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(4;-8)$ şi $B(6;3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
3. Să ase determine numărul real a ştiind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+(a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.
4. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=-3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{v}=5\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u}+3\vec{v}$..
5. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.
6. În reperul cartezian *xOy* se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2;-3)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α şi β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele $(\alpha;\beta)$.
7. Dacă $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.
8. În reperul cartezian *xOy* se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2;-1)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde *M* este mijlocul segmentului *AB*.
9. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru *O*. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.
10. Să se determine numărul real *m* pentru care vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{w}=-\vec{i}+m\vec{j}$ sunt coliniari.
11. Se consideră triunghiul echilateral ABC de cnetru O. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, să se determine numărul real a astfel încât $\overrightarrow{AO}=a\overrightarrow{AM}$.
12. Să se arate că, dacă $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$, atunci C este mijlocul segmentului AB.
13. Să se demonstreze că în hexagonul regulat ABCDEF, are loc relaţia $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$.
14. Se consideră patrulaterul ABCD în care $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ Să se demonstreze că ABCD este paralelogram.
15. Se consideră pătratul ABCD, de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.
16. Se consideră paralelogramul ABCD. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

17. Se consideră punctele distincte A, B şi C. Să se demonstreze că dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, atunci M este mijlocul segmentului BC.
18. Fie punctele distincte A, B, C, D nu toate coliniare. Ştiind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul ABCD este paralelogram

12.TRIGONOMETRIE

1. Se consideră triunghiul *ABC* având aria egală cu 15. Să se calculeze *sin A* ştiind că *AB*=6 şi *AC*=10.
2. Se consideră triunghiul *ABC* cu *AB*=4, *AC*= $\sqrt{7}$ şi *BC*= $\sqrt{3}$. Să se calculeze *cos B*.
3. Să se calculeze aria triunghiul *ABC* ştiind că *AC*=2, $m(\angle BAC)=30^0$ şi *AB*=4.
4. Să se calculeze aria triunghiul *ABC* ştiind că $AB=AC=\sqrt{2}, m(\angle A)=30^0$.
5. Să se afle raza cercului circumcris triunghiul *ABC* ştiind că *AB*=3 şi $m(\angle C)=30^0$.
6. Fie triunghiul dreptunghic *ABC* şi *D* mijlocul ipotenuzei *BC*. Să se calculeze lungimea laturii *AB* ştiind că *AC*=6 şi *AD*=5.
7. Se consideră triunghiul *ABC* cu *AB*=1, *AC*=2 şi *BC*= $\sqrt{5}$. Să se calculeze *cos B*.
8. Se consideră triunghiul *ABC* cu *AB*=5, *AC*=6 şi *BC*=7. Să se calculeze *cos A*.
9. Să se calculeze aria triunghiul *ABC* ştiind că *AB*= $2\sqrt{3}$, *AC*= $\sqrt{3}$ şi $m(\angle BAC)=60^0$.
10. Să se calculeze lungimea laturii *BC* a triunghiului *ABC* ştiind că *AB*=6, *AC*=10 şi $m(\angle BAC)=60^0$.
11. Să se afle raza cercului circumcris triunghiul *ABC* ştiind că *BC*=8 şi $m(\angle A)=45^0$.
12. Se consideră triunghiul *ABC* de arie egală cu 6, cu AB=3 şi BC=8. Să se calculeze sin B.
13. Se consideră triunghiul *ABC* de arie egală cu 7. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că AC=2 şi că $m(\angle A)=30^0$.
14. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că AB=2, BC=4 şi $m(\angle B)=60^0$.
15. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că AB=5, AC=4 şi $m(\angle A)=60^0$.
16. Să se calculeze $\sin 135^0$.
17. Să se calculeze $\sin^2 100^0+\cos^2 80^0$.
18. Să se calculeze $\sin^2 130^0+\cos^2 50^0$.
19. Să se calculeze lungimea înăţimii din A în triunghiul ABC ştiind că AB=3, AC=4 şi BC=5.
20. Raza cercului cirmumscris triunghiului *ABC* este $\frac{3}{2}$, iar *BC*=3. Să se calculeze *sin*A.
21. Să se calculeze $\sin^2 135^0+\cos^2 45^0$.
22. Să se determine numărul real *x* pentru care *x*, *x*+7 şi *x*+8 sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.
23. Să se calculeze aria triunghiului *ABC* ştiind că *AB*=6, *AC*=8 şi *BC*=10.
24. Să se calculeze *sin*A, ştiind că în triunghiul ABC se cunosc AB=4, BC=2 şi $m(\angle C)=60^0$.
25. Să se calculeze $\sin 120^0$.
26. Să se calculeze aria triunghiului *ABC* ştiind că *AB*= $\sqrt{3}$, *AC*=6 şi $m(\hat{A})=120^0$.
27. Să se calculeze $\sin 170^0-\sin 10^0$.
28. *MN*=3, *MP*=5 şi $m(\angle M)=60^0$. Să se calculeze lungimea laturii *NP*.
29. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 6. Să se determine lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei.
30. Să se calculeze $\sin^2 80^0+\sin^2 10^0$.
31. triunghiului.
32. Să se calculeze $tg^2 30^0+ctg^2 45^0$.
33. Să se calculeze $\cos 10^0+\cos 20^0+\cos 160^0+\cos 170^0$.

34. Să se calculeze cos *x*, ştiind că $\sin x = \frac{3}{5}$ şi $x \in (0^0;90^0)$

13.ECUAŢIA DREPTEI ÎN PLAN

1. Să se determine ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $A(2;-1)$ şi $B(1;-2)$.
2. Să se determine numărul real *a* ştiind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ şi $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.
3. Se consideră punctele $A(1,a), B(2,-1), C(3,2)$ şi $D(1,-2)$.Să se determine numărul real *a* ştiind că dreptele *AB* şi *CD* sunt paralele.
4. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(1;1)$ şi este paralelă cu dreapta $4x + 2y + 5 = 0$.
5. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2;-3)$ şi este perpendiculara cu dreapta $x + 2y + 5 = 0$.
6. Să se calculeze aria triunghiului *ABC* determinat de punctele $A(1;2), B(-1;1), C(3;5)$ în reperul cartezian *xOy*.
7. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctele $A(2;3)$ şi $B(-3;-2)$.
8. Să se calculeze aria triunghiului echilateral *ABC* ştiind că $A(-1;1)$ şi $B(3;-2)$.
9. Să se calculeze lungimea segmentului *AB*, determinat de puntele $A(2;3)$ şi $B(5;-1)$, în reperul cartezian *xOy*.
10. Să se determine coordonatele punctului *C* ştiind că el este simetricul punctului $A(5;4)$ faţă de punctul B($-2;1$).
11. Să se deermine numărul real *a,* ştiind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1;2)$ şi $B(4-a;4+a)$ este egală cu 5.
12. Să se determine distanţa dintre punctele $A(3;-1)$ şi $B(-1;2)$.
13. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului *AB*, ştiind că $A(5;-4)$ şi $B(-3;6)$.
14. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(1;2)$, $B(5;2)$ şi $C(3;-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*.
15. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(5;-1)$ şi $B(3;1)$. Să se determine coordonatele simetricului *A* faţă de punctul *B*.
16. Să se determine numărul real pozitiv *a* astfel încât distanţa dintre punctele $A(2;-1)$ şi $B(-1;a)$ să fie egală cu 5.
17. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(-1;-2)$, $B(1;2)$ şi $C(2;-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul *C* la mijlocul segmentului *AB*.
18. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctul $A(m^2;m)$ şi dreapta de ecuaţie $d: x + y + m = 0$. Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care punctul *A* se află pe dreapta *d*.
19. Să se determine $m \in R$ pentru care punctele *A*(2;4), *B*(3;3) şi *C*(*m*;5) sunt coliniare.
20. Să se determine $m \in R$ pentru care distanţa dintre punctele $A(2,m)$ şi $B(-m,-2)$ este egală $4\sqrt{2}$.
21. Să se determine lungimea înălţimii din *O* în triunghiul *MON*, unde *M*(4;0), *N*(0;3) şi *O*(0;0).
22. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul *A*(3;0) şi intersectează axa *Oy* în punctul de ordonată 4.
23. Să se determine valorile reale ale lui *m* astfel încât punctele *A*(1;3), *B*(2;5) şi *C*(3;*m*) să fie coliniare.
24. Să se determine coordonatele punctului *B*, ştiind că punctul *C*(3;5) este mijlocul segmentului *AB* şi că *A*(2;4).
25. Se consideră în reperul cartezian xOy punctele *A*(3;2), *B*(2;3) şi *M* mijlocul segmentului *AB*. Să se determine lungimea segmentului *OM*.

Colegiul Tehnic P. Tc. Gh. Airinei, Bucuresti

Prof. Ionescu Simona

SUBIECT II.

Algebra Cl. A XI-a si a XII-a. Programa *M_stiintele naturii, tehnologic*

1.Matrice.

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2 = B\cdot B$.
   b) Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.
   c) Să se arate că $C^4 = 6^4\cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ şi $C^4 = C\cdot C\cdot C\cdot C$.
2. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Definim matricele $A = X\cdot Y^t$ şi $B(a) = aA + I_3$, unde $a\in R$ şi Y^t este transpusa matricei *Y*.
   a) Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 3 & 6 & -9\end{pmatrix}$.
   b) Să se calculeze determinantul matricei *A*.
   c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, $\forall a\in R\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.
3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}\in M_2(R)$. Se notează $A^n = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\, n\, ori}$, $n\in N^*$.
   a) Să se calculeze determinantul matricei *A*.
   b) Să se arate că $A^2 + A^3 = O_2$.

c) Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+...+10\cdot A^{10}$.

4. Se consideră matricele $X=(x \quad y), A=\begin{pmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ cu $a,x,y\in R$ şi $B=(0 \quad 0)$.

a) Să se arate că dacă $X\cdot A=B$, atunci $(a^2-9)x=0$.

b) Să se determine valorile reale ale numărului *a* pentru care determinantul matricei A este nenul.

c) Să se determine trei soluţii distincte ale sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 9x+3y=0 \end{cases}$.

5. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ din $M_3(R)$. Pentru $\forall X\in M_3(R)$ se notează cu $X^2=X\cdot X$.

a) Să se verifice că $A=I_3+B$.

b) Să se calculeze suma A^2+B^2.

c) Să se calculeze inversa matricei A^2.

6. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_2(R)$.

a) Să se calculeze A^2+A, unde $A^2=A\cdot A$..

b) Ştiind că $A^n=\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n\in N,\ n\geq 2$ şi $A^n=\underbrace{A\cdot ...\cdot A}_{de\,n\,ori}$, să se rezolve ecuaţia $\det(A^n)=2\cdot 5^n-125$.

c) Să se determine matricea $B=A+A^2+...+A^{2008}$.

7. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $M_2(R)$.

a) Să se verifice că $AB=BA$.

b) Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$ şi $B^2=B\cdot B$.

c) Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$, unde $C=A+B$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

8. Se consideră mulţimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| a,b\in Z, a^2=1\right\}$.

a) Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi respectiv $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţin mulţimii *G*.

b) Să se determine matricea $B\in M_2(Z)$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}=aI_2+bB,\ \forall a,b\in Z$.

c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din *G* este tot o matrice din *G*.

9. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f:M_3(R)\to M_3(R)$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

c) Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

10. Fie matricea $A(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_k & x_k^2\\ -2 & x_k^2 & x_k\end{pmatrix}$, cu $k\in\{0,1,2\}$, $x_0=1$ şi x_1,x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2+x-2=0.$
   a) Să se calculeze determinatul matricei *A*(0).
   b) Să se determine matricea $A(1)+A(2)$.
   c) Să se calculeze suma elementelor matricei *A*(*k*) pentru fiecare $k\in\{0,1,2\}$.

11. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in Z$.
   a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A.$.
   b) Să se verifice că $A^2=aI_2+bA,$ unde $A^2=A\cdot A.$.
   c) Ştiind că $X\in M_2(Z)$ cu $AX=XA,$ să se arate că există $m,n\in Z$ astfel încât $X=mI_2+nA.$

12. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A.$.
   b) Să se verifice că $AB-2B=O_2$.
   c) Să se determine matricele $X\in M_2(R)$ care verifică egalitatea $AXB=O_2$.

13. Se consideră mulţimea $M=\{aI_2+bV\mid a,b\in R\}$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.
   a) Să se verifice că $I_2\in M$.
   b) Să se determine matricele inversabile din mulţimea *M* în raport cu operaţia de înmulţire din $M_2(R)$.
   c) Ştiind că $A,B\in M$, să se arate că $AB\in M$.

14. În mulţimea $M_2(R)$ notăm cu A^t transpusa matricei *A*.
   a) Să se calculeze $I_2+I_2^t$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   b) Să se demonstreze că pentru $\forall A\in M_2(R)$ şi $m\in R$ are loc relaţia $(mA)^t=mA^t$.
   c) Să se determine matricele $A\in M_2(R)$ pentru care $A+A^t=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

15. Se consideră mulţimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}2a & -a\\ 2a & -a\end{pmatrix}\middle| a\in R\right\}$. Pentru $A\in M$ se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{denori}$, unde $n\in N^*$.
   a) Să se arate că $(A(a))^2=aA(a),\ \forall a\in R.$
   b) Să se arate că dacă $X,Y\in M$, atunci $XY\in M$.
   c) Să se determine $a\in R$ astfel încât $(A(a))^2+(A(a))^3=2A(a).$

16. Se consideră mulţimea $M=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in R\right\}$ şi matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1;1).$
   b) Să se demonstreze că dacă $A,B\in M$, atunci $A+B\in M$.
   c) Să se arate că $\det(I_2-A(0,b))\neq 0,\ \forall b\in R.$

17. În mulţimea $M_3(Z)$ se consideră matricele $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Să se determine numerele *a*, *b* şi *c* astfel încât $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   b) Să se arate că *a* = *c*=0 şi *b*= -1 pentru matricea *A* este inversa matricei *F*.

   c) Să se rezolve ecuaţia $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X \in M_3(Z)$.

18. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Să se arate că $I_2 \in M$.
   b) Ştiind că $A, B \in M$, să se arate că $A + B \in M$.
   c) Să se demonstreze că $\det(AB - BA) \geq 0, \ \forall A, B \in M$.

19. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Să se verifice că $A^2, = 2I_2$, unde $A^2 = A \cdot A.$.
   b) Să se determine $x \in R$ astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.
   c) Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuaţia $AX = XA$.

20. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$ şi matricea $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Să se arate că $O_3 \in M$.
   b) Să se demonstreze că produsul a două matrice din *M* este o matrice din *M*.
   c) Ştiind că $A \in M$ cu $\det(A) = 0$, să se demonstreze că $A^3 = O_3$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A.$

21. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(R)$. Se notează cu A^t transpusa matricei *A*.

   a) Ştiind că $ad = 4$ şi $bc = 3$, să se calculeze $\det(A)$.
   b) Să se calculeze $A \cdot A^t$.
   c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

22. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(R)$. Se notează $A^2 = A \cdot A.$.

   a) Să se calculeze A^2.
   b) Să se verifice că $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I_2$.
   c) Ştiind că $a + d \neq 0$ şi $M \in M_2(R)$ cu $A^2 M = MA^2$, să se demonstreze că $AM = MA$.

23. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{M(x; y) \mid M(x; y) = xI_2 + yA, x, y \in R\} \subset M_2(R)$.

a) Să se verifice că $A^2 = O_2$, unde $A^2 = A \cdot A.$.
b) Să se determine inversa matricei $M(1;1)$.
c) Să se determine matricele inversabile din mulţimea *G*.

24. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_3(R)$. Se notează $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot ... \cdot X}_{denori}$ pentru $\forall n \in N^*$.
a) Să se calculeze X^2.
b) Să se determine inversa matricei *X*.
c) Să se determine numărul real *r* astfel încât $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$.

25. Se consideră matricele de forma $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in R$.
a) Să se calculeze $\det(M_1 + M_2)$.
b) Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2 = M_a \cdot M_a$.
c) Să se determine matricele $X \in M_2(R)$ pentru care $M_a X = XM_a$, $\forall a \in R$.

26. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Să se arate că $I_2 \in M$.
b) Ştiind că $A, B \in M$, să se arate că $A + B \in M$.
c) Să se demonstreze că $\det(AB - BA) \leq 0$, $\forall A, B \in M$

27. Se consideră matricea $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, unde *a* >0.
a) Să se calculeze $\det(H(a))$, $\forall a > 0$.
b) Să se arate că $H(a) \cdot H(b) = H(a \cdot b)$, $\forall a, b > 0$.
c) Să se calculeze determinantul matricei $H(1) + H(2) + H(3) + ... + H(2008)$.

28. În mulţimea matricelor pătratice $M_2(R)$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{denori}$, $n \in N^*$.
a) Să se arate că $A + A^2 = 2A$.
b) Să se determine matricele $X \in M_2(R)$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X + A) = 2$.
c) Ştiind că $A^n = A$, $\forall n \in N^*$, să se demonstreze că $A + 2A^2 + ... + nA^n = \frac{n(n+1)}{2} A$, $\forall n \in N^*$.

29. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
a) Să se calculeze $\det(A)$.
b) Să se demonstreze că $A^3 = 7A$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
c) Să se demonstreze că $A \cdot B = A$, unde $B = A^2 - 6I_2$ şi $A^2 = A \cdot A.$.

30. În $M_2(R)$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, $x\in R$.
   a) Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.
   b) Să se verifice dacă $(A(x))^2=A((x+1)^2-1)$, $\forall x\in R$.
   c) Să se determine inversa matricei $A(1)$.

31. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze determinantul matricei *A*.
   b) Să se calculeze A^2 ştiind că $A^2=A\cdot A.$.
   c) Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

32. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\{X\in M_2(R) \mid XA=AX\}$
   a) Să se determine $a,b\in R$, astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2$.
   b) Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ şi $A^2=A\cdot A.$.
   c) Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci $\exists a,b\in R$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

33. În $M_2(R)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi submulţimea $G=\{X(a) \mid a\in R; X(a)=I_2+aA\}$.
   a) Să se verifice dacă I_2 aparţine mulţimii *G*.
   b) Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, $\forall a,b\in R$.
   c) Să se arate că pentru $a\neq-\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

34. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=A-I_3$.
   a) Să se calculeze determinantul matricei *A*.
   b) Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A.$ şi $B^2=B\cdot B.$
   c) Să se arate inversa matricei *B* este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

35. În $M_3(Z_8)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}\hat1 & \hat0 & \hat0\\ \hat0 & \hat3 & \hat0\\ \hat0 & \hat0 & \hat5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\hat1 & \hat0 & \hat0\\ \hat2 & \hat3 & \hat0\\ \hat3 & \hat7 & \hat5\end{pmatrix}$ $I_3=\begin{pmatrix}\hat1 & \hat0 & \hat0\\ \hat0 & \hat1 & \hat0\\ \hat0 & \hat0 & \hat1\end{pmatrix}$. Se notează $X^2=X\cdot X$, pentru $\forall X\in M_3(Z_8)$.
   a) Să se arate că $A^2=I_3$.
   b) Să se rezolve ecuaţia matriceală $A\cdot X=I_3$, unde $X\in M_3(Z_8)$.
   c) Să se calculeze $(B-A)^2$.

36. În mulţimea $M_2(R)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in R$.
   a) Să se demonstreze că $A^2=8A$.
   b) Să se calculeze $\det X(a)$.
   c) Să se domonstreze că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+8ab)$, $\forall a,b\in R$.
37. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ cu $x,y\in R$.
   a) Să se determine numărul real *x* astfel încât $A\cdot B=B\cdot A$.
   b) Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$, unde $A^2=A\cdot A.$.
   c) Să se determine numărul real *a* astfel încât $A^3-aA^2+4A=O_2$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.
38. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Se notează $X^2=X\cdot X$.
   a) Să se calculeze *AB*.
   b) Să se demonstreze că $(A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$.
   c) Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.
39. Fie măricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Pentru $a\in R$ fixat, definim $B=aA+I_3$.
   a) Să se calculeze $\det(B)$ pentru *a*=1.
   b) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A.$.
   c) Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$ şi să se determine B^{-1}.
40. În $M_3(R)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & a & 0\\ a & 0 & 0\end{pmatrix}$, unde $a\in R$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi submulţimea $G=\{X\in M_3(R) \mid AX=XA\}$.
   a) Să se calculeze $\det(A)$.
   b) Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, $\forall X\in M_3(R)$, unde $A^2=A\cdot A.$.
   c) Să se arate că dacă $a,b\in R$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.
41. În mulţimea $M_2(R)$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A.$.
   b) Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A.$.
   c) Să se demonstreze că matricea *A* verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.
42. Pentru fiecare $x\in R$ se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a) Să se determine valorile lui *x* pentru care $\det A_x=0$.
   b) Să se determine $x\in R$ astfel încât $A_x^2=I_2$, unde $A_x^2=A_x\cdot A_x$.

c) Să se demonstreze că $A_x^2 = 2xA_x + (1-x^2)I_2$.

43. În mulţimea $M_3(R)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ şi $C = A + B$.

a) Să se calculeze *AB*.

b) Să se demonstreze că $A^2 = 6A$ şi $B^2 = -6B$, unde $A^2 = A \cdot A$.

c) Să se demonstreze că $C^3 = 6^2(A+B)$, unde $C^3 = C \cdot C \cdot C$.

2. Determinanţi.

Exerciţii tipice pentru bacalaureat:

1. Se consideră determinatul $D(a,b,x) = \begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 1 & a & bx \\ 1 & a & ax \end{vmatrix}$, unde *a*, *b* şi *x* sunt numere reale

a) Să se calculeze $D(1,1,0)$.

b) Să se demonstreze că $D(a,a,x)$ nu depinde de numărul real *x*.

c) Să se rezolve ecuaţia $D(a,b,x) = 0$, unde *a*, *b* sunt numere reale distincte.

2. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2012}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2012}+1 \end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 2 = 0$.

3. Se consideră determinatul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde *a*, *b*, $c \in R$.

a) Să se calculeze determinantul *d* pentru *a*=2, *b*=1, *c*= - 1.

b) Să se verifice dacă $d = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$, $\forall a,b,c \in R$.

c) Să se rezolve în R ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0.$

4. Se consideră determinatul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3 \in R$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x = 0$.

a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

b) Să se calculez $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$..

c) Să se calculeze valoarea determinantului *d*.

5. Se consideră determinatul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3 \in R$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 3x + 2 = 0$.

   a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.
   b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.
   c) Să se calculeze valoarea determinantului *d*.

6. Se consideră determinatul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$ unde *a* este număr real.

   a) Să se calculeze valoarea determinantului $D(9)$.
   b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(a) = 0$.
   c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(3^x) = 0$.

7. Se consideră determinatul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a,b,c \in R$.

   a) Ştiind că $a = -1,\ b = 0$ şi $c = 1,$ să se calculeze determinantul Δ.
   b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc),\ \forall a,b,c \in R.$
   c) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0,\ x \in R$.

8. Se consideră determinatul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$ unde *a* este număr real.

   a) Să se calculeze determinantul pentru *a* = -1.
   b) Să se demonstreze că $D(a) = -(a-1)^2(a+2),$ pentru orice *a* număr real.
   c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(a) = -4$.

   c) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 + A^2 + A = O_3$, unde $A^2 = A \cdot A.$şi $A^3 = A^2 \cdot A.$

3. Ecuaţia dreptei.

Exerciţii tipice pentru bacalaureat:

1. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(2;1), B(1;2)$şi $C_n(n;-n)$ cu $n \in Z$.

   a) Să se scrie ecuaţia dreptei C_4C_2.
   b) Să se arate că $\forall n \in Z^*$ punctele O, C_n, C_{n+1} sunt coliniare.
   c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3.

2. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(7;4)$, $B(a;a)$ şi $C(3;-2)$unde $a \in R$.
   a) Pentru *a* = 0să se calculeze aria triunghiului *ABC*.
   b) Pentru *a* = - 2 să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele *B* şi *C*.
   c) Să se determine $a \in R$ pentru care orice punct $M(x;-2)$cu $x \in R$este coliniar cu punctele *B* şi *C*.
3. În reperul cartezian *xOy* se consideră dreptele $AB: x+2y-4=0$şi $BC: 3x+y-2=0$.
   a) Să se determine coordonatele punctului *B*.
   b) Pentru $A(4;0), B(0;2), C(1;-1)$ să se scrie ecuaţia medianei triunghiului *ABC*,duse din vârful *C*.
   c) Pentru $A(4;0), B(0;2), C(1;-1)$ să se calculeze aria triunghiului *ABC*.
4. În reperul cartezian *xOy* se consideră dreptele de ecuaţii $AB: x+2y-4=0$ şi $CA: x-3y-4=0$.
   a) Să se determine coordonatele punctului *A*.
   b) Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, dacă $A(4;0)$, $B(0;2)$ şi $C(1;-1)$.
   c) Să se determine $a \in R$ astfel încât punctele $A(4;0)$, $B(0;2)$ şi $D(2;a)$ să fie coliniare.

5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $O(0;0)$ şi $A_n(n;2^n)$, $n \in N$.
   a) Să se verifice dacă O, A_1, A_2 sunt coliniare.
   b) Să se determine numărul dreptelor care trec prin cel puţin dau dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.
   c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n \in N$.
6. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $O(0;0)$ şi $A_n(n;2n+1)$, $n \in N$.
   a) Să se determine ecuaţia dreptei A_1A_2.
   b) Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.
   c) Să se arate că toate punctele $A_n(n;2n+1)$, $n \in N$ sunt coliniare.
7. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n;\log_3 9^n\right)$ şi $B_n(-n;2n)$, $n \in N^*$.
   a) Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele B_1 şi B_2.
   b) Să se arate că $A_n = B_n$, $\forall n \in N^*$.
   c) Să se demonstreze că pentru $\forall n \in N^*$ punctul A_n aparţine dreptei A_1A_2.
8. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $O(0;0)$ şi $A_n(n+1;3n-2)$, $n \in N$.
   a) Să se scrie ecuaţia dreptei determinată de punctele A_1 şi A_2.
   b) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.
   c) Să se demonstreze că pentru $\forall n \in N$, $n \geq 3$, punctele A_1, A_2 şi A_n sunt coliniare.
9. Se consideră punctele $A_n(n;n^2)$, unde $n \in N$.
   a) Să se determine ecuaţia dreptei A_0A_1.
   b) Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.
   c) Să se arate că pentru $\forall m,n,p \in N$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.
10. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $O(0;0)$ şi $A_n(n;n+2)$, $n \in N$.
   a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.
   b) Să se arate că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.
   c) Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural *n*.

11. Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu $x, y \in R$. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $A(1;2)$, $B(0;3)$, $O(0;0)$ şi $C_n(n+1;2-n)$ cu $n \in N^*$.

   a) Să se calculeze determinantul matricei *M*.
   b) Să se arate că punctele *A*, *B*, C_2 sunt coliniare.
   c) Să se determine numărul natural nenul *n* astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

4.Sisteme de ecuaţii.

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3, \\ x-y+2z=a \end{cases}$ unde $a \in R$.

   a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
   b) Pentru *a* =0 să se rezolve sistemul.
   c) Să se determine $a \in R$ astfel încât soluţia sistemului să verifice relaţia $x = y + z$.

2. Pentru fiecare $a \in R$, se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$.

   a) Să se calculeze determinatul matricei $A(a)$, $a \in R$.
   b) Să se determine $a \in R$ pentru care sistemul dat poate fi rezolvat prin metoda Cramer.
   c) Pentru *a*=0, să rezolve sistemul.

3. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m^2-3 \\ 5x-2y+z=-2 \\ (m+1)x+2y+3z=-2 \end{cases}$ unde *m* este un parametru real.

   a) Să se determine $m \in R$, ştiind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.
   b) Să se determine $m \in R$ astfel încât sistemul să admită soluţia $(1;2;-3)$.
   c) Pentru *m* = -1 să se rezolve sistemul de ecuaţii.

4. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$ unde *m* este un parametru real.

   a) Să se determine $m \in R$, astfel încât soluţia sistemului să fie $(2;1;-1)$.
   b) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$, unde $m \in R$.
   c) Pentru *m* = -5 să se rezolve sistemul de ecuaţii.

5. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3(R).$
   a) Să se calculeze $\det(A(4))$.
   b) Să se determine $a \in R$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
   c) Pentru $a \in R \setminus \{1;2\}$ să se rezolve sistemul.
6. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$ unde $a,b,c \in R,$ sunt distincte două câte două.
   a) Să se rezolve sistemul pentru *a* = 0, *b* =1 şi *c* =2.
   b) Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde *A* este matricea asociată sistemului.
   c) Să se demonstreze că soluţia sistemului nu depinde de numerele reale *a*, *b* şi *c*.
7. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5, \\ x+y+4z=4 \end{cases}$ unde $a,b \in R.$
   a) Să se calculeze determinatul matricei asociate sistemului.
   b) Pentru a= -1 şi b=2 să se rezolve sistemul.
   c) Să se determine numărul real b, ştiind că $(x_0;y_0;z_0)$ este soluţie a sistemului şi că $x_0+y_0+z_0=4$.
8. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22, \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$ unde $a \in R.$
   a) Pentru *a*=1 să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
   b) Să se arate că tripletul $(7;1;1)$ nu poate fi soluţie a sistemului, $\forall a \in R.$
   c) Să se determine soluţia $(x_0;y_0;z_0)$ a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.
9. Se consideră sistemul $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2 \end{cases}$.
   a) Să se calculeze $x_1x_2x_3$.
   b) Să se determine *a*, *b*, $c \in R$, ştiind că ecuaţia $x^3+ax^2+bx+c=0$ are soluţiile x_1,x_2,x_3.
   c) Să se determine soluţiile sistemului.
10. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde *m* este un parametru real şi *A* matricea sistemului.
    a) Să se arate că pentru orice *m* număr real tripletul $(0;3;1)$ este soluţie a sistemului.
    b) Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care sistemul admite soluţie unică.
    c) Pentru $m \neq 3$, să se rezolve sistemul.
11. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1, \\ 2x-z=a \end{cases}$ unde $a \in Z$ şi notăm cu *A* matricea sistemului.

a) Să se calculeze determinantul matricei *A*.
b) Pentru *a* =1 să se rezolve sistemul.
c) Să se determine cea mai mică valoare a lui $a \in Z$ pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere naturale.

12. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+mz=0, \\ 4x+y+5z=0 \end{cases}$ unde *m* este un parametru real şi *A* matricea sistemului.
a) Să se calculeze determinantul matricei *A* pentru *m*=1.
b) Să se determine parametrul real *m* ştiind că determinantul matricei sistemului este nul.
c) Pentru $m \neq -1$ să se rezolve sistemul.

13. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+2y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$, $a \in R$şi $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A \in M_2(R)$ matricea sistemului. Notăm $A^2 = A \cdot A.$, $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Pentru *a* = - 1 să se rezolve sistemul de ecuaţii.
b) Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.
c) Să se determine $a \in R$ ştiind că matricea *A* verifică egalitatea $A^2=9I_2$..

14. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16, \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$ unde $a \in R$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Să se determine valorile reale ale lui *a* astfel încât matricea *A* să fie inversabilă.
b) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A \cdot A.$.
c) Să se rezolve sistemul pentru *a* =1.

15. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, unde $a \in R$ şi matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.
a) Pentru *a* =1 să se calculeze determinantul matricei *A*.
b) Să se determine mulţimea valorilor reale ale numărului *a* pentru care $\det(A) \neq 0$.
c) Să se rezolve sistemul pentru $a \in R \setminus \{2;4\}$.

5.Legi de compoziţie. Grupuri. Inele. Corpuri.

1. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = xy+4x+4y+12$, pentru orice $x, y \in R$.
a) Să se verifice că $x \circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice $x, y \in R$.
b) Să se calculeze $x \circ (-4)$.
c) Ştiind că operaţia „∘” este asociativă, să se calculeze:(-2020) ∘ (-2019) ∘ ... ∘ (-1) ∘ 0 ∘ 1 ∘ ...... ∘ 2019 ∘ 2020.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compozitie $x \circ y = xy+7(x+y)+42$.
a) Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.
b) Să se verifice că $x \circ y=(x+7)(y+7)-7$ pentru orice $x, y \in R$.
c) Ştiind că legea „∘” este asociativă, să se se rezolve în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $x \circ x \circ x = x$.

3. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compozitie $x * y = x+y-3$ şi $x \circ y=(x-3)(y-3)+3$.
a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x \circ x = x * x$.

b) Să se determine numărul întreg *a* care are proprietatea $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg *x*.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in Z$.

4. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compozitie $x*y = xy - 5(x+y) + 30$.
   a) Să se demonstreze că $x*y = (x-5)(y-5)+5$, $\forall x, y \in R$.
   b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
   c) Ştiind că legea de compoziţie „$*$” este asociativă să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x = x$.
5. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compozitie $x*y = 2xy - x - y + 1$.
   a) Să se arate că $x*y = xy + (1-x)(1-y)$, $\forall x, y \in R$.
   b) Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
   c) Să se rezolve în *R* ecuaţia $x*(1-x) = 0$.
6. Pe mulţimea *Z* se consideră legile de compozitie $x \perp y = x + y + 1$, $x \circ y = ax + by - 1$, cu $a, b \in Z$ şi funcţia $f: Z \to Z$ definită prin $f(x) = x + 2$.
   a) Să se demonstreze că $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$, $\forall x \in Z$.
   b) Să se determine $a, b \in Z$ pentru care legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.
   c) Dacă $a = b = 1$ să se arate că funcţia *f* este morfism între grupurile $(Z;\perp)$ şi $(Z,\circ)$.
7. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compozitie $x \circ y = 2^{x+y}$.
   a) Să se calculeze $2012 \circ (-2012)$.
   b) Să se rezolve în *R* ecuaţia $x \circ x^2 = 64$.
   c) Să se demonstreze că nu există $x, y, z \in R$ pentru care $(x \circ y) \circ z = 2^z$.
8. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compozitie $x*y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
   a) Să se calculeze $x*0$.
   b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
   c) Ştiind că $x_0 \in Q$ şi $x_n = x_0 * x_{n-1}$, $\forall n \in N^*$, să se arate că $x_7 \in Q$.
9. Se consideră mulţimea $G = (0;+\infty) \setminus \{1\}$ şi operaţia $x \circ y = x^{3\ln y}$, $\forall x, y \in G$.
   a) Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x \circ e = 1$, unde *e* este baza logaritmului natural.
   b) Să se demonstreze că $x \circ y \in G$, pentru $\forall x, y \in G$.
   c) Să se că operaţia „$\circ$” este asociativă pe mulţimea *G*.
10. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y = 2xy - 4x - 6y + 21$, pentru $\forall x, y \in R$.
    a) Să se arate că $x*y = 2(x-3)(y-3)+3$, $\forall x, y \in R$
    b) Să se rezolve în *R* ecuaţia $5^x * 5^x = 11$.
    c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „$*$”.
11. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$, $\forall x, y \in R$.
    a) Să se arate că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, $\forall x, y \in R$
    b) Să se determine elementul neutru, ştiind că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă şi comutativă.
    c) Să se determine $n \in N$, $n \geq 2$ astfel încât $C_n^2 \circ C_n^2 = 13$.
12. Pe mulţimea numerelor întregi definim legile de compoziţie $x*y = x + y - 3$ şi $x \circ y = xy - 3(x+y) + 12$.
    a) Să se rezolve în *Z* ecuaţia $x \circ x = 12$.
    b) Să se arate că $1 \circ (2*3) = (1 \circ 2)*(1 \circ 3)$.
    c) Să se rezolve în mulţimea *ZXZ* sistemul $\begin{cases} (x-3)*y = 2 \\ (x-y)\circ 4 = 10 \end{cases}$.
13. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x + y + 11$.
    a) Să se arate că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.
    b) Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de 6 ori x} = 1$.

c) Să se demonstreze că $(Z;\circ)$ este grup comutativ.

14. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legile de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+6$ şi $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.
    a) Să se verifice că $(x*2)-(3\circ x)=-1,\ \forall x\in R$.
    b) Ştiind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „ $*$ ” şi e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „ $\circ$ ” să se calculeze $e_1*e_2+e_1\circ e_2$.
    c) Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=ax+1$. Să se determine $a\in R$ astfel încât $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y\in R$.
15. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\perp y=(x-3)(y-3)+3$, $\forall x,y\in R$.
    a) Să se arate că $(x+3)\perp\left(\frac{1}{x}+3\right)=4$, $\forall x\in R^*$.
    b) Să se arate că legea „ $\perp$ ” are elementul neutru *e*=4.
    c) Să se determine elementele simetrizabile ale mulţimii *R* în raport cu legea „ $\perp$ ”.
16. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=x+y-14,\ \forall x,y\in R$.
    a) Să se rezolve ecuaţia $x\circ x=2$.
    b) Să se demonstreze că legea „ $\circ$ ” este asociativă.
    c) Să se demonstreze că $(R;\circ)$ este grup.
17. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=xy-10(x+y)+110$.
    a) Să se verifice că $x\circ y=(x-10)(y-10)+10$, $\forall x,y\in R$
    b) Să se calculeze $C_{10}^1\circ C_{20}^1$.
    c) Să se rezolve ecuaţia $x\circ(x-1)=10$, unde $x\in R$.
18. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x*y=xy-x-y+2$.
    a) Să se demonstreze că $x*y=(x-1)(y-1)+1,\ \forall x,y\in R$.
    b) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.
    c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*...*\frac{\sqrt{2012}}{2}$.
19. Pe mulţimea Z se consideră legile de compoziţie $x*y=x+y+2$ şi respectiv $x\circ y=xy+2x+2y+2$.
    a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$.
    b) Să se determine elementele neutre ale fiecăreia dintre cele două legi de compoziţie.
    c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases}x^2*y^2=7\\ x^2\circ y^2=16\end{cases}$.
20. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.
    a) Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, $\forall x,y\in R$.
    b) Să se rezolve ecuaţia $x\circ x=36$.
    c) Ştiind că operaţia „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ...\circ\sqrt{2012}$.
21. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=3xy+3x+3y+2$.
    a) Să se demonstreze că $x*y=3(x+1)(y+1)-1$, $\forall x,y\in R$.
    b) Să se determine perechile $(x,y)\in RXR$ pentru care $(x^2-2)*(y^2-5)=-1$.
    c) Ştiind că operaţia „„ $*$ ”.este asociativă, să se calculeze:(-2020) $\circ$ (-2019) $\circ$ ... $\circ$ (-1) $\circ$ 0 $\circ$ 1 $\circ$ ...... $\circ$ 2019 $\circ$ 2020.

22. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legile de compoziţie $x\circ y=x+y+3$ şi respectiv $x*y=xy-3(x+y)+12$.
    a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, $\forall x,y\in R$.
    b) Să se rezolve în R ecuaţia $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x\circ(y-1)=0 \\ (x+1)*y=x*(y+1) \end{cases}, x,y\in R.$

23. Se consideră mulţimea $G=\{A_x \mid x\in Z\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x\in Z.$

a) Să verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in Z$.

b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G;\cdot)$.

c) Să se demonstreze că funcţia $f:Z\to G,\ f(x)=A_x$ este morfism de grupuri.

24. Se consideră matricea $A_x=\begin{pmatrix} 2012^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x\in R$ şi mulţimea

$G=\{A_x \mid x\in R\}\subset M_3(R).$

a) Să verifice că. $I_3\in G,$ unde $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să demonstreze că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in R$.

c) Să se arate că $G=\{A_x \mid x\in R\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

25. Se consideră inelul $(Z_6,+,\cdot)$.

a) Să se calculeze numărul elementelor inversbile în raoprt cu înmulţirea din inelul $(Z_6,+,\cdot)$.

b) Se consideră *S* suma soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}$ şi *P* produsul soluţiilor ecuaţiei $x^2=x,$ unde $x\in Z_6$. Să se calculeze *S*+*P*.

c) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(Z_6,+,\cdot),$ acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^3=\hat{0}.$

26. În mulţimea $M_2(Z_5)$ se consideră submulţimea $G=\left\{X\in M_2(Z_5) \mid \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}\right\}$ şi matricele $I_2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2\in G$ şi $O_2\in G$.

b) Să se arate că dacă $A,B\in G$ atunci $A+B\in G$.

c) Să se verifice că mulţimea *G* împreună cu operaţia de adunare a matricelor este grup comutativ.

27. Se consideră $(Z_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

a) Să se calculeze în Z_8 suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}.$

b) Să se calculeze în Z_8 produsul elementelor inversabile ale inelului.

c) Să se rezolve în Z_8 sistemul $\begin{cases} \hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2} \\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5} \end{cases}$.

28. Fie mulţimea $G=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in Z, a^2-3b^2=1\}$

a) Să se verifice dacă 0 şi 1 aparţin mulţimii *G*.

b) Să se demonstreze că pentru $\forall x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G.$

c) Să se arate că dacă $x \in G$ atunci $\frac{1}{x} \in G$.

29. În mulţimea $M_2(R)$ se consideră $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in R$.

a) Să se calculeze A^3, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
b) Să se verifice dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, $\forall a,b \in R$.
c) Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + ... + X(2012)$.

30. Se consideră mulţimea $G = \{A_x | x \in Z\}$, unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in Z.$

a) Să se verifice $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in Z$.
b) Să se determine elementul neutru din grupul $(G;\cdot)$.
c) Să se arate că funcţia $f : Z \to G,\ f(x) = A_x$ este morfism între grupurile $(Z,+)$ şi $(G,\cdot)$. .

31. Fie mulţimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$.

a) Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab),\ \forall a,b \in R.$
b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a matricelor pe *M*.
c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pe mulţimea *M*.

32. Se consideră mulţime $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in Z, a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset M_2(Z).$

a) Să se verifice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G.$
b) Să se arate că pentru $\forall A, B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$.
c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din *G* aparţine mulţimii *G*.

33. Se consideră mulţimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$. Pentru $A \in M$ se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{denori}$, unde $n \in N^*$.

a) Să se arate că $(A(a))^2 = aA(a)$, $\forall a \in R$.
b) Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M.$
c) Să se determine $a \in R$ astfel încât $(A(a))^2 + (A(a))^3 = 2A(a).$

6. POLINOAME

1. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c,$ unde $a,b,c \in R.$

a) Pentru $a = c = 1$ şi $b = -1$ să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului *f* la $X^2 + 1.$

b) Să se determine numerele *a*, *b*, *c* ştiind că restul împărţirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărţirii polinomului f la X – 1 este – 1.

c) Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, atunci *f* nu are toate rădăcinile reale.

2. În mulţinea $R[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - X - 1$.
   a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul *g*.
   b) Să se arate că dacă *y* este rădăcină a polinomului *g*, atunci $y^3 = 2y + 1$.
   c) Să se demonstreze că dacă *y* este rădăcină a polinomului *g*, atunci $f(y)$ nu este număr raţional.

3. Se consideră polinoamele cu coeficenţi reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$ şi $g = X^2 + 2X - 24$.
   a) Să se scrie forma algebrică a polinomului $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.
   b) Să se determine $a, b \in R$ astfel încât polinoamele f şi $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$ să fie egale.
   c) Să se rezolve în R ecuaţia $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.
4. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{3}$ din inelul $Z_5[X]$.
   a) Să se determine $a \in Z_5$, astfel încât polinomul *f* să fie divizibil cu polinomul *g*.
   b) Pentru $a = \hat{1}$, să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.
   c) Pentru $a = \hat{1}$, să se rezolve în inelul $(Z_5, +, \cdot)$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.
5. Se consideră polinoamele $f, g \in Z_5[X]$, $f = (\hat{3}a + \hat{3}b)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ şi $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$.
   a) Să se determine $a, b \in Z_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.
   b) Pentru $a = b = \hat{2}$, să se calculeze în Z_5 suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.
   c) Pentru $a = b = \hat{2}$, să se rezolve în Z_5 ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.
6. Se consideră polinoamele $f = (X+1)^{2012} + (X-1)^{2012}$ şi $g = X + 1$. Polinomul f are forma algebrică $f = a_{2012}X^{2012} + a_{2011}X^{2011} + ... + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, ..., a_{2012} \in R$.
   a) Să se determine a_0.
   b) Să se calculeze restul împărţirii polinomului f la polinomul *g*.
   c) Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului *f*.
7. Se consideră polinoamele $f, g \in R[X]$, $f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$.
   a) Să se descompună polinomul *g* în produs de factori ireductibili în *R*[*X*].
   b) Să se demonstreze că polinomul *f* nu este divizibil cu polinomul *g*.
   c) Să se determine restul împărţirii polinomului *f* la polinomul *g*.
8. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in R$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4.
   a) Să se determine $m, n \in R$ ştiind că polinomul *f* admite rădăcinile $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.
   b) Să se determine $m \in R$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relaţia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.
   c) Pentru *m*=1 şi *n*=1 să se descompună polinomul *f* în produs de factori ireductibili în *R*[*X*].
9. Se consideră polinoamele cu coeficienţi raţionali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$.
   a) Să se determine $a, b \in Q$, astfel încât polinomul *f* să fie divizibil cu polinomul *g*.
   b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ să se descompună polinomul *f* în produs de factori ireductibili în $Q[X]$.
   c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.

10. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2 . x_3 \in R.$
   a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 1.$
   b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18.$
   c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(3^x) = 0.$
11. Se consideră polinomul cu coeficienţi raţionali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ şi suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in N^*,$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului *f*.
   a) Să se determine numărul raţional a astfel încât polinomul *f* să admită rădăcina $x_1 = -2.$
   b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0.$
   c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1.$
12. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in Z_5[X]$ şi $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in Z_5[X].$
   a) Să se claculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}).$
   b) Să se rezolve în mulţimea Z_5 ecuaţia $f(x) = \hat{0}.$
   c) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului *f* la polinomul *g*.
13. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ care are coeficienţi reali.
   a) Să se determine $m \in R$ astfel încât polinomul *f* să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1.$
   b) Pentru $m = -9$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $R[X].$
   c) Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului *f*.
14. Fie polinomul $f_a = X^3 + aX^2 - aX - 4$ care are coeficienţii numere reale.
   a) Să se determine $a \in R$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2,$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f_a.
   b) Să se determine $a \in R$ astfel încât polinomul f_a să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2.$
   c) Să determine $a \in Z$ pentru care polinomul f_a are o rădăcină raţională pozitivă.
15. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1,$ unde $a \in Z$.
   a) Să se determine *a* ştiind că *x*=1 este rădăcină a polinomului *f*.
   b) Pentru *a*=1 să se determine rădăcinile reale ale polinomului *f*.
   c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0, \forall x \in Q \setminus Z.$
16. Se consideră inelul polinoamelor $z_3[X].$
   a) Pentru $g \in Z_3[X], g = (X + \hat{2})^2 (X + \hat{1}),$ să se calculeze $g(\hat{0}).$
   b) Dacă $f \in Z_3[X], f = X^3 + \hat{2}X,$ să se arate că $f(x) = \hat{0}, \forall x \in Z_3.$
   c) Să se determine toate polinoamele $h \in Z_3[X],$ care au gradul egal cu 3 şi pentru care $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2}).$
17. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4,$ unde $m \in R.$
   a) Să se determine $m \in R$ ştiind că *x* =1 este rădăcină a polinomului *f*.
   b) Să se determine $m \in R$ ştiind că suma rădăcinilor polinomului *f* este egală cu 0.
   c) Pentru $m = -5$ să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0.$
18. Se consideră polinomul $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2,$ unde $a \in R.$
   a) Ştiind că *a* =0 să se determine soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0.$
   b) Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a).$
   c) Să se determine $a \in R$ pentru care polinomul *f* are toate rădăcinile reale.
19. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35 \in R[X].$
   a) Să se arate că $f = (X^2 - 6)^2 - 1.$
   b) Să se demonstreze că polinomul *f* nu are rădăcini întregi.

c) Să se descompună polinomul *f* în produs de factori ireductibili în $R[X]$.

20. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in R[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului *f* ştiind că *a* = – 1, *b* = – 2 şi *c*=0.

c) Ştiind că rădăcinile polinomului *f* sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

21. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, unde $a, b \in R$.

a) Pentru *a* =1 şi **b**=0 să se determine x_1, x_2, x_3.

b) Ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, să se arate că *a*=1.

c) Ştiind că $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$, să se determine numerele reale *a* şi *b*.

22. În inelul $R[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X - 5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b) Să se determine numărul real *a* pentru care restul împărţirii polinomului *f* la $X - a$ să fie -5.

c) Să se arate că valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_2 x_3 x_1 \\ x_3 x_1 x_2 \end{vmatrix}$ este număr întreg.

23. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1, m \in R$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Se defineşte $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in N^*$.

a) Să se determine numărul real *m* astfel încât $x_1 = 2$.

b) Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c) Să se arate că pentru orice număr par $m \in Z$ polinomul *f* nu are rădăcini raţionale.

24. Se consideră polinoamele $f, g \in R[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.

b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului *g*.

c) Să se calculeze $f(a)$, ştiind că *a* este o rădăcină a polinomului g.

25. Se consideră polinoamele $f, g \in Z_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ şi $g = X^2 + \hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

c) Să se determine numărul rădăcinilor din Z_5 ale polinomului *f*.

26. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in R$.

a) Să se calculeze diferenţa *S – S'* unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ S' şi $S' = y_1 + y_2$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului *f* la *g*.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

27. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$.

a) Să se arate că polinomul *f* este divizibil cu $g = X^2 - 1$.

b) Să se calculeze produsul $S \cdot P$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

c) Să se caluleze suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

28. Se consideră polinomul $f \in R[X]$, $f(X) = (X+1)^{2012} - (X-1)^{2012}$ care are forma algebrică $f(X) = a_{2012}X^{2012} + a_{2011}X^{2011} + ... + a_1X + a_0$.
   a) Să se determine a_0.
   b) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr întreg par.
   c) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului *f*.
29. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in R$.
   a) Pentru *c*=501, să se demonstreze că $f(1) + f(-1) = 1004$.
   b) Pentru a =– 2 , *b*=2 şi *c* =– 1 să se determine rădăcinile reale ale polinomului *f*.
   c) Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienţilor *a*, *b*, *c* astfel ca *f* să se dividă cu polinomul $g = X^3 - X$.
30. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a,b,c \in R$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$.
   a) Să se determine numărul real c ştiind că $f(1) + f(-1) = 2a + 1$.
   b) Ştiind că *a* =– 3, *b*=1, *c*=1, să se determine rădăcinile reale ale polinomului *f*.
   c) Să se exprime în funcţie de numerele reale *a*, *b*, *c* determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.
31. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{1006}$, cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{2012}X^{2012}$.
   a) Să se calculeze $f(-1)$.

   b) Să se arate că $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2012}$ este un număr întreg impar.
   c) Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $X^2 - 1$.

SUBIECT III.

Analiza matematica Cl. A XI-a si a XII-a. Programa *M_ stiintele naturii,tehnologic*

1.*Derivate. Studiul functiilor cu ajutorul derivatelor.*

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, x\le 1\\ ax+2, x>1\end{cases}$.
   a) Să se determine valoarea parametrului real *a* astfel încât funcţia *f* să fie continuă în punctul $x_0=1$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot x\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:R\to R$ de forma $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}\cdot e^x-1, x\le 1\\ \ln x, x>1\end{cases}$.
   a) Să se studieze continuitatea funcţie *f* în punctul $x_0=1$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.
   c) Să se arate că funcţia *f* este concavă pe $(1;+\infty)$.

3. Se consideră funcţia $f:R\to R$ de forma $f(x)=\begin{cases}e^x-1, x<0\\ x^2+x+a, x\ge 0\end{cases}$ unde $a\in R$.
   a) Să se determine $a\in R$ astfel încât funcţia *f* să fie continuă în punctul $x_0=0$.
   b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă – 1.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)+1}{x^2+x}$.

4. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\ge 1\\ -x^2+x, x<1\end{cases}$.
   a) Să se studieze continuitatea funcţie *f* în punctul $x_0=1$.
   b) Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.
   c) Să se studieze derivabilitatea funcţie *f* în punctul $x_0=1$.

5. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{-1\}\to R,\ f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.
   a) Să se calculeze derivata funcţiei *f*.
   b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.
   c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru $\forall x<-1$.

6. Se consideră funcţia $f:R\to R,\ f(x)=e^x-e^{-x}$.
   a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.
   b) Să se arate că funcţia *f* este crescătoare pe *R*.

c) Să se calculeze $S = g(0) + g(1) + ... + g(2012)$, unde $g : R \to R,\ g(x) = f'(x) - f''(x)$ şi f'' reprezintă derivata a doua a funcţiei *f*.

7. Se consideră funcţia $f : R \to R,\ f(x) = x + e^{-x}$.
   a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
   b) Să se arate că *f* este descrescătoare pe $(-\infty;0]$ şi crescătoare pe $[0;+\infty)$.
   c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.
8. Se consideră funcţia $f : R \to R,\ f(x) = x^{2012} - 2012(x-1) - 1$.
   a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.
   b) Să scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
   c) Să se arate că *f* este convexă pe *R*.
9. Se consideră funcţia $f : R \to R,\ f(x) = e^x + x^2$.
   a) Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
   b) Să se demonstreze că funcţia *f* nu are asimptotă către $+\infty$.
   c) Să se demonstreze că funcţia *f* este convexă pe R.
10. Se consideră funcţia $f : (0;+\infty) \to R$ definită prin $f(x) = x - 2\ln x$.
   a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0;+\infty)$
   b) Să se demonstreze că funcţia *f* este convexă pe intervalul $(0;+\infty)$.
   c) Să se demonstreze că $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4},\ \forall x \in (0;+\infty)$
11. Se consideră funcţia $f : R \setminus \{-1\} \to R$ definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.
   a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}, \forall x \in R \setminus \{-1\}$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.
   c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru $\forall x > -1$.
12. Se consideră funcţia $f : (0;+\infty) \to R$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
   a) Să se calculeze $f'(e)$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului *f*.
   c) Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$ pentru $\forall x > 0$.
13. Se consideră funcţiile $f_n : R \to R$ date prin $f_0(x) = e^{-x} - 1$ şi $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ pentru $\forall n \in N$.
   a) Să se calculeze $f_1(x),\ x \in R$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.
   c) Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.
14. Se consideră funcţia $f : R^* \to R$ definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.
   a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
   b) Să se demonstreze că funcţia *f* este descrescătoare pe $(0;2]$.
   c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.
15. Se consideră funcţia $f : R \setminus \{1\} \to R$ definită prin $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R \setminus \{1\}$.
b) Să se demonstreze că funcţia *f* admite două puncte de extrem.
c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

16. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției *f*.
c) Să se calculeze $\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)$.

17. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = e^x - x$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$ pentru $\forall x \in R$.
c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

18. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + e^x$.
a) Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
b) Să se arate că funcţia *f* este convexă pe R.
c) Să se rezolve în *R* ecuaţia $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.

19. Se consideră funcţia $f: (0; +\infty) \to R$ $f(x) = x^2 \ln x$.
a) Să se arate că $f'(x) = x(2\ln x + 1)$, $\forall x \in (0; +\infty)$.
b) Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$.
c) Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, pentru $\forall x > 0$.

20. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$.
a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.
b) Să se arate că funcţia *f* este concavă pe *R*.
c) Să se demonstreze că panta tangentei în orice punct graficul funcţiei *f* este mai mare decât 1.

21. Se consideră funcţia $f: R \to R$ $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
c) Să se demonstreze că funcţia f' este crescătoare pe *R*.

22. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.
c) Ştiind că $g: R^* \to R$ este funcţia definită prin $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine $\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + ... + g(x^{2011}) + x^{2012}}{x^{2011}}$.

23. Se consideră funcţia $f: (1; +\infty) \to R$, $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (1;+\infty)$.

b) Să se verifice că $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$.

c) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(1;+\infty)$.

24. Se consideră funcţia $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0) = 1$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe R.

c) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$.

25. Se consideră funcţiile $f, g: R \to R$, $f(x) = (x-1)e^x$ şi $g(x) = xe^x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = g(x)$ pentru $\forall x \in R$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei g.

c) Dacă $I \subset R$ este un interval, să se demonstreze că funcţia g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcţia f este convexă pe I.

26. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0;+\infty)$.

b) Să se determine $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$.

27. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x}, x \geq 0 \\ e^x, x < 0 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0 = 0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că funcţia f este concavă pe intervalul $(0;+\infty)$.

28. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax-6, x < 4 \\ \sqrt{x}, x \geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui a, astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.

b) Să se calculeze $f'(9)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(9;3)$.

29. a) Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12$.

c) Să se determine semnul funcţiei $g:(0;+\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = (x^2-1)\ln x$.

30. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru $\forall x > 0$.

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $e^x \geq ex$ pentru $\forall x > 0$.

2.*Primitive. Integrala definita*

31. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei $g:[0;1]\to R$, $g(x)=3^{-x}$.

c) Să se arate că orice primitivă *F* a funcţiei *f* este concavă pe $(-\infty;0]$ şi convexă pe $[0;+\infty)$.

32. Se consideră funcţiile $f,F:[1;+\infty)\to R$, date prin $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ şi $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

a) Să se arate că funcţia *F* este o primitivă a funcţiei *f,* care se anulează în $x=1$.

b) Să se calculeze $\int_{1}^{2} f\left(e^x\right)dx$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x} f(t)dt=f(1)$.

33. Se consideră integralele $I_n=\int_{1}^{2} x^n e^x dx,\ n\in N$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se determine I_1.

c) Să se arate că $(n+1)I_n+I_{n+1}=e\left(2^{n+1}e-1\right)$ pentru $\forall n\in N$.

34. Se consideră funcţia $f:R\to R$ definită prin $f(x)=xe^x$.

a) Să se determine $\int_{0}^{1} f(x)e^{-x}dx.$

b) Să se arate că $\int_{0}^{1} f''(x)dx=2e-1,$ unde f'' este derivata a doua a funcţiei *f.*

c) Să se calculeze $\int_{1}^{2}\frac{f\left(x^2\right)}{x}dx$.

35. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx$

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx=\ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e(e-1)$.

36. Se consideră integralele $I=\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx$ şi $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{x+1}dx$.

a) Să se verifice că $I+J=e-1$.

b) Utilizând inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru $\forall x\in R$, să se arate că $J\geq\frac{1}{2}$.

c) Folosind eventual, metoda integrării prin părţi să se demnostreze că $I=\frac{e-2}{2}+\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

37. Se consideră funcţiile $f_n:[0;1]\to R$ definite prin $f_1(x)=1-x$, $f_{n+1}(x)=f_n(x)+(-1)^{n+1}x^{n+1}$, unde $n\in N^*$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x)dx$.

b) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei f_1.

c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)f_{2008}(x)dx=\frac{2011}{2010}$.

38. Pentru orice număr natural nenul *n* se consideră integralele $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in N^*$.

c) Utilizând eventual inegalitatea $\frac{x^n}{2}\leq\frac{x^n}{x+1}\leq x^n$, adevărată pentru $\forall x\in[0;1]$ şi $n\in N^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{2}\leq 2011\cdot I_{2010}\leq 1$.

39. Se consideră funcţiile $f,g:(0;+\infty)\to R$ defintie prin $f(x)=x^2+x\ln x$ şi $g(x)=2x+\ln x+1$.

a) Să se arate că *f* este o primitivă a funcţiei *g*.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *g*, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

40. Se consideră funcţia $f:R\to R$ definită prin $f(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ e^x+1, x\geq 0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia *f* admite primitive.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_{0}^{1} xf(x^2)dx = \frac{e}{2}$.

41. Se consideră funcţiile $f, g : R \to R$ defintie prin $f(x) = \ln(x^2+1)$ şi $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se arate că $\int_{0}^{1} f'(x)dx = \ln 2$.

b) Să se demonstreze că $\int g(x)dx = f(x) + C.$

c) Să se calculeze $\int_{1}^{2} \frac{g(x)}{f^2(x)}dx$.

42. Se consideră funcţia $f : R \to R$ definită prin $f(x) = \begin{cases} x-1, x \geq 1 \\ -x+1, x < 1 \end{cases}$.

a) Să se calculeze $\int_{1}^{2} f(x)dx$.

b) Să se determine $a \in (0;1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 1$.

c) Utilizând faptul că $e^x \geq 1$ pentru $\forall x \geq 0$ să se calculeze $\int_{0}^{1} xf(e^x)dx$.

43. Se consideră funcţiile $f, F : (0;+\infty) \to R$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ şi $F(x) = x - \ln x.$

a) Să se arate că funcţia *F* este o primitivă a funcţiei *f*.

b) Să se calculeze $\int_{1}^{2} F(x) \cdot f(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei *F*, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = e$.

44. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = e^x - x.$

a) Să se verifice că $\int_{0}^{1} f(x)dx = e - \frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze $\int_{0}^{1} xf(x)dx$.

c) Să se arate că dacă $F : R \to R$ este o primitivă a funcţiei *f*, atunci $\int_{e}^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x}dx = F(2) - F(1).$

45. Se consideră funcţiile $f, g : [1;+\infty) \to R$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ şi $g(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

a) Să se arate că *f* este o primitivă a funcţiei *g*.

b) Să se calculeze $\int_{1}^{e} f(x)g(x)dx$.

c) Să se rezolve în $[1;+\infty)$ ecuaţia $\int_1^a f(x)dx = 2$.

46. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx.$

a) Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

47. Se consideră integralele $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}dx,$ unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru $\forall x \neq 0$, să se determine I_1.

c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

48. Se consideră funcţiile $f, g:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ şi $g(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

a) Să se arate că funcţia *f* este o primitivă a funcţiei *g*.

b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)dx.$

c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)dx = -1,$ unde f'' este derivata a doua a funcţiei *f*.

49. Se consideră funcţiile $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ şi $g(x) = x.$

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = e-1.$

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx.$

c) Să se demonstreze că $\int_1^4 f(x^n)\cdot g^{2n-1}(x)dx = \frac{e-1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

50. Se consideră funcţiile $f, F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 + 2x$ şi $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1.$

a) Să se arate că funcţia *F* este o primitivă a funcţiei *f*.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx.$

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginită de graficul funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

51. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+1, x<0 \\ \dfrac{1}{x+1}-\sqrt{x}, x\geq 0 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că funcţia *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)dx.$

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-xf\left(x^2\right)$, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

52. Se consideră funcţiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m^2x^2+mx+1,$ unde $m\in\mathbb{R}^*$.

a) Să se demonstreze că primitivele funcţiilor f_m sunt funcţii cerescătore, pentru $\forall m\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\int\limits_0^1\left(f_1(x)-x^2-1\right)e^x dx.$

c) Să se determine $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care aria suprafeţei plane determinată de graficul funcţiei f_m, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=1$ are valoare minimă.

53. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, x\leq 0 \\ x+\sqrt{x}, x>0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia *f* adimte primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx.$

c) Să se demonstreze că dacă $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_c^d f(x)dx,$ unde *a, b, c* sunt numere reale şi funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei *f*, atunci numerele $F(a),F(b),F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

54. Pentru orice număr natural nenul *n* se consideră funcţiile $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^ne^x$ şi integralele $I_n=\int\limits_0^1 f(x)dx.$

a) Să se verifice că $\int\limits_0^1 e^{-x}f_1(x)dx=\dfrac{1}{2}.$

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_n+nI_{n-1}=e,\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2.$

55. Se consideră funcţiile $f_n:[1;2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+...+\dfrac{1}{x+n}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $\int\limits_1^2 f_0(x)dx.$

b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze aria suparfeţei plane determinate de graficul funcţiei f_n, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=1, x=2.$

c) Ştiind că *F* este o primitivă a funcţiei f_1, să se arate că funcţia $G:[1;2]\to\mathbb{R}$, definită prin $G(x)=F(x)-\frac{5}{6}x$ este crescătoare.

56. Se consideră funcţia $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3}.$

a) Să se demonstreze că $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+1$ pentru $\forall x\in[0;+\infty).$

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx.$

c) Să se determine numărul real pozitiv *k* astfel încât ariei suprafeţei plane determinate de graficul funcţiei *f*, axa *Ox* şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=k$ să fie egală cu $k+\ln k.$

57. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx.$

a) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx\le 1.$

b) Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ şi numerele reale pozitive *a*, *b* şi *c*. Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x)dx,\ \int_1^b f(x)dx,\ \int_1^c f(x)dx$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele *a*, *b*, *c* sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

58. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-2}, x\in(-\infty;1]\\ \ln x-2, x\in(1;+\infty)\end{cases}.$

a) Să se demonstreze că funcţia *f* adminte primitive $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2)f(x)dx.$

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x (f(t)+2)dt.$

59. Se consideră funcţia $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$

a) Să se demonstreze că $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2},\ \forall x\in[0;+\infty).$

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx.$

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-f(x+1)-\frac{1}{x+1}.$

60. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}.$

a) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei *f*.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx.$

c) Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}.$

61. Se consideră funcţiile $F, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=x\cdot e^x$ şi $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Să se verifice că funcţia *F* este o primitivă a funcţiei *f*.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *F*, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x)-f(x)}{e^x+1}dx.$

62. Se consideră funcţiile $f, g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ şi $g(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx,$ unde $x\in[0;1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *g*, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}.$

63. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=x+\frac{1}{x}.$

a) Să se determine $\int f(x)dx,$ unde $x>0.$

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei $g:[1;2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x), x\in[1;2]$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ln x dx.$

64. Se consideră funcţiile $f, g:[0;1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^x+e^{-x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx,$ unde $x\in[0;1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, definită prin $h(x)=xf(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei *g*.

65. Se consideră funcţiile $f, F:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$ şi $F(x)=x+\frac{1}{x}.$

a) Să se verifice că funcţia *F* este o primitivă a funcţiei *f*.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *f*, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot\ln x dx$.

66. Se consideră funcţiile $f, g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=e^{1-x}$.

a) Să se calculeze $\int f(x)dx,$ unde $x\in[0;1]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx\geq 0$.

67. Pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:[0;2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(2-x)^n$.

a) Să se calculeze $\int f_1(x)dx,$ unde $x\in[0;2]$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0;2]\to\mathbb{R}$ definită $g(x)=f_1(x)\cdot e^x,$ axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=2$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei f_5.

68. Fie funcţia $f:[1;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx,$ unde $x\in[1;2]$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei *f*.

c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x dx$..

69. Se consideră funcţiile $f,g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ şi $g(x)=\sqrt{1-x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx,$ unde $x\in[0;1]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *g*, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\cdot\ln x dx$.

70. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx,$ unde $x\in[0;1]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ defintiă prin $g(x)=\dfrac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei $h:[0;1]\to\mathbb{R}, h(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot f(x),$ unde $x\in[0;1]$.

71. Se consideră funcţia $f:[1;e]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln x$.

a) Să se determine $\int f'(x)dx,$ unde $x\in[1;e]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *f*, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

c) Să se arate că $\int_1^e e^x f(x)dx\leq e^e-e$.

72. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

a) Să se calculeze $\int(x+1)\cdot f(x)dx,$ unde $x\in[0;1]$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei *f,* axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Folosind faptul că $1 \le (x+1)^2 \le 4$ pentru $\forall x \in [0;1]$, să se arate că volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei *Ox*, a graficului funcţiei *f*, este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28};\frac{\pi}{7}\right]$.