

## Formule de calcul

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

## Funcția de gradul I

**Definiție:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ , se numește funcția de gradul I

$$A(\alpha, \beta) \in G_f \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta$$

## Funcția de gradul II

**Definiție:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$  se numește funcția de gradul II

**Maximul sau minimul funcției de gradul II**

Dacă  $a < 0$  atunci  $f_{\max} = \frac{-\Delta}{4a}$ , realizat pentru  $x = \frac{-b}{2a}$

Dacă  $a > 0$  atunci  $f_{\min} = \frac{-\Delta}{4a}$ , realizat pentru  $x = \frac{-b}{2a}$ ; Vârful parabolei  $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

**Ecuatia de gradul II:**  $ax^2 + bx + c = 0; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$

Relațiile lui Viete:  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Dacă  $\Delta > 0 \Rightarrow$  ecuația are rădăcini reale și diferite.

Dacă  $\Delta = 0 \Rightarrow$  ecuația are rădăcini reale și egale.

Dacă  $\Delta < 0 \Rightarrow$  ecuația nu are rădăcini reale.

Dacă  $\Delta \geq 0 \Rightarrow$  ecuația are rădăcini reale.

**Semnul funcției de gradul II**

$\Delta > 0$

X	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$\infty$	
f(x)	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$\infty$
f(x)	semnul lui a	0	semnul lui a

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$\infty$
f(x)	semnul lui a	

**Imaginea funcției de gr. II** Dacă  $a < 0$ ,  $\text{Im}f = (-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$ , iar dacă  $a > 0$ ,  $\text{Im}f = [\frac{-\Delta}{4a}, \infty)$

## Funcții

**Definiții:** Fie  $f:A \rightarrow B$

**I. 1) Funcția  $f$  se numește injectivă**, dacă  $\forall x_1, x_2 \in A$  cu  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

**2) Funcția  $f$  este injectivă** dacă  $\forall x_1, x_2 \in A$  cu  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**3) Funcția  $f$  este injectivă**, dacă orice paralelă la axa  $Ox$ , dusă printr-un punct al lui  $B$ , intersectează graficul funcției în cel mult un punct.

**4) Funcția  $f$  nu este injectivă** dacă  $\exists x_1 \neq x_2$  a.i.  $f(x_1) = f(x_2)$

**II.1) Funcția  $f$  este surjectivă**, dacă  $y \in B$ , există cel puțin un punct  $x \in A$ , a.î.  $f(x)=y$ .

**2) Funcția  $f$  este surjectivă**, dacă  $f(A)=B$ .

**3) Funcția  $f$  este surjectivă**, dacă orice paralelă la axa  $Ox$ , dusă printr-un punct al lui  $B$ , intersectează graficul funcției în cel puțin un punct.

**III.1) Funcția  $f$  este bijectivă** dacă este injectivă și surjectivă.

**2) Funcția  $f$  este bijectivă** dacă pentru orice  $y \in B$  există un singur  $x \in A$  a.î.  $f(x)=y$  (ecuația  $f(x)=y$ , are o singură soluție, pentru orice  $y$  din  $B$ )

**3) Funcția  $f$  este bijectivă** dacă orice paralelă la axa  $Ox$ , dusă printr-un punct al lui  $B$ , intersectează graficul funcției într-un singur punct.

## IV. Compunerea a două funcții

Fie  $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$   $g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

**V.  $1_A : A \rightarrow A$  prin  $1_A(x) = x$ ,  $\forall x \in A$ .** (aplicația identică a lui  $A$ )

**Definiție:** Funcția  $f: A \rightarrow B$  este inversabilă, dacă există o funcție  $g: B \rightarrow A$  astfel încât

$g \circ f = 1_A$  și  $f \circ g = 1_B$ , funcția  $g$  este inversa funcției  $f$  și se notează cu  $f^{-1}$ .

**Teoremă:**  $f$  este bijectivă  $\Leftrightarrow f$  este inversabilă.

## Definiții:

$f: R \rightarrow R$  se numește funcție pară dacă  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in R$

$f: R \rightarrow R$  se numește funcție impară dacă  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in R$

$f: A \rightarrow R (A \subset R)$  se numește periodică de perioadă  $T \neq 0$ , dacă  $\forall x \in A$  avem  $x+T \in A$  și  $f(x+T)=f(x)$ .

Cea mai mică perioadă strict pozitivă se numește perioada principală.

**Numărul funcțiilor  $f: A \rightarrow B$**  este  $[n(B)]^{n(A)}$ ,  $n(A)$  reprezentând numărul de elemente al mulțimii  $A$ .

**Numărul funcțiilor bijective  $f: A \rightarrow A$**  este egal cu  $n!$ ,  $n$  fiind numărul de elemente al mulțimii  $A$ .

Numărul funcțiilor injective  $f: A \rightarrow B$  este  $A_n^k$ , unde  $n$  reprezintă numărul de elemente al mulțimii  $B$ , iar  $k$  al mulțimii  $A (k \leq n)$

## Funcția exponențială

**Definiție**  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0, a \neq 1$  se numește funcție exponențială.

### Proprietăți:

- 1) Dacă  $a > 1 \Rightarrow f$  strict crescătoare
- 2) Dacă  $a \in (0, 1) \Rightarrow f$  strict descrescătoare
- 3) Funcția exponențială este bijectivă.

## Funcția logaritmică

**Definiție:**  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $a > 0, a \neq 1$  se numește funcție logaritmică.

### Proprietăți:

- 1) Dacă  $a > 1 \Rightarrow f$  strict crescătoare
- 2) Dacă  $a \in (0, 1) \Rightarrow f$  strict descrescătoare
- 3) Funcția logaritmică este bijectivă
- 4)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$       5)  $\log_a x^m = m \log_a x, m \in \mathbb{R}$
- 6)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$       7)  $a^{\log_a x} = x$

Schimbarea bazei:  $\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$ ,  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

## Progresii aritmetice

**Definiție:** Se numește **progresie aritmetică** un șir de numere reale  $a_n$  în care diferența oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant  $r$ , numit rația progresiei aritmetice:  $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \geq 1$   
Se spune că numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**Teoremă:** șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  este progresie aritmetică  $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$

**Termenul general** al unei progresii aritmetice:  $a_n = a_1 + (n-1)r$

**Prop.:** Numerele  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică  $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$

**Suma primilor  $n$  termeni** ai unei progresii aritmetice:  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ .

## Progresii geometrice

**Definiție :** Se numește **progresie geometrică** un șir de numere reale  $b_n, b_1 \neq 0$  în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant  $q$ , numit rația progresiei

geometrice:  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, q \neq 0$

Se spune că numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

**Teoremă:** șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$  este progresie geometrică  $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 2$

**Termenul general** al unei progresii geometrice:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

**Prop.:** Numerele  $a, b, c$  sunt în progresie geometrică  $\Leftrightarrow b^2 = a \cdot c$

**Suma primilor  $n$  termeni** ai unei progresii geometrice:  $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$

sau  $S_n = n \cdot b_1$ , dacă  $q = 1$

**Formule utile:**

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

**Modulul numerelor reale Proprietăți:**

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**1.**  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  **2.**  $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$  **3.**  $|x| = |-x|$  **4.**  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  **5.**  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

**6.**  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$  **7.**  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty), a > 0$  **8.**  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Partea întreagă**

**1.**  $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, [x] \in \mathbb{Z} \text{ și } \{x\} \in [0,1)$

**2.**  $[x] \leq x < [x] + 1, [x] = a \Rightarrow a \leq x < a + 1$

**3.**  $[x+k] = [x] + k, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

**4.**  $\{x+k\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

## Numere complexe

### 1. Numere complexe sub formă algebrică

$$z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1, a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

C- mulțimea numerelor complexe;  $C = \{a + bi/a, b \in \mathbb{R}\}$

Conjugatul unui număr complex:  $\bar{z} = a - bi$

#### Proprietăți:

$$1. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$3. \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$4. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Modulul unui număr complex:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

#### Proprietăți:

$$1. |z| \geq 0, \forall z \in C \quad 2. |z| = |\bar{z}| \quad 3. |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad 4. |z^n| = |z|^n \quad 5. \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$6. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

### Numere complexe sub formă trigonometrică

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

$$z = r(\cos t + i \sin t), r = \sqrt{a^2 + b^2}, \operatorname{tg} t = \frac{b}{a}; r - \text{raza polară}; t - \text{argument redus}, t \in [0, 2\pi)$$

M(a,b)-reprezintă imaginea geometrică a numărului complex  $z = a + bi$

**Operații: Fie:**  $z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)], \quad z^n = r^n (\cos nt + i \sin nt)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$$

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

## Combinatorică

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n, n \in N (0! = 1) \quad , \quad P_n = n!, n \in N^*$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n; k, n \in N, n \geq 1 \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \leq k \leq n; k, n \in N$$

$$\textbf{Proprietăți:} \quad 1. C_n^k = C_n^{n-k}, 0 \leq k \leq n; k, n \in N \quad 2. C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, 1 \leq k < n; k, n \in N$$

$$\textbf{Binomul lui Newton:} (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$$

$$\textbf{Termenul general:} T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, k = 0, 1, \cdots, n$$

### Proprietăți:

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n \text{ (numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu } n \text{ elemente este } 2^n \text{)}.$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}.$$

## Geometrie vectorială

### Definiție:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeași direcție, același sens și același modul. Doi vectori se numesc opuși dacă au aceeași direcție, același modul și sensuri contrare:  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

**Definiție:** Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puțin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli și au aceeași direcție. În caz contrar se numesc necoliniari.

**Teoremă:** Fie  $\vec{a}, \vec{b}$  doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul  $\vec{v}$ , există  $\alpha, \beta \in R(\text{unice})$  astfel încât  $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$

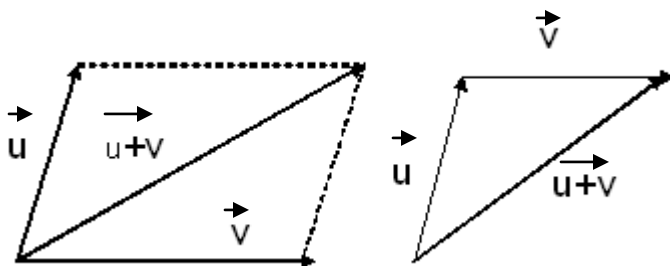
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ -modulul vectorului } \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A) \text{ -coordonatele vectorului } \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mijlocul segmentului AB: } x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\text{Centrul de greutate al triunghiului ABC: } x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Adunarea vectorilor se poate face după regula paralelogramului sau triunghiului



**Teoremă:** Vectorii  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  sunt **coliniari**  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R \text{ a.i. } \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ .

Punctele A, B, C sunt coliniare  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R \text{ a.i. } \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$

$AB \parallel CD \Leftrightarrow \exists \lambda \in R \text{ a.i. } \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$ .

### Produsul scalar a doi vectori .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, \vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2, |\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Dacă  $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , atunci  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .



## Ecuatiile dreptei în plan

Ecuatia carteziană generală a dreptei:  $ax+by+c=0$  (d)

Punctul  $M(x_M, y_M) \in d \Leftrightarrow a \cdot x_M + by_M + c = 0$

Ecuatia dreptei determinată de două puncte distincte:  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuatia dreptei determinată de un punct  $A(x_A, y_A)$  și panta  $m$ :  $y - y_A = m(x - x_A)$

Dreptele  $d_1, d_2$  sunt paralele  $\Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2}$

Dreptele  $d_1, d_2$  sunt perpendiculare  $\Leftrightarrow m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1$

Distanța dintre punctele  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Distanța de la punctul  $A(x_A, y_A)$  la dreapta  $h: ax+by+c=0$ :

$$d(A, h) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Punctele } A, B, C \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## Permutări

**Definiție:** Se numește permutare de gradul  $n$  a mulțimii  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  orice funcție bijectivă

$$\sigma : A \rightarrow A. \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ se numește permutarea identică de gradul } n.$$

$S_n$  reprezintă mulțimea permutărilor de gradul  $n$ .

**Produsul (compunerea) a două permutări:** Fie  $\sigma, \tau \in S_n$

$$\sigma \circ \tau : A \rightarrow A, (\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$$

**Proprietăți:**

$$1) (\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta), \forall \sigma, \tau, \delta \in S_n$$

$$2) \sigma e = e\sigma = \sigma, \forall \sigma \in S_n$$

$$3) \forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n \text{ a.i. } \sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e, \sigma^{-1} \text{ se numește inversa permutării } \sigma$$

**Puterile unei permutări:** Fie  $\sigma \in S_n$  - definim  $\sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma, n \in \mathbb{N}^* (\sigma^0 = e)$

**Prop.:** Fie  $\sigma \in S_n \Rightarrow \sigma^m \sigma^n = \sigma^{m+n}, (\sigma^m)^n = \sigma^{mn}, \forall m, n \in \mathbb{N}$

**Inversiunile unei permutări:**

**Definiție:** Fie  $\sigma \in S_n$  și  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i < j$ . Perechea  $(i, j)$  se numește inversiune a permutării  $\sigma$  dacă  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Numărul inversiunilor permutării  $\sigma$  se notează cu  $m(\sigma)$ .

**Definiții:** Se numește semnul permutării  $\sigma$ , numărul  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

Permutarea  $\sigma$  se numește permutare pară dacă  $\varepsilon(\sigma) = 1$

Permutarea  $\sigma$  se numește permutare impară dacă  $\varepsilon(\sigma) = -1$

**Propoziție:**  $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), \forall \sigma, \tau \in S_n$

Permutarea  $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & i & \cdots & n \end{pmatrix}$  se numește transpoziție.

**Proprietăți:**

$$1) \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad 2) (\delta_{ij})^2 = e \quad 3) \delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij} \quad 4) \varepsilon(\delta_{ij}) = -1$$

## Matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{-matrice cu m linii \u015fi n coloane; } A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

$A \in M_{m,n}(C)$ , unde  $M_{m,n}(C)$  -reprezint\u0103 mul\u0163imea matricelor cu m linii \u015fi n coloane cu elemente din C.

${}^tA \in M_{n,m}(C)$  -reprezint\u0103 transpusa lui A \u015fi se ob\u021bine din A prin schimbarea liniilor \u00een Coloane (sau a coloanelor \u00een linii).

Dac\u0103  $m = n$  atunci matricea se nume\u015fte p\u0103tratic\u0103 de ordinul n \u015fi are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix} - A \in M_n(C)$$

$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  - reprezint\u0103 urma matricei A

Sistemul ordonat de elemente  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  se nume\u015fte diagonala principal\u0103 a matricei A, iar sistemul ordonat de elemente  $(a_{1n}, \dots, a_{n1})$  se nume\u015fte diagonala secundar\u0103 a matricei A.

$$I_n = \begin{pmatrix} 100\dots 0 \\ 010\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 000\dots 1 \end{pmatrix} \text{-matricea unitate de ordinul n; } O_{m,n} = \begin{pmatrix} 000\dots 0 \\ 000\dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 000\dots 0 \end{pmatrix} \text{-matricea nul\u0103}$$

$${}^t({}^tA) = A, {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, {}^t(aA) = a{}^tA, {}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

**Puterile unei matrice:** Fie  $A \in M_n(C)$

Definim  $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^n = A^{n-1} \cdot A, n \in \mathbb{N}^*$

**Rela\u021bia Hamilton-Cayley:**  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2$ , unde  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

## Determinanți

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ (determinantul de ordinul doi)}$$

Determinantul de ordinul trei (regula lui Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$
$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

### Proprietăți:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;
5. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sunt înmulțite cu un element  $a$ , obținem o matrice al cărei determinant este egal cu  $a$  înmulțit cu determinantul matricei inițiale.
6. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale atunci determinantul matricei este nul;
7. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii (sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.
8. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei  $A$  adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu același element se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei inițiale;

$$9) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+m & e+n & f+p \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$10) \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B, \forall A, B \in M_n(C)$$

**Definiție:** Fie  $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ . Se numește minor asociat elementului  $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$

determinantul matricei obținute din  $A$  prin eliminarea liniei  $i$  și a coloanei  $j$ . Se notează acest minor cu  $M_{ij}$ .

Numărul  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  se numește complementul algebric al elementului  $a_{ij}$ .

## Matrice inversabile

**Inversa unei matrice:**  $A \in M_n(C)$  se numește inversabilă dacă există o matrice notată  $A^{-1} \in M_n(C)$

a.i.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

**Teoremă:**  $A \in M_n(C)$  inversabilă  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ ,  $A^*$  adjuncta matricei  $A$ .  $A^*$  se obține din  ${}^t A$  înlocuind fiecare element cu complementul său algebric.

Dacă  $A, B \in M_n(C)$  sunt inversabile, atunci au loc relațiile: a)  $(A^{-1})^{-1} = A$  b)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

## Rangul unei matrice

Fie  $A \in M_{m,n}(C)$ ,  $r \in N, 1 \leq r \leq \min(m, n)$

**Definiție:** Se numește minor de ordinul  $r$  al matricei  $A$ , determinantul format cu elementele matricei  $A$  situate la intersecția celor  $r$  linii și  $r$  coloane.

**Definiție:** Fie  $A \neq 0_{m,n}$  o matrice. Numărul natural  $r$  este rangul matricei  $A \Leftrightarrow$  există un minor de ordinul  $r$  al lui  $A$ , nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decât  $r$  (dacă există) sunt nuli.

**Teoremă:** Matricea  $A$  are rangul  $r \Leftrightarrow$  există un minor de ordin  $r$  al lui  $A$ , nenul, iar toți minorii de ordin  $r+1$  (dacă există) obținuți prin bordarea (adaugarea unei linii și a unei coloane) minorului de ordin  $r$  cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase sunt zero.

## Sisteme de ecuații liniare

Forma generală a unui sistem de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute:

[illegible]

$a_{ij}$  -coeficienții necunoscutelor,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - necunoscute,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  -termenii liberi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21}a_{22}.....a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn} \end{pmatrix} \text{-matricea sistemului, } \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}.....a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}.....a_{2n}b_2 \\ ..... \\ a_{m1}a_{m2}.....a_{mn}b_m \end{pmatrix} \text{-matricea extinsă}$$

### **$AX=B$ -forma matriceală a sistemului**

**Definiție:**

- Un sistem se numește incompatibil dacă nu are soluție;
- Un sistem se numește compatibil dacă are cel puțin o soluție;
- Un sistem se numește compatibil determinat dacă are o singură soluție;
- Un sistem se numește compatibil nedeterminat dacă are mai mult de o soluție.

### Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:

Un sistem de ecuații liniare este de tip Cramer dacă numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute și determinantul matricei sistemului este nenul.

**Teorema lui Cramer:** Dacă  $\det A$  notat  $\Delta \neq 0$  , atunci sistemul  $AX=B$  are o soluție unică

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \text{ unde } \Delta_i \text{ se obține înlocuind coloana } i \text{ cu coloana termenilor liberi.}$$

**Teorema lui Kronecker- Capelli:** Un sistem de ecuații liniare este compatibil  $\Leftrightarrow$  rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

**Teorema lui Rouché:** Un sistem de ecuații liniare este compatibil  $\Leftrightarrow$  toți minorii caracteristici sunt nuli.

## Elemente de geometrie și trigonometrie

### Formule trigonometrice. Proprietăți.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in R$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in R$$

$$\sin(x+2k\pi) = \sin x, \forall x \in R, \forall k \in Z$$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x, \forall x \in R, \forall k \in Z$$

$$\operatorname{tg}(x+k\pi) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x+k\pi) = \operatorname{ctg} x$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

### Valori principale ale funcțiilor trigonometrice

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ (impară)}$$

$$\cos(-x) = \cos x \text{ (pară)}$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

## Funcții trigonometrice inverse

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1, 1]$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \forall x \in (0, \pi)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

## Ecuatii trigonometrice

$$\sin x = a, a \in [-1, 1] \Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cos x = b, b \in [-1, 1] \Rightarrow x \in \{\pm \arccos b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{tg} x = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \{\operatorname{arctg} c + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{ctg} x = d, d \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \{\operatorname{arcctg} d + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

**Teorema sinusurilor:**  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ , unde  $R$  este raza cercului circumscris triunghiului.

**Teorema cosinusului:**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

**Aria unui triunghi:**

$$\mathbf{A}_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} \quad \mathbf{A}_{\Delta} = \frac{AB \cdot AC \sin(\angle A)}{2} \quad \mathbf{A}_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\mathbf{A}_{\Delta ABC} = \frac{|\Delta|}{2}, \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\Delta \text{ dreptunghi}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

$$\mathbf{A}_{\Delta \text{ echilateral}} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

**Raza cercului circumscris unui triunghi:**  $R = \frac{abc}{4S}$ , unde  $S$  este aria triunghiului

**Raza cercului înscris într-un triunghi:**  $r = \frac{S}{p}$ , unde  $S$  este aria triunghiului iar  $p = \frac{a+b+c}{2}$



## Grupuri

**Definiție:** Fie  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  lege de compoziție pe  $M$ . O submulțime nevidă  $H$  a lui  $M$ , se numește parte stabilă a lui  $M$  în raport cu legea “ $*$ ” dacă  $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$ .

### Proprietățile legilor de compoziție

Fie  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  lege de compoziție pe  $M$ .

**Legea “ $*$ ” se numește asociativă** dacă  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

**Legea “ $*$ ” se numește comutativă** dacă  $x * y = y * x, \forall x, y \in M$

**Legea “ $*$ ” admite element neutru** dacă există  $e \in M$  a.i.  $x * e = e * x = x, \forall x \in M$

**Definiție:** Cuplul  $(M, *)$  formează un monoid dacă are proprietățile:

1)  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$

2) există  $e \in M$  a.i.  $x * e = e * x = x, \forall x \in M$

Dacă în plus  $x * y = y * x, \forall x, y \in M$  atunci monoidul se numește comutativ.

**Notăție:**  $U(M) = \{x \in M / x \text{ este simetrizabil}\}$

**Definiție:** Cuplul  $(G, *)$  formează un grup dacă are proprietățile:

1)  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

2) există  $e \in M$  a.i.  $x * e = e * x = x, \forall x \in G$

3)  $\forall x \in G, \exists x' \in G$  a.i.  $x * x' = x' * x = e$

Dacă în plus  $x * y = y * x, \forall x, y \in G$  atunci grupul se numește abelian sau comutativ.

**Definiție:** Un grup  $G$  se numește finit dacă mulțimea  $G$  este finită și grup infinit, în caz contrar. Se numește ordinul grupului  $G$ , cardinalul mulțimii  $G$  (numărul de elemente din  $G$ ).

### Ordinul unui element

**Definiție:** Fie  $(G, \bullet)$  un grup și  $x \in G$ . Cel mai mic număr natural nenul  $n$  cu proprietatea  $x^n = e$  se numește ordinul elementului  $x$  în grupul  $G$ . ( $\text{ord } x = n$ )

### Subgrup

**Definiție:** Fie  $(G, *)$  un grup. O submulțime nevidă  $H$  a lui  $G$  se numește subgrup al grupului  $(G, *)$  dacă îndeplinește condițiile:

1)  $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$ .

2)  $\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$

**Grupul claselor de resturi modulo  $n$ ,  $Z_n = \{1, 2, \dots, n-1\}$**

$(Z_n, +)$  – grup abelian

$(Z_n, \cdot)$  – monoid comutativ, în care  $U(Z_n) = \{k \in Z_n / \text{c.m.m.d.c.}(k, n) = 1\}$

### Morfisme și izomorfisme de grupuri

**Definiție:** Fie  $(G, *)$  și  $(G', \circ)$  două grupuri. O funcție  $f: G \rightarrow G'$  se numește morfism de grupuri dacă are loc condiția  $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G$

Dacă în plus  $f$  este bijectivă atunci  $f$  se numește izomorfism de grupuri.

**Prop.** Fie  $(G, *)$  și  $(G', \circ)$  două grupuri. Dacă  $f: G \rightarrow G'$  este morfism de grupuri atunci:

1)  $f(e) = e'$  unde  $e, e'$  sunt elementele neutre din cele două grupuri.

2)  $f(x') = [f(x)]' \quad \forall x \in G$ .

## Inele și corpuri

**Definiție:** Un triplet  $(A, *, \circ)$ , unde  $A$  este o mulțime nevidă iar „ $*$ ” și „ $\circ$ ” sunt două legi de compoziție pe  $A$ , este inel dacă:

- 1)  $(A, *)$  este grup abelian
- 2)  $(A, \circ)$  este monoid
- 3) Legea „ $\circ$ ” este distributivă față de legea „ $*$ ”:

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x) \quad \forall x, y, z \in A$$

**Inelul  $(A, *, \circ)$ , este fără divizori ai lui 0**, dacă  $\forall x, y \neq e_* \Rightarrow x \circ y \neq e_*$  ( $e_*$  element neutru de la legea „ $*$ ”)

Un inel  $(A, *, \circ)$ , se numește comutativ dacă satisface și axioma:  $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in A$

Un inel  $(A, *, \circ)$ , comutativ, cu cel puțin 2 elemente și fără divizori ai lui 0, se numește, **domeniu de integritate**.

**Definiție:** Un inel  $(K, *, \circ)$  cu  $e_* \neq e_\circ$  se numește corp dacă  $\forall x \in K, x \neq e_*, \exists x' \in K$  a.i.

$$x \circ x' = x' \circ x = e_\circ \quad (e_*, e_\circ \text{ fiind elementele neutre})$$

Un corp  $(K, *, \circ)$ , se numește comutativ dacă satisface și axioma:  $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in K$

**Obs.:** Corpurile nu au divizori ai lui zero.

**Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri.**

**Definiție:** Fie  $(A, *, \circ), (A' \oplus, \otimes)$  două inele. O funcție  $f: A \rightarrow A'$  se numește morfism de inele dacă :

$$1) f(x * y) = f(x) \oplus f(y), \forall x, y \in A$$

$$1) f(x \circ y) = f(x) \otimes f(y), \forall x, y \in A$$

$$3) f(e_\circ) = e_\otimes \quad (e_\circ, e_\otimes \text{ fiind elementele neutre corespunzătoare legilor } \circ, \otimes)$$

Dacă în plus  $f$  este bijectivă atunci  $f$  se numește izomorfism de inele.

**Definiție:** Fiind date corpurile  $K, K'$ , orice morfism (izomorfism) de inele de la  $K$  la  $K'$ , se numește morfism (izomorfism) de corpuri.

## Inele de polinoame

**Forma algebrică a unui polinom:**  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_i \in A$  un inel comutativ.

**Definiție:**  $a \in A$  se numește rădăcină a polinomului  $f$  dacă  $f(a)=0$ .

**Teorema împărțirii cu rest:** Fie  $K$  un corp comutativ, iar  $f$  și  $g, g \neq 0$ , *polinoame* din  $K[X]$ .

Atunci există polinoamele  $q$  și  $r$  din  $K[X]$ , unic determinate, astfel încât  $f=gq+r$  cu  $\text{grad} r < \text{grad} g$ .

Dacă  $r = 0$ , adică  $f = gq$ , atunci spunem că polinomul  $g$  divide polinomul  $f$ .

**Teorema restului:** Fie  $K$  un corp comutativ,  $f$  un polinom din  $K[X]$  și  $a$  un element din  $K \Rightarrow$  restul împărțirii lui  $f$  la  $X-a$  este  $f(a)$ .

**Consecință:**  $a$  este rădăcină a lui  $f \Leftrightarrow X-a$  divide  $f$ .

**Definiție:** Elementul  $a \in K$  este rădăcină de ordinul  $p \in \mathbb{N}^*$  pentru polinomul  $f \in K[X]$  dacă  $(X-a)^p$  divide pe  $f$  iar  $(X-a)^{p+1}$  nu divide pe  $f$ .

**Teoremă:** Elementul  $a \in K$  este rădăcină de ordinul  $p \in \mathbb{N}^*$  pentru polinomul  $f \in K[X]$

$\Leftrightarrow f(a) = 0, f'(a) = 0, \dots, f^{(p-1)}(a) = 0$  și  $f^{(p)}(a) \neq 0$ , unde  $f$  este funcția polinomială asociată polinomului  $f$ .

### Polinoame cu coeficienți reali

**Teoremă:** Fie  $f \in \mathbb{R}[X], f \neq 0$ . Dacă  $z = a+ib, b \neq 0$  este o rădăcină complexă a lui  $f$ , atunci:

1)  $\bar{z} = a-ib$  este de asemenea o rădăcină complexă a lui  $f$

2)  $z$  și  $\bar{z}$  au același ordin de multiplicitate.

### Polinoame cu coeficienți raționali

**Teoremă:** Fie  $f \in \mathbb{Q}[X], f \neq 0$ . Dacă  $x_0 = a + \sqrt{b}$  este o rădăcină a lui  $f$ , unde  $a, b \in \mathbb{Q}, b > 0, \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ ,

atunci: 1)  $\bar{x}_0 = a - \sqrt{b}$  este de asemenea o rădăcină a lui  $f$ ; 2)  $x_0, \bar{x}_0$  au același ordin de multiplicitate.

### Polinoame cu coeficienți întregi

**Teoremă:** fie  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0; f \in \mathbb{Z}[X]$

1) Dacă  $x_0 = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  numere prime între ele) este o rădăcină rațională a lui  $f$ , atunci

a)  $p$  divide termenul liber  $a_0$

b)  $q$  divide pe  $a_n$

2) Dacă  $x_0 = p$  este o rădăcină întreagă a lui  $f$ , atunci  $p$  este un divizor al lui  $a_0$ .

## Polinoame ireductibile

**Definiție:** Fie  $K$  un corp comutativ,  $f$  un polinom din  $K[X]$  cu  $\text{grad} f > 0$  se numește reductibil peste  $K$  dacă există  $g, q$  din  $K[X]$  cu  $\text{grad} g < \text{grad} f, \text{grad} q < \text{grad} f$  astfel încât  $f = gq$ .

Dacă  $f$  nu este reductibil peste  $K$  atunci se spune că  $f$  este ireductibil peste  $K$ .

**Prop.:** Polinoamele de grad 2 sau 3 din  $K[X]$  sunt ireductibile peste  $K \Leftrightarrow$  nu au rădăcini în  $K$ .

**Relațiile lui Viète:** Fie  $K$  un corp comutativ,  $f$  un polinom din  $K[X]$ .

$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ . Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt  $n$  rădăcini ale lui  $f$  în  $K$  atunci

$$f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n) \text{ și } x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1} \cdot a_n^{-1}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = a_{n-2} a_n^{-1}$$

.....

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0 a_n^{-1}.$$

$$\text{Dacă } f = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

$$f = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, f \in C[X] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_3 x_4 = \frac{a_2}{a_4} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\frac{a_1}{a_4} \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

## Șiruri de numere reale

**Șir monoton** (crescător sau descrescător)

Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale.

Șirul  $(a_n)$  este crescător dacă:  $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Șirul  $(a_n)$  este strict crescător dacă:  $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Șirul  $(a_n)$  este descrescător dacă:  $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Șirul  $(a_n)$  este strict descrescător dacă:  $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Șir mărginit** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale. Șirul  $(a_n)$  este mărginit dacă:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ a.i. } \alpha \leq a_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Definiție.** Un șir care are limita finită se numește convergent. Un șir care nu are limită sau care are limita infinită se numește divergent

**Teoremă:** Orice șir convergent este mărginit.

**Consecință:** Dacă un șir este nemărginit atunci el este divergent.

**Teoremă** Dacă un șir are limită, atunci orice subșir al său are aceeași limită.

**Consecință:** dacă un șir conține două subșiruri cu **limite** diferite, atunci șirul nu are limită.

▪ **Teorema lui Weierstrass:** Orice șir monoton și mărginit este convergent.

▪ **Teorema cleștelui** Dacă  $x_n \leq a_n \leq y_n, \forall n \geq k$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ .

▪ **Criteriul raportului**

Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,1)$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dacă

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (1, \infty)$  sau  $l = \infty$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

▪ **Lema lui Stolz-Cezaro**

Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri de numere reale.

Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$  (finit sau infinit) și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este strict monoton și nemărginit, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

▪ **Criteriul radicalului**

Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

**Şiruri remarcabile**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, \text{dacă } q = 1 \\ \infty, \text{dacă } q \in (1, \infty) \\ \text{nu există, dacă } q \in (-\infty, -1] \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, \alpha > 0 \\ 0, \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0, \text{unde } a \in (-1, 1), k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e ; e = 2,7178 \dots \text{este constanta lui Euler}$$

$$\text{generalizare: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \text{ dacă } x_n \rightarrow \pm\infty; \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e \text{ dacă } y_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \text{ dacă } x_n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1 \text{ dacă } x_n \rightarrow 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1 \text{ dacă } x_n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1 \text{ dacă } x_n \rightarrow 0,$$

## Limite de functii

**Teoremă:** O funcție are limită într-un punct finit de acumulare dacă și numai dacă are limite laterale egale în acel punct.

$$f \text{ are limită în } x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

**Teoremă (Criteriul cleștelui)**

Fie  $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $D$  și  $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D \cap V, x \neq x_0$ ,  $V$  vecinătate a lui  $x_0$ .

$$\text{Dacă } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

**Limite uzuale. Limite remarcabile.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}, k = m \\ 0, m > k \\ \frac{a_k}{b_m} \cdot (\pm\infty)^{k-m}, k < m \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } a > 1 \\ 0, \text{ dacă } a \in (0, 1) \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a > 1 \\ \infty, \text{ dacă } a \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } a > 1 \\ -\infty, \text{ dacă } a \in (0, 1) \end{cases} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } a > 1 \\ \infty, \text{ dacă } a \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \text{arcctg} x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arcctg} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg} u(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg u(x)}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a, \quad a > 0, a \neq 1 \text{ unde } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

Operații fără sens:  $\frac{\infty}{0}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ .

## Funcții continue

**Definiție** Fie  $f : D \rightarrow R$  și  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D$

$f$  este continuă în  $x_0 \in D$  dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Dacă  $f$  nu este continuă în  $x_0 \in D$ , ea se numește discontinuă în  $x_0$ , iar  $x_0$  se numește punct de discontinuitate.

**Definiții:** Un punct de discontinuitate  $x_0 \in D$  este punct de discontinuitate de prima speță pentru  $f$ , dacă limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$  există și sunt finite.

Un punct de discontinuitate  $x_0 \in D$  este punct de discontinuitate de speța a doua dacă nu este de prima speță. (cel puțin una din limitele laterale ale funcției  $f$  în punctul  $x_0$  nu este finită sau nu există)

**Teoremă:** Fie  $f : D \rightarrow R$  și  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D \Rightarrow f$  continuă în  $x_0$

$$\Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$$

**Teoremă:** Funcțiile elementare sunt continue pe domeniile maxime de definiție.

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

**Teoremă:** Fie  $f: [a, b] \rightarrow R$  o funcție continuă a.î.  $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$  pentru care  $f(c) = 0$ .



## Asimptote

### 1. Asimptote verticale

**Definiție:** Fie  $f : E \rightarrow R, a \in R$  punct de acumulare pentru  $E$ . Se spune că dreapta  $x = a$  este asimptotă verticală la stanga pentru  $f$ , dacă  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \infty$  sau  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ .

**Definiție:** Fie  $f : E \rightarrow R, a \in R$  punct de acumulare pentru  $E$ . Se spune că dreapta  $x = a$  este asimptotă verticală la dreapta pentru  $f$ , dacă  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \infty$  sau  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ .

**Definiție :** Fie  $f : E \rightarrow R, a \in R$  punct de acumulare pentru  $E$ . Se spune că dreapta  $x = a$  este asimptotă verticală pentru  $f$  dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât și la dreapta sau numai lateral.

### 2. Asimptote oblice

**Teorema :** Fie  $f : E \rightarrow R$ , unde  $E$  conține un interval de forma  $(a, \infty)$

Dreapta  $y = mx + n, m \neq 0$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  la graficul lui  $f$  dacă și numai dacă  $m, n$  sunt

numere reale finite, unde  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$ . Analog la  $-\infty$ .

### 3. Asimptote orizontale

**Dacă**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l, l$  număr finit atunci  $y = l$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  la graficul lui  $f$ .

Analog la  $-\infty$

**Obs :** O funcție nu poate admite atât asimptotă orizontală cât și oblică spre  $+\infty (-\infty)$ .

## Funcții derivabile

**Definiție:** Fie  $f:D \rightarrow R$ ,  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D$

Derivata într-un punct:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

$f$  este derivabilă în  $x_0$  dacă limita precedentă există și este finită.

▪ Dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , graficul funcției are în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  tangentă a cărei pantă este  $f'(x_0)$ . Ecuația tangentei este:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Teoremă:** Fie  $f:D \rightarrow R$ ,  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D \Rightarrow f$  este derivabilă în punctul de

acumulare  $x_0 \Leftrightarrow f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in R(\text{finite}) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$ .

**Teoremă**. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

### Puncte de întoarcere. Puncte unghiulare.

**Definiții:** Fie  $f:D \rightarrow R$ ,  $x_0 \in D$  punct de acumulare pentru  $D$ . Punctul  $x_0$  se numește punct de întoarcere al funcției  $f$ , dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  și are derivate laterale infinite și diferite în acest punct. Punctul  $x_0$  se numește punct unghiular al funcției  $f$  dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , are derivate laterale diferite în  $x_0$  și cel puțin o derivată laterală este finită.

## Derivatele funcțiilor elementare

Funcția	Derivata
$c$	0
$x$	1
$x^n, n \in \mathbf{N}^*$	$nx^{n-1}$
$x^r, r \in \mathbf{R}$	$rx^{r-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

### Operații cu funcții derivabile

**Teoremă:** Fie  $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$  derivabile pe  $D \Rightarrow f+g, fg, \frac{f}{g} (g \neq 0)$  sunt funcții derivabile pe  $D$ .

Compunerea a două funcții derivabile este o funcție derivabilă.

### Reguli de derivare

$$(f \pm g)' = f' \pm g'; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'; (\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$$

## Proprietățile funcțiilor derivabile

**Definiție:** Dacă  $f(x) \leq f(x_0)$  (respectiv  $f(x) \geq f(x_0)$ ) pentru orice  $x \in D$  atunci  $x_0$  se numește punct de maxim absolut (respectiv minim absolut)

**Teoremă .** ( Fermat) Fie  $I$  un interval deschis și  $x_0 \in I$  un punct de extrem al unei funcții  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dacă  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$  atunci  $f'(x_0)=0$ .

**Definiție:**O funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) se numește funcție Rolle dacă este continuă pe intervalul compact  $[a, b]$  și derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ .

### Teorema lui Rolle

Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  o funcție Rolle astfel încât  $f(a) = f(b)$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f'(c)=0$ .

**Teorema**(teorema lui J. Lagrange). Fie  $f$  o funcție Rolle pe un interval compact  $[a, b]$ . Atunci  $\exists c \in (a, b)$  astfel încât  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

### Rolul primei derivate

3. Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$ .

Dacă  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) \geq 0$ ),  $\forall x \in I$ , atunci  $f$  este strict crescătoare (crescătoare) pe  $I$ .

Dacă  $f'(x) < 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ),  $\forall x \in I$ , atunci  $f$  este strict descrescătoare (descrescătoare) pe  $I$ .

**Observație:** Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile și se determină punctele de extrem local.

### Rolul derivatei a doua

**Teoremă:** Fie  $f$  o funcție de două ori derivabilă pe  $I$ .

Dacă  $f''(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci  $f$  este convexă pe  $I$ .

Dacă  $f''(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in I$ , atunci  $f$  este concavă pe  $I$ .

**Definiție:** Fie  $f$  o funcție continuă pe  $I$  și  $x_0 \in I$  punct interior intervalului. Spunem că  $x_0$  este punct de inflexiune al graficului funcției dacă  $f$  este convexă pe o vecinătate stânga a lui  $x_0$  și concavă pe o vecinătate dreapta a lui  $x_0$  sau invers.

**Observație:**Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate și concavitate și se determină punctele de inflexiune.

## Noțiunea de primitivă

**Definiție:** Fie  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se numește primitivă a funcției  $f$  pe  $I$ , orice funcție  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă pe  $I$  cu proprietatea  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in I$ .

**Teoremă.** Orice funcție continuă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  posedă primitive pe  $I$ .

**Teoremă:** Fie  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, o funcție care admite primitive pe  $I$ . Atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux.

**Consecințe:**

1. Dacă  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul  $I$ , atunci  $g$  nu admite primitive pe  $I$ .
2. Fie  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $g(I) = \{g(x) / x \in I\}$  nu este interval atunci  $g$  nu admite primitive pe  $I$ .
3. Dacă  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  are discontinuități de prima speță atunci  $g$  nu admite primitive pe  $I$ .

### Tabel de integrale nedefinite

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \in \mathbb{R}, a \neq -1, x \in (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in (0, \infty) \text{ sau } x \in (-\infty, 0)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty, -a) \text{ sau } x \in (-a, a) \text{ sau } x \in (a, \infty)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0, x \in (-a, a)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, a \neq 0, x \in (-\infty, -a) \text{ sau } x \in (a, \infty)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \sin x \neq 0$$

## Integrala definită

**Teoremă.** Funcțiile continue pe un interval  $[a, b]$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ .

**Teoremă.** Funcțiile monotone pe un interval  $[a, b]$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ .

### Proprietățile funcțiilor integrabile.

#### a)(Proprietatea de linearitate)

Dacă  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile și  $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$2) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

b) Dacă  $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$  și este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

c) Dacă  $f(x) \geq g(x)$  pentru orice  $x \in [a, b]$  și dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ ,

atunci  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

#### d)(Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul)

Funcția  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă,  $\forall c \in (a, b)$  funcțiile

$f_1 = f|_{[a, c]}$  și  $f_2 = f|_{[c, b]}$  sunt integrabile și are loc formula:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

e) Dacă funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci și  $|f|$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

#### Teoremă (Formula Leibniz - Newton)

Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție integrabilă și  $f$  admite primitive pe  $[a, b]$  atunci pentru orice

primitivă  $F$  a lui  $f$  pe  $[a, b]$  are loc formula Leibniz-Newton:  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

**Teorema de medie** Dacă  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci există  $c \in [a, b]$  a.i.

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c).$$

Reținem:  $\left( \int_a^x g(t) dt \right)' = g(x)$

### **Teoremă (Formula de integrare prin părți)**

Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  cu  $f, g$  derivabile cu derivatele continue, atunci are loc **formula de integrare**

**prin părți:**  $\int_a^b fg' dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f' g dx.$

**Teoremă:** Fie  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}, a > 0$  o funcție continuă. Atunci

1)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ , dacă  $f$  este funcție pară.

2)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ , dacă  $f$  este funcție impară.

**Teoremă:** Fie  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă de perioadă  $T > 0 \Rightarrow \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \forall a \in \mathbf{R}$

### **Aria unui domeniu din plan**

1. **Aria mulțimii** din plan  $D \subset \mathbf{R}^2$  mărginită de dreptele  $x = a, x = b, y = 0$  și graficul funcției  $f: [a,$

$b] \rightarrow \mathbf{R}$  pozitivă și continuă se calculează prin formula:  $\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(x) dx.$

2. În cazul  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continuă și de semn oarecare, avem:  $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |f(x)| dx.$

3. **Aria mulțimii** din plan mărginită de dreptele  $x = a, x = b$  și graficele funcțiilor

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  continue este calculată prin formula:  $\mathcal{A}(D) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$

**Volumul unui corp de rotație** Fie  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă, atunci corpul  $C_f$  din spațiu obținut prin rotirea graficului lui  $f, G_f$ , în jurul axei  $Ox$ , are volumul calculat prin formula:

$V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$