Permutări

Definiţie

O definiţie riguroasă a permutărilor poate fi aceasta:
„ Fie $A = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte permutare de gradul n orice funcţie bijectivă $f : A \to A$.”

În limbaj uzual, o permutare de gradul n este o rearanjare a numerelor naturale de la 1 la n, şi se notează sub forma unui tablou cu două linii. Prima linie conţine domeniul de definiţie, elementele scriindu-se în ordine crescătoare, iar a doua linie conţine mulţimea de valori ale funcţiei.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aceasta este o permutare de gradul 5. Se poate observa că poziţiei 1 îi corespunde valoarea 3, poziţiei 2 îi corespunde valoarea 2 etc. O observaţie importantă este cea că valorile de pe fiecare rând sunt unice între ele!

Se pune întrebarea: care dintre următoarele tablouri sunt permutări?:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) (2) (3) (4)

(1) - valorea 5 apare de două ori în al doilea rând al tabloului, ceea ce înseamnă că această funcţie nu este injectivă ($f(2) = f(5)$); Nu este permutare.
(2) - chiar dacă fiecărei poziţii îi corespunde valoarea echivalentă, funcţia este şi injectivă, şi surjectivă. Această permutare există, se numeşte permutare identică şi se notează cu e.
(3) - valorile din primul rând al tabloului nu sunt în ordine crescătoare. Valorile domeniului de definiţie ale unei permutări sunt obligatoriu scrise în ordine crescătoare. Nu este permutare.
(4) - se observă că poziţiei 3 îi aparţine valoarea 6. Domeniul de definiţie al acestei funcţii conţine doar 5 elemente, ceea ce înseamnă ca domeniul de definiţie şi imaginea funcţiei diferă. Nu este permutare.

Mulţimea tuturor permutărilor de grad n se notează cu S_n. În particular, permutările se notează cu litere mici ale alfabetului grec, în special cu σ, φ, τ.

Forma generală a unei matrice σ de gradul 5 este aceasta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}$$

Puncte importante

Două permutări $\sigma,\ \tau\ \in S_n$ sunt egale ($\sigma = \tau$) dacă şi numai dacă pentru ambele tablouri, al doilea rând este identic. (Matematic, $\sigma(i)\ = \tau(i),\ \forall\ i\ =\ \overline{1..n}$)

Numărul de permutări de grad n este egal cu $n!\ =\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, adică cu n factorial. Deci, cardinalul mulţimii $S_n =\ n!$.

Înmulţirea permutărilor

Aşa-numita înmulţire a permutărilor este, de fapt, compunerea a două permutări.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(4) & \sigma(3) & \sigma(2) & \sigma(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Pentru orice permutare σ, există şi este unică o permutare notată σ^{-1} astfel încât $\sigma\sigma^{-1}\ =\ \sigma^{-1}\sigma\ =\ e$. Această permutare poate fi determinată prin inversarea celor două rânduri ale permutării σ, având grijă ca rândul de sus să aibă elementele dispuse în ordine crescătoare.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = e$$

Puterile unei permutări

Pentru o permutare σ de gradul n, se poate defini ridicarea la putere a acesteia. Astfel, $\sigma^2 = \sigma\sigma, \ \sigma^3 = \sigma^2\sigma$ şi aşa mai departe. Ca excepţie, $\sigma^0 = e$.

Deoarece mulţimea permutărilor de grad n este finită, va exista întotdeauna $p < k; \ p, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = \sigma^k$.

Din această proprietate reiese că există putere l pentru σ astfel încât $\sigma^l = e$.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Transpoziţii

În mulţimea permutărilor, se remarcă un tip particular de permutare, cele care au doar două valori transpuse faţă de permutarea identică. Acestea se numesc transpoziţii şi se notează $(i\,j)$, i şi j fiind indicii valorilor transpuse între ele.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (3\ 5) = (5\ 3)$$

În general, o transpoziţie se poate defini astfel: $\sigma = (i\ j) \Rightarrow \sigma(k) = \begin{cases} i, \ k = j \\ j, \ k = i \\ k \ altfel \end{cases}$

O proprietate importantă a transpoziţiilor este că orice transpoziţie $(i\,j)^2 = e$.

Numărul transpoziţiilor de grad n este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$.

Inversiuni. Semnul unei permutări

Într-o permutare σ, fie doi indici $i < j$ cu proprietatea că $\sigma(i) > \sigma(j)$. Această pereche (i, j) se numeşte inversiune în permutarea σ.

Numărul tuturor inversiunilor permutării σ este $m(\sigma)$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Pentru a determina numărul inversiunilor unei permutări, se aleg pe rând valorile lui i de la 1 la n şi se verifică fiecare j mai mare decât i.

Astfel, pentru $i = 1$ determinăm inversiunile $(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5)$

pentru $i = 2$ determinăm inversiunile $(2,\ 3),\ (2,\ 5)$

pentru $i = 3$ nu există inversiuni

pentru $i = 4$ determinăm inversiunea $(4,\ 5)$. În total, 7 inversiuni, deci $m(\sigma) = 7$.

Într-o permutare σ, se numeşte semnul acesteia numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

Dacă $\varepsilon(\sigma)$ este 1, atunci permutarea σ este pară. Dacă $\varepsilon(\sigma)$ este -1, atunci permutarea este impară.

Formule şi puncte utile

- Semnul produsului este egal cu produsul semnelor. (Produsul a două permutări de aceeaşi paritate va fi par, produsul a două permutări de parităţi diferite va fi impar)
$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

- O permutare şi inversa ei au acelaşi semn.
$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$$

- $$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Probleme rezolvate

---

1. Să se determine cel mai mic număr $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e$. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Se calculează succesiv puterile lui σ
   $$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e \Rightarrow p = 2$$

2. Pentru următoarele permutări, să se calculeze permutarea x astfel încât $\sigma x = \tau$
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   În ecuaţia $\sigma x = \tau$, se înmulţeşte la stânga cu σ^{-1}. De aici rezultă că $x = \sigma^{-1}\tau$. Pentru a rezolva această ecuaţie, avem nevoie de valoarea lui σ^{-1}.
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   Astfel
   $$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$