

199. O funcție  $F : I \rightarrow R$  se numește primitivă a funcției  $f : I \rightarrow R$ , dacă:

- a)  $F$  este derivabilă pe  $I$ ;
- b)  $F'(x) = f(x)$ ,  $(\forall)x \in I$ .

$$200. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$201. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$202. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$203. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$204. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$205. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$206. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$207. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$208. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$209. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$210. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$211. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

212. Teoremă (condiție suficientă de existență a primitivei):

Orice funcție continuă  $f : [a, b] \rightarrow R$  are primitive.

213. Teoremă (condiție necesară de existență a primitivei):

Dacă funcția  $f : I \rightarrow R$  admite primitive, atunci  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $I$ .

214. Teoremă (clase de funcții integrabile)

- 1) Orice funcție continuă  $f : [a, b] \rightarrow R$ , este integrabilă pe intervalul  $[a, b]$ .
- 2) Orice funcție monotonă  $f : [a, b] \rightarrow R$ , este integrabilă pe intervalul  $[a, b]$ .

215. Propoziție: Fie  $f, g : [a, b] \rightarrow R$  două funcții astfel încât

- i)  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ ,
- ii)  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b] \setminus A$ , unde  $A$  este o mulțime finită.

Atunci  $g$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ .

$$216. \int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

217. Dacă  $f : [a, b] \rightarrow R$  este funcție continuă, atunci aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției,

axa  $Ox$  și dreptele verticale  $x = a$ ,  $x = b$  este :  $\operatorname{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)| dx$

218. Dacă  $f : [a, b] \rightarrow R$  este funcție continuă, atunci corpul de rotație determinat de  $f$  este:

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

219. Dacă  $f : [-a, a] \rightarrow R$  este impară atunci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

220. Dacă  $f : [-a, a] \rightarrow R$  este pară atunci  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

$$221. \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

$$222. \left( \int_a^{u(x)} f(t) dt \right)' = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$223. \left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

*Algebră: Grupuri:*

224. Legea  $*$  este *lege de compoziție internă* pe mulțimea  $M$  (mulțimea  $M$  este *parte stabilă* în raport cu legea  $*$ ), dacă:  $(\forall) x, y \in M, x * y \in M$ .

225. Fie grupurile  $(G_1, *)$  și  $(G_2, \perp)$ . O funcție  $f : G_1 \rightarrow G_2$  se numește *izomorfism de grupuri* dacă:

a)  $f$  este morfism  $f(x * y) = f(x) \perp f(y)$ ,  $(\forall) x, y \in G_1$

b)  $f$  este funcție bijectivă.

226. Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H$  o submulțime nevidă a lui  $G$ . Următoarele afirmații sunt echivalente:

a)  $H$  este subgrup al lui  $G$ ;

b)  $(\forall) x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$ ;

c) 1.  $H$  este parte stabilă a lui  $G$ ;

2.  $(\forall) x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

227. Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit, cu elementul neutru  $e$ , și  $x \in G$ . Cel mai mic număr natural  $n \geq 1$ , cu proprietatea  $x^n = e$ , se numește *ordinul elementului  $x$* . (Se notează  $n = \text{ord}(x)$ )

228. Teorema lui Lagrange:

Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit cu  $n$  elemente și  $a$  un element din  $G$ . Atunci  $\text{ord}(a)$  divide  $n$ .

229. Consecință:

Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit cu  $n$  elemente și  $H$  un subgrup al lui  $G$ . Atunci  $\text{ord}(H)$  divide  $\text{ord}(G)$  (unde  $\text{ord}(H) = \text{card}(H)$ ).

*Inele:*

230. Fie  $(I, +, \cdot)$  un inel și  $0$  elementul său neutru față de adunare. Un element  $x \in I$ ,  $x \neq 0$ , se numește *divizor al lui zero* dacă există  $y \in I$ ,  $y \neq 0$ , astfel încât  $xy = 0$  sau  $yx = 0$ .

231. Un element  $\hat{x}$  din  $Z_n$ ,  $n \geq 2$  este inversabil (în raport cu înmulțirea) dacă și numai dacă  $x$  este prim cu  $n$

232. Dacă  $n$  este prim atunci inelul  $(Z_n, +, \cdot)$  devine corp.

233. Fie  $(I, +, \cdot)$  și  $(I', \oplus, \otimes)$  două inele (corpuri) având elementele neutre la înmulțire  $1$  și  $1'$ . O funcție  $f : I \rightarrow I'$  se numește *morfism de inele* (corpuri) dacă pentru orice  $x, y \in I$ , avem relațiile:

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y), \quad f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y), \quad f(1) = 1'.$$

*Polinoame:*

Fie  $K$  un corp comutativ.

234. Teorema împărțirii cu rest :

$(\forall) f, g \in K[X]$ , cu  $g \neq 0$ , există și sunt unice polinoamele  $q, r \in K[X]$  astfel încât  
 $f = g \cdot q + r$ , unde  $\text{grad } r < \text{grad } g$ .

235. Teorema lui Bezout:

Un element  $a \in K$  este rădăcină pentru polinomul  $f \in K[X]$ ,  $f \neq 0$  (adică  $f(a) = 0$ ) dacă și numai dacă  $f$  este divizibil cu  $X - a$ .

236. Polinoamele de grad 2 și 3 sunt ireductibile dacă și numai dacă nu au rădăcini în  $K$ .

237. Relațiile lui Viete pentru  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$  :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

238. Dacă  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  este rădăcină pentru polinomul  $f \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  atunci  
 $p \nmid a_0$  iar  $q \mid a_n$ .