Funcții

Definiţie

Fie A şi B două mulţimi nevide. Se defineşte o **funcţie** pe A cu valori în B dacă **fiecărui element** x din A i se asociază **un singur element** y din B.

Pentru notaţia unei funcţii, cel mai des se foloseşte $f : A \to B$ care se citeşte "f definită pe A cu valori în B". „f" se poate înlocui cu alte litere, din alfabetul latin sau grecesc

$$f(x),\ g(x),\ h(x),\ \Gamma(x),\ \theta(x).$$

Nu este o funcţie situaţia în care unui element din A îi corespund mai multe valori din B sau niciuna!

Termeni Importanţi

A se numeşte **domeniul de definiţie** al funcţiei
B se numeşte **codomeniul** funcţiei
x se numeşte **argument** al funcţiei (la folosirea f(x))

Egalitatea a două funcţii

Două funcţii $f : A \to B,\ g : C \to D$ se numesc egale dacă şi numai dacă

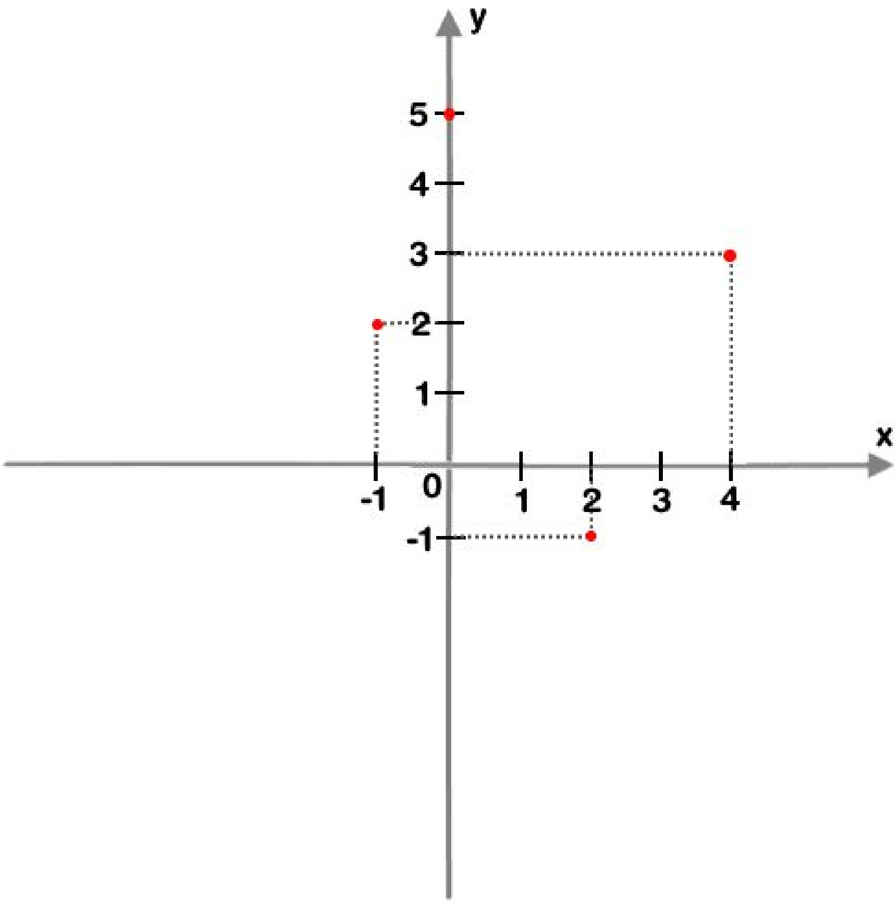
- A = C **(domeniile de definiţie coincid)**
- B = D **(codomeniile coincid)**
- $f(x) = g(x)\ \forall\ x \in A$ **(valorile funcţiei coincid)**

Reprezentarea grafică a unei funcţii

O funcţie $f : A \to B$ se reprezintă grafic trasând perechile (x, f(x)), cu x din A sub formă de puncte într-un reper cartezian (intersecţia a două drepte perpendiculare, notate Ox şi Oy).

exemplu:

$$f \to \{-1, 0, 2, 4\} : \{-1, 2, 3, 5\};\ f(-1) = 2;\ f(0) = 5;\ f(2) = -1;\ f(4) = 3$$

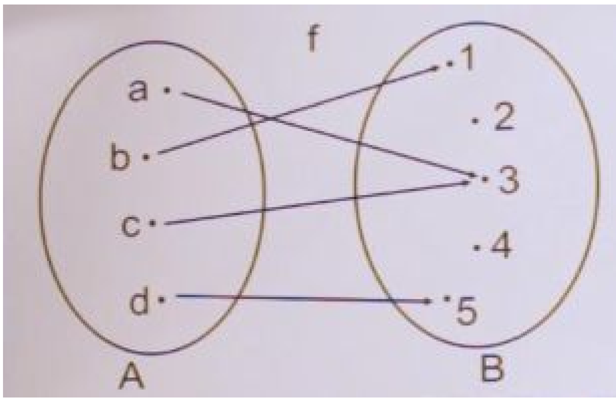


În acest grafic, punctele roşii reprezintă perechile (x, f(x)) ale funcţiei, adică (-1, 2), (0, 5), (2, -1) şi (4, 3).

Modalităţi de a defini o funcţie

Funcţiile pot fi definite sintetic sau analitic.

1. **Funcţiile definite sintetic** sunt acele funcţii pentru care se indică fiecărui element x din A o valoare unică y = f(x) din B.
   a) **diagramă carteziană**
   (exemplul reprezentării grafice de mai sus)
   b) **diagramă cu săgeţi**



Fiecărui element din A îi corespunde o valoare din B

   c) **tabel de valori**

x	-1	0	0,5	2	3
f(x)	-8	-5	-3,5	1	4

Pentru fiecare valoare x este asociată o valoare f(x)

Doar funcţiile care au un număr finit de elemente (şi preferabil restrâns) în domeniul de definiţie pot fi definite sintetic.

2. **Funcţiile definite analitic** sunt acele funcţii care se definesc cu ajutorul unor formule sau proprietăţi şi, în general, au un număr infinit de valori în domeniul de definiţie.
   a) **regulă de calcul**
   exemplu:
   $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n) = \frac{n}{n+2}$, atunci se poate calcula valoarea lui f(n) pentru orice n din mulţimea numerelor naturale, de exemplu:

$$f(3) = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} \text{ sau } f(7) = \frac{7}{7+2} = \frac{7}{9}$$

b) mai multe reguli de calcul
exemplu:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} x + 2, x \leq 2 \\ x, x \in (2; 6) \\ x - 2, x \geq 6 \end{cases}$$

În acest caz, se calculează valoarea lui f(x) având în vedere restricţiile aplicate lui x. Pentru x = 0, se va calcula f(x) = x + 2 = 0 + 2 = 2, dar pentru x = 6 se va calcula f(x) = x - 2 = 6 - 2 = 4.

Mărginirea unei funcţii

(Această proprietate a funcţiilor a fost studiată în clasa a IX-a.)

O funcţie $f : A \to B$ este mărginită dacă există două numere reale a şi b astfel încât $a \leq f(x) \leq b$.

De exemplu, funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{n}{n+1}$ este mărginită deoarece $0 \leq f(n) \leq 1$. În acest caz, a şi b sunt 0 şi 1.

Intersecţia graficului cu axele de coordonate

(Această proprietate a funcţiilor a fost studiată în clasa a IX-a.)

Pentru a afla intersecţia funcţiei f cu axa Oy, se calculează $f(0)$, iar punctul de intersecţie este de forma $A(0, f(0))$

Pentru a afla intersecţia (sau intersecţiile) funcţiei f cu axa Ox, se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$, din care reies punctele de intersecţie de forma $P(x_0, 0)$

Continuitatea unei funcţii

(Această proprietate se studiază în clasa a XI-a, la analiză matematică.)

În limbajul comun, se spune că graficul unei funcţii este continuu pe un interval dacă nu conţine ruperi sau fragmentări, adică dacă poate fi trasat fără a ridica creionul de pe foaia de hârtie.

Funcţiile de gradul întâi, de gradul doi, funcţia constantă sunt continue. De asemenea funcţiile polinomiale sunt continue.

Simetria graficului

---

a) În raport cu o dreaptă

Dreapta x = a este axă de simetrie pentru graficul unei funcţii f dacă $f(a - \varepsilon) = f(a + \varepsilon)$ oricare ar fi ε .

b) În raport cu un punct

Punctul $S(a, b)$ este centru de simetrie pentru graficul unei funcţii f dacă $\frac{f(a+\varepsilon)+f(a-\varepsilon)}{2} = b$, oricare ar fi ε

Exemplu:
Arătaţi că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2$ are drept centru de simetrie punctul S(0, 2)

Se calculează $\frac{f(\varepsilon)+f(-\varepsilon)}{2} = \frac{\varepsilon^3-\varepsilon^3+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$ deci S(0, 2) este centru de simetrie pentru graficul funcţiei f.

Funcţii pare. Funcţii impare.

(Această proprietate a funcţiilor a fost studiată în clasa a IX-a.)
O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **pară** dacă $f(-x) = f(x)$. Se observă că această egalitate este echivalentă cu $f(0 - x) = f(0 + x)$, ceea ce arată că axa Oy (d: x = 0) este axă de simetrie pentru graficul funcţiei pare.

O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **impară** dacă $f(-x) = -f(x)$. De asemenea, se observă că această egalitate este echivalentă cu $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$, ceea ce înseamnă că punctul O(0, 0) este punct de simetrie pentru graficul funcţiei f.

Periodicitatea unei funcţii

(Această proprietate a funcţiilor a fost studiată în clasa a IX-a.)
O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nume;te **periodică** dacă există T > 0 astfel încât $f(x + T) = f(x)$. Cel mai mic T pozitiv cu această proprietate se notează T_0 şi se numeşte **perioadă principală a funcţiei f**.

Monotonia unei funcţii

(Această proprietate a funcţiilor a fost studiată în clasa a IX-a.)
Fie o funcţie $f : A \to B$ şi un interval $I \subseteq A$.
Funcţia f este **strict crescătoare pe I** $\Leftrightarrow \forall\, x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) < f(x_2)$
Funcţia f este **strict descrescătoare pe I** $\Leftrightarrow \forall\, x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) > f(x_2)$

Pentru a se studia monotonia unei funcţii se consideră $x_1 < x_2$ şi se calculează diferenţa $f(x_1) - f(x_2)$. Dacă această diferenţă este pozitivă, funcţia este descrescătoare, altfel este crescătoare.

De asemenea, pentru studiul monotoniei se poate calcula semnul raportului $R(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Dacă raportul este pozitiv, funcţia este crescătoare, altfel este descrescătoare.

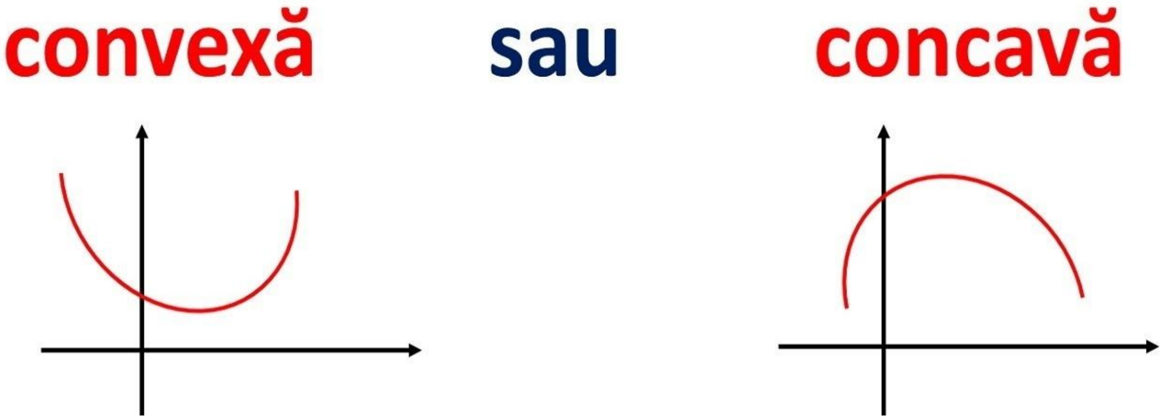
Asimptotele unei funcţii

(Această proprietate se studiază în clasa a XI-a, la analiză matematică.))
Se numeşte asimptotă (orizontală, verticală sau oblică) o dreaptă la care se apropie infinit de mult graficul unei funcţii, dar la care nu ajunge niciodată.

Convexitatea şi concavitatea unei funcţii

În limbaj comun, graficul unei funcţii este **convex** dacă pare că ar reţine apă şi este **concav** dacă pare că apa ar aluneca de pe acesta.

Pentru a verifica dacă o funcţie este convexă pe un interval I, se compară
$f(q_1x_1 + q_2x_2)$ cu $q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall q_1, q_2 \geq 0\ a.î.\ q_1 + q_2 = 1$
Dacă primul termen este mai mic decât al doilea, f este **convexă**, altfel este **concavă**.



Injectivitatea unei funcţii

O funcţie este injectivă dacă oricărui element din codomeniu îi corespunde cel mult unui element din domeniul de definiţie (deci la 0 sau 1 elemente).

Altfel spus, $f : A \to B$ este **injectivă** dacă pentru **orice** $y \in B$, ecuaţia **f(x) = y** are **cel mult** o soluţie.

Această definiţie poate fi rescrisă sub forma
f este injectivă $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

O definiţie care poate fi verificată matematic este:
f injectivă $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Exemplu:
Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 7$ injectivă

- dacă $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 7 = 5x_2 + 7 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ injectivă
  SAU
- $f(x) = y$ are cel mult o soluţie
  $5x + 7 = y \Rightarrow x = \frac{y-7}{5}$ soluţie unică pentru x $\Rightarrow$ f injectivă
  SAU
- f funcţie de gradul întâi deci f strict monotonă deci f injectivă

Surjectivitatea unei funcţii

O funcţie este surjectivă dacă oricărui element din codomeniu îi corespunde cel puţin unui element din domeniul de definiţie (deci la 1 sau mai multe elemente)

Altfel spus, $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă pentru **orice** $y \in B$, ecuaţia **f(x) = y** are **cel puţin** o soluţie.

$f : A \to B$ este **surjectivă** $\Leftrightarrow \forall\, y \in B\ \exists\, x \in A$ astfel încât $f(x) = y$
Din această echivalenţă reiese că
$f : A \to B$ este **surjectivă** $\Leftrightarrow Im f = B$

Exemplu:
Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 7$ surjectivă

- $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie
  $5x + 7 = y \Rightarrow x = \frac{y-7}{5}$ soluţie pentru x. $x \in \mathbb{R}$ deci şi $\frac{y-7}{5} \in \mathbb{R}$. Asta înseamnă că $y \in \mathbb{R}$, deci f surjectivă.

Bijectivitatea unei funcţii

Dacă o funcţie este şi injectivă, şi surjectivă, atunci funcţia este **bijectivă**. O funcţie este bijectivă dacă şi numai dacă oricărui element din codomeniu îi corespunde un singur element din domeniul de definiţie.

Pentru a se demonstra că o funcţie f este bijectivă se poate demonstra că funcţia este injectivă iar apoi că este surjectivă, sau se poate demonstra că ecuaţia f(x) = y are soluţie unică pe domeniul de definiţie al funcţiei.

Matematic, $\forall y \in B,\ \exists!\, x \in A$ astfel încât $f(x) = y$

Observaţie

Compunerea a două funcţii bijective este tot o funcţie bijectivă!

Exemplu:
Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$ bijectivă
Este suficient să arătăm că pentru orice y din codomeniu, ecuaţia $f(x) = y$ are exact o soluţie reală. Echivalent, $2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$, deci f bijectivă.