Radical dintr-un număr real

- Fie numerele $a \geq 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}, n$ par. Atunci există şi este unic un număr real pozitiv x astfel încât $x^n = a$. Acest număr se numeşte radicalul de ordin n al numărului a şi se notează $\sqrt[n]{a}$.
- Fie $a \in \mathbb{R}, n > \ 2, n \in \mathbb{N}, n$ impar. Atunci există şi este unic un număr real x, astfel încât $x^n = a$. Acest număr se notează $\sqrt[n]{a}$ şi se numeşte radicalul de ordin n al numărului a.

Proprietăți ale radicalilor

1) Dacă n par, $a \geq 0, b \geq 0$, atunci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

   Dacă n impar, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2) Dacă n par, $a \geq 0, b \geq 0$, atunci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

   Dacă n impar, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, atunci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3) Fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{dacă } n \text{ este impar} \\ |a|, \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$.

4) Dacă n par și $0 \leq a < b$, atunci $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

   Dacă n impar și $a \ < b, a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

5) Dacă $a \ > \ 0, n$ par, $m \in \mathbb{Z}$, atunci $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

   Dacă $a \in \mathbb{R}, n$ impar, $m \in \mathbb{Z}$, atunci $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

6) Dacă $a \geq 0$, atunci pentru orice $m \geq \mathbb{Z}, n \geq \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{N}$, avem $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

7) Dacă $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $a > 0$, atunci $a^{\,r} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exerciții I

-Preluate din modele de bac-

1.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x}$.

C.E.

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \geq -2 \\ \\ 8-x \geq 0 \\ -x \geq -8 \\ x \leq 8 \end{cases} \quad x \in [-2, 8]$$

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x}$$

$$x+2=8-x$$

$$2x=8-2$$

$$2x=6$$

$$x=\frac{6}{2}$$

$$\boxed{x=3 \in \text{C.E.}}$$

2.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2^{6x}}=16$.

$$\sqrt[3]{2^{6x}}=16$$

$$2^{6x \cdot \frac{1}{3}}=16$$

$$2^{2x}=16$$

$$2^{2x}=2^4$$

$$2x=4$$

$$x=\frac{4}{2}$$

$$\boxed{x=2}$$

3.

5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-2x-1}$.

C.E.

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \boxed{x \geq 1} \\ x^2-2x-1 \geq 0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases} \\ x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot(1)\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ x_1=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{2}=1+\sqrt{2} \qquad x_2=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2(1-\sqrt{2})}{2}=1-\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty \quad 1-\sqrt{2} \quad 1-\sqrt{2} \quad \infty$
x^2-2x-1	$+\ +\ +\ 0 - - - 0 +\ +\ +$

$$\begin{cases} x \in [1,+\infty) \\ x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2},+\infty) \end{cases}$$

$=> \boxed{x \in [1+\sqrt{2},+\infty)}$

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-2x-1}$$

$$x-1=x^2-2x-1$$

$$x-x^2+2x=0$$

$$-x^2+3x=0 \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=0 \end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot 0}}{2\cdot(-1)}=\frac{-3 \pm \sqrt{9}}{-2}=\frac{-3 \pm 3}{-2}$$

$$x_1=\frac{-3+3}{-2}=0 \notin \mathbb{R} \qquad x_2=\frac{-3-3}{-2}=\frac{-6}{-2}=3 \in \mathbb{R}$$

Deoarece, în cazul în care $x=0$

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Deoarece, în cazul în care $x=3$

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Soluție finală:

$\boxed{x=3 \in \text{C.E.}}$

4.

5p | **1.** Arătați că numărul $N=\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2$ este pătratul unui număr natural.

$$N=\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2$$

$$N=5+2\sqrt{65}+13+5-2\sqrt{65}+13$$

$$N=5+13+5+13$$

$$N=36$$

$$\boxed{N=6^2}$$

5.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+1}$.

C.E.

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x\geq -1 \\ \\ \mathrm{x}-1>0 \\ x>0 \end{cases} \qquad x\in(1,+\infty)$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+1}\quad |\cdot\sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$$

$$x^2-1=\sqrt{(x-1)\cdot(x+1)}$$

$$x^2-1=\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{x^2-1}=x^2-1$$

$$x^2-1=(x^2-1)^2$$

$$t=x^2-1$$

$$t^2-t=0\quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{1\pm 1}{2}$$

$$t_1 = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Deoarece, în cazul în care $t = 1$

$$t = x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$t_2 = \frac{1-1}{2} = 0$$

Deoarece, în cazul în care $t = 0$

$$t = x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1 \in \mathbb{R}$$

Soluție finală:

$$\boxed{x = \sqrt{2} \in \text{C.E.}}$$

Logaritmul unui număr pozitiv

- Dacă $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$, atunci unica soluție a ecuației $a^x = b$ se noter $x \ = \log_a b$ şi se numeşte logaritmul numărului a în baza b.

Proprietăți ale logaritmului

- Pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$, avem relațiile:

1) $\log_a a = 1$;

2) $\log_a 1 = 0$;

3) $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$, unde $A > 0$, $B > 0$;

   $\log_a (A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \cdots + \log_a A_n$, unde $A_i > 0$ pentru orice $i = \overline{1, n}$.

4) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$, unde $A > 0$, $B > 0$;

5) $\log_a A^m = m \log_a A$, unde $A > 0$;

6) $\log_{a^m} A = \frac{1}{m} \log_a A$, unde $A > 0$, $m \neq 0$;

7) $a^{\log_a A} = A$, unde $A > 0$;

8) $\log_a a^A = A, \ A \in \mathbb{R}$;

9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, unde $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

Formule de schimbare a bazei

1) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$;

2) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a, b \neq 1$;

Semnul logaritmului

• $\log_a b > 0$, dacă $a, b \in (1, \infty)$ sau $a, b \in (0, 1)$;

• $\log_a b < 0$, dacă $a \in (1, \infty), b \in (0, 1)$ sau $a \in (0, 1), b \in (1, \infty)$.

Aspecte importante:

• Dintre doi logaritmi cu aceeași bază supraunitară, este mai mare cel cu argumentul mai mare.

• Dintre doi logaritmi cu aceeaşi bază subunitară, este mai mare cel cu argumentul mai mic.

Exerciții II

-Preluate din modele de bac-

1.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(7x)+\log_x 7=3$.

C.E.

$$\begin{cases} \boxed{7x>0} \\ x>0 \end{cases} \quad x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$$

$$\log_7(7x)+\log_x 7=3$$

$$\log_7 7+\log_7 x+\log_x 7=3$$

$$1+\log_7 x+\frac{\log_7 7}{\log_7 x}=3$$

$$1+\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=3$$

$$\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=3-1$$

$$\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=2$$

$$t=\log_7 x$$

$$t+\frac{1}{t}=2$$

$$t+\frac{1}{t}-2=0$$

$$\frac{t^2+1-2t}{t}=0$$

$$t^2+1-2t=0$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$\log_7 x=1$$

$$x=7^1$$

$$x=7$$

2.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+4x+5\right)=\log_4(2x+4)$.

C.E.

$$\begin{cases} x^2+4x+5>0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases} \\ \Delta=b^2-4\cdot ac=4^2-4\cdot1\cdot5 \\ =16-20=-4<0 \quad ,\forall\, x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+4>0 \\ 2x>-4 \\ x>\frac{-4}{2} \\ x>-2 \end{cases}$$

$$\boxed{x\in(-2,+\infty)}$$

$$\log_4(x^2+4x+5)=\log_4(2x+4)$$

$$x^2+4x+5=2x+4$$

$$x^2 + 4x + 5 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1 \in \text{C.E.}}$$

3.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(\sqrt{x}+1)+\log_5(\sqrt{x}-1)=2$.

C.E. $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} + 1 > 0 \\ \sqrt{x} > -1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} \sqrt{x} - 1 > 0 \\ \sqrt{x} > 1 \\ x > 1 \end{cases}$

$$\boxed{x \in (1, +\infty)}$$

$$\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$$

$$\log_5\left((\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)\right) = 2$$

$$\log_5(x - 1) = 2$$

$$x - 1 = 5^2$$

$$x = 25 + 1$$

$$\boxed{x = 26 \in \text{C.E.}}$$

4.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$.

C.E. $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\boxed{x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$$

$$t = \log_2 x$$

$$t + \frac{1}{t} = 2$$

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0$$

$$\frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = 0$$

$$t^2 + 1 - 2t = 0$$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0$

$t - 1 = 0$

$t = 1$

$\log_2 x = 1$

$x = 2^1$

$\boxed{x = 2 \in \text{C.E.}}$

5.

5p | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(-x) = \log_3(x^2 - 2x - 2)$.

C.E. $-x > 0$ $\boxed{x < 0}$

$x^2 - 2x - 2 > 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{2} = 1 + \sqrt{3}$ $x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$\boxed{x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3})}$

$$\log_3(-x) = \log_3(x^2 - 2x - 2)$$

$$-x = x^2 - 2x - 2$$

$$-x - x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$-x^2 + x + 2 = 0 \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$x_1 = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \in \text{C.E.}$ $x_2 = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \notin \text{C.E.}$

$\boxed{x = -1}$