POLINOAME

CE ESTE UN POLINOM?

O expresie construită din variabile și constante, folosind doar operații de +, -, x și ridicare la putere.

FORMA ALGEBRICĂ $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Unde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{C}$ se numesc coeficienți, numărul a_0 se numește termen liber, iar a_n coeficient dominant. x este nedeterminata, $f = 0$ este polinomul nul.

CARE E VALOAREA POLINOMULUI?

Fie $\propto \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{C}$ și vom avea $f(\propto) = a_n \propto^n + a_{n-1} \propto^{n-1} + \dots + a_2 \propto^2 + a_1 \propto + a_0$ unde $f(\propto)$ se numește valoarea polinomului f în $\propto$

Dacă $f(\propto) = 0$ atunci $\propto$ este rădăcina polinomului f

OPERȚII CU POLINOAME

Adunarea polinoamelor: asociativă, comutativă, admite element neutru polinomul nul.

Împărțirea polinoamelor: asociativă, comutativă, distributivă în raport cu adunarea.

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

Fie una K dintre mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sau $\mathbb{C}$ și $f, g \in K[X]$ două polinoame unde g este nenul. Atunci există și sunt unice polinoamele $c, r \in K[X]$ cu $grad\ r < grad\ g$ astfel încât $f = gc + r$ .Polinomul c, reprezintă câtul împărțirii polinomului f la polinomul g iar r reprezintă restul împărțirii.

TEOREMA RESTULUI

Restul împărțirii polinomului f la $g = X - \propto$ este egal cu $f(\propto)$. Această teoremă ne ajută să găsim resul împărțirii unui polinom oarecare la g fără a mai face literalmente împărțirea. Însă această teoremă nu ne spune nimic despre câtul provenit din urma împărțirii, iar pentru aceasta folosim procedeul Schema lui Horner.

POLINOAME

SCHEMA LUI HORNER

Se aplică pentru determinarea câtului și a restului împărțirii $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ la polinomul $g = X - \propto$

Alcătuim un tabel din care vom citi câtul și restul împărțirii. Structura tabelului:

- pe prima linie scriem monoamele x^n, ..., x respectiv x^0
- pe următoarea se scriu coeficienții acestora a_n ..., a_0

x^n	x^{n-1}	....	x^2	x	x^0
a_n	a_{n-1}	....	a_2	a_1	a_0

Pentru determinarea coeficienților câtului împărțirii polinomului prin completăm astfel tabelul. Adăugăm o nouă linie: coeficientul a_n se coboară și în stânga lui se scrie a . Celelalte căsuțe, corespunzătoare x^i se completează succesiv după formula $a_i + ab_i = b_{i-1}$ unde $i \in \{n-1, n-2, \dots, 2, 1\}$

	x^n	x^{n-1}	....	x^2	x	x^0
	a_n	a_{n-1}	....	a_2	a_1	a_0
a	a_n	$a_{n-1} + ab_{n-1}$	....	$a_2 + ab_2$	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	......	b_1	b_0	r

Elementele b_{n-1}, ..., b_0 sunt coeficienții câtului iar r este restul împărțirii polinomului f la $g = X - \propto$

POLINOAME

EXEMPLE

Să determinăm câtul și restul împărțirii polinomului

$f = x^6 - 5x^5 + \cdots + 73x^3 - 4x^2 - 7$ cu $g = X + 3$

Transformăm $g = X + 3$ în $g = X - (-3)$ pentru a respecta structura lui $g = X - \propto$ și pentru a afla valoarea coeficientului a, aici fiind = cu -3.

Vom avea următorul tabel:

	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-5	0	73	-4	0	-7
-3	1	-8	24	1	-7	21	-70

De unde putem concluziona: restul împărțirii polinomului f prin polinomul g este -70, iar câtul este $q = x^5 - 8x^4 + 24x^3 + x^2 - 7x^1 + 21$

RĂDĂCINILE UNUI POLINOM

Teorema fundamentală a algebrei: Orice polinom cu coeficienți complecși admite cel puțin o rădăcină complexă.

Teorema lui Bezout: $\propto$ este rădăcina polinomului f dacă și numai dacă este divizibil cu $X - \propto$

Consecință: Orice polinom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ admite ***n*** rădăcini complexe x^n, ..., x^0 nu neapărat distincte. Polinomul se descompune în factori $f(\propto) = a_n(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) \dots (X - x_n)$

Observație - Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul zero și unu. Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt cele de gradul I si II cu $\Delta < 0$

POLINOAME

DIVIZIBILIATE

Definiție: Polinomul f este divizibil cu polinomul ***g*** daca există un polinom ***f*** astfel încât ***f=gh.*** Notăm $g|f$

Proprietăți: Divizibilitatea polinoamelor are urmptoarele proprietăți

D1: Dacă $f|g$ și $g|h$ atunci $f|h$

D2: Dacă $f|g$ atunci $f|gh$

D3: Dacă $f|g$ și $f|h$ atunci $f|(g \pm h)$

D4: Polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X - \propto$ dacă și numai dacă $f(\propto) = 0$

D5: Dacă f este divizibil simultan cu $X - \propto$ și $X - \beta$ atunci f este divizibil cu $(X - \beta)(X - \alpha)$

Definiție: Un polinom $f \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\ sau\ \mathbb{C}$ se numește **reductibil** dacă există polinoamele h și $g \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\ sau\ \mathbb{C}$ cu **grad g < grad f** și **grad h < grad f** astfel încât **f=gn**. În caz contrar se numește **ireductibil**.

POLINOAME

RĂDĂCINI MULTIPLE

- dacă $x_1 = x_2$ vom spune că x_1 este rădăcină de ordin doi sau rădăcină dublă
- dacă $x_1 = x_2 = x_3$ om spune că x_1 este rădăcină de ordin trei sau rădăcină triplă
- numărul $\propto$ este rădăcină de ordin doi pentru polinomu f dacă și numai dacă $f(\propto) = 0$ și $f'(\propto) = 0$
- numărul $\propto$ este rădăcină de ordin trei pentru polinomul f dacă și numai dacă $f(\propto) = 0$, $f'(\propto) = 0$ $f''(\propto) = 0$

ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR

Forma generală a unei ecuații algebrice de gradul n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Proprietăți ale rădăcinilor

- dacă $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ și ecuația admite o rădăcină $x_1 = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}, b \neq 0$ atunci $x_2 = \mathrm{a} - \mathrm{bi}$
- dacă $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ și ecuația admite o rădăcină $x_1 = \mathrm{a} + \mathrm{b}\sqrt{\mathrm{c}}$ $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ atunci $x_2 = \mathrm{a} - \mathrm{b}\sqrt{\mathrm{c}}$
- dacă $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și ecuația admite o rădăcină $x_1 = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ atunci $a | a_0$ și $b | a_n$
- dacă $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = 1$ atunci singurele rădăcini raționale ale acestei ecuații se pot găsi eventual printre divizorii numărului a_0

Ecuația de gradul al III-lea $f(\propto) = \mathrm{a} \propto^3 + \mathrm{b} \propto^3 + \mathrm{c} \propto^2 + \mathrm{d}$

Observație - Cele 3 rădăcini pot fi toate 3 reale sau una reală și celelalte două complexe nereale conjugate.

POLINOAME

Ecuația de gradul al III-lea $ax^3 + bx^2 + cx^1 + \mathrm{d}$

Observație - Cele 3 rădăcini pot fi toate 3 reale sau una reală și celalalte două complexe nereale conjugate.

RELAȚIILE LUI VIETE

Sunt adevărate indiferent de tipul rădăcinilor și avem: $S1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$S2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ $S3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

Ecuația de gradul al IV-lea $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^1 + e$

Observație - Cele 4 rădăcini pot fi toate patru reale sau 2 reale și celelalte două complexe nereale conjugate sau toate patru complexe nereale și două conjugatele celorlalte două.

RELAȚIILE LUI VIETE

Sunt adevărate indiferent de tipul rădăcinilor și avem:

$S1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$ $S2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$

$S3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$ $S4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}$

POLINOAME

EXEMPLE

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ iar $f = (x-1)^6 + (x-2)^{10} + (x-2)^3$

$g = x^2 - 3x + (x-2)^3$

a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$

b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g

c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g

REZOLVARE

a) $g = x^2 - \mathrm{x} - 2\mathrm{x} + 2 = \mathrm{x}(\mathrm{x}-1) - 2(\mathrm{x}-1) = (\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-1)$

b) Pentru a determina dacă polinomul ***f*** e divizbil cu polinomul ***g*** caulculăm ***f(x1)*** și ***f(x2)***, unde ***x1*** și ***x2*** sunt rădăcinile polinomului ***f***.

$$f(2) = (2-1)^6 + (2-2)^{10} = 1 \neq 0 \to x-2 \nmid f$$

$$f(1) = (1-1)^6 + (1-2)^{10} = 1 \neq 0 \to x-1 \nmid f$$

din care putem conclude că $g \nmid f$

c) Pentru a determina restul împărțirii polinomului ***f*** la polinomul ***g*** comparăm gradul lui ***r*** unde $r = ax + b$ iar pe ***f*** îl putem scrie sub forma $f = gq + r$

$grad\, r < grad\, g$ din care putem conclude că $grad\, r \leq 1$

Putem scrie $f = (\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-1)\mathrm{q} + \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ și calculăm ***f(x1)*** și ***f(x2)*** unde ***x1*** și ***x2*** sunt rădăcinile polinomului ***f***

$$f(2) = 2a + b = 1$$

$$f(1) = a + b = 1$$

Încercăm să aflăm valorile ***a*** și ***b*** care ne vor da mai apoi valoarea lui ***r***

$$2a + b = 1 \qquad b = 1$$

$$-a - b = -1 \quad \text{Iar} \quad r = ax + b \quad \text{deci} \quad r = 1$$