Noțiuni teoretice

Variantă revizuită 2012

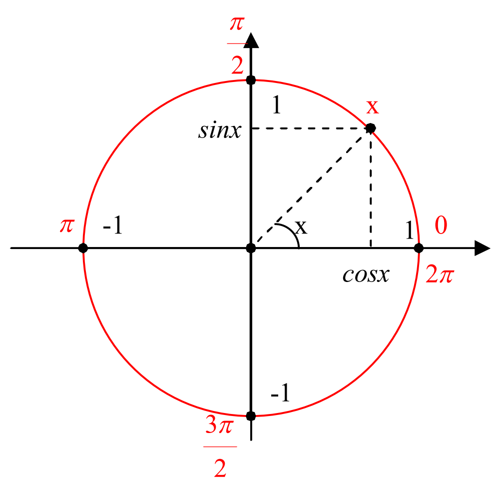
1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
4. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
5. Inegalitatea mediilor: $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}, \quad (\forall)a,b>0$
6. Partea întreagă: *definiție* $[x] \le x < [x]+1, \quad (\forall)x \in R$
   $x = [x] + \{x\}$
7. Partea întreagă: *proprietăți* $x-1 < [x] \le x, \quad (\forall)x \in R$
   $[x+n] = [x]+n, \quad (\forall)x \in R, \ (\forall)n \in Z$
8. Relația lui Hermite: $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a], \quad (\forall)a \in R$ (admite generalizare)

Sume:

9. $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \quad (\forall)n \in N^*$
10. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (\forall)n \in N^*$
11. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad (\forall)n \in N^*$

Elemente de trigonometrie:

12. O funcție *f* se numește *funcție periodică* dacă $(\exists)T \in R^*$ astfel încât $f(x+T) = f(x), \ (\forall)x \in D$, D fiind domeniul maxim de definiție al funcției.
13. Cercul trigonometric



14.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

15.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

16.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$tg\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	_	0	_	0

17. Paritatea funcțiilor trigonometrice directe:

$$\cos(-x)=\cos x,\ (\forall)x\in R \quad (\textit{pară})$$
$$\sin(-x)=-\sin x,\ (\forall)x\in R \quad (\textit{impară})$$
$$tg(-x)=-tgx,\ (\forall)x\in R \quad (\textit{impară})$$
$$ctg(-x)=-ctgx,\ (\forall)x\in R \quad (\textit{impară})$$

18. Formula fundamentală în trigonometrie:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ (\forall)x\in R$$

19. Formule de transformare a sinusului în cosinus şi invers:

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$
$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\qquad (\forall)x\in R.$$

20. Perioada funcțiilor *sin* şi *cos* - este $2k\pi,\ k\in Z$ (2π - perioadă principală):

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x$$
$$\cos(x+2k\pi)=\cos x \quad (\forall)x\in R$$

21. Perioada funcțiilor tg şi ctg - este $k\pi,\ k\in Z$ (π - perioadă principală):

$$tg(x+k\pi)=tgx \quad (\forall)x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}$$
$$ctg(x+k\pi)=ctgx \quad (\forall)x\in R\setminus\{k\pi,\ k\in Z\}$$

22. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

23. $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

24. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

25. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

26. $\sin 2x=2\sin x\cos x$

27. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

28. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

29. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

30. $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$ (Se adună formulele 22. şi 23.)

31. $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$ (Se adună formulele 24. şi 25.)

32. $\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$ (Se scad formulele 24. şi 25.)

33. $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

34. $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

35. $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

36. $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

37. $tg(a+b) = \dfrac{tga + tgb}{1 - tgatgb}$

38. $tg(a-b) = \dfrac{tga - tgb}{1 + tgatgb}$

39. $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

Progresii:

40. Progresii aritmetice: termenul general $a_n = a_{n-1} + r$ sau
$a_n = a_1 + (n-1)r$

41. $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$ sau $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)r)\cdot n}{2}$

42. Un şir de numere reale (a_n) este progresie aritmetică dacă şi numai dacă

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

43. Dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sunt în progresie aritmetică atunci $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$.

44. Progresii geometrice: termenul general $b_n = b_{n-1}q$ sau
$b_n = b_1 q^{n-1}$

45. $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ pentru $q \neq 1$

46. Un şir de numere reale (b_n) este progresie geometrică dacă şi numai dacă

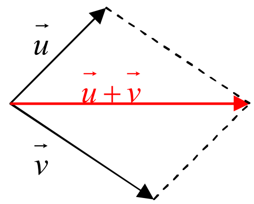
$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$$

47. Dacă b_1, b_2, b_3, b_4 sunt în progresie geometrică atunci $b_1 b_4 = b_2 b_3$.

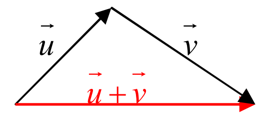
Aplicații ale trigonometriei în geometrie:

48. Adunarea vectorilor:

- regula paralelogramului



- regula triunghiului



49. Produsul scalar (definiție): $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha, \quad \alpha = m\angle(\vec{u},\vec{v})$

50. Dacă $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\ \vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$

51. $|\vec{u}|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}$

52. $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0, \quad (\vec{u}\neq\vec{0}, \vec{v}\neq\vec{0})$

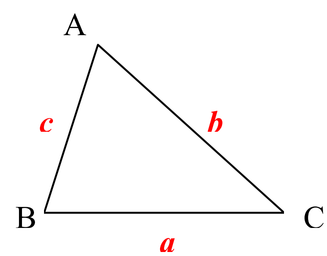
53.Vectorul $\vec{u}$ este coliniar cu $\vec{v}$ dacă şi numai dacă $(\exists)\alpha\in\mathbf{R}^*$ astfel încât $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$.

54. Dacă $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\ \vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ atunci $\vec{u}$ este coliniar cu $\vec{v}$ dacă şi numai dacă $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

55. Dacă $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ atunci $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}$

56. Formula distanței: $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, atunci

$$d(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



57. Teorema cosinusului:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

58. Teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R, \quad (R - \text{raza cercului circumscris})$$

59. Lungimea medianei corespunzătoare laturii *a* într-un triunghi este:

$$m_a^{\,2}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

60. Formule pentru aria triunghiului:

$$S=\frac{b\cdot h}{2},\ S=\frac{a\cdot b\cdot\sin C}{2},\ S=\frac{abc}{4R},\ S=rp,\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Funcții:

61. Funcția de gradul I: $f(x)=ax+b,\ a\neq 0$

Monotonia:: $a>0 \Rightarrow f$ - strict crescătoare

$a<0 \Rightarrow f$ - strict descrescătoare

62. Semnul:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		semn opus lui a	0	semn a	

63. Funcția de gradul II: $f(x)=ax^2+bx+c,\quad a\neq 0$

Vârful parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, iar dreapta $x=-\frac{b}{2a}$ - axă de simetrie pentru parabolă.

64. Monotonie: $a>0$ parabola „ține apa"

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$		$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

65. $a<0$ parabola „nu ține apa"

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

66. Semnul:

$\Delta>0$ x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$		semn a	0	semn opus a	0	semn a	

67.

$\Delta=0$ x	$-\infty$		$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$		semn a	0	semn a	

68.

$\Delta<0$ x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$		semn a	

69. Relațiile lui Viete: $f(x)=ax^2+bx+c,\quad a\neq 0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$