Algarismos significativos

Outra maneira de conhecer a precisão de um valor aproximado é ter informação sobre o número de algarismos significativos dessa aproximação.

Por definição, se $|x-\overline{x}|$ é inferior ou igual a meia unidade na posição decimal que corresponde ao $s^{\underline{ésimo}}$ dígito do número, contando os algarismos da esquerda para a direita e a partir do primeiro dígito diferente de zero, diz-se que $\overline{x}$ aproxima x com s algarismos significativos.

EXEMPLO 1.2.3

A aproximação 3.14 para π tem três algarismos significativos. Com efeito note-se que

$$|\pi - 3.14| = 0.001592\ldots < 0.005 = 0.5\ 10^{-2}.$$

O erro é inferior a meia unidade da casa decimal das centésimas. Todos os algarismos do número, a contar do primeiro à esquerda até ao das centésimas, são significativos.

A aproximação 0.333 para $\frac{1}{3}$ tem três algarismos significativos pois tem-se

$$|\frac{1}{3} - 0.333| = 0.000333\ldots < 0.0005 = 0.5\ 10^{-3}.$$

O valor aproximado 0.0498 para e^{-3} tem três dígitos significativos visto que

$$|e^{-3} - 0.0498| = 0.000012\ldots < 0.00005 = 0.5\ 10^{-4}.$$

Exercícios

1. Obtenha limites superiores para o erro absoluto, erro relativo e percentagem de erro das aproximações seguintes

$$\begin{aligned} e &\approx 2.718282, \\ \frac{1}{13} &\approx 0.076923, \\ \sqrt{200} &\approx 14.1421, \\ \ln 2 &\approx 0.69315, \end{aligned}$$

(Obs.: Note que $e = 2.71828182846\ldots$, $\frac{1}{13} = 0.076923076\ldots$, $\sqrt{200} = 14.1421356\ldots$, $\ln 2 = 0.69314718\ldots$)

2. Qual o número de algarismos significativos de cada uma das aproximações apresentadas no exercício anterior?

3. Os números

$$3.14,\ 0.314,\ 31.4,\ 0.0314,$$

Mas os erros de arredondamento não ocorrem apenas na representação de dados. Ocorrem também na representação de resultados de operações aritméticas. Isto porque o resultado de uma operação aritmética entre dois números representados com um número fixo de algarismos pode não ser um número com o mesmo número de algarismos.

EXEMPLO 1.3.3

Calculemos o resultado da divisão de 3.1416 por 9. Estes números têm cada um menos de cinco dígitos porém

$$\frac{3.1416}{9} = 0.3490666\ldots,$$

é uma dízima infinita. O resultado da divisão de 3.1416 por 9 arredondado para cinco algarismos é

$$0.34097.$$

Em geral, o resultado de uma operação aritmética realizada numa máquina é definido como sendo o valor arredondado do resultado exacto dessa operação.

Exercícios

1. Arredonde os seguintes números reais representando-os com três e com cinco algarismos

$$\frac{2}{9}, \pi, \frac{1}{256}, -\sqrt{5}, -\frac{1}{44}, e^3, e^{-1}.$$

(Obs.: os zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero mais à esquerda no número real, não entram na contagem do número de dígitos para a representação do real.)

2. Qual o número de algarismos significativos nas aproximações obtidas na solução da questão anterior?

3. Escreva as aproximações dadas pela sua máquina de calcular para representar os números reais:

$$\begin{aligned} \pi &= 3.1415926535897\ldots, \\ \sqrt{2} &= 1.41421356237\ldots, \\ \tfrac{1}{11} &= 0.0909090909090\ldots, \\ \ln 2 &= 0.693147180559\ldots, \\ e^3 &= 20.0855369231\ldots, \\ \tfrac{1}{222} &= 0.00450450450450\ldots. \end{aligned}$$

Qual o número de algarismos significativos de cada aproximação?

(Obs.: Note que a sua máquina pode representar com precisão diferente alguns números reais que são valores de funções não racionais.)

Na primeira parte do videograma número um são apresentados exemplos de aproximação de funções por polinómios de Taylor.

Existem outros métodos para obter polinómios aproximantes para uma função como por exemplo os que serão apresentados no Capítulo 4.

Exercícios

1. Determine o polinómio de Taylor de grau $2n+1$ da função seno hiperbólico no ponto $x_0 = 0$.

2. Obtenha o polinómio de Taylor de grau $2n$ da função f definida por

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

   no ponto $x_0 = 0$.

3. (a) Determine um polinómio aproximante p_4, de grau 4, para a função f definida por

$$f(x) = \cos x, \qquad x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}].$$

   (b) Calcule um limite superior para

$$|\cos x - p_4(x)|$$

   para $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

4. Seja p_n o polinómio de Taylor de grau n da função g definida por

$$g(x) = \mathrm{e}^x, \qquad x \in [-1, 1],$$

   no ponto $x_0 = 0$.

   (a) Determine n tal que

$$\max_{x\in[-1,1]} |g(x) - p_n(x)| < 0.005.$$

   (b) Determine p_n.

Supondo que o erro absoluto em I_0 é ϵ_0, designando por ϵ_n o erro absoluto em I_n resultante da propagação do erro em I_0, e ignorando erros de arredondamento durante o cálculo, tem-se

$$\epsilon_n = n\epsilon_{n-1} = n(n-1)\epsilon_{n-2} = \ldots = n!\epsilon_0.$$

Esta relação entre ϵ_0 e ϵ_n justifica os maus resultados obtidos.

De (1.19) vem

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n), \qquad n = \ldots, 3, 2, 1.$$

Como $I_n \to 0$ quando $n \to \infty$, tomemos, por exemplo, $I_{20} = 0$. Os seguintes resultados foram calculados

n	I_n
13	0.0669477
12	0.0717732
11	0.0773522
10	0.0838770
9	0.0916122
8	0.1009319
7	0.1123835
6	0.1268023
5	0.1455329
4	0.1708934
3	0.2072766
2	0.2642411
1	0.3678794
0	0.6321205

O erro nos valores tabelados não excede $2\ 10^{-7}$.

Agora, o erro inicial ϵ_n propaga-se originando um erro ϵ_0 em E_0 sendo $\epsilon_0 = \epsilon_n/n!$.

No primeiro caso foi usado um método instável para resolver o problema dado. No segundo caso foi usado um método estável.

Na segunda parte do videograma número um é apresentado um outro método estável para resolver o problema apresentado no exemplo anterior, recorrendo à aproximação da função integranda por um polinómio de Taylor.

Exercícios

1. Seja $z = f(x)$ e $\overline{x}$ uma aproximação para x. Mostre que o efeito da propagação do erro inicial $\epsilon_{\overline{x}} = |x - \overline{x}|$ no valor calculado para z é dado por

$$\epsilon_{\overline{z}} = |z - \overline{z}| = |f(x) - f(\overline{x})| \approx \epsilon_{\overline{x}}|f'(\overline{x})|.$$

(Obs.: Suponha f com derivada contínua de primeira ordem.)

2. Qual o erro no cálculo de $\cos\frac{\pi}{6}$, resultante da propagação do erro inicial, ao tomar-se $\frac{\pi}{6} \approx 0.523599$?

3. Para calcular o perímetro de uma circunferência de raio $\frac{10}{3}$ cm com erro absoluto inferior a $0.5\ 10^{-4}$, qual a precisão com que devem ser dados a medida do raio e o valor de π?

4. Seja x um número real e $\overline{x}$ um valor aproximado para x. Estime o erro resultante da propagação do erro inicial $\epsilon_{\overline{x}} = |x - \overline{x}|$ no cálculo de

   (a) $z = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

   (b) $z = \sqrt{x}$, $x > 0$.

5. Seja x um número real e n um inteiro. Estime o erro resultante da propagação de um erro inicial $\epsilon_{\overline{x}}$ no cálculo de

   (a) $z = nx$.

   (b) $z = \frac{x}{n}$.
   (Obs.: Considere n dado exactamente.)

   (c) Compare em cada caso os erros absoluto e relativo no resultado determinado para z com os erros absoluto e relativo de $\overline{x}$ respectivamente.

6. Calcule as raízes da equação

$$x^2 - 101x + 1 = 0$$

   apresentando-as com seis algarismos significativos.

7. (a) Calcule o valor da expressão seguinte

$$\frac{\text{sen }(1+h) - \text{sen } 1}{h}$$

   para $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001$.

   (b) Notando que

$$\frac{\text{sen }(1+h) - \text{sen } 1}{h} = \frac{2\text{sen } \frac{h}{2} \cos\frac{2+h}{2}}{h}$$

   calcule os valores da expressão do segundo membro para os mesmos valores de h.

   (c) Recordando que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen }(1+h) - \text{sen } 1}{h} = (\text{sen } x)'_{x=1} &= \cos 1 \\ &= 0.5403023\ldots \end{aligned}$$

   compare os resultados obtidos nas alíneas anteriores e comente.

Exercícios

1. Calcule

$$r = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$$

(Obs.: Note que r é o ponto fixo da equação $x = \sqrt[3]{1 + x}$.)

2. Considere a equação

$$4x - e^x = 0.$$

(a) Mostre graficamente que tem duas raízes, uma localizada em $[0, 1]$ e outra em $[2, 3]$.

(b) Com vista à utilização do método iterativo do ponto fixo simples para calcular as raízes mostre que não pode usar a mesma fórmula de iteração para ambas as raízes.

(c) Determine-as apresentando os resultados com três algarismos significativos.

3. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua e derivável em $[a, b]$ tal que

$$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = L < 1.$$

Seja r o ponto fixo de f e $x_1, x_2, \dots$ a sequência gerada pela fórmula

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

com x_0 dado.

(a) Prove que se $f'(x) > 0$ para $x \in [a, b]$ então

$$\text{ou } x_0 > x_1 > x_2 > \dots,$$

$$\text{ou } x_0 < x_1 < x_2 < \dots.$$

(b) O que pode concluir se $f'(x) < 0$ para $x \in [a, b]$?

4. Uma sucessão (x_k) converge para x verificando-se que se $\epsilon_k = |x - x_k|$ então $\epsilon_{k+1} \le L\epsilon_k$ onde $0 \le L < 1$.

(a) Mostre que $|x_{k+1} - x_k|$ pode ser usado para estimar ϵ_k,

$$\epsilon_k \le \frac{1}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|.$$

(b) Determine o número de iterações a calcular para que o erro ϵ_k seja inferior a uma tolerância δ dada.