E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: Computação Numérica

CÓDIGO: 21180

DOCENTE: Costa O'Connor Shirley

A preencher pelo estudante

NOME: Ivo Vieira Baptista

N.º DE ESTUDANTE: 2100927

CURSO: Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 8 de Novembro de 2023

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

Resposta 1)

1.1)

Calculamos a raiz real da equação $g(x) = 0$ sendo:

$$\boldsymbol{g(x)} = (\mathrm{e})^{-x} \boldsymbol{\cos x - 1.1x}$$

Para utilizar o método iterativo do ponto fixo simples, teremos que reescrevera equação $g(x) = 0$ na forma $x = f(x)$, onde $f(x)$ é a função iteradora definida por:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} \cos x}{1.1}$$

Representando graficamente as curvas $y = \mathrm{x}$ e $y = \frac{\mathrm{e}^{-x} \cos x}{1.1}$ verificamos que tem um ponto em comum de absisas $r \in [0{,}1]$, portanto:

$$r = \frac{\mathrm{e}^{-x} \cos x}{1.1}$$

Vamos agora verificar se a função f definida por:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{e}^{-x} \cos x}{1.1}$$

Satisfaz as hipóteses do teorema 1.7.1 do manual, com vista ao uso do método interativo do ponto fixo simples para resolver o problema proposto.

- A função $\boldsymbol{g(x) + 1.1\mathrm{x} = \mathrm{e}^{-x} \cos x}$ é contínua em [0,1] pois trata-se da composição de funções contínuas em ℝ, em particular continuas em [0,1].
- Verificamos que: $f(0) = \frac{\mathrm{e}^{-0} \cos 0}{1.1} = \frac{1}{1.1} \approx \mathbf{0{,}90909090}$ e

  $f(1) = \frac{\mathrm{e}^{-1} \cos 1}{1.1} \approx \mathbf{0.18069} \ldots$, pertencem ao intervalo [0,1].
- Calculamos a derivada de f:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-\cos(x) - \ sen(x))}{1.1}$$

(aplicando a regra de divisão do produto) e verificamos se $|f'(x)| < 1$, para todo $x \in [0{,}1]$

Agora vamos verificar os outros critérios para função iteradora:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^{-x}\cos x}{1.1}}$$

- A função é contínua

- A função: $f(x) = \frac{e^{-x}\cos x}{1.1}$ Está bem definida pois $Df = Df' = \mathbb{R}$

E é contínua pois trata-se do quociente de duas funções contínuas: uma é o produto entre a função composta e a função cosseno e a outra uma função constante.

- Verifiquemos que $f(0)$ e $f(1)$ pertencem ao intervalo [0,1]

$$f(0) = \frac{e^{-0}\cos 0}{1.1} = \frac{1}{1.1} \approx \mathbf{0,90909090}$$

$$f(1) = \frac{e^{-1}\cos 1}{1.1} \approx \mathbf{0,18069647}$$

Ambos os valores $f(0)$ e $f(1)$ estão no intervalo [0,1]

Temos:

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq \frac{1}{1.1} \max_{x\in[0,1]} | e^{-x}\ cosx - e^{-x}senx | \leq \max_{x\in[0,1]} | e^{-x} |.|cosx + senx| \leq 1$$

Então concluímos que existe um único ponto fixo de f no intervalo [0,1], isto é, existe um ponto $r \in [0,1]$ tal que $f(r) = r$. Para além disso,

$x_{k+1} = f(x_k), \quad \mathrm{n} = 0,1\ \ldots$

Converge para $\boldsymbol{r}$ *, qualquer que seja* $x_0 \in [0,1]$

$$x_0 = \frac{e^{-0}\cos 0}{1.1} = \frac{1}{1.1} \approx 0{,}90909090$$

$$x_1 = \frac{e^{-0{,}90909090}\cos(-0{,}90909090)}{1.1} \approx$$

$x_2 = 0{,}357376$

•

•

•

$x_8 = 0{,}357376$

$x_9 = 0{,}357393$

Com a precisão com que os cálculos são realizados (representando números com 8 dígitos decimais) as iterações x_8 e x_9 coincidem e o mesmo acontece com as iterações seguintes.

Então concluímos que exite um único ponto fixo de f no intervalo $[0,1]$, isto é, existe um ponto fixo $r \in [0,1]$ tal que $f(r) = r$. Para alem disso a sucessão $x_{k+1} = f(x_k), \quad \mathrm{n} = 0,1 \ \ldots$ *Converge para* $\boldsymbol{r}$ *qualquer que seja* $x_0 \in [0,1]$.

Apenas falta provar que $\boldsymbol{r}$ *é a raíz de* $(\mathbf{e})^{-x} \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} - \mathbf{1.1}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *, o que pode facilmente ser verificado.*

De facto $f(r) = r \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{-r}\cos(r)}{1.1} = r \Leftrightarrow e^{-r} \cos(r) = 1{,}1r \Leftrightarrow (\mathbf{e})^{-\boldsymbol{r}} \mathbf{cos}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{1.1}\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$

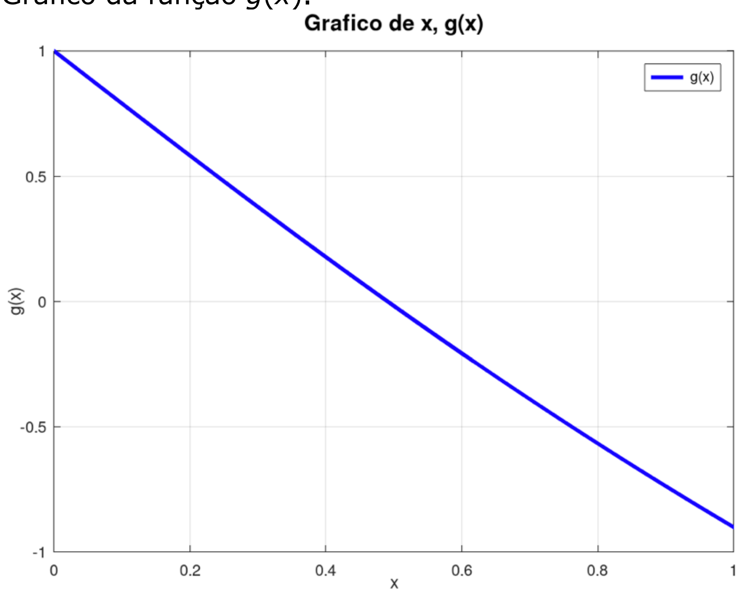
Pelo que o ponto fixo de f *se e só se* $\boldsymbol{r}$ *é a raiz de* $g(x) = 0$

1.2 Script efa20_1.m

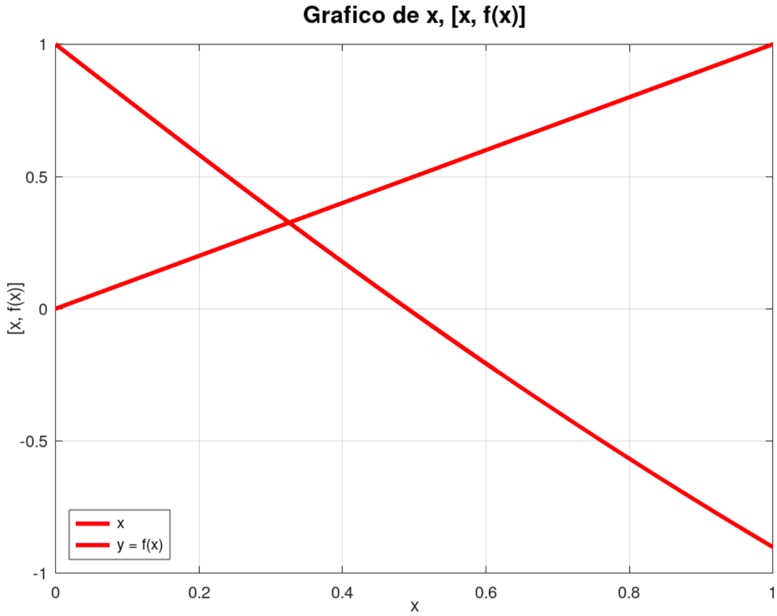
Este script foca a visualização gráfica da função g(x) = e^{-x} cos x − 1.1x

. Três gráficos são gerados:

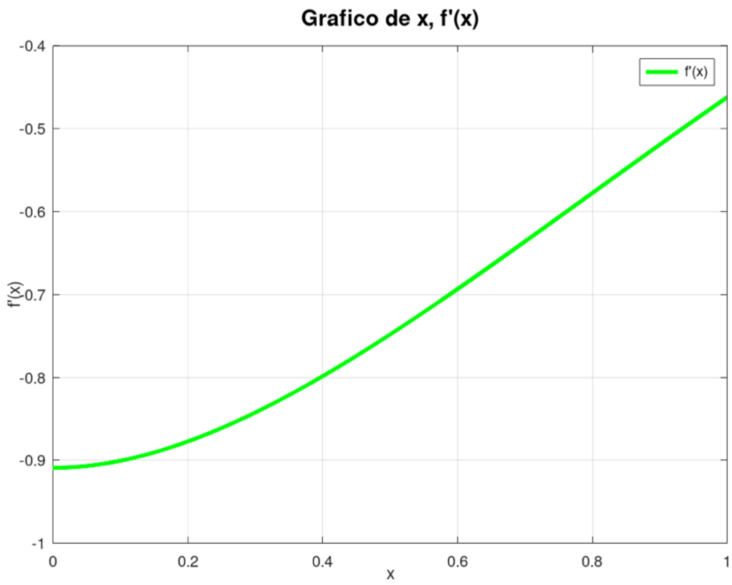
- Gráfico da função $g(x)$.



- Gráfico que relaciona x e $g(x)$.



- Gráfico da derivada da função $g(x)$.



O valor máximo da derivada da função é também calculado e apresentado da seguinte forma:

```
Janela de Comandos
O valor maximo de |f'(x)| ?? L = 0.90909
O valor de L = 0.90909091
>> |
```

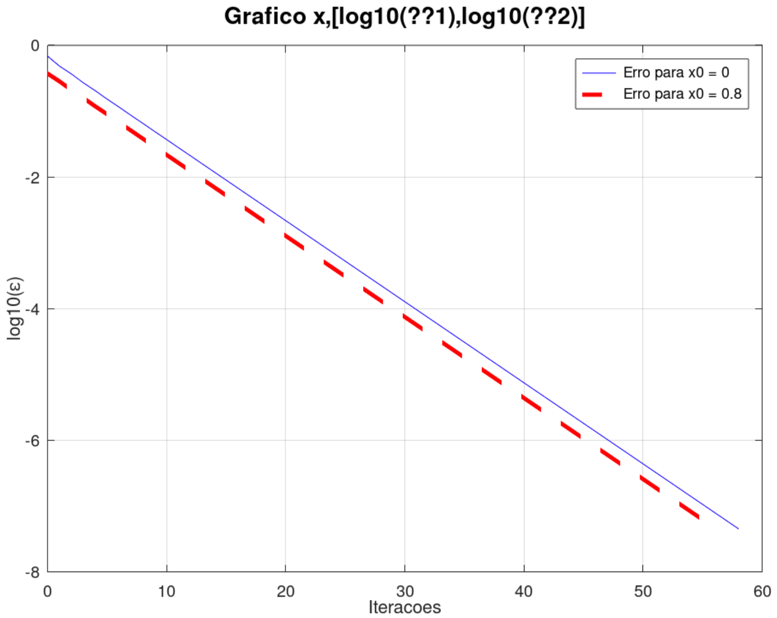
1.3 Script efa20_2.m

O foco deste script é encontrar soluções da equação g(x)=0 usando o método do ponto fixo para dois valores iniciais distintos, x0=0 e x0=0.8. O erro absoluto é calculado para cada iteração, e o logaritmo base 10 deste erro que é então plotado em função do número de iterações.

Análise e Discussão

- **Análise Gráfica**

  Os gráficos gerados pelo script **efa20_1.m** fornecem uma visualização clara da função e da sua derivada. O valor máximo da derivada oferece uma indicação da taxa de convergência do método.



  O script **efa20_2.m** produz gráficos que mostram o comportamento do erro ao longo das iterações para dois diferentes valores iniciais. Essa visualização permite uma compreensão clara de quão rapidamente o método converge para uma solução precisa para diferentes pontos iniciais.

- **Convergência e Erro**

  A partir dos resultados, é evidente que a escolha do valor inicial pode ter um impacto significativo na taxa de convergência. Por exemplo, para o valor inicial x0=0.8, o método parece convergir mais rapidamente comparado ao valor inicial x0=0.

  O valores de X0=0 e X0=0.8 também são calculados e apresentados da seguinte forma:

Janela de Comandos

```
A solucao para x0 = 0 ?? 0.49079868, com 59 iteracoes.
A solucao para x0 = 0.8 ?? 0.49079872, com 57 iteracoes.
>> |
```

Conclusão

Os algoritmos desenvolvidos e implementados em Octave oferecem uma abordagem robusta para entender o comportamento do método do ponto fixo. Através da análise gráfica, torna-se claro que a escolha adequada de valores iniciais é crucial para a eficiência do método.

WebGrafia:

https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/MC/cap1.html

https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~avicente/AN/2003/antext2003.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=7_eabsYsM0w

https://www.youtube.com/watch?v=Fpicettu_7M

https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponto_fixo

https://pt.symbolab.com

https://www.octave.org

https://chat.openai.com   (para debug do Octave e consultas)

Meus Vídeos:

https://github.com/StudentUAb/Basicos-Octave

https://github.com/StudentUAb/Basicos-Octave

Bibliografia:

Análise Numérica, Maria Raquel Valença, Universidade Aberta,