Algorithmen und Datenstrukturen

Analyse von Algorithmen

Fragen bei der Analyse von Algorithmen

1. **Korrektheit**
   - Was tut der Algorithmus eigentlich?
   - Vollständige Fallunterscheidungen!

2. **Terminieren**
   - Ist garantiert, dass der Algorithmus immer fertig wird?
   - Vollständige Fallunterscheidungen!

3. **Ressourcen**
   - **Laufzeit**
   - **Speicherplatz**
   - ...

Zeitkomplexität

- Zeitkomplexität ist Funktion

  t: **Eingabegröße $\rightarrow$ Anzahl von Operationen**

- **Operationen** zählen, von denen angenommen wird, dass die Zeit für ihre Ausführung unabhängig von den Eingabedaten ist (*möglichst elementar*)

- *Sonst:* die Komplexität der Operationen selbst bewerten und in die Berechnung einbeziehen

Auswahl der Eingabedaten

- Es gibt verschiedene Eingaben derselben Größe.
- Drei mögliche Szenarien:

1. **Best Case**
   Wähle für jede Eingabegröße eine Eingabe,
   die zu den wenigsten Schritten führt.
2. **Worst Case**
   Wähle für jede Eingabegröße eine Eingabe,
   die zu den meisten Schritten führt.
3. **Average Case**
   Durchschnitt über alle Eingaben derselben Größe

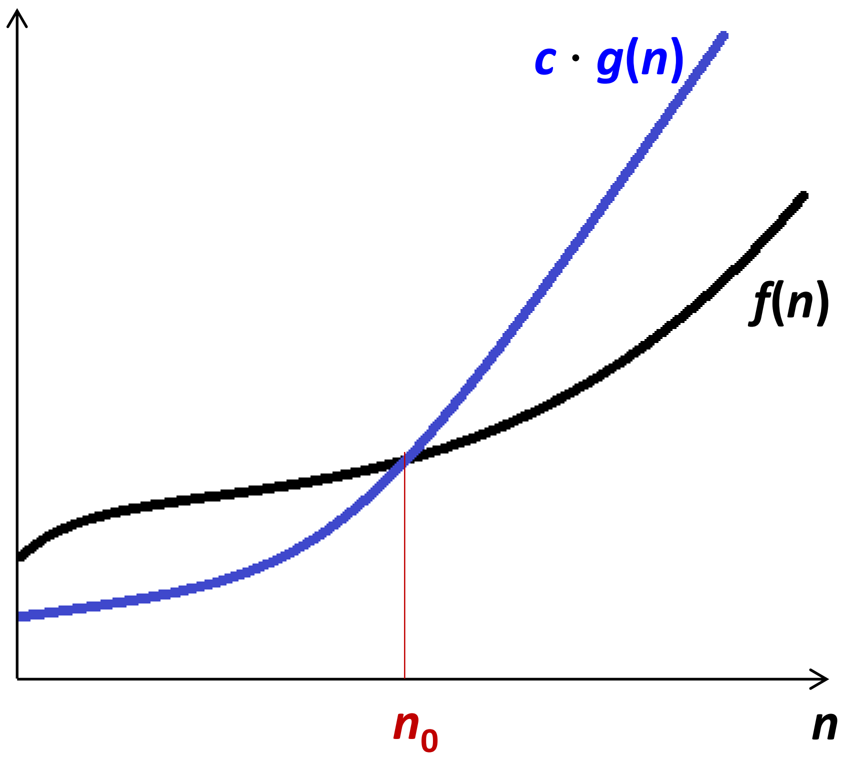
Rechenzeiten

Annahme: Prozessor mit 100 GFLOPS

n	5	10	50	100
$t(n) = n^2$	0,00000025 s	0,000001 s	0,000025 s	0,0001 s
$t(n) = n^5$	0,00003125 s	0,001 s	3,125 s	ca. 2 min
$t(n) = 2^n$	0,00000032 s	0,00001024 s	ca. 130 Tage	ca. 10^{15} Jahre
$t(n) = n^n$	0,00003125 s	ca. 2 min	> 10^{69} Jahre	

- Man kann von kleinen Eingabewerten absehen.
- Man kann von konstanten Faktoren absehen.
  (wichtig ist nur die Qualität *linear, quadratisch, kubisch, ..., exponentiell, ...*)

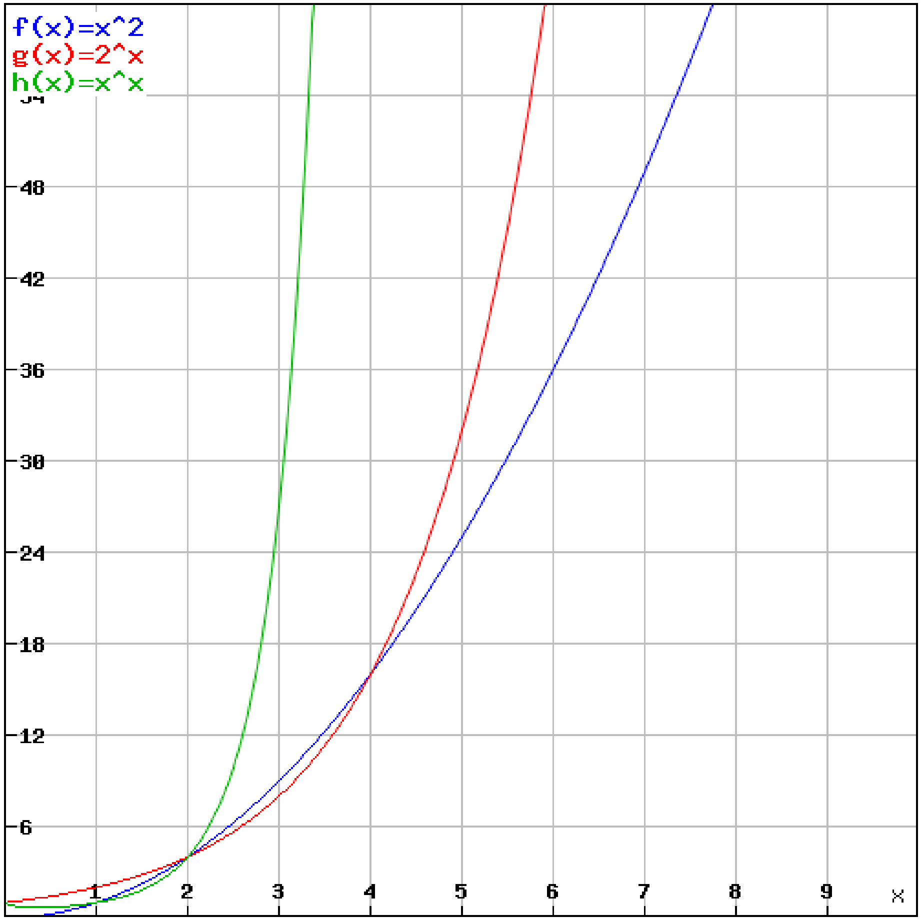
$f(n) \in O(g(n))$



$$\forall\, n \geq n_0 \,.\, f(n) \leq c \cdot g(n)$$

(für Konstanten $c > 0$ und $n_0 \geq 0$)

Wachstum von Funktionen



Konstante Faktoren „verschieben" nur den Punkt, ab dem die schneller wachsende Funktion größere Werte besitzt.

Beispiel:

$f(n) = 1000\,n$

$g(n) = n^2$

$\rightarrow$ ab $n \geq 1000$ gilt

$g(n) \geq f(n)$

Vergleich von Funktionen

- ***f*** wächst *asymptotisch* höchstens so schnell wie ***g***, wenn es zwei Konstanten $n_0 \geq 0$ und $c > 0$ gibt, so dass $\boldsymbol{f(n) \leq c \cdot g(n)}$ für alle $\boldsymbol{n \geq n_0}$ gilt. $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n))}$
  - **Für den Vergleich zweier Algorithmen:**
    Algorithmus mit $t(n) = f(n)$ ist (asymptotisch) mindestens *so effizient* wie Algorithmus mit $t(n) = g(n)$
  - **Für Abschätzungen durch Standardfunktionen:**
    $1000\,n \in O(n^2)$
    $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n))}$ $\rightarrow$ ***g*** ist (asymptotisch) *obere Schranke* von ***f***

Bestimmen von Vergleichsrelationen

- Suchen Schranken, die möglichst „eng“ sind
- Nachweis von Relationen:

$$f(n) = 7n^3 + 12n^2 - 12n + 4$$
$$f(n) \in O(n^3)$$

$$\begin{aligned} 7n^3 + 12n^2 - 12n + 4 &\leq 7n^3 + 12n^2 + 4 && (n \geq 0) \\ &\leq 7n^3 + 12n^3 + 4n^3 && (n \geq 1) \\ &= 23n^3 \end{aligned}$$

Mit $n_0 = 1$, $c = 23$ gilt also $f(n) \in O(n^3)$.

Vergleich von Funktionen

- ***f*** wächst *asymptotisch* mindestens so schnell wie ***g***, wenn es zwei Konstanten $n_0 \geq 0$ und $c > 0$ gibt, so dass $\boldsymbol{f(n) \geq c \cdot g(n)}$ für alle $\boldsymbol{n \geq n_0}$ gilt. $\boldsymbol{f(n) \in \Omega(g(n))}$

- ***g*** wächst *asymptotisch* genau so schnell wie ***f***, wenn $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n))}$ und $\boldsymbol{f(n) \in \Omega(g(n))}$. $\boldsymbol{f(n) \in \theta(g(n))}$

- $\boldsymbol{f \in O(g)}$ – ***g* obere Schranke von *f***
  $\boldsymbol{f \in \Omega(g)}$ – ***g* untere Schranke von *f***
  $\boldsymbol{f \in \theta(g)}$ – ***g* wächst (asymptotisch) wie *f***

Bestimmen von Vergleichsrelationen

$f(n) \;=\; 7n^3 + 12n^2 - 12n + 4$

$f(n) \in \Omega(n^3)$

$6n^3 \geq 12n$

$6n^2 \geq 12 \quad (n > 0)$

$n^2 \geq 2 \quad (n > 0)$

$n \geq \sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
7n^3 + 12n^2 - 12n + 4 &\geq 7n^3 - 12n && (n \geq 0) \\
&\geq 7n^3 - 6n^3 && (n \geq 2) \\
&= n^3
\end{aligned}
$$

Mit $n_0 = 2,\; c = 1$ gilt also $f(n) \in \Omega(n^3)$.

Somit gilt $f(n) \in \theta(n^3)$.

Grenzwerte und Wachstum von Funktionen

- Wächst $g(n)$ asymptotisch schneller als $f(n)$, dann strebt $\frac{f(n)}{g(n)}$ bei $n \to \infty$ gegen 0.

- Wächst $f(n)$ asymptotisch schneller als $g(n)$, dann strebt $\frac{f(n)}{g(n)}$ bei $n \to \infty$ gegen ∞.

- Betrachten also den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

Grenzwertbegriff

- Sei $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (eine reelle Zahlenfolge) und $a \in \mathbb{R}$.

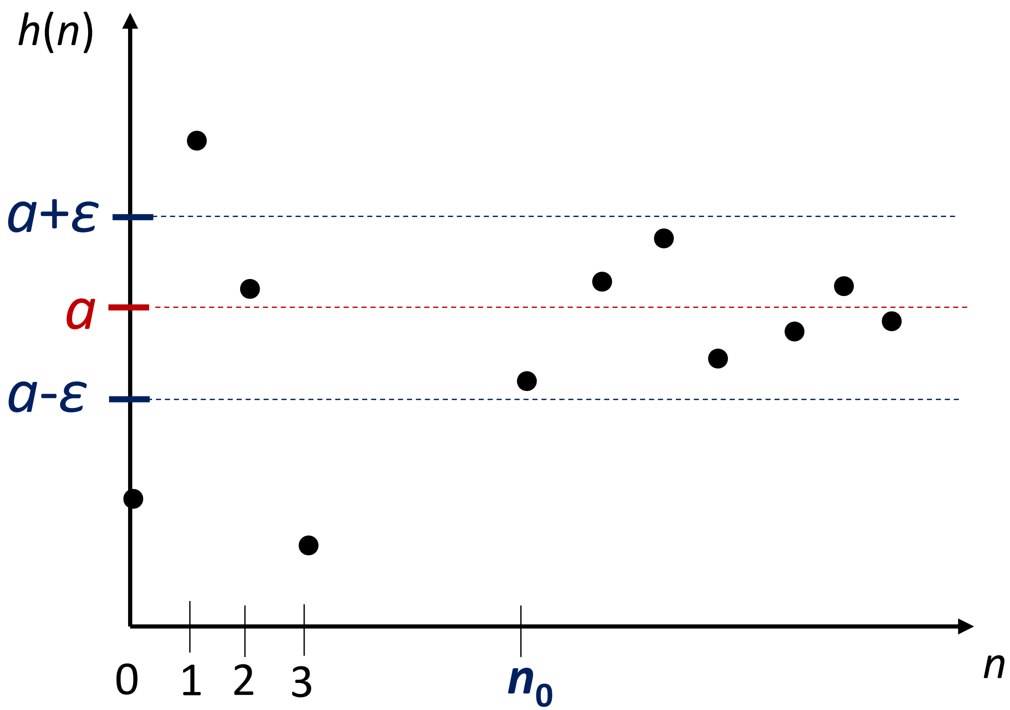
- Die Zahl a ist Grenzwert von h bei $n \to \infty$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ **fast alle** $h(n)$ in der ε-Umgebung von a liegen.

- Die Zahl a ist Grenzwert von h bei $n \to \infty$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass

$$n \geq n_0 \Rightarrow |h(n) - a| < \varepsilon .$$

Grenzwertbegriff

Die Zahl a ist Grenzwert von h bei $n \to \infty$, falls
für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass $n \geq n_0 \Rightarrow |h(n) - a| < \varepsilon$.



1.F.: $h(n) - a \geq 0$

$\to \quad h(n) - a < \varepsilon$

$\to \quad h(n) < a + \varepsilon$

2.F.: $h(n) - a < 0$

$\to \quad -(h(n) - a) < \varepsilon$

$\to \quad h(n) - a > -\varepsilon$

$\to \quad h(n) > a - \varepsilon$

$$\boxed{a - \varepsilon < h(n) < a + \varepsilon}$$

Grenzwerte und O-Notation

- Seien $\lim_{n \to \infty} h(n) = a$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt.
- Dann gibt es ein n_0 und es gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|h(n)| \leq |h(n) - a| + |a| < \underbrace{\varepsilon + |a|}_{c > 0}$$

$$|h(n)| = |h(n) - a + a|$$

- Für $h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}$ mit $f(n)$ und $g(n)$ nicht negativ:

$$|h(n)| = \frac{f(n)}{g(n)} < c \quad \text{gdw.} \quad f(n) < c\, g(n),$$

also $f(n) \in O(g(n))$.

Fazit

Falls $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existiert (also kleiner als unendlich ist),

dann gilt $f(n) \in O(g(n))$.

Umgekehrt:

Falls $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ existiert,

dann gilt $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Beispiel

$f(n) = 7n^3 + 12n^2 - 12n + 4$
$g(n) = n^3$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7n^3 + 12n^2 - 12n + 4}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \left(7 + \frac{12}{n} - \frac{12}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right) = 7$$

Also $f(n) \in O(n^3)$.

Analog $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3}{7n^3 + 12n^2 - 12n + 4} = \dfrac{1}{7}$

Also $g(n) \in O(f(n))$. D.h. $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Weitere Relationen (1)

- Beobachtung: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$ bedeutet

  $f(n) \in O(g(n))$ aber $f(n) \notin \Omega(g(n))$,

  da dann $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = \infty$ gilt.

- Wir schreiben dann: $f(n) \in o(g(n))$.

- Interpretation:

  f wächst *asymptotisch* langsamer als ***g***.

Weitere Relationen (2)

- Umgekehrt: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ bedeutet

  $f(n) \notin O(g(n))$ aber $f(n) \in \Omega(g(n))$,

  da dann $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ gilt.

- Wir schreiben dann: $f(n) \in \omega(g(n))$.

- Interpretation:

  f wächst *asymptotisch* schneller als ***g***.

Beispiel

- $f(n) = 10000\, n,\;\; g(n) = n^2$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{10000\, n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{10000}{n} = 0$$

$f(n) \in o(n^2)$

- $f(n) = \log n,\;\; g(n) = n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = \text{???}$$

Satz von Bernoulli-l´Hospital

- Wenn f und g auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind und $g(x)$ ungleich 0 ist, dann gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

- **Anwendung:** Falls $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ oder $= \infty$.

- **Prinzip:** 1. Beide Funktionen einzeln ableiten.
  2. Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ berechnen.

Beispiel

- $f(n) = \log n, \;\; g(n) = n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Somit gilt $\log n \in o(n)$.

Hierbei haben wir die Basis vernachlässigt. Dass die Basis im Zusammenhang mit asymptotischem Verhalten bedeutungslos ist, wird noch einmal in den Übungen besprochen.

Zusammenfassung

Notation	Grenzwertbedingung
$f(n) \in O(g(n))$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existiert (ist kleiner als ∞)
$f(n) \in o(g(n))$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
$f(n) \in \Omega(g(n))$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ existiert (ist kleiner als ∞)
$f(n) \in \omega(g(n))$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ (*gdw.* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$)
$f(n) \in \theta(g(n))$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ mit $c \neq 0$