# Theoretische Informatik I

## Einheit 2.5

## Eigenschaften regulärer Sprachen

1. Abschlusseigenschaften
2. Prüfen von Eigenschaften
3. Wann sind Sprachen nicht regulär?

# Wichtige Eigenschaften formaler Sprachen

- **Abschlusseigenschaften**
  - Wie können Sprachen elegant zusammengesetzt werden?
  - Erlaubt schematische Komposition von Sprachbausteinen
- **Entscheidbarkeitsfragen**
  - Kann man bestimmte Eigenschaften automatisch testen?
  - Wortproblem (Zugehörigkeit eines Wortes zur Sprache)
  - Vergleiche zwischen Sprachen (nichtleer, Teilmenge, gleich, . . . )
- **Grenzen einer Sprachklasse**
  - Wie einfach strukturiert müssen die Sprachen der Klasse sein?
  - Welche Sprachen gehören nicht zur Klasse?

**Aus theoretischer Sicht sind das die wirklich interessanten Fragen**

# Abschlusseigenschaften, wozu?

**Zeige, dass bestimmte Operationen auf regulären Sprachen wieder zu regulären Sprachen führen**

- **Wiederverwendung von "Sprachmodulen"**
  - Schematische Komposition von
    - Grammatiken zur Erzeugung von Sprachen
    - Automaten zur Erkennung von Sprachen
    - Regulären Ausdrücken
- **Schematische Konstruktion ist effektiver**
  - – Fehlerfreier Aufbau sehr komplexer Grammatiken / Automaten
  - \+ Schematische Optimierung / Minimierung
  - – Konstruktion "von Hand" oft fehleranfällig
- **Beispiel: Literale einer Programmiersprache**
  - Bilde Automaten für Tokenklassen: Zahlen, Bezeichner, Schlüsselwörter, ...
  - Konstruktion liefert Automaten für alle Arten von Literalen

# Abschlusseigenschaften, präzisiert

**Zeige: $L_1, L_2$ regulär $\Rightarrow$ $L_1\ op\ L_2$ regulär**

- **Es gilt Abgeschlossenheit unter neun Operationen**
  - Die Vereinigung zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 \cup L_2$
  - Das Komplement einer regulären Sprache ist regulär $\overline{L}$
  - Der Durchschnitt zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 \cap L_2$
  - Die Differenz zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 - L_2$
  - Die Spiegelung einer regulären Sprache ist regulär $L^R$
  - Die Hülle einer regulären Sprache ist regulär $L^*$
  - Die Verkettung zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 \circ L_2$
  - Das Bild einer regulären Sprache unter Homomorphismen ist regulär $h(L)$
  - Das Urbild " " unter Homomorphismen ist regulär $h^{-1}(L)$
- **Nachweis durch Verwendung aller Modelle**
  - DEA, ($\epsilon$-)NEA, reguläre Ausdrücke, Typ-3 Grammatiken
  - Modelle sind ineinander umwandelbar – **wähle das passendste**

# Abschluss unter Vereinigung, Verkettung, Hülle

## Beweisführung mit regulären Ausdrücken

- **$L_1, L_2$ regulär $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ regulär**

  **$L_1, L_2$ regulär**

  $\Rightarrow$ Es gibt reguläre Ausdrücke $E_1, E_2$ mit $L_1 = L(E_1)$, $L_2 = L(E_2)$

  $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2 = L(E_1) \cup L(E_2) = L(E_1{+}E_2)$ **regulär**

- **$L_1, L_2$ regulär $\Rightarrow$ $L_1{\circ}L_2$ regulär**

  **$L_1, L_2$ regulär**

  $\Rightarrow$ Es gibt reguläre Ausdrücke $E_1, E_2$ mit $L_1 = L(E_1)$, $L_2 = L(E_2)$

  $\Rightarrow$ $L_1{\circ}L_2 = L(E_1){\circ}L(E_2) = L(E_1{\circ}E_2)$ **regulär**

- **$L$ regulär $\Rightarrow$ $L^*$ regulär**

  **$L$ regulär**

  $\Rightarrow$ Es gibt einen regulären Ausdruck $E$ mit $L = L(E)$

  $\Rightarrow$ $L^* = (L(E))^* = L(E^*)$ **regulär**

# Abschluss unter Komplementbildung

## Beweisführung mit endlichen Automaten

- **$L$ regulär $\Rightarrow$ $\overline{L}$ regulär**

  Komplementiere akzeptierende Zustände des erkennenden Automaten

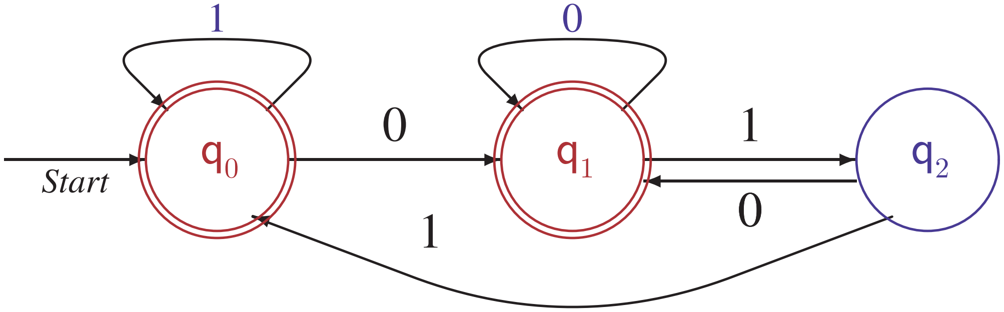
  **$L$ regulär**

  $\Rightarrow$ Es gibt einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(A)$

  $\Rightarrow$ $\overline{L} = \overline{L(A)} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \notin F\} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q - F\}$

  $= L((Q, \Sigma, \delta, q_0, Q-F))$ **regulär**

- **Beispiel: Komplementierung von `(0+1)*01`**
  - Zugehöriger DEA




  - Komplementautomat erkennt Wörter die nicht mit 01 enden
  - Regulärer Ausdruck durch Zustandseliminationsverfahren erzeugbar

# Abschluss unter Durchschnitt und Differenz

- **Einfache mathematische Beweise**

  $\boldsymbol{L_1, L_2}$ **regulär** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{L_1 \cap L_2} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ **regulär**

  $\boldsymbol{L_1, L_2}$ **regulär** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{L_1 - L_2} = L_1 \cap \overline{L_2}$ **regulär**

- **Produktkonstruktion auf endlichen Automaten**

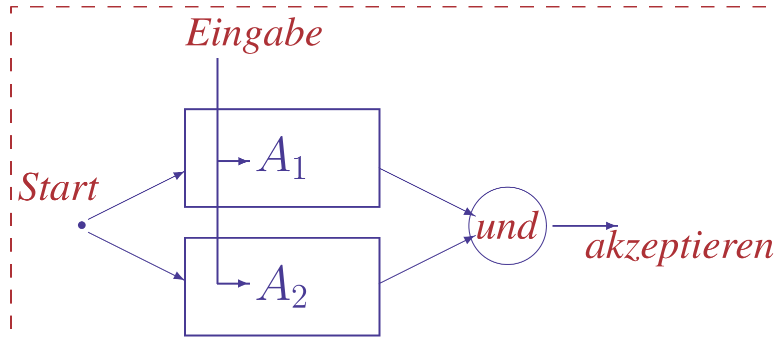
  Simultane Abarbeitung von Wörtern in beiden Automaten

  $\boldsymbol{L_1, L_2}$ **regulär**

  $\Rightarrow$ Es gibt DEAs $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$

  und $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$

  mit $L_1 = L(A_1)$, $L_2 = L(A_2)$




$$\Rightarrow \boldsymbol{L_1 \cap L_2} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_1(q_{0,1}, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(q_{0,2}, w) \in F_2\}$$

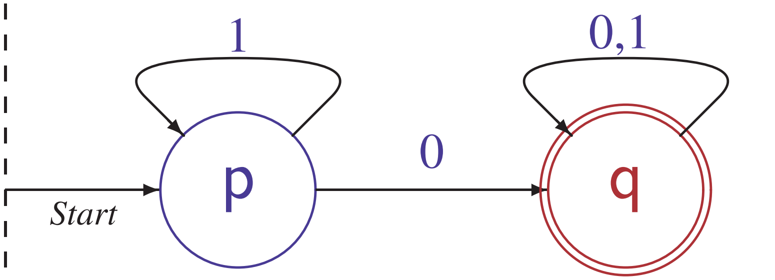
$$= \{w \in \Sigma^* \mid (\hat{\delta}_1(q_{0,1}, w), \hat{\delta}_2(q_{0,2}, w)) \in F_1 \times F_2\}$$

Konstruiere $A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_{0,1}, q_{0,2}), F_1 \times F_2)$

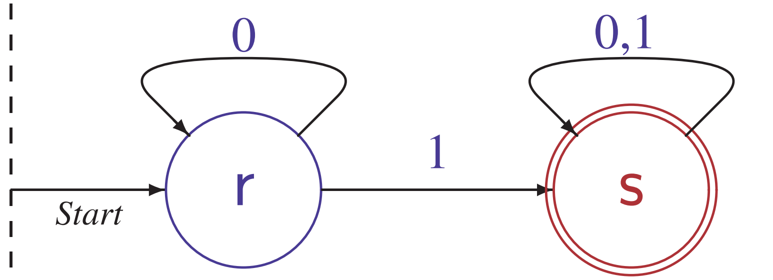
mit $\delta((p, q), a) = (\delta_1(p,a), \delta_2(q,a))$ für $p \in Q_1$, $q \in Q_2$, $a \in \Sigma$

$\Rightarrow \boldsymbol{L_1 \cap L_2} = L(A)$ **regulär**

# Produktkonstruktion am Beispiel

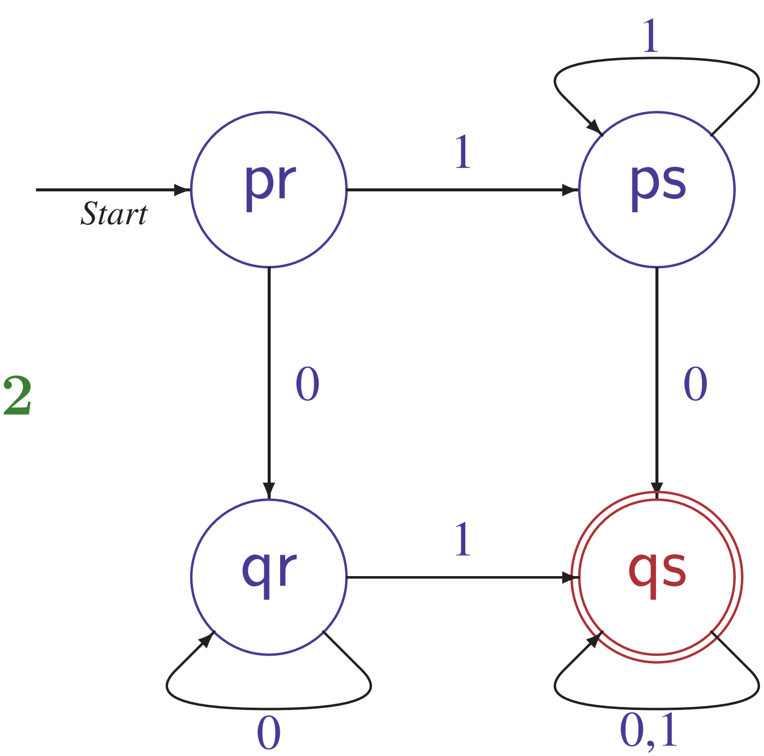



**Automat $A_1$**




**Automat $A_2$**

**Automat $A_1 \times A_2$**



# Abschluss unter Spiegelung

**$L$ regulär $\Rightarrow$ $L^R = \{w_n..w_1 \mid w_1..w_n \in L\}$ regulär**

- **Beweisführung mit Automaten**
  - Bilde Umkehrautomaten zu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L=L(A)$
    - Umkehrung der Pfeile im Diagramm: $\delta^R(q,a) = \{q' | \delta(q',a) = q\}$
    - $q_0$ wird zum akzeptierenden Zustand: $F^R = \{q_0\}$
    - Neuer Startzustand $q_0^R$ mit $\epsilon$-Übergängen zu allen $q \in F$
- **Induktiver Beweis mit regulären Ausdrücken**

  Sei $L = L(E)$ für einen regulären Ausdruck
  - Für $E \in \{\emptyset, \epsilon, \mathtt{a}\}$ ist $L^R = L = L(E)$ regulär
  - Für $E = E_1{+}E_2$ ist $L^R = (L(E_1) \cup L(E_2))^R = L(E_1)^R \cup L(E_2)^R$ regulär
  - Für $E = E_1 \circ E_2$ ist $L^R = (L(E_1) \circ L(E_2))^R = L(E_2)^R \circ L(E_1)^R$ regulär
  - Für $E = E_1^*$ ist $L^R = L(E_1^*)^R = (L(E_1)^R)^*$ regulär
- **Beispiel: Spiegelung von $L(\mathtt{(0+1)0^*})$**
  - $L^R = L(\mathtt{(0^*)}^R\mathtt{(0+1)}^R) = L(\mathtt{(0}^R\mathtt{)^*(0}^R\mathtt{+1}^R\mathtt{)}) = L(\mathtt{0^*(0+1)})$

# Abschluss unter Homomorphismen

- **Was ist ein Homomorphismus?**
  - Wörtlich: "gleichgestaltige Abbildung", d.h. eine Funktion auf Wörtern, die eindeutig durch ihr Verhalten auf einzelnen Symbolen definiert ist
  - $h{:}\Sigma^*\to\Sigma'^*$ ist Homomorphismus, wenn für alle $w = v_1..v_n \in \Sigma^*$ gilt $h(w) = h(v_1)..h(v_n) \in \Sigma'^*$
  - Homomorphismen sind mit endlichen Ein-/Ausgabe Automaten berechenbar

- **Beispiele**
  - Definiere $h_1{:}\{a,b\}^*\to\{0,1\}^*$ durch $h_1(a){=}01$ und $h_1(b){=}0101$
    Dann muß z.B. $h_1(aa){=}0101$, $h_1(ab){=}010101$ und $h_1(\epsilon){=}\epsilon$ sein
  - Definiere $h_2{:}\{a,b\}^*\to\{0,1\}^*$ durch $h_2(w){=}1$ für alle $w\in\{a,b\}^*$
    $h_2$ ist kein Homomorphismus, denn $h_2(aa){=}1 \neq 11{=}h_2(a)h_2(a)$
  - $h_3{:}\{a,b\}^*\to\{0,1\}^*$ mit $h_3(aa){=}01$ kann kein Homomorphismus sein, denn $h_3(aa) \neq h_3(a)h_3(a)$ für jeden möglichen Wert von $h_3(a)$
    Wäre z.B. $h_3(a){=}0$, dann müsste $h_3(aa){=}00$ sein (analog für $h_3(a){=}1$)

# Bild und Urbild unter (beliebigen!) Funktionen

- **Bild einer Menge $L\subseteq A$ unter einer Funktion $f:A\to B$**
  - Menge aller Funktionswerte von $f$ bei Eingaben aus $L$

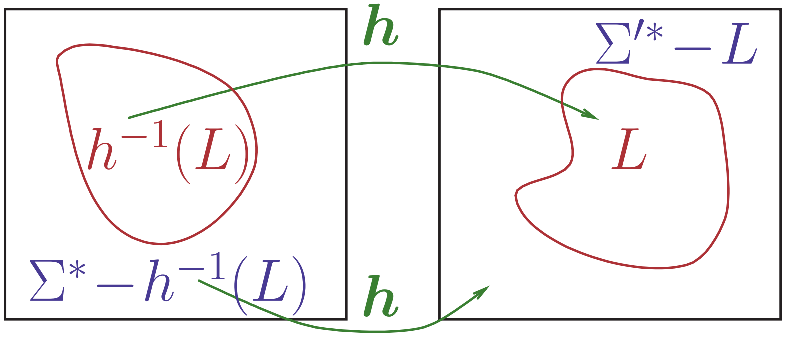
    $$f(L) = \{f(w) \mid w\in L\} \subseteq B$$

    Für Homorphismen $h:\Sigma^*\to\Sigma'^*$ ist $h(L)\subseteq\Sigma'^*$ für alle $L\subseteq\Sigma^*$
  - z.B. $h_1(\{ab, aa, b\}) = \{0101, 010101\}$

    und $h_1(\{a,b\}^*) = \{01\}^*$
- **Urbild einer Menge $L\subseteq B$ unter einer Funktion $f:A\to B$**
  - Menge aller Eingaben aus $A$, deren Funktionswerte in $L$ liegen

    $$f^{-1}(L) = \{w\in A \mid f(w)\in L\}$$

    Für Homorphismen $h:\Sigma^*\to\Sigma'^*$ ist $h^{-1}(L)\subseteq\Sigma^*$




  - z.B. $h_1^{-1}(\{0101\}) = \{aa, b\}$,

    $h_1^{-1}(\{0101, 11, 1\}) = \{aa, b\}$,

    $h_1^{-1}(L((\texttt{0101})^*)) = \{w\in\{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ gerade}\}$

# Abschlusseigenschaft: Bild unter Homomorphismen

**$L\subseteq\Sigma^*$ regulär, $h{:}\Sigma^*\to\Sigma'^*$ Homomorphismus $\Rightarrow$ $h(L)$ regulär**

**Beweis mit Grammatiken**

**$L$ regulär**

$\Rightarrow$ Es gibt eine Typ-3 Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L = L(G)$

$\Rightarrow$ $h(L) = h(L(G)) = \{h(v_1)..h(v_n) \in \Sigma'^* \mid S \stackrel{*}{\Longrightarrow} v_1..v_n\}$

Ziel: **Erzeuge Grammatik $G_h$ so daß** $A \stackrel{*}{\Longrightarrow}_{G_h} h(w) \Leftrightarrow A \stackrel{*}{\Longrightarrow}_G w$

Für jede Produktion $A\to a\, B \in P$ bestimme $h(a) = a_1..a_k$ und generiere Regeln $A\to a_1B_1$, $B_1\to a_2B_2$,...,$B_{k-1}\to a_kB$, (alle $B_i$ neue Hilfsvariablen)

Sei $P_h$ die Menge dieser Regeln, $V_h$ die Menge ihrer Hilfsvariablen

Für $G_h = (V_h, \Sigma', P_h, S)$ gilt $A\to a\, B \in P \Leftrightarrow A \stackrel{*}{\Longrightarrow}_{G_h} h(a)\, B$

und $S \stackrel{*}{\Longrightarrow}_G v_1..v_n \Leftrightarrow S \stackrel{*}{\Longrightarrow}_{G_h} h(v_1)..h(v_n)$

Also $\boldsymbol{h(L)} = \{h(v_1)..h(v_n) \in \Sigma'^* \mid S \stackrel{*}{\Longrightarrow}_{G_h} h(v_1)..h(v_n)\} = L(G_h)$ **regulär**

Sonderbehandlung für $h(a)=\epsilon$ erforderlich, da Regel $A\to B$ unzulässig

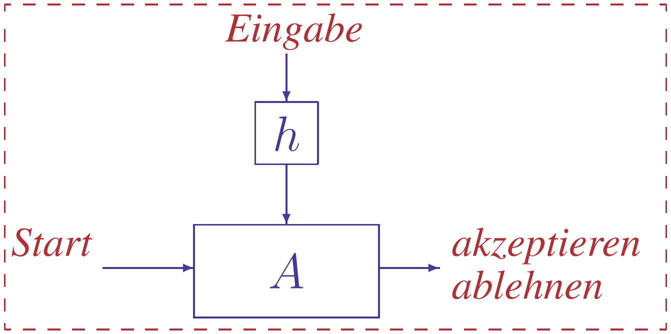
Beweis mit regulären Ausdrücken in Hopcroft, Motwani, Ullman §4.2.3

# Abschluss: Urbild unter Homomorphismen

**$L \subseteq \Sigma'^*$ regulär, $h{:}\Sigma^* \to \Sigma'^*$ Homomorphismus $\Rightarrow$ $h^{-1}(L)$ regulär**

**Beweis mit endlichen Automaten**

Berechnung von $h$ vor Abarbeitung der Wörter im Automaten




**$L$ regulär**

$\Rightarrow$ Es gibt einen DEA $A = (Q, \Sigma', \delta, q_0, F)$

mit $L = L(A) = \{v \in \Sigma'^* \mid \hat{\delta}(q_0, v) \in F\}$

$\Rightarrow$ $h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, h(w)) \in F\}$

Konstruiere $A_h = (Q, \Sigma, \delta_h, q_0, F)$ mit $\delta_h(q, a) = \hat{\delta}(q, h(a))$

Dann gilt $\hat{\delta}_h(q, w) = \hat{\delta}(q, h(w))$ für alle $q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{h^{-1}(L)} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_h(q_0, w) \in F\} = L(A_h)$ **regulär**

# Nachweis von $L \in \mathcal{L}_3$ mit Abschlusseigenschaften

- $\boldsymbol{L_1 = \{a^n b^m c^k \mid k, n, m \in \mathbb{N} \land n \geq 2 \geq k \neq 0\} \in \mathcal{L}_3}$

  Beweis: Es ist $L_1 = \{a^n \mid n \geq 2\} \circ \{b^m \mid m \in \mathbb{N}\} \circ \{cc, c\}$

  $$= h_1(\{0^n \mid n \geq 2\}) \circ h_2(\{0^m \mid m \in \mathbb{N}\}) \circ h_3(\{00, 0\})$$

  wobei $h_1(0) = a$, $h_2(0) = b$, $h_3(0) = c$

  $$= h_1(\{0\}^* \circ \{0\} \circ \{0\}) \circ h_2(\{0\}^*) \circ h_3(\{0\} \circ \{0\} \cup \{0\})$$

- **Jede reguläre Sprache ist nur aus $\{0\} \in \mathcal{L}_3$ konstruierbar**

  Beweis: Konstruiere Sprache beliebiger regulärer Ausdrücke induktiv

  – Für $a \in \Sigma$ ist $L(\mathtt{a}) = \{a\} = h(\{0\})$, wobei $h(0) = a$ Homomorphismus

  – $L(\emptyset) = \{\} = \{0\} - \{0\}$

  – $L(\epsilon) = \{\epsilon\} = \{0\}^* - (\{0\} \circ \{0\}^*)$

  – $L(E \circ F) = L(E) \circ L(F)$ konstruierbar, wenn $L(E)$ und $L(F)$ konstruierbar

  – $L(E^*) = (L(E))^*$ konstruierbar, wenn $L(E)$ konstruierbar

  – $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$ konstruierbar, wenn $L(E)$ und $L(F)$ konstruierbar

  – $L(\mathtt{(}E\mathtt{)}) = L(E)$ konstruierbar, wenn $L(E)$ konstruierbar

# Nachweis von $L \notin \mathcal{L}_3$ mit Abschlusseigenschaften

- **Verwende Umkehrung der Abschlusseigenschaften**

$$h(L) \notin \mathcal{L}_3 \;\Rightarrow\; L \notin \mathcal{L}_3, \qquad h^{-1}(L) \notin \mathcal{L}_3 \;\Rightarrow\; L \notin \mathcal{L}_3,$$

$$\overline{L} \notin \mathcal{L}_3 \;\Rightarrow\; L \notin \mathcal{L}_3, \qquad L \cap L' \notin \mathcal{L}_3 \wedge L' \in \mathcal{L}_3 \;\Rightarrow\; L \notin \mathcal{L}_3, \quad \ldots$$

Methodik: Zeige, daß die Annahme $L \in \mathcal{L}_3$ dazu führt, daß eine als nichtregulär bekannte Sprache regulär sein müsste

Ausgangspunkt: $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär (Beweis auf Folie 26)

- **Anwendungsbeispiele**

  – $\boldsymbol{L_2 = \{(^m)^m \mid m \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_3}$

  Wähle Homomorphismus $h$:$\{(,)\} \to \{0,1\}$ mit $h(() = 0$, $h()) = 1$

  Dann ist $h(L_2) = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\} = L_{01} \notin \mathcal{L}_3$, also $L_2 \notin \mathcal{L}_3$

  – $\boldsymbol{L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\} \notin \mathcal{L}_3}$ ($|w|_1$: Anzahl Einsen in $w$)

  Es gilt $L_3 \cap L(0^* \circ 1^*) = L_{01} \notin \mathcal{L}_3$, also $L_3 \notin \mathcal{L}_3$ (korrekte Klammerausdrücke $\notin \mathcal{L}_3$)

  – $\boldsymbol{L_4 = \{a^n b^m c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_3}$,

  Wähle $h(a) = 0, h(b) = \epsilon, h(c) = 1$, dann ist $h(L_4) = L_{01} \notin \mathcal{L}_3$

  – $\boldsymbol{L_5 = \{a^n b^m c^k \mid n \neq m \vee k \neq m\} \notin \mathcal{L}_3}$, da $\overline{L_5} \cap L(a^* b^* c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

# PRÜFEN VON EIGENSCHAFTEN

# Tests für Eigenschaften regulärer Sprachen

- **Welche Eigenschaften sind automatisch prüfbar?**
  - Ist die Sprache eines Automaten leer?
  - Zugehörigkeit: Ist ein Wort $w$ Element der Sprache eines Automaten?
  - Äquivalenz: Beschreiben zwei Automaten dieselbe Sprache?

  Gleiche Fragestellung für Grammatiken und reguläre Ausdrücke

- **Wechsel der Repräsentation ist effektiv**
  - NEA $\mapsto$ DEA: Teilmengenkonstruktion (exponentielle Aufblähung möglich)
  - DEA $\mapsto$ NEA: Modifikation der Präsentation (Mengenklammern)
  - DEA $\mapsto$ RA: Zustandselimination (oder $R_{ij}^k$-Methode)
  - RA $\mapsto$ NEA: induktive Konstruktion von Automaten
  - DEA $\mapsto$ Typ-3 Grammatik: Regeln für Überführungsschritte einführen
  - Typ-3 Grammatik $\mapsto$ NEA: Überführungstabelle codiert Regeln

**Es reicht, Tests für ein Modell zu beschreiben**

# Prüfe, ob eine reguläre Sprache leer ist

- **Nichttriviales Problem**
  - Automaten: Gibt es überhaupt einen akzeptierenden Pfad?
  - Reguläre Ausdrücke: Wird mindestens ein einziges Wort charakterisiert?
  - Grammatiken: Wird überhaupt ein Wort aus dem Startzustand erzeugt?
- **Erreichbarkeitstest für DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$**
  - Wegen $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ ist $q_0$ in 0 Schritten erreichbar
  - $q$ in $k$ Schritten erreichbar, $\delta(q, a){=}q'$ $\Rightarrow$ $q'$ in $k{+}1$ Schritten erreichbar
  - **$L(A){=}\{\}$ $\Leftrightarrow$ kein $q \in F$ in maximal $|Q|$ Schritten erreichbar**
- **Induktive Analyse für reguläre Ausdrücke**
  - $L(\emptyset){=}\{\}$, $L(\epsilon){\neq}\{\}$, $L(\mathtt{a}){\neq}\{\}$
  - $L((E)){=}\{\} \Leftrightarrow L(E){=}\{\}$ — keine Änderung
  - $L(E{+}F){=}\{\} \Leftrightarrow L(E){=}\{\} \wedge L(F){=}\{\}$ — Vereinigung von Elementen
  - $L(E{\circ}F){=}\{\} \Leftrightarrow L(E){=}\{\} \vee L(F){=}\{\}$ — Elemente beider Sprachen nötig
  - $L(E^*){\neq}\{\}$, — $\epsilon$ gehört immer zu $L(E^*)$

# Test auf Zugehörigkeit (Wortproblem)

- **Unterschiedlich schwierig je nach Repräsentation**
  - Automaten: Gibt es einen akzeptierenden Pfad für das Wort $w$?
  - Reguläre Ausdrücke: Wird $w$ von der Charakterisierung erfasst?
  - Grammatiken: Kann $w$ aus dem Startzustand erzeugt werden?
- **Abarbeitung durch DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$**
  - Bestimme $q := \hat{\delta}(q_0, w)$ und teste $q \in F$
  - Maximal $|w| + |F|$ Arbeitsschritte

**Test für andere Repräsentationen durch Umwandlung in DEA**

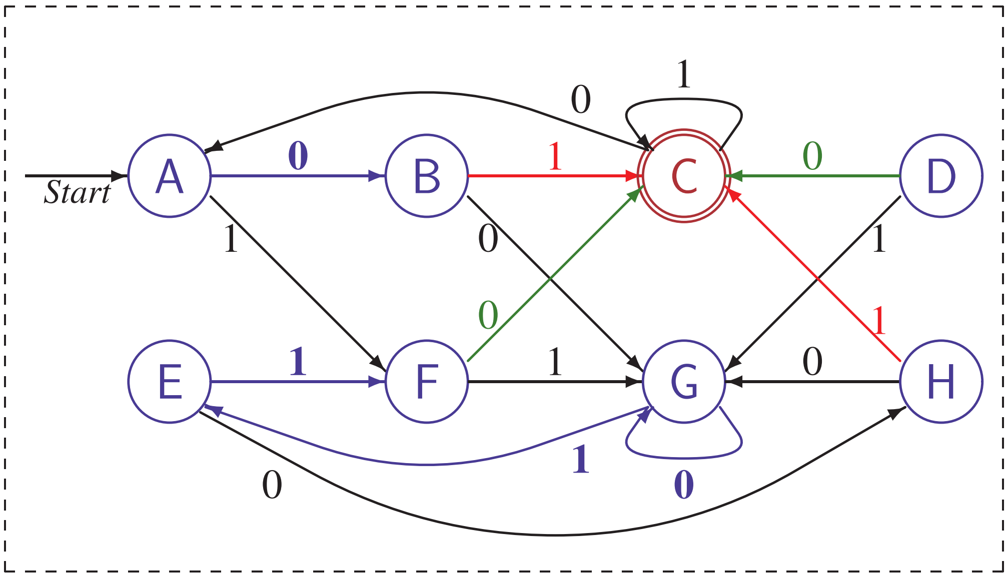
# Test auf Äquivalenz von Sprachen

- **Wann sind zwei reguläre Sprachen gleich?**
  - Nichttrivial, da Beschreibungsformen sehr verschieden sein können
    - · Verschiedene Automaten, Grammatiken, Ausdrücke, Mischformen, ...
- **Gibt es eine “kanonische” Repräsentation?**
  - z.B. · Transformiere alles in deterministische endliche Automaten
    · Erzeuge Standardversion mit kleinstmöglicher Anzahl von Zuständen
  - Äquivalenztest prüft dann, ob der gleiche Standardautomat erzeugt wird
- **Wie standardisiert man Automaten?**
  - Entferne Zustände, die vom Startzustand unerreichbar sind
  - Fasse Zustände zusammen, die für alle Wörter “äquivalent” sind
    - · Es führen exakt dieselben Wörter zu akzeptierenden Zuständen
  - Ergibt **minimalen äquivalenten Automaten**

# Äquivalenztest für Zustände

- **Äquivalenz der Zustände $p$ und $q$ ($p \cong q$)**
  – Für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt $\hat{\delta}(p,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q,w) \in F$
  – Die Wörter müssen nicht zum gleichen Zustand führen
- **Positives Prüfverfahren schwierig**
  – Man muss alle Wörter überprüfen, die von einem Zustand ausgehen
  – Man kann sich auf Wörter der maximalen Länge $|Q|$ beschränken
  – Besser: Nichtäquivalente (unterscheidbare) Zustände identifizieren
- **Methodik: verwende einen Table-Filling Algorithmus**
  Markiere Unterscheidbarkeit von Zuständen in Tabelle
  – Start: $p \not\cong q$, falls $p \in F$ und $q \notin F$
  – Iteration: $p \not\cong q$, falls $\delta(p,a) \not\cong \delta(q,a)$ für ein $a \in \Sigma$
  In jeder Iteration werden nur noch ungeklärte Paare überprüft
  Nach maximal $|Q|^2/2$ Iterationen sind alle Unterschiede bestimmt

# Äquivalenztest am Beispiel




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ■ | × | × | × | | × | × | × |
| B | ■ | ■ | × | × | × | × | × | |
| C | ■ | ■ | ■ | × | × | × | × | × |
| D | ■ | ■ | ■ | ■ | × | | × | × |
| E | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | × | × | × |
| F | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | × | × |
| G | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | × |
| H | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

*Tabelle der Unterschiede*

**1.** Unterscheide akzeptierende Zustände (C) von allen anderen

**2a.** Eingabesymbol 0: Nur D und F führen zu akzeptierenden Zuständen

**2b.** Eingabesymbol 1: Nur B und H führen zu akzeptierenden Zuständen

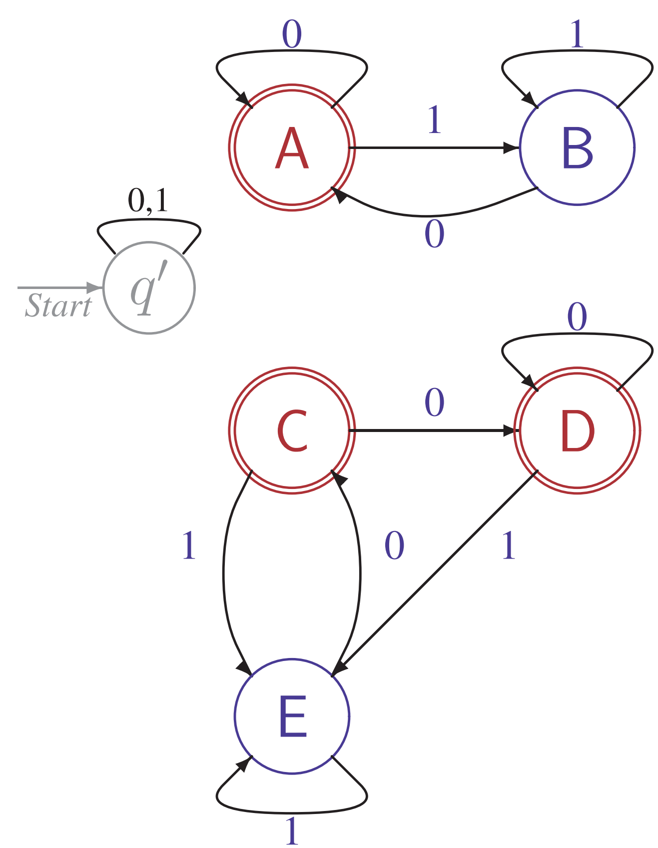
**3.** Überprüfe Nachfolger von {A,E}, {A,G}, {B,H}, {D,F} und {E,G}.

4. Überprüfung von {A,E}, {B,H} und {D,F} gibt keine Unterschiede

**Äquivalenzklassen sind {A,E}, {B,H}, {D,F}, {C} und {G}**

# Äquivalenztest für Sprachen

- **Prüfverfahren**
  - Standardisiere Beschreibungsform in zwei disjunkte DEAs $A_1$ und $A_2$
  - Vereinige Automaten zu $A = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q'\}, \Sigma, \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta', q', F_1 \cup F_2)$
    wobei $\delta'(q', a) = q'$ für alle $a \in \Sigma$
    $A$ enthält $A_1$ und $A_2$ als unabhängige Teile
  - Bilde Äquivalenzklassen von $A$
    und teste ob $q_{0,1}$ und $q_{0,2}$ äquivalent sind

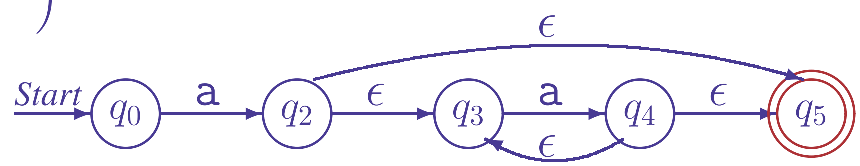



- **Zwei DEAs** für $L(\epsilon + (0+1)^* 0)$
  - Äquivalenzklassen
    sind {A,C,D} (alle Endzustände)
    und {B,E} (alle Nicht-Endzustände)
  - **Die Startzustände A und C sind äquivalent und damit auch die beiden Automaten**

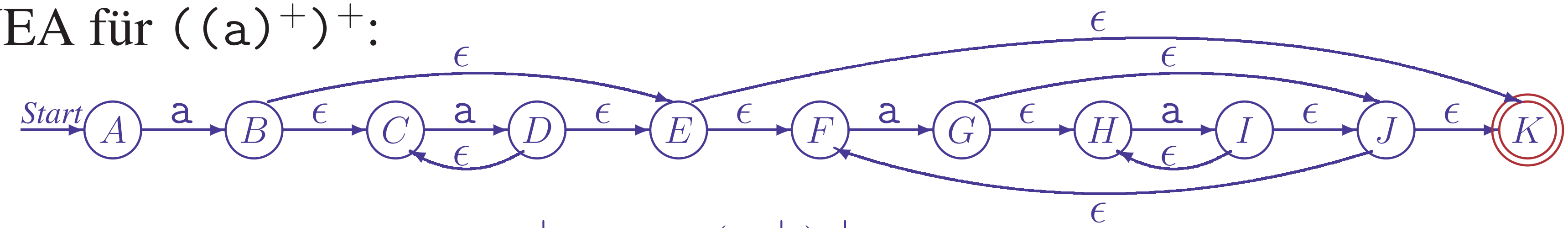
# Test der Äquivalenz $(\mathtt{a}^+)^+ \cong \mathtt{a}^+$ (Skizze)

## 1. Erzeuge NEAs für $\mathtt{a}^+$ und $(\mathtt{a}^+)^+$

NEA für `(a)`$^+$:

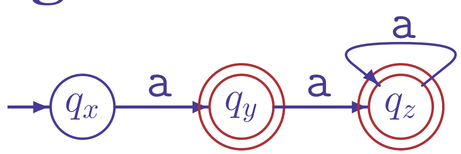



NEA für `((a)`$^+$`)`$^+$:

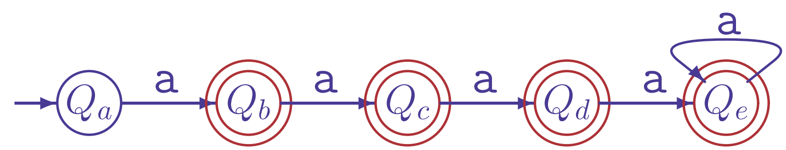



## 2. Erzeuge DEAs für $\mathtt{a}^+$ und $(\mathtt{a}^+)^+$

`(a)`$^+$:




`((a)`$^+$`)`$^+$:




$q_x \hat{=} \{q_0\}$, $q_y \hat{=} \{q_2, q_3, q_5\}$, $q_z \hat{=} \{q_3, q_4, q_5\}$

$Q_a \hat{=} \{A\}$, $Q_b \hat{=} \{B,C,E,F,K\}$, $Q_c \hat{=} \{C,..,F,K\}$, $Q_d \hat{=} \{C,..,H,J,K\}$, $Q_e \hat{=} \{C,..,K\}$

## 3. Bilde Äquivalenzklassen des vereinigten Automaten

– Äquivalenzklassen sind $\{q_x, Q_a\}$ und $\{q_y, q_z, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e\}$

– Die Startzustände $q_x$ und $Q_a$ sind äquivalent

– Die DEAs für $\mathtt{a}^+$ und $(\mathtt{a}^+)^+$ sind äquivalent

– $\mathtt{a}^+$ und $(\mathtt{a}^+)^+$ sind äquivalent

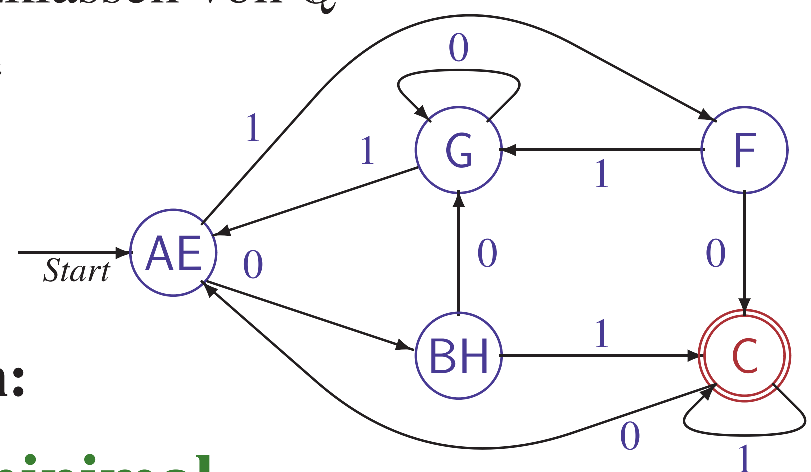
↦ Einheit 2.3, Folie 13

Test der Äquivalenz ist vollständig automatisch

# Minimierung endlicher Automaten

## Konstruiere äquivalenten DEA mit minimaler Menge von Zuständen

- **Entferne überflüssige Zustände**
  - $q$ ist überflüssig, wenn $\hat{\delta}(q_0, w) \neq q$ für alle Wörter $w \in \Sigma^*$
  - Reduziere $Q$ zu Menge der erreichbaren Zustände (Verfahren auf Folie 16)
- **Fasse äquivalente Zustände zusammen**
  - Bestimme Menge der Äquivalenzklassen von $Q$
  - Setze $Q'$ als Menge der Äquivalenzklassen von $Q$
  - Setze $\delta'(S, a)$ als Äquivalenzklasse von $\delta(q, a)$ für ein beliebiges $q \in S$
    
    Wohldefiniert, da alle Nachfolger äquivalenter Zustände äquivalent sind




**Anwendung auf Beispielautomaten:**

**Resultierender Automat ist minimal**

# GRENZEN REGULÄRER SPRACHEN

# Grenzen regulärer Sprachen

**Wie zeigt man, dass eine Sprache $L$ nicht regulär ist?**

- **Direkter Nachweis**
  - Zeige, dass kein endlicher Automat genau die Wörter von $L$ erkennt
  - Sprache muss unendlich sein und komplizierte Struktur haben
  - Technisches Hilfsmittel: Pumping Lemma
    oder Satz von Myhill-Nerode (Anhang)
- **Verwendung der Abschlusseigenschaften** (Folie 14)
  - Zeige, dass Regularität von $L$ dazu führen würde, dass eine als nichtregulär bekannte Sprache regulär sein müsste
  - Häufige Technik: (Ur-)bild unter Homomorphismen

# Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen

- **Warum ist $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär?**
  - Ein DEA muss alle Nullen beim Abarbeiten zählen und dann vergleichen
  - Für $n > |Q|$ muss ein Zustand von $A$ doppelt benutzt worden sein
  - Eine $\delta$-Schleife mit $k$ Zuständen bedeutet, dass $A$ auch $0^{n+k}1^n$ akzeptiert
- **Allgemeine Version: Pumping Lemma**

  **Für jede reguläre Sprache $L \in \mathcal{L}_3$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $w \in L$ mit Länge $|w| \geq n$ zerlegt werden kann in $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften**

  **(1) $y \neq \epsilon$,**

  **(2) $|x\,y| \leq n$ und**

  **(3) für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x\,y^k\,z \in L$**

  (Beweis folgt auf Folie 27)
- **Aussage ist wechselseitig konstruktiv**
  - Die Zahl $n$ kann zu jeder regulären Sprache $L$ bestimmt werden
  - Die Zerlegung $w = x\,y\,z$ kann zu jedem Wort $w \in L$ bestimmt werden

# Anwendungen des Pumping Lemmas

## $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär

- **Verwende Kontraposition des Pumping Lemmas**

  *Eine Sprache $L$ ist nicht regulär, wenn es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jedes $w \in L$ mit $|w| \geq n$ zerlegbar ist in $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften*

  *(1) $y \neq \epsilon$, (2) $|x\,y| \leq n$ und (3) für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x\,y^k\,z \in L$*

  **Umformulierung: ziehe Negation in die Bedingungen hinein**

  *$L$ ist nicht regulär, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $w \in L$ mit $|w| \geq n$ gibt so dass für jede Zerlegung $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften*

  *(1) $y \neq \epsilon$ und (2) $|x\,y| \leq n$ (3) ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $x\,y^k\,z \notin L$*

- **Kontrapositionsbeweis für $L_{01} \notin \mathcal{L}_3$**

  – Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen $w = 0^m 1^m$ für ein $m > n$

  – Sei $w = x\,y\,z$ eine beliebige Zerlegung mit $y \neq \epsilon$ und $|x\,y| \leq n$

  Dann gilt $x = 0^i$, $y = 0^j$ $z = 0^{m-i-j} 1^m$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leq n$.

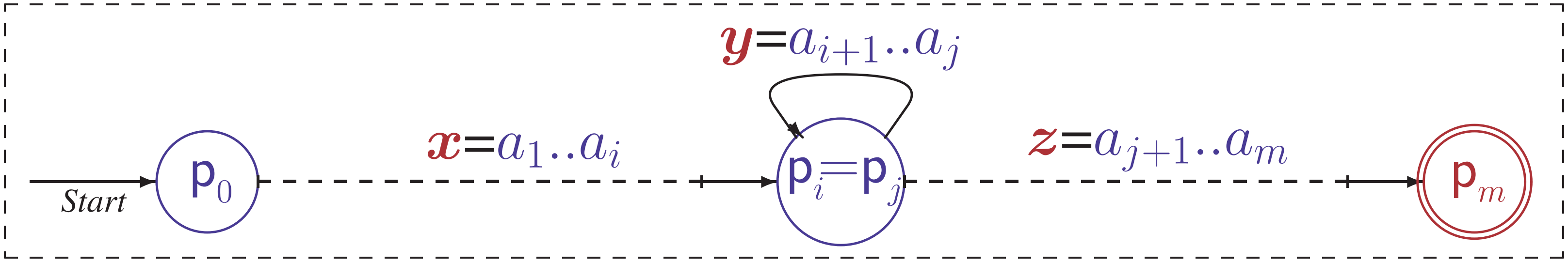
  – Wir wählen $k = 0$. Dann ist $x\,y^0\,z = 0^{m-j} 1^m \notin L_{01}$

  **Aufgrund des Pumping Lemmas kann $L_{01}$ also nicht regulär sein.**

# BEWEIS DES PUMPING LEMMAS

**Für jede Sprache $L \in \mathcal{L}_3$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $w \in L$ mit $|w| \geq n$ zerlegbar ist in $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften (1) $y \neq \epsilon$, (2) $|x\,y| \leq n$ und (3) für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x\,y^k\,z \in L$**

- **Beweis mit Automaten**
  - Sei $L$ regulär und $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA mit $L = L(A)$
  - Wähle $n = |Q|$. Betrachte $w = a_1..a_m$ mit $|w| \geq n$ und $p_i := \hat{\delta}(q_0, a_1..a_i)$
  - Dann gibt es $i, j$ mit $0 \leq i < j \leq n$ und $p_i = p_j$ (Schubfachprinzip)
  - Zerlege $w$ in $w = x\,y\,z$ mit $x = a_1..a_i$, $y = a_{i+1}..a_j$ und $z = a_{j+1}..a_m$




  - Per Konstruktion gilt $y \neq \epsilon$, $|x\,y| \leq n$ und $\hat{\delta}(p_i, y^k) = p_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$
  - Also $\hat{\delta}(q_0, x\,y^k\,z) = \hat{\delta}(p_i, y^k\,z) = \hat{\delta}(p_i, y\,z) = \hat{\delta}(q_0, x\,y\,z) = \hat{\delta}(q_0, w) \in F$

# Anwendungen des Pumping Lemmas II

$$L_2 = \{w \in \{1\}^* \mid |w| \textbf{ ist Primzahl}\} \not\in \mathcal{L}_3$$

- **Beweis folgt dem gleichen Schema**
  - Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
  - Wir wählen $w = 1^p$ für eine Primzahl $p>n+1$
  - Sei $w = x\,y\,z$ eine beliebige Zerlegung mit $y\neq\epsilon$ und $|x\,y|\leq n$

    Dann gilt $x$=$1^i$, $y$=$1^j$ $z$=$1^{p-i-j}$ für ein $j\neq 0$ und $i+j\leq n$.
  - Wir wählen $k$=$p-j$.

    Dann ist $x\,y^k\,z = 1^i\,1^{j(p-j)}\,1^{p-i-j} = 1^{i+j(p-j)+p-i-j} = 1^{(j+1)(p-j)} \not\in L_2$

**Aufgrund des Pumping Lemmas kann $L_2$ also nicht regulär sein.**

# EIGENSCHAFTEN REGULÄRER SPRACHEN IM RÜCKBLICK

- **Abschlusseigenschaften**
  - Operationen $\cup$, $\cap$, $^{-}$, -, $^{R}$, $\circ$, $^{*}$, $h$, $h^{-1}$ erhalten Regularität von Sprachen
  - Verwendbar zum Nachweis von Regularität oder zur Widerlegung
- **Automatische Prüfungen**
  - Man kann testen ob eine regulare Sprache leer ist
  - Man kann testen ob ein Wort zu einer regulären Sprache gehört
  - Man kann testen ob zwei reguläre Sprachen gleich sind
- **Minimierung von Automaten**
  - Ein Automat kann minimiert werden, indem man äquivalente Zustände zusammenlegt und unerreichbare Zustände entfernt
- **Pumping Lemma**
  - Wiederholt man einen bestimmten Teil ausreichend großer Wörter einer regulären Sprache beliebig oft, so erhält man immer ein Wort der Sprache
  - Verwendbar zur Widerlegung von Regularität

# Zusammenfassung: reguläre Sprachen

- **Drei Modelle**
  - Endliche Automaten (DEA, NEA) erkennen Wörter einer Sprache
  - Reguläre Ausdrücke beschreiben Struktur der Wörter
  - (Typ 3) Grammatiken erzeugen Wörter einer regulären Sprache
- **Alle drei Modelle sind äquivalent**
  - NEA $\mapsto$ DEA: Teilmengenkonstruktion
  - DEA $\mapsto$ Typ-3 Grammatik: Verwandle Überführungsfunktion in Regeln
  - Typ-3 Grammatik $\mapsto$ NEA: Verwandle Regeln in Überführungsfunktion
  - DEA $\mapsto$ Reguläre Ausdrücke: Erzeuge Ausdrücke für Verarbeitungspfade oder eliminiere Zustände in RA Automaten
  - Reguläre Ausdrücke $\mapsto$ NEA: Iterative Konstruktion von Automaten
- **Wichtige Eigenschaften von $\mathcal{L}_3$**
  - Abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, $\overline{\phantom{x}}$, -, $^R$, $\circ$, $^*$, $h$, $h^{-1}$
  - Entscheidbarkeit des Wortproblems und Gleichheit von Sprachen
  - Endliche Automaten können automatisch minimiert werden
  - Nachweis der Nichtregularität von Sprachen mit dem Pumping Lemma

# ANHANG

# Eine algebraische Charakterisierung regulärer Sprachen

- **Automaten teilen Sprachen in Äquivalenzklassen**
  – Wörter, die zum gleichen Zustand führen, sind ununterscheidbar
  – Wörter, die zu äquivalenten Zuständen führen, sind ununterscheidbar
  Jede Fortsetzung der Wörter führt zum "gleichen" Ergebnis
  $\hat{\delta}(q_0,u)\cong\hat{\delta}(q_0,v)$ bedeutet $\hat{\delta}(q_0,u\,w)\in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0,v\,w)\in F$ für alle $w\in\Sigma^*$

- **Äquivalenzklassen hängen nur von der Sprache ab**
  – Für $L\subseteq\Sigma^*$ definiere Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf $\Sigma^*$:
  · $\boldsymbol{u \sim_L v} \;\equiv\; u\,w\in L \Leftrightarrow v\,w\in L$ gilt für alle $w\in\Sigma^*$
  $\sim_L$ ist eine Äquivalenzrelation $\mapsto$ Übung
  – Die Äquivalenzklasse eines Wortes $v$ ist $\boldsymbol{[v]_L = \{u\in\Sigma^* \mid u \sim_L v\}}$
  · Äquivalenzklassen sind disjunkt oder identisch
  Gibt es $w\in[u]_L\cap[v]_L$ dann ist $u\sim_L v$, also $z\in[u]_L \Leftrightarrow z\in[v]_L$ für alle $z$
  – $\boldsymbol{\Sigma^*/L}$ bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen modulo $\sim_L$

# Äquivalenzklassen der Sprache $L = \{0^n1^m \mid n,m \in \mathbb{N}\}$

- $[\epsilon]_L = \{u \in \{0,1\}^* \mid u \sim_L \epsilon\} = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow w \in L\} = \{0^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

  $[0]_L = [00]_L = [000]_L = \ldots = [\epsilon]_L$, weil $0 \in [\epsilon]_L$, $00 \in [\epsilon]_L$, $000 \in [\epsilon]_L, \ldots$

- $[1]_L = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow 1w \in L\} = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow \exists j. w{=}1^j\}$
  $= \{0^k1^i \mid k \in \mathbb{N}, i{>}0\}$

  $[01]_L = [1]_L$, weil $01 \in [1]_L$

- $[10]_L = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow 10w \in L\} = \{u \mid \forall w.\ u\,w \notin L\} = \{0,1\}^* - L$

  Grund: für $L = \{0^n1^m \mid n,m \in \mathbb{N}\}$ gilt $u \notin L \Rightarrow \forall w.\ u\,w \notin L$ (Umkehrung gilt immer)

- Wegen $[\epsilon]_L \cup [1]_L = L$ folgt: $\{0,1\}^*/L = \{[\epsilon]_L, [1]_L, [10]_L\}$

**Reguläre Sprachen haben nur endlich viele Äquivalenzklassen**

# Äquivalenzklassen der Sprache $L = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $[\epsilon]_L = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow w \in L\} = \{\epsilon\}$
- $[0]_L = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow 0w \in L\}$
  $= \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow \exists n.w{=}0^n1^{n+1}\} = \{0\}$
- $[1]_L = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow 1w \in L\} = \{u \mid \forall w.\ u\,w \notin L\}$
  $= \{0,1\}^* - \{0^n1^m \mid n{\geq}m\}$
- $[00]_L = \ldots = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow \exists n.w{=}0^n1^{n+2}\} = \{00\}$
- $[01]_L = \ldots = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow w = \epsilon\} = L - \{\epsilon\}$
- $[10]_L = [11]_L = [1]_L$, weil $10 \in [1]_L$, $11 \in [1]_L$
- $[000]_L = \ldots = \{u \mid \forall w.\ u\,w \in L \Leftrightarrow \exists n.w{=}0^n1^{n+3}\} = \{000\}$

  **Das wird mühsam, wir müssen es anders angehen**

- **Es gibt unendlich viele Klassen in $\{0,1\}^*/L$**
  – z.B. sind alle Klassen $[0^k]_L$ (= $\{0^k\}$) verschieden

  Für den Beweis dieser Aussage muß man die Klassen nicht exakt bestimmen. Es reicht:
  “Für $k{\neq}j$ und $w{=}1^k$ ist $0^kw \in L$, aber $0^jw \notin L$, also $0^k \not\equiv_L 0^j$ also $[0^k]_L{\neq}[0^j]_L$”

**Nichtreguläre Sprachen haben unendlich viele Äquivalenzklassen**

# Der Satz von Myhill/Nerode

## Eine Sprache $L$ ist regulär, g.d.w $\Sigma^*/L$ endlich ist

**Beweis**

$\Rightarrow$: Es sei $L$ eine reguläre Sprache

Dann gibt es einen minimalen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(A)$

Da $A$ minimal ist, gilt für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$

$$\hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v) \Leftrightarrow (\hat{\delta}(q_0, u\,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, v\,w) \in F) \text{ für alle } w \in \Sigma^*$$

$$\Leftrightarrow (u\,w \in L \Leftrightarrow v\,w \in L) \text{ für alle } w \in \Sigma^* \Leftrightarrow u \sim_L v$$

Damit ist $|\Sigma^*/L|$ (der Index von $L$) gleich der Anzahl der Zustände in $A$

$\Leftarrow$: Es sei $\Sigma^*/L$ endlich.

Konstruiere einen DEA $A = (\Sigma^*/L\,, \Sigma, \delta, [\epsilon]_L, F)$

mit $\delta([u]_L, a) = [u\,a]_L$ für alle $a \in \Sigma$ und $F = \{[v]_L \mid v \in L\}$

$\delta$ ist wohldefiniert, weil $u\,a \sim_L v\,a$ für alle $a \in \Sigma$ gilt, wenn $u \sim_L v$

und es gilt $w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}([\epsilon]_L, w) \in F \Leftrightarrow [w]_L \in F \Leftrightarrow w \in L$