08

PDF

1

1.

$$
\begin{aligned}
q_0aba &\vdash q_1 * Aba \\
&\vdash Aq_0Aba \\
&\vdash AAq_0ba \\
&\vdash Aq_2ABa \\
&\vdash q_2AABa \\
&\vdash q_2 * AABa \\
&\vdash Bq_0AABa \\
&\vdash BAq_0ABa \\
&\vdash BAAq_0Ba \\
&\vdash BAABq_0a \\
&\vdash BAAq_1BA \\
&\vdash BAq_1ABA \\
&\vdash Bq_1AABA \\
&\vdash q_1BAABA \\
&\vdash q_1 * BAABA \\
&\vdash Aq_0BAABA \\
&\vdash ABq_0AABA \\
&\vdash ABAq_0ABA \\
&\vdash ABAAq_0BA \\
&\vdash ABAABq_0A \\
&\vdash ABAABAq_0* \\
&\vdash ABAABq_3A \\
&\vdash ABAAq_3Ba \\
&\vdash ABAq_3Aba \\
&\vdash ABq_3Aaba \\
&\vdash Aq_3Baaba \\
&\vdash *q_3Abaaba \\
&\vdash q_3 * abaaba \\
&\vdash fabaaba
\end{aligned}
$$

2.

$$f_M : \Sigma^* \to (\Gamma \setminus \{*\})$$

$$
\begin{gathered}
f_M : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^* \\
f_M(w) = w^R w
\end{gathered}
$$

2

$$\underbrace{u_1 u_2 \dots u_m}_{u} + \underbrace{v_1 v_2 \dots v_n}_{v} \# w$$

mit $\#, +$ als Trennsymbole
$u + v = w$

TM:

1. letztes Bit der ersten Eingabe (eins vor $+$), Zahl markieren und Zustand dementsprechend wechseln
2. letztes Bit der zweiten Eingabe (eins vor $\#$), Zahl markieren und Zustand dementsprechend wechseln bezüglich addition $(3-5)$
3. Wenn addition 0 ergibt, gehe ans ende (bis $*$) und schreibe 0 -> 6
4. Wenn addition 1 ergibt, gehe ans ende (bis $*$) und schreibe 1 -> 6
5. Wenn addition 2 ergibt, gehe ans ende (bis $*$) und schreibe 01 -> 6
6. Gehe zum Anfang der Eingabe
7.

ToDo:

- Reverse hinter #
- Fall für $|u| \neq |v|$
- Prüfen, ob Eingabe Form erfüllt

Möglich. anstatt hinter, die Lösung vor die Eingabe schreiben:

$$w \# \underbrace{u_1 u_2 \dots u_m}_{u} + \underbrace{v_1 v_2 \dots v_n}_{v}$$

3

08-Berechenbarkeit, page 12

1.

"Wenn L rekursiv aufzählbar ist, dann ist L der Definitionsbereich einer Turing-berechenbaren Funktion."

8.1 und Turing-Berechenbar
L rekursiv aufzählbar $\implies$ $\exists M$ die L akzeptiert $\implies$ f_M hat als Def. Bereich L

2.

"Wenn L der Definitionsbereich einer Turing-berechenbaren Funktion ist, dann ist L rekursiv aufzählbar."

8.3

3.

"Wenn L rekursiv aufzählbar ist, dann ist L der Wertebereich einer Turing-berechenbaren Funktion"

L rekursiv aufzählbar $\implies$ $\exists$ TM $\implies$

$\implies$ $\exists f$ mit f ist Touring berechenbar und Wertebereich L

Musterlösung:

Beweis ähnlich zu Satz 8.1:
Wir Konstruieren ein TM welche eine Zahl i annimmt, in einem eigenen Bereich auf dem Band speichert, und dann L rekursiv aufzählt und nach jedem erzeugten Wort i verringert. Wenn $i = 0$, wie als das i-te Wort in der Aufzählung erreicht haben, geben wir genau dieses Wort aus. Somit wird jedes Wort in der Sprache durch diese TM bei Eingabe einer Zahl berechnet und ist im Wertebereich. Wörter die nicht in der Sprache sind, werden nie aufgezählt und werden somit auch nicht berechnet, sind also auch nicht im Wertebereich.

4.

"Wenn L der Wertebereich einer Turing-berechenbaren Funktion ist, dann ist L rekursiv aufzählbar."

- Wertebereich von TM Funktion f ist Menge aller Wörter, die von f auf beliebige Eingabe $w \in \Sigma$
- Da f Touring-berechenbar $\rightarrow \exists \; TM \; M$, die für jede Eingabe $w \in \Sigma^*$ hält und $f(w)$ berechnet
- L rekursiv aufzählen: M konstruieren, die alle $w \in \Sigma$

> Eine Funktion ist Turing-berechenbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die sie berechnet. Der Wertebereich dieser Funktion wird dabei automatisch durch die von der Turing-Maschine generierten Ausgaben bestimmt. Da eine Turing-Maschine jede Sprache, die sie generiert, rekursiv aufzählbar macht, ist L , der Wertebereich der Funktion, ebenfalls rekursiv aufzählbar (Satz 8.3)

4

1.

L ist nicht rekursiv aufzählbar, aber rekursiv. $\bar{L}$ nicht rekursiv aufzählbar, aber rekursiv.

- **Begründung**:
  - Eine Menge ist rekursiv, wenn sie und ihr Komplement ($\bar{L}$) beide rekursiv sind (Satz 8.6).
  - Gleichzeitig ist jede rekursive Menge rekursiv aufzählbar (Lemma 8.2).

    - Behauptung: L und $\bar{L}$ rekursiv, aber nicht rekursiv aufzählbar sind, was Satz 8.6 widerspricht.
- **Widersprüchlich**, da jede rekursive Menge automatisch auch rekursiv aufzählbar ist.

2.

L ist rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv. $\bar{L}$ nicht rekursiv aufzählbar und nicht rekursiv.

- **Begründung**:
    - Es gibt Mengen, die rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv sind, z. B. L, wenn die Turing-Maschine akzeptiert, aber nicht für jede Eingabe stoppt (siehe Folgerung 8.4).
    - Für solche Mengen ist $\bar{L}$ nicht rekursiv aufzählbar, da beide (rekursiv aufzählbar und rekursiv) gelten müssten, um L rekursiv zu machen.
- **Widerspruchsfrei**

3.

L ist rekursiv aufzählbar und rekursiv. $\bar{L}$ ist rekursiv aufzählbar und rekursiv.

- **Begründung**:
    - Wenn L rekursiv ist, dann ist es auch rekursiv aufzählbar (Lemma 8.2). Zudem ist $\bar{L}$, das Komplement einer rekursiven Menge, ebenfalls rekursiv (Lemma 8.5).
    - Rekursive Mengen und deren Komplemente sind also immer rekursiv aufzählbar und rekursiv.
- **Widerspruchsfrei**

4.

L ist rekursiv aufzählbar und rekursiv. $\bar{L}$ ist rekursiv aufzählbar, aber nicht rekursiv.

- **Begründung**:
    - Eine Menge L kann nur dann rekursiv sein, wenn auch $\bar{L}$ rekursiv ist (Satz 8.6). Behauptung: L ist rekursiv, aber $\bar{L}$ ist nicht rekursiv $\rightarrow$ Wiederspruch
    - Da L rekursiv ist, muss auch $\bar{L}$ rekursiv und rekursiv aufzählbar sein.
- **Widersprüchlich**, da L und $\bar{L}$ entweder beide rekursiv sind oder keines von beiden (Lemma 8.5).