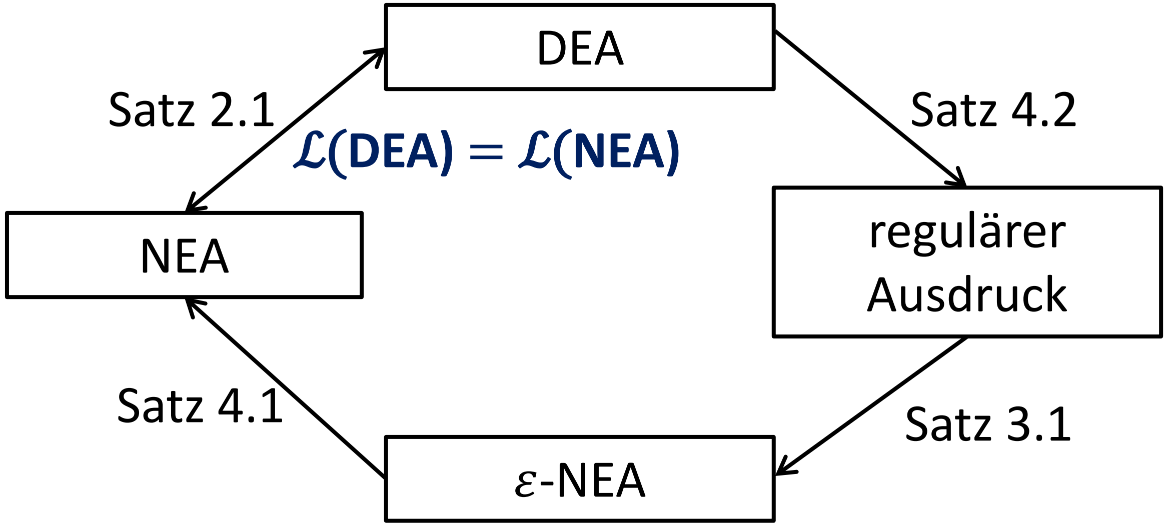
Formale Grundlagen der Informatik

5

Satz von Myhill-Nerode
Minimierung von DEAs

Recap: Reguläre Sprachen



Folgerung 4.3:

$\mathcal{L}$**(DEA)** $=$ $\mathcal{L}$**(NEA)** $=$ $\mathcal{L}$**(ε-NEA)** $=$ $\mathcal{L}$**(REG)**

$\mathcal{L}$**(ε-NEA)** $= \{\, L \mid L = L(A)$ für einen ε-NEA $A \,\}$

$\mathcal{L}$**(REG)** $= \{\, L \mid L = L(r)$ für einen regulären Ausdruck $r \,\}$

Mehrdeutigkeit von Mechanismen

- Es gibt viele verschiedene DEA, NEA, RA für jede Sprache $L, z.B.$:
  - DEAs: Hinzufügen von nutzlosen Zuständen
  - NEAs: „Verschieben/Beseitigen des Nichtdeterminismus"
  - RA: *siehe Ergebnisse der Konstruktion aus einem DEA*

- *Ziele:*

1. Nachweis, dass zu jeder Sprache ein eindeutig bestimmter DEA mit minimaler Zustandsanzahl existiert (bis auf Isomorphie)
2. Methode für den Nachweis, dass gewisse Sprachen <u>nicht</u> regulär sind

Recap: Äquivalenzrelationen

- Eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn sie
  - **reflexiv** ist, also $\forall x \in M. xRx$,
  - **transitiv** ist, also $\forall x \in M. \forall y \in M. \forall z \in M. (xRy \land yRz) \Rightarrow xRz$,
  - **symmetrisch** ist, also $\forall x \in M. \forall y \in M. xRy \Rightarrow yRx$.
- Eine Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ definiert eine Zerlegung M/R der Menge M in (paarweise disjunkte, nicht leere) Äquivalenzklassen: Die Klasse mit einem Element $x \in M$ enthält alle Elemente aus M, die zu x äquivalent sind. *Bezeichnung*: $[x]_R$
- Der **Index** von R ist die Anzahl der Äquivalenzklassen in M/R.

Beispiel: Restklassen

- $M = \mathbb{N}$

- $xRy \Leftrightarrow x \bmod 3 = y \bmod 3$

- $[0]_{\text{mod } 3}$, $[1]_{\text{mod } 3}$, $[2]_{\text{mod } 3}$ sind die Äquivalenzklassen dieser Relation (Klassen sind immer unabhängig von der Wahl des Repräsentanten)

➢ R hat Index 3

Äquivalenzrelation einer formalen Sprache

- Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma$.
- Definieren folgende Äquivalenzrelation $\boldsymbol{R_L}$ **(Nerode-Äquivalenz)**:

  Für $x, y \in \Sigma^*$ sei xR_Ly gdw. $(\forall z \in \Sigma^*. xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$.

- *Beispiel*: $L = L((\mathrm{ab})^*)$ $\longrightarrow$ Index von R_L ist 3
  - $\varepsilon R_L ab,\ abR_L abab, \ldots$ $\qquad [\varepsilon]_{R_L} = \{\, (ab)^n \mid n \geq 0 \,\}$
  - $aR_L aba, abaR_L ababa, \ldots$ $\qquad [a]_{R_L} = \{\, (ab)^n a \mid n \geq 0 \,\}$
  - $bR_L aa, bR_L ba, bR_L bb, \ldots$ $\qquad [b]_{R_L} = \{\, w \mid w \notin [\varepsilon] \cup [a] \,\}$

Rechts-Invarianz von R_L

- Für jede formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist R_L **rechts-invariant** bezüglich der Konkatenation:
- Für alle Wörter $x, y, w \in \Sigma^*$ gilt
$$xR_Ly \Rightarrow xwR_Lyw$$
- *Beweis:*
  - xR_Ly gdw. für alle $z \in \Sigma^*$ gilt, dass $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$
  - ➢ xR_Ly gdw. für alle $v \in \Sigma^*$ gilt, dass $xwv \in L \Leftrightarrow ywv \in L$
  - ➢ xwR_Lyw

$\blacksquare$

Äquivalenzrelation durch einen DEA

- Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA.
- Für $x, y \in \Sigma^*$ gelte xR_Ay gdw. $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$.
- Für jeden DEA A ist R_A rechts-invariant bezüglich der Konkatenation:

  Für alle Wörter $x, y, z \in \Sigma^*$ mit xR_Ay gilt

$$\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}\big(\hat{\delta}(q_0, x), z\big) = \hat{\delta}\big(\hat{\delta}(q_0, y), z\big) = \hat{\delta}(q_0, yz)$$

  also xzR_Ayz.

- *ÜA:* Für alle $q \in Q$ und $x, z \in \Sigma^*$ gilt $\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}\big(\hat{\delta}(q_0, x), z\big)$.

Satz von Myhill-Nerode

Satz 5.1: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. Die Sprache L wird von einem endlichen Automaten akzeptiert.
2. Die Sprache L ist die Vereinigung von einigen Äquivalenzklassen einer rechts-invarianten Äquivalenzrelation mit endlichem Index.
3. Die Äquivalenzrelation R_L hat endlichen Index.

Beweis von Myhill-Nerode

$1. \longrightarrow 2.$

- 1. besagt $L = L(A)$ für einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- Die Relation R_A ist eine rechts-invariante Äquivalenzrelation.
- Sie hat (höchstens) so viele Äquivalenzklassen wie $|Q|$, also endlichen Index.
- Da $L = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$, gilt
  $w \in L$ gdw. w gehört zu einer Äquivalenzklasse $[x]_{R_A}$ von R_A,
  für die $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$ gilt.

➢ L ist die Vereinigung all dieser Äquivalenzklassen, die „zu F gehören“

Beweis von Myhill-Nerode

$2. \longrightarrow 3.$

- Sei Σ ein Alphabet und $E \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ eine rechts-invariante Äquivalenzrelation mit endlichem Index.
- Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei Vereinigung einiger Äquivalenzklassen von E.
- Gelte xEy. Dann gilt $x \in L \Leftrightarrow y \in L$.
  Da E rechts-invariant, gilt für jedes $z \in \Sigma^*$, dass $xzEyz$.
  Somit gilt $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ und es folgt xR_Ly.
- Deshalb gilt $[x]_E \subseteq [x]_{R_L}$ für alle $x \in \Sigma^*$.

➢ Der Index von R_L kann nicht größer sein, als der Index von E.

Beweis von Myhill-Nerode

3. $\longrightarrow$ 1. Definieren einen DEA $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$:

- Sei Q' die endliche Menge der Äquivalenzklassen von R_L.
- Definieren $\delta' \colon Q' \times \Sigma \to Q'$ vermöge $\delta'([x], a) = [xa]$.

  Die Definition ist repräsentantenunabhängig, da R_L rechts-invariant ist:

  - Für jedes $y \in [x]$ und jedes $z \in \Sigma^*$ gilt $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$,
    mit $z = az'$ gilt insbesondere auch $xaz' \in L \Leftrightarrow yaz' \in L$.
  - Da z beliebig war, gilt $xaz' \in L \Leftrightarrow yaz' \in L$ für jedes $z' \in \Sigma^*$.
  - Folglich xaR_Lya, also $[xa] = [ya]$.
- Setzen $q'_0 = [\varepsilon]$ und $F' = \{\, [x] \mid x \in L \,\}$.
- Da $\hat{\delta}'(q'_0, x) = [x]$ folgt $x \in L(A') \Leftrightarrow [x] \in F$. ■

Minimalautomat

Folgerung 5.2: Für jede reguläre Sprache L existiert (bis auf Isomorphie) ein eindeutig bestimmter DEA mit minimaler Anzahl von Zuständen.

Beweis:

- $L \subseteq \Sigma^*$ regulär $\Rightarrow L = L(A)$ für einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Die ÄR R_A ist rechts-invariant und hat endlichen Index, so dass L eine Vereinigung gewisser Äquivalenzklassen von R_A ist. $\boxed{xR_Ay \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)}$
- Beweis von 5.1: R_A ist eine **Verfeinerung** von R_L, d.h. für alle $x \in \Sigma^*$ gilt $[x]_{R_A} \subseteq [x]_{R_L}$

➢ Sei $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ der DEA aus dem Beweis von 5.1. $\Rightarrow |Q'| \leq |Q|$.

Minimalautomat

Folgerung 5.2: Für jede reguläre Sprache L existiert (bis auf Isomorphie) ein eindeutig bestimmter DEA mit minimaler Anzahl von Zuständen.

Beweis: (*Fortsetzung*)

- $|Q'| \leq |Q|$. Bei Gleichheit kann jeder Zustand aus Q mit einem aus Q' identifiziert werden:
  - Für jedes $q \in Q$ gibt es ein $x \in \Sigma^*$, so dass $\hat{\delta}(q_0, x) = q$. (Sonst: q streichen!)
  - Falls $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) = q$, dann gilt nach dem Beweis von 5.1, dass $y \in [x]_{R_L}$
  - Somit gilt $\hat{\delta}'(q_0', x) = \hat{\delta}'(q_0', y)$.

➢ Der DEA A' ist der Minimalautomat. Er ist bis aus Isomorphie eindeutig. ■

Minimalautomat - Beispiel

Beispiel: $L = L((ab)^*)$

$\varepsilon R_L ab,\; abR_L abab, \ldots$

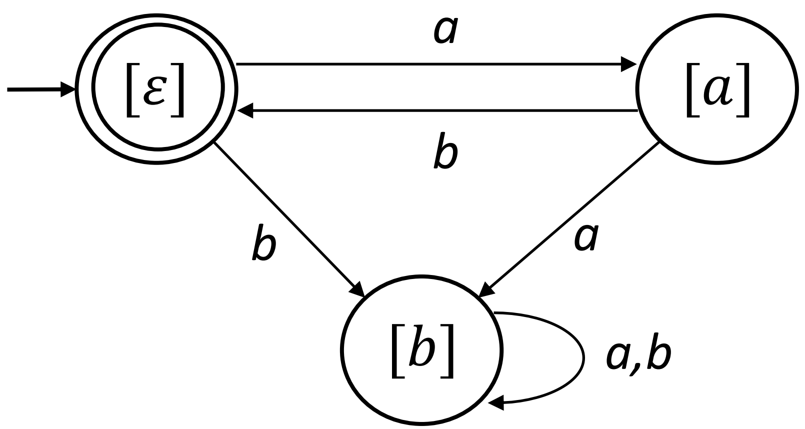
$aR_L aba,\; abaR_L ababa, \ldots$

$bR_L aa,\; bR_L ba,\; bR_L bb, \ldots$

$[\varepsilon]_{R_L} = \{\, (ab)^n \mid n \geq 0 \,\}$

$[a]_{R_L} = \{\, (ab)^n a \mid n \geq 0 \,\}$

$[b]_{R_L} = \{\, w \mid w \notin [\varepsilon] \cup [a] \,\}$



Ein Minimierungsalgorithmus

- Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA.
- *O.B.d.A.*: A hat keine nutzlosen (von q_0 nicht erreichbaren) Zustände
- Zwei Zustände p und q von A heißen **unterscheidbar (durch x)**, falls es ein $x \in \Sigma^*$ gibt, so dass $\hat{\delta}(p, x) \in F$ gdw. $\hat{\delta}(q, x) \notin F$.
- Zustände $p, q \in Q$ sind **äquivalent**, $\boldsymbol{p \equiv q}$, wenn <u>nicht</u> unterscheidbar
- *Idee:*
  Identifizieren (*Zusammenlegen*) von nicht unterscheidbaren Zuständen

Identifizieren unterscheidbarer Zustände

für alle (p, q) mit $p \in F \wedge q \in (Q \setminus F)$ oder $p \in (Q \setminus F) \wedge q \in F$

markiere (p, q)

solange mindestens ein Zustandspaar markiert worden ist **führe aus**:

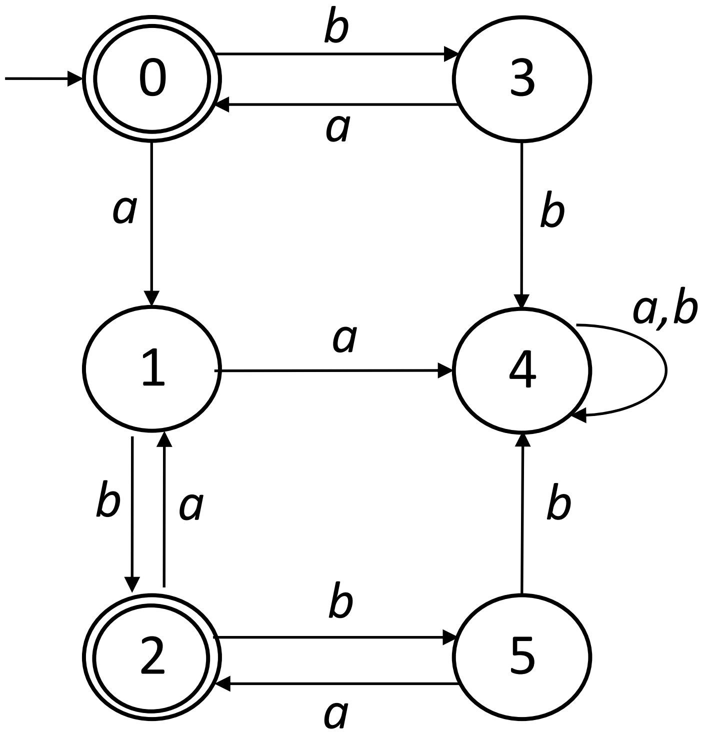
für alle noch nicht markierten (p, q)

für alle $a \in \Sigma$

falls $\big(\delta(p, a), \delta(q, a)\big)$ oder $\big(\delta(q, a), \delta(p, a)\big)$ markiert

markiere (p, q)

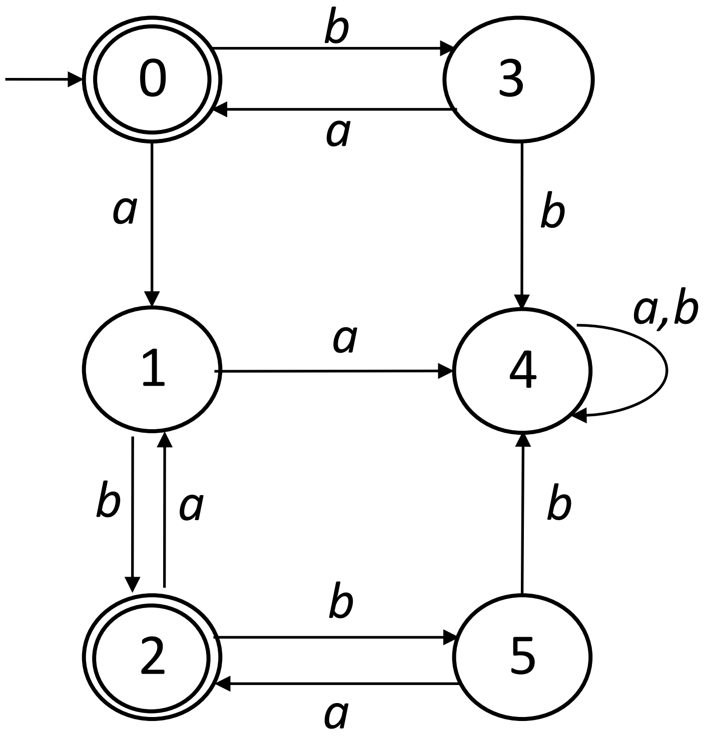
Unterscheidbare Zustände – Beispiel



1	X					
2		X				
3	X	X	X			
4	X	X	X	X		
5	X	X	X		X	
	0	1	2	3	4	5

→ $\mathbf{0 \equiv 2}$ **und** $\mathbf{3 \equiv 5}$

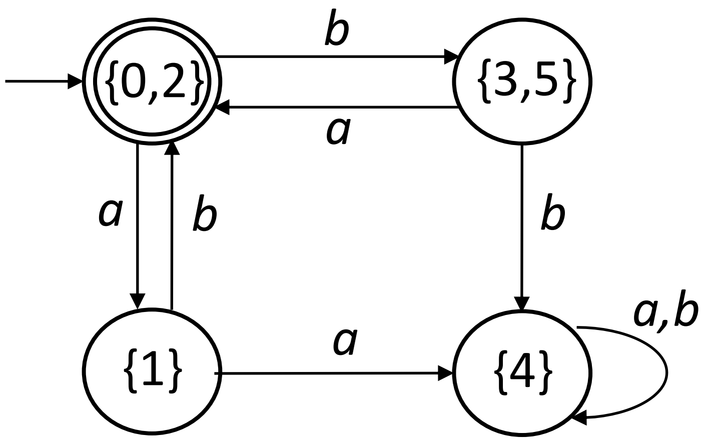
Minimalautomat – Beispiel



Äquivalenzklassen: {0,2}, {1}, {3,5}, {4}

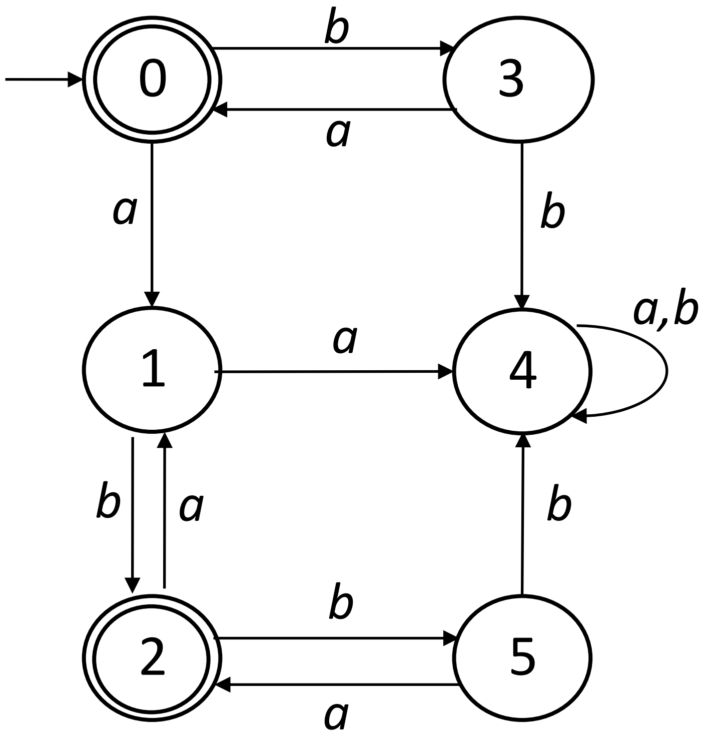
Startzustand: {0,2} (da $q_0 = 0$ in {0,2})

akzeptierend: {0,2} (da $\{0,2\} \cap F \neq \emptyset$)



Minimalautomat – Konstruktion

Gegeben $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:



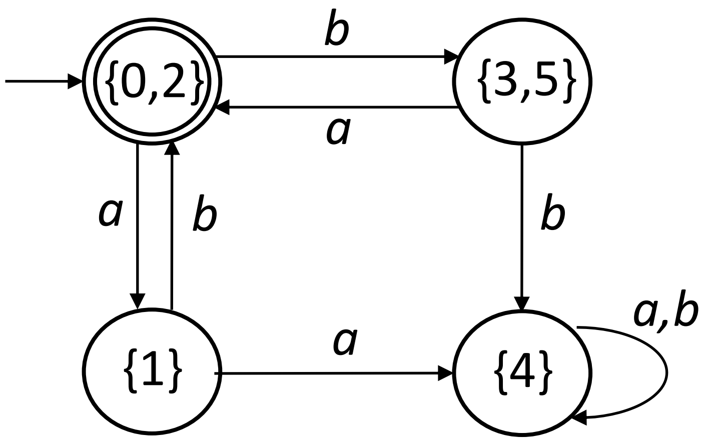
Äquivalenzklassen: {0,2}, {1}, {3,5}, {4}

Startzustand: {0,2} (da $q_0 = 0$ in {0,2})

akzeptierend: {0,2} (da $\{0,2\} \cap F \neq \emptyset$)

Konstruieren $(Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit

$Q' = \{ [q] \mid q \text{ erreichbar von } q_0 \}$
$q_0' = [q_0]$
$F' = \{ [q] \mid q \in F \}$
$\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$



Minimalautomat – Korrektheit

Satz 5.3: Der Minimierungsalgorithmus konstruiert für jeden DEA A den Minimalautomaten A' für $L(A)$.

Beweis:

- Aus $p \equiv q$ folgt für alle $a \in \Sigma$, dass $\delta'(p,a) \equiv \delta'(q,a)$,
  denn wenn $\delta'(p,a)$ und $\delta'(q,a)$ unterscheidbar durch das Wort x,
  dann wären p und q unterscheidbar durch das Wort ax.
- $\hat{\delta}'([q_0],w) = [\hat{\delta}(q_0,w)]$ für alle $w \in \Sigma^*$ (Induktion über $|w|$)

➢ $L(A') = L(A)$

Minimalautomat – Korrektheit

Satz 5.3: Der Minimierungsalgorithmus konstruiert für einen DEA A den Minimalautomaten A' für $L(A)$.

- *noch z.z.*: A' hat nicht mehr Zustände als R_L Äquivalenzklassen für die Sprache $L = L(A)$:
  - Seien x, y Wörter mit xR_Ly und $\hat{\delta}(q_0, x) = p$ und $\hat{\delta}(q_0, y) = q$.
  - Da R_L rechts-invariant ist, gilt für alle $z \in \Sigma^*$, dass xzR_Lyz, also $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$.
  - Somit gilt für alle $z \in \Sigma^*$, dass $\hat{\delta}(q_0, xz) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, yz) \in F$.
  - Daher gilt $p \equiv q$.
  - ➢ Die Relation $\equiv$ hat keinen größeren Index als R_L. $\blacksquare$

Äquivalenzproblem

Folgerung 5.4: Es gibt einen Algorithmus, der das

Äquivalenzproblem für DEAs

Eingabe: zwei DEAs A und B

Frage: Gilt $L(A) = L(B)$?

entscheidet. ∎

Folgerung 5.5: Es gibt Algorithmen, die das Äquivalenzproblem für zwei Mechanismen entscheidet, die in der Menge aller DEAs, NEAs, ε-NEAs und RAs enthalten sind. ∎

Nicht reguläre Sprachen

Folgerung 5.6: Es gibt eine Sprache L, die nicht regulär ist.

Beweis: Sei $L = \{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}$.

Für jedes $n \geq 0$ gilt $(a^n, a^{n+1}) \notin R_L$,

da $a^n b^n \in L$ und $a^{n+1} b^n \notin L$.

Daher hat R_L keinen endlichen Index.

Nach Satz 5.1 existiert kein DEA, der L akzeptiert,
somit ist L keine reguläre Sprache. ∎