Wiederholung Mathematischer Grundlagen für die TI I

Sebastian Böhne
boehne@uni-potsdam.de

Inhaltsverzeichnis

Keine Einführung

- Nur Ergebnisse, keine Motivationen
- Hohe Stoffdichte
- Nur relativ wenige Beispiele
- Lücken finden
- Lücken füllen, z.B. durch Brückenkurs-Materialien (https://openup.uni-potsdam.de/course/view.php?id=469)

Kontrollfragen zur Logik

- Für welche Logischen Operatoren bzw. Konstanten stehen $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, 0 und 1?
- Was bedeuten $\forall\, x(\in X).\ \varphi(x)$ und $\exists\, x(\in X).\ \varphi(x)$?
- Wie kann man Aussagen, deren äußerste logische Struktur durch die obigen Konstrukte gegeben ist, jeweils verwenden?
- Wie zeigt man Aussagen, deren äußerste logische Struktur durch die obigen Konstrukte gegeben ist?
  (Wichtige Beispiele folgen)

Wichtige Beweismethoden

- Wie erhält man Aussagen zur Verwendung?
- Fallunterscheidung
- Widerspruchsbeweis
  - $\neg B$ zeigen
  - B zeigen
- Induktion (folgt später)

Notwendige und hinreichende Bedingung

- Seien A und B zwei Aussagen mit $A \Rightarrow B$ im Folgenden vorausgesetzt
- Wenn nun noch A gilt, so gilt auch B. Daher ist A eine hinreichende Bedingung für B
- Es gilt $\neg B \Rightarrow \neg A$ (Kontraposition). Wenn also $\neg B$ gilt, dann gilt $\neg A$ (statt A). B ist also eine notwendige Bedingung für A
- Beispiel: Regen ist eine hinreichende Bedingung für eine nasse Straße und eine nasse Straße ist eine notwendige Bedingung für Regen

Mengen, Notationen und Mengenzugehörigkeit

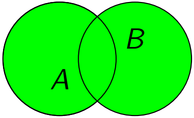
- Ansammlungen von irgendwelchen wohlunterscheidbaren Objekten
- $a \in A$ (oder auch $A \ni a$) drückt aus, dass a zu der Menge A gehört
- Mengenschreibweisen: $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ und $\{x \mid \varphi(x)\}$; als Abkürzung auch $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$, $\{x \subseteq X \mid \varphi(x)\}$ etc.
- Beispiele:
  - $5 \in \{73, 42, 5, 0, 12\}$
  - $\text{Katze} \notin \{\text{Haus}, \text{Flasche}, \text{Pferd}\}$
  - $12 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 3 = 0\}$
  - $\text{Baum} \notin \{x \in \text{Lebewesen} \mid x \text{ kann sprechen}\}$
- Wichtige Mengen
  - $\emptyset$
  - Zahlenmengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Mengenrelationen

- $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall a \in A.\ a \in B$
- Beispiele:
  - $\{\text{Haus}, \text{Pferd}\} \subseteq \{\text{Haus}, \text{Flasche}, \text{Pferd}\}$
  - $\{42, 0\} \subseteq \{73, 42, 5, 0, 12\}$
  - $a \in A \to \{a\} \subseteq A$
  - $A \subseteq A$ und $\emptyset \subseteq A$
  - $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $A = B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Beispiele:
  - Für jede Menge A gilt $A = A$
  - $\{a, b\} = \{b, a\}$
  - $\{a, b, c\} = \{a, b, b, c, a\}$
  - $\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 0\}$
- $A \subset B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ (echte Teilmenge)

Vereinigung (von zwei Mengen)

- $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



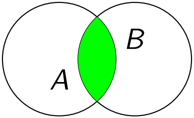
- Beispiele:
  - $\{0, 1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
  - $\{0, 1, 2\} \cup \{0, 2, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 6, 7\}$

Vereinigung (allgemein)

- $\bigcup A := \{x \mid \exists\, y \in A.\ x \in y\}$
- Beispiele:
  - $\bigcup\{\{0,1,2\},\{3,4\},\{2,4,6\}\} = \{0,1,2,3,4,6\}$
  - $\bigcup\{\mathbb{N}, \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 0\}\} = \mathbb{Z}$
- $\bigcup\limits_{i=j}^{k} A_i := \{x \mid \exists\, i \in \mathbb{N}.\ j \leq i \leq k \wedge x \in A_i\}$
- Beispiel: Seien $A_0 := \{0,1,2\}$, $A_1 := \{3,4\}$ und $A_2 := \{2,4,6\}$. Es gilt $\bigcup\limits_{i=0}^{2} A_i = \{0,1,2,3,4,6\}$
- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists\, i \in I.\ x \in A_i\}$
- Beispiel: $A_i := \{i\}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Es gilt $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$

Schnitt

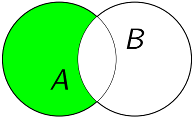
- $A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}$



- Beispiele:
  - $\{0,1,2,3\} \cap \{4,5,6,7\} = \emptyset$
  - $\{0,1,2\} \cap \{0,2,6,7\} = \{0,2\}$
- $\bigcap A$ (für $A \neq \emptyset$), $\bigcap_{i=j}^{k} A_i$ (für $k \geq j$), $\bigcap_{i \in I} A_i$ (für $I \neq \emptyset$) lassen sich analog Vereinigung definieren (mit $\forall$ statt $\exists$)
- Beispiel: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$
- A und B disjunkt $:\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Differenz

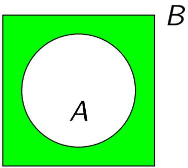
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



- Beispiele:
  - $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 2, 3\}$
  - $\{0, 1, 2\} \setminus \{0, 2, 6, 7\} = \{1\}$

Komplement

- Sei im Folgenden $A \subseteq B$
- $\overline{A} := B \setminus A$



- Beispiele (für $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$):
  - $\overline{\{1, 3, 5\}} = \{0, 2, 4\}$
  - $\overline{\{0, 1, 2\}} = \{3, 4, 5\}$
  - $\overline{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}} = \emptyset$
  - $\overline{\emptyset} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Potenzmenge

- $\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \subseteq A\}$ (auch Schreibweise 2^A verbreitet)
- Beispiele:
  - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  - $\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
- Beobachtung (für endliche A): $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

n-Tupel und Kartesisches Produkt

- $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (Definition nach Kuratowski)
- $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$
- $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$
- $|A \times B| = |A| * |B|$
- $(a) := a$ und $() := \emptyset$ und
  $(a_0, \ldots, a_{n-1}) := ((a_0, \ldots, a_{n-2}), a_{n-1})$ für $n \geq 3$
- $A^0 := \{()\}(= 1)$, $A^1 := \{(a) \mid a \in A\} = A$, $A^2 := A \times A$,
  $A^n := A^{n-1} \times A$ für $n \geq 3$
- Seien n eine natürliche Zahl und $a_i, b_i \in A$ für $i < n$:
  $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (b_0, \ldots, b_{n-1}) \quad \Leftrightarrow$
  $a_0 = b_0 \ \wedge \ a_1 = b_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ a_{n-1} = b_{n-1}$

Definition und Sprechweisen

- R heißt (binäre) Relation aus A in B, falls $R \subseteq A \times B$ (auch "zwischen A und B")
- R heißt (binäre) Relation, falls A und B existieren, so dass R eine Relation aus A in B ist
- Statt $(a, b) \in R$ schreibt man auch $a \; R \; b$
- Der Definitions- oder Vorbereich einer Relation ist definiert durch $\mathcal{D}(R) := \{a \mid \exists\, b.\ (a, b) \in R\}$
- Der Werte- oder Nachbereich einer Relation ist definiert durch $\mathcal{W}(R) := \{b \mid \exists\, a.\ (a, b) \in R\}$

Eigenschaften von Relationen

- Im Folgenden sei R eine Relation
- R linkseindeutig (oder auch injektiv)
  $:\Leftrightarrow \forall\, a, a', b.\ (a, b), (a', b) \in R \rightarrow a = a'$
- R (rechts)eindeutig $:\Leftrightarrow \forall\, a, b, b'.\ (a, b), (a, b') \in R \rightarrow b = b'$
- R linksvollständig (bzgl. A) $:\Leftrightarrow \forall\, a \in A\ \exists\, b.\ (a, b) \in R$
  Man sagt dann auch, R ist eine Relation *von* A … B
- R rechtsvollständig (bzgl. B) $:\Leftrightarrow \forall\, b \in B\ \exists\, a.\ (a, b) \in R$
  Man sagt dann auch, R ist eine Relation … A *auf* B
- Beispiel: $\{(|z|, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Operationen auf Relationen

- Relationen sind Mengen und daher sind alle Mengenoperationen auf sie anwendbar, z.B. $\cup, \cap, \overline{\cdot}$
- Ist R eine Relation zwischen A und B, dann ist $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ eine Relation zwischen B und A
- Ist R eine Relation zwischen A und B sowie S eine Relation zwischen B und C, so ist $R \circ S := \{(a, c) \mid \exists\, b \in B.\ (a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in S\}$ eine Relation zwischen A und C

Definition

- (Partielle) Funktionen sind rechtseindeutige Relationen
- $f : A \nrightarrow B$ bedeutet, dass f eine Relation aus A in B ist, welche eine Funktion ist. Man sagt dann, f ist eine Funktion aus A in B.
- Die Rechtseindeutigkeit einer Funktion f erlaubt von **dem** Funktionswert $f(a)$ für jedes $a \in \mathcal{D}(f)$ zu sprechen

Weder $f(a)$ noch Funktionsgleichungen wie $f(x) = x^2$ sind Funktionen, sondern nur f selbst

f^{-1} muss keine Funktion sein

$g \circ f$ bei Funktionen meint $f \circ g$ bei Relationen

Eigenschaften von Funktionen

- Ist eine Funktion f aus A in B linksvollständig (dann auch total genannt), so spricht man von einer Funktion **von** A in B, geschrieben $f : A \to B$
- Statt von rechtsvollständigen Funktionen spricht man meistens von surjektiven Funktionen. In dem Fall ändert sich der Zusatz "in B" zu "**auf** B"
- Die Menge der Funktionen von A in B wird in der Informatik mit $A \to B$ bezeichnet
(in der Mathematik eher mit ${}^{A}B$ oder B^{A})
- $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$
(aber nur in $\mathbb{R}$)
- Zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich sind gleich, wenn alle ihre Funktionswerte gleich sind

Vollständige Induktion

- $\underbrace{P(0)}_{\text{IA}} \wedge \underbrace{(\forall\, n \in \mathbb{N}.\ \underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \Rightarrow \underbrace{P(n+1)}_{\text{IB}})}_{\text{IS}} \ \Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N}.\ P(n)$
- Beispiel: $\forall\, n \in \mathbb{N}.\ 6 \mid n^3 + 5 * n$

Vollständige Induktion ab m

- $P(m) \wedge (\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq m \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow$
  $\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq m \Rightarrow P(n)$
  (Gültigkeitsbeweis mit $Q(n) := n < m \vee P(n)$)
- Beispiel: $P(n) := n^2 \geq 2 * n$

Starke Induktion

- $(\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq m \Rightarrow$
  $(\forall\, \ell \in \mathbb{N}.\ m \leq \ell < n \Rightarrow P(\ell)) \ \Rightarrow\ P(n)) \quad \Rightarrow$
  $\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq m \Rightarrow P(n)$
- Beispiel: Jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ hat einen Primzahlteiler