Formale Grundlagen der Informatik

11

Pushdown-Automaten (Kellerautomaten)

Recap: Ein einfacher Parser

- Aufbau eines Ableitungsbaums von der Wurzel zum Eingabewort („Top-Down-Parsing“)
- Arbeitet stets am linken Ende der bisher gefundenen Satzform
  - Terminal: Abhaken
  - Nichtterminal: Aktivieren (also als nächstes Ersetzen)

➢ Aufbau einer **Linksableitung**

$$E \Longrightarrow_L \textbf{id} * E \Longrightarrow_L \textbf{id} * \textbf{id}$$

- **Backtracking** bei Fehlern

➢ Implementierung mit einem **Stack** **(linkes Symbol am Top)**

Recap: Ein einfacher Parser

$E \rightarrow \textbf{id} + E \mid \textbf{id} * E \mid \textbf{id}$

Stack	Eingabe	Aktion
E	$\textbf{id} * \textbf{id}$	$E \rightarrow \textbf{id} + E$
$\textbf{id} + E$	$\textbf{id} * \textbf{id}$	Terminal
$+ E$	$* \textbf{id}$	Backtrack
E	$\textbf{id} * \textbf{id}$	$E \rightarrow \textbf{id} * E$
$\textbf{id} * E$	$\textbf{id} * \textbf{id}$	Terminal
$* E$	$* \textbf{id}$	Terminal
E	$\textbf{id}$	$E \rightarrow \textbf{id} + E$
$\textbf{id} + E$	$\textbf{id}$	Terminal
$+ E$	ε	Backtrack

Recap: Ein einfacher Parser

$E \rightarrow \textbf{id} + E \mid \textbf{id} * E \mid \textbf{id}$

Stack	Eingabe	Aktion
E	**id**	$E \rightarrow \textbf{id} * E$
$\textbf{id} * E$	**id**	Terminal
$* E$	ε	Backtrack
E	**id**	$E \rightarrow \textbf{id}$
id	**id**	Terminal
ε	ε	ACCEPT

statt Backtracking kann auch ***nicht-deterministisch*** *die nächste Regel „geraten“ werden*

ACCEPT wenn Stack leer <u>und</u> alle Eingabesymbole abgehakt/gelesen

Pushdown-Automaten – Idee

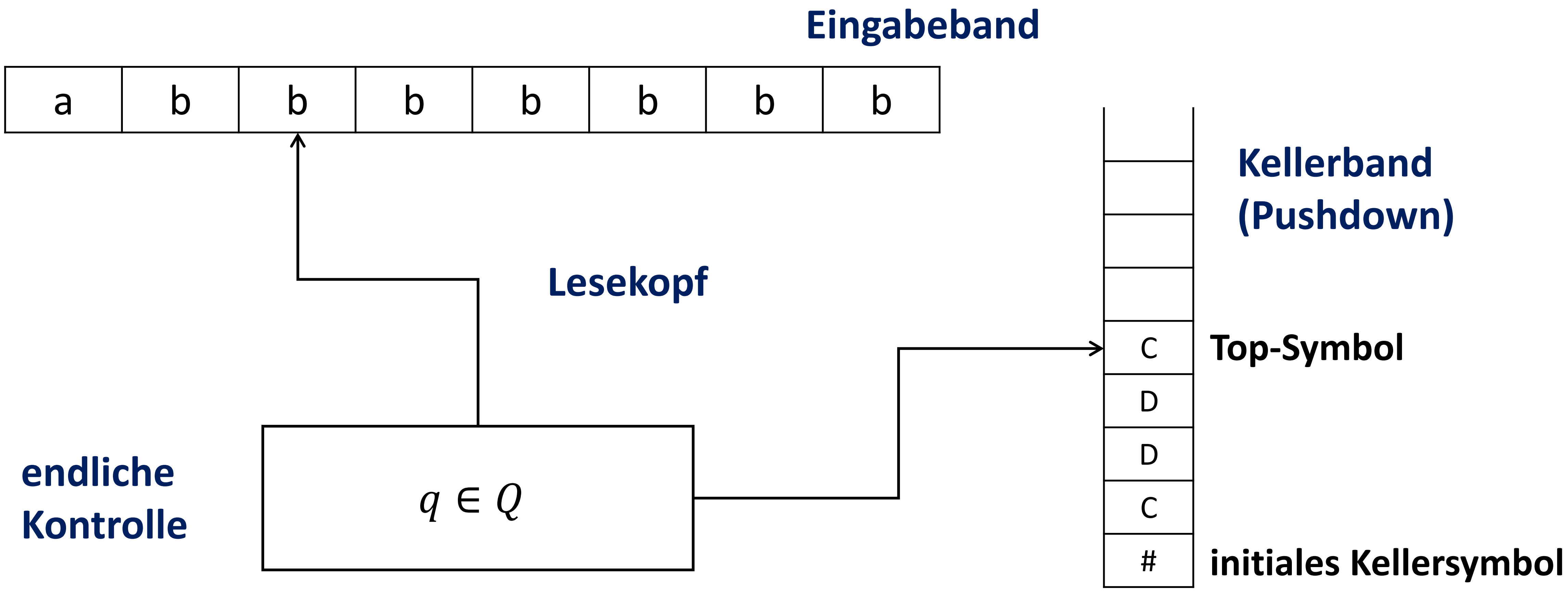
- arbeiten wie NEA (Nichtdeterminismus statt Backtracking)
- speichern zusätzliche Information in einem **Pushdown**
  - kann (nur) das Top-Symbol lesen
  - ersetzt Top-Symbol durch eine Zeichenkette
    - durch ε, wenn Top-Symbol gelöscht werden soll („pop“)
  - Transition hängt ab von
  1. Zustand
  2. Eingabesymbol
  3. Top-Symbol im Pushdown
- Arbeit bei leerem Keller nicht möglich $\rightarrow$ initiales Kellersymbol

Pushdown-Automaten – Definition

Ein **Pushdown-Automat (PDA) / Kellerautomat** ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$. Dabei ist

- Q eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein Alphabet der Eingabesymbole,
- Γ ein Alphabet der Kellersymbole,
- $q_0 \in Q$ der Startzustand,
- $\# \in \Gamma$ das initiale Kellersymbol,
- $F \subseteq Q$ die Menge der akzeptierenden Zustände,
- δ ist eine Abbildung von $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$ in die Menge der <u>endlichen</u> Teilmengen von $Q \times \Gamma^*$.

Pushdown-Automaten – Veranschaulichung



PDA - Zustandsbeschreibungen

- Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein PDA.
- Zustand: Paar aus $Q \times \Gamma^*$.
- **Konfiguration:** Zustand plus unverbrauchte Eingabe
  - ➢ Tripel aus $Q \times \Gamma^* \times \Sigma^*$
- **Konfigurationsübergang:**

$(q, aw, Z\alpha) \vdash (p, w, \beta\alpha)$ falls $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$ $\quad (a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$

  - ➢ β ersetzt das Top-Symbol Z
- $\overset{*}{\vdash}$ ist die reflexive und transitive Hülle von $\vdash$
- $\overset{i}{\vdash}$ für i aufeinanderfolgende Konfigurationsübergänge

PDA – akzeptierte Sprache

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ ein PDA.

Der PDA M akzeptiert eine Sprache …

1. … durch akzeptierenden Zustand:

   $L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \#) \vdash^* (f, \varepsilon, \gamma)$ für ein $f \in F$ und ein $\gamma \in \Gamma^* \}$

2. … durch leeren Keller:

   $N(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ für ein $p \in Q \}$

PDA – Beispiel (1)

$$L = \{\ ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\ \}$$

$M_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta_1, q_0, \#, \{q_2\})$ mit

$\delta_1(q_0, 0, \#) = \{(q_0, 0\#)\}$

$\delta_1(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00), (q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$

$\delta_1(q_0, 1, \#) = \{(q_0, 1\#)\}$

$\delta_1(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$

$\delta_1(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11), (q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta_1(q_1, \varepsilon, \#) = \{(q_2, \#)\}$

$\delta_1(q_0, \varepsilon, \#) = \{(q_2, \#)\}$

$\delta(q, a, Z) = \emptyset$ sonst

$\rightarrow\ L(M_1) = L$

Überführungstabelle – Beispiel (1)

$$L = \{\ ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\ \}$$

$M_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta_1, q_0, \#, \{q_2\})$ mit

		0	1	ε
→	q_0	$\#$: $(q_0, 0\#)$ 0: $(q_0, 00), (q_1, \varepsilon)$ 1: $(q_0, 01)$	$\#$: $(q_0, 1\#)$ 0: $(q_0, 10)$ 1: $(q_0, 11), (q_1, \varepsilon)$	$\#$: $(q_2, \#)$
	q_1	0: (q_1, ε)	1: (q_1, ε)	$\#$: $(q_2, \#)$
*	q_2			

vor den Doppel-punkten stehen die jeweils erforderlichen Keller-Topsymbole

PDA – Beispiel (1), Berechnungen

… für 0110

$$(q_0, 0110, \#) \vdash (q_0, 110{,}0\#) \vdash (q_0, 10{,}10\#)$$
$$\vdash (q_1, 0{,}0\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_2, \varepsilon, \#) \quad ✓$$

$$(q_0, 0110, \#) \vdash (q_0, 110{,}0\#) \vdash (q_0, 10{,}10\#) \vdash (q_0, 0{,}110\#) \vdash (q_0, \varepsilon, 0110\#) \quad ✗$$

$$(q_0, 0110, \#) \vdash (q_2, 0110\#, \varepsilon) \quad ✗$$

PDA – Beispiel (2)

$$L = \{\ ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\ \}$$

$M_2 = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta_2, q_0, \#, \emptyset)$ mit

	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	$\#$: $(q_0, 0\#)$ 0: $(q_0, 00), (q_1, \varepsilon)$ 1: $(q_0, 01)$	$\#$: $(q_0, 1\#)$ 0: $(q_0, 10)$ 1: $(q_0, 11), (q_1, \varepsilon)$	$\#$: (q_2, ε)
q_1	0: (q_1, ε)	1: (q_1, ε)	$\#$: (q_2, ε)

$\rightarrow \quad N(M_2) = L$

Akzeptierende Zustand *vs.* leerer Keller

Satz 11.1. Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ kann ein PDA $M' = (Q \cup \{q_0', q_e\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q_0{}', \$, F)$ mit $L(M) = N(M')$ konstruiert werden.

Beweis:

1. $\delta'(q_0', \varepsilon, \$) = \{(q_0, \#\$)\}$ // Übergang in Anfangskonfiguration von M
2. Für alle $q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma$: $\delta(q, a, Z) \subseteq \delta'(q, a, Z)$ // Simulation von M
3. Für alle $f \in F, Z \in \Gamma \cup \{\$\}$: $(q_e, \varepsilon) \in \delta'(f, \varepsilon, Z)$ // möglicher Start der …
4. Für alle $Z \in \Gamma \cup \{\$\}$: $(q_e, \varepsilon) \in \delta'(q_e, \varepsilon, Z)$ // … Keller-Entleerung

➢ Markierung \$, falls M Keller leert, obwohl Eingabe nicht akzeptiert wird!

Akzeptierende Zustand *vs.* leerer Keller

$w \in L(M) \;\Leftrightarrow\; (q_0, w, \#) \vdash_M^* (f, \varepsilon, \gamma)$ für ein $f \in F$ und ein $\gamma \in \Gamma^*$

$\Leftrightarrow\; (q_0', w, \$) \vdash_{M'} (q_0, w, \#\$)$ // mit Regel 1.

$\vdash_{M'}^* (f, \varepsilon, \gamma\$)$ // mit Regeln 2.

Dann gilt $(f, \varepsilon, \gamma\$) \vdash_{M'}^* (q_e, \varepsilon, \varepsilon)$ und somit $w \in N(M')$.

Da diese Berechnung nur möglich ist, falls $f \in F$,
gilt $w \in N(M')$ nur falls $w \in L(M)$. $\blacksquare$

Akzeptierende Zustand *vs.* leerer Keller

Satz 11.2. Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ kann ein PDA M' mit $L(M') = N(M)$ konstruiert werden.

Beweisskizze: O.B.d.A. kann $F = \emptyset$ angenommen werden.
Setzen $M = (Q \cup \{q_0', f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', q_0', \$, \{f\})$;

1. $\delta'(q_0', \varepsilon, \$) = \{(q_0, \#\$)\}$ // Übergang in Anfangskonfiguration von M
2. Für alle $q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma$: $\delta(q, a, Z) = \delta'(q, a, Z)$ // Simulation
3. Für alle $q \in Q$: $(f, \varepsilon) \in \delta'(q, \varepsilon, \$)$ // Akzeptieren wenn M leeren Keller hat

$w \in L(M') \Leftrightarrow w \in N(M)$ analog zum Beweis von Satz 11.1. $\square$

Deterministische PDAs

Definition. Ein PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$ heißt **deterministisch (DPDA)**, wenn

1. $|\delta(q, a, Z)| \leq 1$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, Z \in \Gamma$ und
2. wenn $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset$, dann $\delta(q, a, Z) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma$.

DPDA - Beispiel

Beispiel: $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_0\})$ mit

		a	b	ε
$\rightarrow$ *	q_0	$\#$: $(q_1, A\#)$		
	q_1	A: (q_1, AA)	A: (q_2, ε)	
	q_2		A: (q_2, ε)	$\#$: (q_0, ε)

$L(M) = ?$

PDAs *vs.* kfGs

Satz 11.3. Zu jeder kfG G kann ein PDA M konstruiert werden, sodass $N(M) = L(G)$ gilt.

Idee: Folgen Prinzip des Parsers für kfG

- Simulation einer Linksableitung im Keller
- Topsymbol ist am weitesten links stehendes Symbol der Satzform
  - falls Nichtterminal: mit nichtdeterministisch gewählter Regel ersetzen
  - falls Terminal: Vergleich mit nächstem Symbol der Eingabe
- akzeptieren mit leerem Keller
- benötigen keine Unterscheidung von Zuständen

PDAs *vs.* kfGs

Satz 11.3. Zu jeder kfG G kann ein PDA M konstruiert werden, sodass $N(M) = L(G)$ gilt.

Beweis: Gegeben sei die kfG $G = (N, T, P, S)$. Konstruieren den PDA

$$M = (\{q\}, T, N \cup T, \delta, q, S, \emptyset),$$

$\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$ für alle $a \in T$,

$\delta(q, \varepsilon, A) = \{\ (q, \alpha) \mid A \to \alpha \in P\ \}$.

Zeigen $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$ in G gdw. $(q, v, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$ in M.

Dann folgt für alle $w \in T^*$: $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$ gdw. $(q, w, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$,
also $w \in L(G)$ gdw. $w \in N(M)$.

Vollständige Induktion (1)

Für alle $i \geq 0$ gilt: Falls $(q, v, S) \vdash^{i} (q, \varepsilon, \gamma)$, dann $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$:

- **I.A.:** $i = 0$. Gilt mit $v = \varepsilon$ und $\gamma = S$.
- **I.V.:** Falls $(q, v, S) \vdash^{i} (q, \varepsilon, \gamma)$, dann $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$.
- **I.S.:** Angenommen $(q, v, S) \vdash^{i+1} (q, \varepsilon, \gamma)$.

1. Fall: Im letzten Schritt wurde eine Transition der Form $(q, \varepsilon) \in \delta(q, a, a)$ für ein $a \in T$ angewandt. Dann gibt es ein y, sodass $v = ya$ und $(q, ya, S) \vdash^{i} (q, a, a\gamma) \vdash (q, \varepsilon, \gamma)$. Somit gilt auch $(q, y, S) \vdash^{i} (q, \varepsilon, a\gamma)$. Nach I.V. gilt dann $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L ya\gamma$, also $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$.

Vollständige Induktion (1)

Für alle $i \geq 0$ gilt: Falls $(q, v, S) \vdash^{i} (q, \varepsilon, \gamma)$, dann $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$:

- **I.A.:** $i = 0$. Gilt mit $v = \varepsilon$ und $\gamma = S$.
- **I.V.:** Falls $(q, v, S) \vdash^{i} (q, \varepsilon, \gamma)$, dann $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$.
- **I.S.:** Angenommen $(q, v, S) \vdash^{i+1} (q, \varepsilon, \gamma)$.

  2. Fall: Im letzten Schritt wurde eine Transition der Form $(q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A)$ für ein $A \to \alpha \in P$ angewandt. Dann gibt es ein γ', sodass $\gamma = \alpha\gamma'$ und $(q, v, S) \vdash^{i} (q, \varepsilon, A\gamma') \vdash (q, \varepsilon, \alpha\gamma')$.

  Nach I.V. gilt dann $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L vA\gamma'$ und $vA\gamma' \Longrightarrow_L v\alpha\gamma'$.
  Somit gilt $S \overset{*}{\Longrightarrow}_L v\gamma$. $\square$

Vollständige Induktion (2)

Für alle $i \geq 0$ gilt: Falls $S \overset{i}{\Longrightarrow}_L v\gamma$, dann $(q, v, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$:

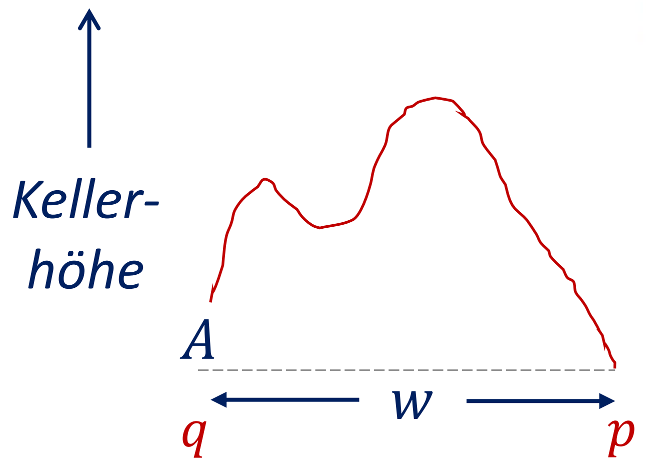
- **I.A.:** $i = 0$. Gilt mit $v = \varepsilon$ und $\gamma = S$.
- **I.V.:** Falls $S \overset{i}{\Longrightarrow}_L v\gamma$, dann $(q, v, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$.
- **I.S.:** Falls $S \overset{i+1}{\Longrightarrow}_L v\gamma$, dann gibt es ein $y \in T^*$ und eine Regel $A \to \alpha$ in P, so dass $S \overset{i}{\Longrightarrow}_L yA\gamma' \Longrightarrow_L y\alpha\gamma'$.

  Sei $\alpha = z\beta, z \in T^*$ und $\beta \in \{\varepsilon\} \cup N(N \cup T)^*$, sodass $yz = v$ und $\beta\gamma' = \gamma$.

  Nach I.V.: $(q, y, S) \vdash^* (q, \varepsilon, A\gamma')$. Da $(q, \alpha) \in \delta(q, \varepsilon, A)$, gilt $(q, \varepsilon, A\gamma') \vdash (q, \varepsilon, \alpha\gamma')$ und $(q, \varepsilon, \alpha\gamma') = (q, \varepsilon, z\beta\gamma')$.

  Mit $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$ für alle $a \in T$ gilt $(q, yz, S) \vdash^* (q, z, z\beta\gamma') \vdash^* (q, \varepsilon, \beta\gamma')$, also $(q, v, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma)$. ■

PDAs *vs.* kfGs



Satz 11.4. Zu jedem PDA M kann eine kfG G konstruiert werden, sodass $L(G) = N(M)$ gilt.

Idee:

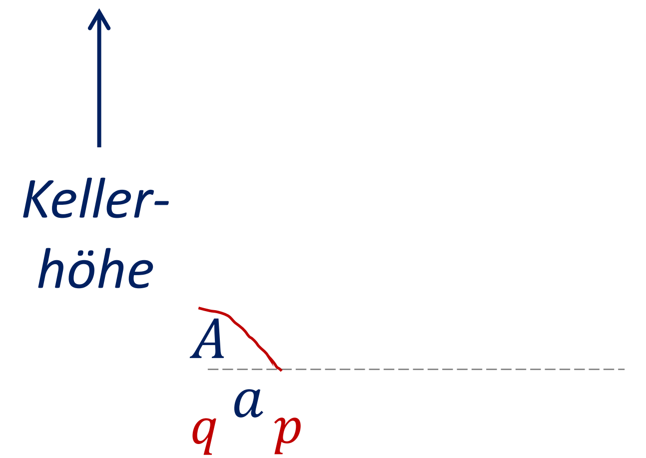
- G hat Nichtterminale der Form $[q, A, p]$, $p, q \in Q, A \in \Gamma$, sodass der PDA M das Kellersymbol A vom Keller löscht, wenn er vom Zustand q in den Zustand p geht. Der Keller wird dabei nie unter dieses Vorkommen von A gelöscht.
- Aus dem Nichtterminal $[q, A, p]$ werden genau die terminalen Wörter w abgeleitet, für die $(q, w, A) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)$ gilt.

➢ Die Menge der terminalen Wörter, die aus den Nichtterminalen der Form $[q_0, \#, p]$ abgeleitet werden (p beliebiger Zustand), ist die Sprache $N(M)$.

PDAs *vs.* kfGs

- *einfachster Fall:*

  $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, A) \quad (a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$

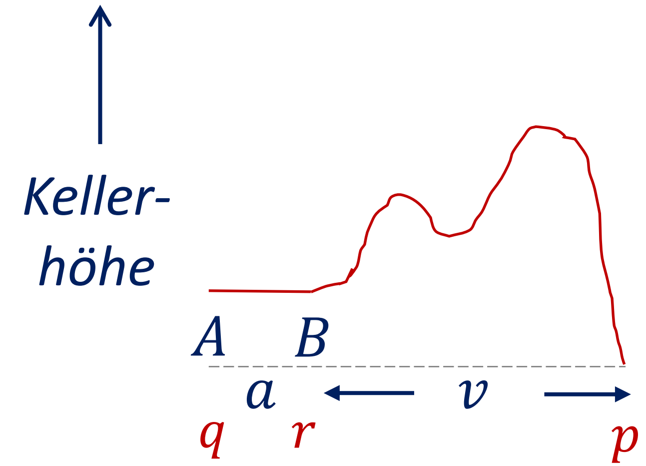


➢ Eingabe a lesen ist für M eine Möglichkeit, das Kellersymbol A zu löschen und dabei von q in p überzugehen

➢ Fügen Regel $[q, A, p] \rightarrow a$ hinzu.

- *Nächst einfacher Fall:*

  $(r, B) \in \delta(q, a, A) \quad (a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$

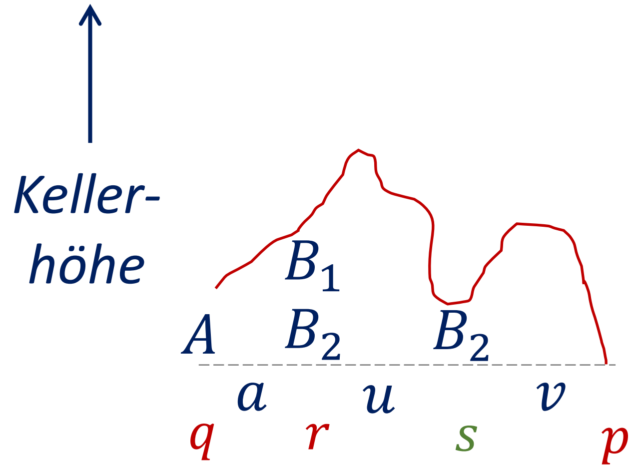


➢ Fügen Regel $[q, A, p] \rightarrow a[r, B, p]$ hinzu.

PDAs *vs.* kfGs

- *nächst einfacher Fall:*

  $(r, B_1B_2) \in \delta(q, a, A) \quad (a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\})$



➢ A wird beim Lesen von a durch B_1B_2 ersetzt. Dabei geht M in den Zustand r über.

➢ Nun muss B_1 durch Lesen eines Wortes u gelöscht werden, wobei M in einen Zustand s übergeht.
Dann muss B_2 durch Lesen eines Wortes v gelöscht werden, wobei M von s in p geht.

➢ Regeln $[q, A, p] \rightarrow a[r, B_1, s][s, B_2, p]$ für <u>alle</u> $s \in Q$

PDAs *vs.* kfGs

Satz 11.4. Zu jedem PDA A kann eine kfG G konstruiert werden, sodass $L(G) = N(A)$ gilt.

Konstruktion: Gegeben ein PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, F)$. Konstruieren eine kfG $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

- $V = \{S\} \cup \{ [q, A, p] \mid q, p \in Q, A \in \Gamma \}$ und
- P folgende Regeln enthält:
  - $S \to [q_0, \#, p]$ für alle $p \in Q$,
  - $[q, A, q_{m+1}] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \ldots [q_m, B_m, q_{m+1}]$ für alle $q, q_1, q_2, \ldots, q_{m+1} \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $A, B_1, B_2, \ldots, B_m \in \Gamma$, falls $(q_1, B_1 B_2 \ldots B_m) \in \delta(q, a, A)$. (Falls $m = 0$: $[q, A, q_1] \to a$.)

Beweis *der Korrektheit wieder durch zwei Induktionsbeweise*

$\square$

PDA in kfG – Beispiel

$M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, q_0, \#, \emptyset)$ mit

$\delta(q_0, a, \#) = \{(q_0, A\#)\}$ $\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}$

$\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q, a, Z) = \emptyset$ sonst $\delta(q_1, \varepsilon, \#) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ $L(M) = ?$

$G = (N, T, P, S)$ mit

$N = \{S, [q_0, A, q_0], [q_0, A, q_1], [q_1, A, q_0], [q_1, A, q_1],$
$[q_0, \#, q_0], [q_0, \#, q_1], [q_1, \#, q_0], [q_1, \#, q_1]\}$

$T = \{a, b\}$

Geben nur die Regeln in P an, die von S aus erreichbar sind.

PDA in kfG – Beispiel

$S \to [q_0, \#, q_0] \mid [q_0, \#, q_1]$

$[q_0, \#, q_0] \to a[q_0, A, q_0][q_0, \#, q_0]$
$[q_0, \#, q_0] \to a[q_0, A, q_1][q_1, \#, q_0]$
$[q_0, \#, q_1] \to a[q_0, A, q_0][q_0, \#, q_1]$
$[q_0, \#, q_1] \to a[q_0, A, q_1][q_1, \#, q_1]$

wegen $\delta(q_0, a, \#) = \{(q_0, A\#)\}$

$[q_0, A, q_0] \to a[q_0, A, q_0][q_0, A, q_0]$
$[q_0, A, q_0] \to a[q_0, A, q_1][q_1, A, q_0]$
$[q_0, A, q_1] \to a[q_0, A, q_0][q_0, A, q_1]$
$[q_0, A, q_1] \to a[q_0, A, q_1][q_1, A, q_1]$

wegen $\delta(q_0, a, \#) = \{(q_0, AA)\}$

$[q_0, A, q_1] \to b$ wegen $\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$[q_1, A, q_1] \to b$ wegen $\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$[q_1, \#, q_1] \to \varepsilon$ wegen $\delta(q_1, \varepsilon, \#) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

PDA in kfG – Beispiel

$S \to [q_0, \#, q_0] \mid [q_0, \#, q_1]$

$[q_0, \#, q_0] \to a[q_0, A, q_0][q_0, \#, q_0]$
$[q_0, \#, q_0] \to a[q_0, A, q_1][q_1, \#, q_0]$
$[q_0, \#, q_1] \to a[q_0, A, q_0][q_0, \#, q_1]$
$[q_0, \#, q_1] \to a[q_0, A, q_1][q_1, \#, q_1]$

$[q_0, A, q_0] \to a[q_0, A, q_0][q_0, A, q_0]$
$[q_0, A, q_0] \to a[q_0, A, q_1][q_1, A, q_0]$
$[q_0, A, q_1] \to a[q_0, A, q_0][q_0, A, q_1]$
$[q_0, A, q_1] \to a[q_0, A, q_1][q_1, A, q_1]$

$[q_0, A, q_1] \to b$

$[q_1, A, q_1] \to b$

$[q_1, \#, q_1] \to \varepsilon$

$$(q_0, aabb, \#) \vdash (q_0, abb, A\#) \vdash (q_0, bb, AA\#)$$
$$\vdash (q_1, b, A\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \varepsilon)$$

⬇

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow [q_0, \#, q_1] \\ &\Rightarrow a[q_0, A, q_1][q_1, \#, q_1] \\ &\Rightarrow aa[q_0, A, q_1][q_1, A, q_1][q_1, \#, q_1] \\ &\Rightarrow aab[q_1, A, q_1][q_1, \#, q_1] \\ &\Rightarrow aabb[q_1, \#, q_1] \\ &\Rightarrow aabb \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Folgerung 11.5. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. L ist eine kontextfreie Sprache.
2. $L = L(M_1)$ für einen PDA M_1.
3. $L = N(M_2)$ für einen PDA M_2.