

## Relationen

Geben Sie zu den drei Funktionen jeweils die Quotientenmenge  $\mathbb{N}/f$  an. Zeigen Sie jeweils, dass diese bijektiv zum Wertebereich von  $f$  ist.

- $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$
- $f(n) = 2n$
- $f(n) = n$
- $f(n) = n \bmod 5$

## Funktionale Programmierung

1. Gegeben seien folgende Funktionsdefinitionen:

---

```
1 def square(x):
2     return x*x
3
4 def rpk(x):
5     if (x==0):
6         print("Fehler: Division durch 0")
7     else:
8         return 1/x
```

---

Definieren Sie (mit Hilfe der oben gegebenen Funktionen) eine Funktion  $g$  mit Hilfe eines lambda-Ausdrucks, der als Parameter eine Funktion  $f$  und eine Zahl  $x$  übergeben bekommt und den Wert  $\frac{1}{f(x)}$  berechnet. Ergänzen Sie nun das funktionale Programm, so dass es  $\frac{1}{4^2}$  berechnet.

2. Das **Pascalsche Dreieck** ist eine grafische Repräsentation der Binomialkoeffizienten in Form eines Dreiecks. Die Zahlen an den Rändern sind immer 1 und innerhalb ergibt sich eine Zahl aus der Summe der beiden darüber liegenden Zahlen.  
Schreiben Sie eine rekursive Funktion, die die Elemente des Pascalschen Dreiecks berechnet! Die von Ihnen zu schreibende Funktion erwartet als Eingabe die Nummer der Zeile und der Spalte und gibt dann das entsprechende Element zurück. Die Numerierungen beginnen mit 0. Zum Beispiel gilt:  $\text{pascal}(0, 0) = 1$ ,  $\text{pascal}(1, 1) = 1$  und  $\text{pascal}(2, 1) = 2$ .

```
      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 ...
```

### 3. Die Türme von Hanoi

*Problemstellung:* Bei den Türmen von Hanoi handelt es sich um ein Knobelspiel bestehend aus drei Stäben ( $A$ ,  $B$  und  $C$ ), auf denen mehrere gelochte Scheiben mit unterschiedlichen Durchmessern der Größe nach abgelegt werden können, die größte jeweils unten. Es kann immer nur die oberste Scheibe auf einen anderen Stab bewegt werden, aber es darf nie eine größere Scheibe über einer kleineren abgelegt werden. Das Ziel des Spiels ist es, alle Scheiben von Stab  $A$  unter Zuhilfenahme des Stabs  $B$  auf den dritten Stab ( $C$ ) zu bewegen.

Bei zwei Scheiben wäre die Lösung der Aufgabe wie folgt:  
Beide Scheiben liegen zu Beginn des Spiels auf Stab  $A$  (die größere unten).

- Lege die oberste Scheibe von  $A$  nach  $B$ .
- Lege dann die nächste Scheibe (welche nun zugänglich ist) von  $A$  nach  $C$ .
- Zuletzt lege die Scheibe von  $B$  nach  $C$ .

Alle Scheiben befinden sich nun auf dem letzten Stab.

Weitere Beispiele können Sie im Internet ausprobieren, z.B. auf folgenden Seiten:

- <http://www.web-games-online.com/towers-of-hanoi/>
- <https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>

*Aufgabenstellung:*

- Entwerfen Sie einen Algorithmus (zunächst in Textform), der die Aufgabe der Türme von Hanoi rekursiv löst.
- Formulieren Sie Ihren Algorithmus dann in Python. Das Programm soll jeden Zug dokumentieren, entweder durch Ausgabe einer Folge von Handlungsanweisungen der Form „Lege Scheibe 1 von  $A$  nach  $B$ “, oder durch Ausgabe der aktuellen Konfiguration, die angibt, welcher Stab aktuell welche Scheiben enthält (z.B. in Form von drei Listen).