Vorlesung 30.4

1 $\mathbb{R}^n$ und euklidische Norm

Auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert $||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die euklidische Norm, sie entspricht dem räumlichen Abstand vom Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ zum Nullpunkt. Beispielsweise ist $\{(x_1, x_2) : ||(x_1, x_2)||_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe, und $\{(x_1, x_2, x_3) : ||(x_1, x_2, x_3)||_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Radius 1.

1.1 Riemannintegral

Die Einführung des Integrals ist nicht Gegenstand der Vorlesung. Vom selben Autor wie das Lehrbuch gibt es ein Lehrbuch (Link: Analysis 2), dort wird in Kapitel 6 alles zum Integral erklärt. Hier nur soviel (die folgende Darstellung ist etwas kompakter als in der Vorlesung): Das Riemannintegral ist das Integral, das schon in der Schule behandelt wird. Es gibt noch ein anderes Integral, das *Lebesgueintegral*, das für alle uns hier interessierenden Funktionen den selben Wert liefert. Das Lebesgueintegral hat einige bessere mathematische Eigenschaften, die für diese Vorlesung aber entbehrlich sind. Daher behandeln wir nur kurz das Wichtigste zum Riemannintegral und lassen das 'Riemann'- weg.

Für stetige $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ soll das Integral $\int_a^b \mathrm{d}x f(x)$ die Fläche zwischen der Kurve $(x, f(x))$ und der x-Achse sein. Insbesondere, wenn f konstant mit Wert $C > 0$ ist, definieren wir $\int_a^b \mathrm{d}x f(x) = C * (b - a)$, das ist die Fläche des Rechtecks mit Seitenlängen $b - a$ und C.

Sei nun $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine ''feine'' Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Die Fläche zwischen der Kurve $(x, f(x))$ und der x-Achse kann man approximieren durch die Summe der Flächen der Rechtecke mit den Seitenlängen $x_i - x_{i-1}$ und $f(x_{i-1})$. Diese Summe ist gleich

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Wird jetzt die Unterteilung beliebig klein, d.h. $\max_{i=1,\ldots n}(x_i - x_{i-1})$ geht gegen Null für $n \to \infty$, dann approximiert diese Summe immer besser und besser die gesuchte Fläche, und wir definieren dann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) =: \int_a^b \mathrm{dx} f(x).$$

Diese Definition funktioniert für beliebige stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, nicht nur für nicht-negative f. Will man jetzt das Integral für halboffene Intervalle der Form $[a, +\infty)$ oder für ganz $\mathbb{R}$ definieren, setzt man

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{dx} f(x)) := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \mathrm{dx} f(x)$$
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{dx} f(x) := \lim_{a\to-\infty} \int_a^{+\infty} \mathrm{dx} f(x).$$

2 Kapitel 2.2: Wahrscheinlichkeitsdichten

Wir behandeln Satz 2.2.1, er gilt genauso wenn mann $[a, b]$ durch $\mathbb{R}$ oder ein halboffenes Intervall - etwa $[0, +\infty)$ - ersetzt. Beispiele für Wahrscheinlichkeitsdichten (Englisch: Probability density function, kurz pdf):

- Gleichverteilung auf $[a, b]$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$.
- Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$: Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist auf dem Intervall $[0, +\infty)$ definiert. Die Dichtefunktion lautet $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Plots für verschiedene Werte von λ wurden gezeigt. Die Verteilungsfunktion (Englisch: cumulative distribution function, kurz cdf)$F(x) = \int_0^x \mathrm{dy} f(y)$ wurde ebenso geplottet.
- Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, die Dichtefunktion lautet

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  Es ist nicht-trivial zu zeigen, dass in der Tat $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{dx} f(x) = 1$ gilt, sodass f ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.