Ü1.3.3 Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen eine Teilmenge N von Ω eine *Nullmenge*, wenn es ein $E \in \mathcal{E}$ mit $N \subset E$ und $\mathbb{P}(E) = 0$ gibt. Beweisen Sie:

a) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder eine Nullmenge.

b) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

c) Definiere $\mathcal{E}' := \{E \cup N \mid E \in \mathcal{E}, N \text{ ist Nullmenge}\}$. Dann ist $\mathcal{E}'$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

d) Eine Funktion $\mathbb{P}' := \mathcal{E}' \to [0,1]$ sei durch $\mathbb{P}'(E \cup N) := \mathbb{P}(E)$ erklärt. Diese Abbildung ist wohldefiniert, es ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und für $E \in \mathcal{E}$ ist $\mathbb{P}'(E) = \mathbb{P}(E)$. (Man spricht von der *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.)

(a) Sei $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von Nullmengen. Dann existieren $E_i \in \mathcal{E}$ mit $N_i \subset E_i$ und $\mathbb{P}(E_i) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \overset{(*)}{\in} \mathcal{E} \quad \text{und}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \setminus E_1 \cup E_3 \setminus (E_1 \cup E_2) \ldots)$$
$$\overset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(E_j \setminus \bigcup_{i<j} E_i\right) \overset{(***)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_j) = 0.$$

Wobei

(*) folgt aus der Def. der σ-Algebra,

(**) σ-Additivität des Maßes,

(***) Monotonie des Maßes.

Folglich ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ eine Nullmenge.

(b) Sei N eine Nullmenge und $A \subset N$. Dann existiert ein $E \in \mathcal{E}$ mit $N \subset E$ und $\mathbb{P}(E) = 0$. Da offensichtlich auch gilt, dass $A \subset N \subset E$ erfüllt E ebenfalls die geforderten Eigenschaften dafür, dass A eine Nullmenge ist.

(c) Wir prüfen die definitorischen Eigenschaften einer σ-Algebra

(i) $\emptyset \in \Sigma$ und $\emptyset$ ist eine Nullmenge ($\emptyset \subset \emptyset \in \Sigma$ und $\mathbb{P}(\emptyset)=0$)

$\Rightarrow \emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \Sigma'$. Analog ist $\Omega = \Omega \cup \emptyset \in \Sigma'$.

(iii) Seien $(A_i \cup N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Elemente von Σ', wobei $A_i \in \Sigma$ und N_i eine Nullmenge ist. Dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup N_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \Sigma',$$

da $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ und $\bigcup_{i\geq 1}^{\infty} N_i$ wieder eine Nullmenge ist (vgl. (a)).

(ii) Sei $A \cup N \in \Sigma'$ mit $A \in \Sigma$ und N einer Nullmenge. Dann existiert $E \in \Sigma$ mit $N \subset E$ und $\mathbb{P}(E)$. Wir können jetzt schreiben

$$(A \cup N)^c = A^c \cap N^c = A^c \cap \big((N^c \cap E) \cup (N^c \cap E^c)\big)$$

$$= A^c \cap \big((E \cap N^c) \cup E^c\big)$$

$$= \underbrace{(A^c \cap E^c)}_{\in \Sigma} \cup \underbrace{(A^c \cap N^c \cap E)}_{\text{Nullmenge } (*)} \in \Sigma'.$$

(*) folgt, da E eine Nullmenge ist und $A^c \cap N^c \cap E \subset E$, vgl. (b).

Damit erfüllt Σ' alle Eigenschaften einer σ-Algebra.

(d) Wohldefiniertheit: Sei $E' \in \Sigma'$. Es gilt zu zeigen, dass $\mathbb{P}'(E')$ eindeutig definiert ist. Das ist noch fraglich, weil E' möglicherweise zwei Darstellungen $E_1 \cup N_1 = E' = E_2 \cup N_2$ in Σ' haben kann. Es gilt aber $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2)$, da

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \underbrace{\mathbb{P}(E_2 \cap E_1^c)}_{=0} = \mathbb{P}(E_1),$$

weil $E_2 \cap E_1^c \subset E_2 \cup N_2 \cap E_1^c = E' \cap E_1^c \subset N_1$ eine Nullmenge ist.

$\mathbb{P}'(E) = \mathbb{P}(E)$: Das wird klar, da $E \in \Sigma$ als $E \cup \emptyset \in \Sigma'$ geschrieben werden kann.

$\mathbb{P}'$ ist W-Maß: Wir prüfen die Eigenschaften eines W-Maßes.

(i) $\mathbb{P}'(\Omega) = \mathbb{P}'(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$

(ii) Für disjunkte $E_i' = E_i \cup N_i \in \Sigma'$, $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'\Big) = \mathbb{P}\Big(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\Big) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}\Big(\biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}'(E_i'),$$

wobei (*) folgt, da $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ eine Nullmenge ist.

Ü1.4.1 Es sei $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^2$, die alle offenen Kreisscheiben enthält. Dann enthält sie auch alle offenen Rechtecke.

Wir benutzen die Aussagen auf S. 21 des Buches zu den Borel-Mengen im $\mathbb{R}^n$ für $n=2$.

Da $\mathcal{E}$ die offenen Kreisscheiben enthält (d.h. die 2-dim offenen Kugeln) enthält $\mathcal{E}$ demnach bereits alle Borelmengen. Diese enthalten sicherlich die Hyperquader im $\mathbb{R}^2$ wieder nach S. 21. Das sind gerade die abgeschlossenen Rechtecke. Ein beliebiges offenes Rechteck $(a,b) \times (c,d)$ kann jetzt geschrieben werden als

$$(a,b) \times (c,d) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a-1/n, b+1/n] \times [c-1/n, d+1/n] \in \mathcal{E},$$

da eine σ-Algebra abzählbare Schnitte enthält.