Vorlesung 4.6

Peter Nejjar

Hier wird der Inhalt der Vorlesung vom 4.6 wiedergegeben. Insofern sich die Vorlesung an [1] orientierte, werden die Inhalte anhand der dortigen Bezeichnungen/Nummern nur kurz genannt.

Die Unabhängigkeit von Ereignissen wird wie in Definition 4.3.4 definiert. Für den Spezialfall, dass $\mathcal{E}_0$ eine Folge von Ereignissen $(A_n, n \in \mathbb{N})$ ist, gilt: Die Ereignisse $(A_n, n \in \mathbb{N})$ sind unabhängig, wenn gilt: Für beliebige $1 \leq i_1 < \cdots < i_l, i_1, \ldots, i_l \in \mathbb{N}$, ist

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{l} \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right). \tag{1}$$

Beispiel für n unabhängige Ereignisse ist folgendes: Sei $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$, mit der Gleichverteilung, d.h. $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ und es seien $a_1, \ldots, a_n \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Es sei $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_i = a_i\}$, d.h. A_i ist das Ereignis, dass beim $i-$ten Wurf die Zahl a_i herauskam. Es ist $\mathbb{P}(A_i)) = 1/6$, und

$$\left|\bigcap_{k=1}^{l} A_{i_k}\right| = 6^{n-l} \tag{2}$$

(zum Beweis von (2) finde man etwa eine Bijektion von $\bigcap_{k=1}^{l} A_{i_k}$ nach $\{1,2,3,4,5,6\}^{n-l}$). Daher folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l} A_{i_k}\right) = 6^{-l} = \prod_{k=1}^{l} \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right). \tag{3}$$

Es wurde auf die zwei Irrtümer (siehe Seite 133) hingewiesen. Für Zufallsvariablen wird Unabhängigkeit äquivalent wie in Definition 4.4.5 definiert (in der Vorlesung wurde lediglich noch zusätzlich ausformuliert, was unabhängig bedeutet). Als Beispiel, wie Unabhängigkeit leichter festgestellt werden kann, werden die Sätze 4.4.4 (mit Beweisskizze) und Satz 4.4.3 besprochen. Anschließend wurde der Klonsatz 4.5.1 besprochen: Dieser sichert ab, dass unabhängige Zufallsvariablen $(X_i, i \in \mathbb{N})$ mit vorgegebener Verteilung $\mathbb{P}_X$ existieren. Der Beweis wurde grob skizziert. Anschließend wurde Satz 4.6.1. besprochen und für den Speziallfall, dass X, Y Indikatorfunktionen sind, bewiesen. Anschließend wurde Satz 4.6.2, Teil (i) besprochen.

Literatur

[1] E. Behrends. Elementare Stochastik. *Vieweg+Teubner Verlag, 2013,* `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-2331-1`.