Vorlesung 16.4

1 Kapitel 1.3

Satz 1.3.2, mit Beweis von (v) . Informelle Erläuterung warum man von "Stetigkeit" spricht: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $(x_n, n \geq 1)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Das erinnert an die Aussagen von (v),(vi), wobei in (v) der Limes von "unten", in (vi) der von "oben" genommen wird.

2 Kapitel 1.4: Erzeugte $\sigma-$ Algebren

Sei $\Omega = [0,1]$. Es soll modelliert werden, zufällig eine Zahl aus Ω zu ziehen, und jede Zahl soll dieselbe Wahrscheinlichkeit p haben, gezogen zu werden. Sei $\mathcal{E}$ eine $\sigma-$Algebra auf Ω derart, dass $\{\omega\} \in \mathcal{E}$ für alle $\omega \in \Omega$. Wir suchen also ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{E}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei $A = \mathbb{Q} \cap \Omega$. Dann ist $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \lim_{n\to\infty} n * p$, und dieser Limes ist 0 für $p = 0$, ansonsten $+\infty$. Da aber $\mathbb{P}(A) \leq 1$ gelten muss, muss also $p = 0$ sein: Jeder einzelne Punkt - und jede höchstens abzählbar unendliche Menge - muss also Wahrscheinlichkeit 0 haben.

Als Ausweg kann man statt $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p$ verlangen, dass für $[a,b] \subseteq [0,1]$ nun $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$ gelten soll. Die Frage ist nun, wie wir die $\sigma -$ Algebra $\mathcal{E}$ wählen können: Natürlich möchten wir $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ haben, d.h. wir wollen einfach jeder Teilmenge von Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Das geht aber leider - beweisbar - nicht! Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes, genauere Hintergründe erfahren Sie in Kapitel 1.7 im Lehrbuch.

Satz 1. *Es gibt* ***kein*** *Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf der Potenzmenge von $[0,1]$, derart, dass $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$ für alle $[a,b] \subseteq [0,1]$ gilt.*

Daher müssen wir uns mit einer kleineren $\sigma -$ Algebra begnügen. Dies ist die $\sigma -$ Algebra der Borelmengen. Diese sind ein Beispiel einer erzeugten $\sigma -$ Algebra. Anschließend wurde Satz 1.4.1 erläutert, man wählt $\mathcal{A}$ als Schnitt über alle $\sigma -$ Algebra, die $\mathcal{M}$ enthalten, es wurde nicht bewiesen, dass das eine $\sigma -$ Algebra gibt. Beispiel 2 auf Seite 17 wurde behandelt.

3 Kapitel 1.5 Borelmengen

Definition der Borelmengen, Satz 1.5.2 ohne Beweis. Beweis $\mathbb{Q}$ ist eine Borelmenge: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\}$ eine Borelmenge, da

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x - 1/n, x + 1/n]$$

(abzählbar unendliche Durchschnitte führen nicht aus einer $\sigma -$ Algebra heraus). Damit ist dann aber auch $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ als abzählbare Vereinigung von Borelmengen eine Borelmenge.