Kurzdarstellung Vorlesung 9.4

Peter Nejjar

Hier wird in kurzer Form der Inhalt der Vorlesung vom 9.4 wiedergegeben. Insofern sich die Vorlesung an [1] orientierte, werden die Inhalte anhand der dortigen Bezeichnungen/Nummern nur kurz genannt.

1 Informelle Einführung /Ausblick

Stochastik gliedert sich in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Beides kommt in der Vorlesung vor, Schwerpunkt liegt auf der Wahrscheinlichkeitstheorie. Hier werden einige Hauptergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits anhand eines Beispiels kurz erklärt. Ihre exakte mathematische Behandlung erfolgt im Laufe der Vorlesung. Wir betrachten die mathematische Modellierung eines Münzwurfs: Es sei $\Omega = \{0, 1\}$ $(0 = \text{KOPF}, 1 = \text{ZAHL})$ die Menge der möglichen Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit von Zahl/Kopf wird definiert durch $\mathbb{P}(\{0\}) := 1/2 =: \mathbb{P}(\{1\})$ - es wird also eine faire Münze modelliert. Für $A \subseteq \Omega$ definiere als Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

Modellierung eines $n-$fachen Münzwurfs durch $\Omega_n = \{0, 1\}^n$ und für $A \subseteq \Omega_n$ definieren wir als Wahrscheinlichkeit von A: $\mathbb{P}_n(A) := |A|/|\Omega_n|$.

Ein Hauptergebnis der Wahrscheinlichkeitstheorie ist das *Gesetz der großen Zahlen*: Dieses besagt (in seiner schwachen Variante) als Korollar folgendes:

$$\forall\varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\left(\left\{\omega : \left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i - n/2\right| \geq \varepsilon n\right\}\right) = 0. \tag{1}$$

. Dies ist eine mathematische Präzisierung der Aussage: Wird $n-$mal eine Münze geworfen, ist im Schnitt die Hälfte der Münzwürfe KOPF, die andere Hälfte ZAHL. Es wird jedoch kaum je exakt die Hälfte der Münzwürfe KOPF ergeben (bei n ungerade ist es sogar unmöglich). Es sollte also zufällige Schwankungen um den Durchschnittswert $n/2$ geben. Diese Schwankungen werden durch den zentralen Grenzwertsatz beschrieben:

$$\forall s \in \mathbb{R} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n\left(\left\{\omega : \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i - n/2}{\sqrt{n}/2} \leq s\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{dx} e^{-x^2/2}. \tag{2}$$

Der Limes auf der rechten Seite von (2) ist die *Normalverteilung* von Gauß.

2 Kapitel 1.2 aus [1].

Behandelte Themen: Definitionen 1.2.1,1.2.2,1.2.3 ($\sigma-$Algebra, Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsraum). Beispiele, Satz 1.3.2 (i)-(iv), (i)-(iii) mit Beweis.

References

[1] E. Behrends. Elementare Stochastik. *Vieweg+Teubner Verlag, 2013,* ***https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-2331-1***.