姓名

学号

专业

任课教师

南开大学 2019 级“一元函数积分（信）”结课统考试卷（A 卷） 2019 年 12 月 30 日

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分										

一、选择题(每小题 4 分)

一题得分	

$-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)$

（1）设 $\int f(x)dx=\sin x+C$，则 $\int xf(1-x^2)dx$ =(　　　):

(A) $2\sin(1-x^2)+C$; (B) $-2\sin(1-x^2)+C$; (C) $(1/2)\sin(1-x^2)+C$; (D) $-(1/2)\sin(1-x^2)+C$

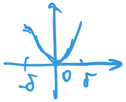
（2）设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则 $\int f(2x)dx=$（　　　）:

$\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)$

（A）$F(2x)+C$；（B）$F(x/2)+C$；（C）$(1/2)F(2x)+C$; (D) $2F(x/2)+C$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有二次导数，$\delta>0$，$f''(x)>0$，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，则 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$ 满足（　　　）:

$\delta>0$，$f'(x)$ 增



（A）$I=0$；（B）$I>0$；(C) $I<0$；(D) 正负号不确定

$\int_0^{n\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}$

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\,dt}{x}=$（ D ）:

$\int_0^{\pi\cdot\frac{x}{\pi}}|\sin t|\,dt$

$=\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt.$

$-\cos t\Big|_0^{\pi}=2.$

（A）1；(B) 0；（C）不存在；（D）$2/\pi$

(5) 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,x=y=0\end{cases}$，则该函数在（0，0）点（　　）:

(A) 连续，且偏导数存在，但不可微；（B）不连续；(C) 连续，但偏导数不存在；（D）可微

$\int_0^{n\pi}|\sin t|dt+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt.$

$n\int_0^{\pi}\sin t\,dt.$

草稿区

姓名

姓名

学号

专业

任课教师

设 $f(x)=x-a$

$\int_0^1 t(t-a)\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 - \frac{a}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{a}{2} = a.$

$\frac{3}{2}a=\frac{1}{3}$

二、填空题（每小题 4 分）：

二题得分	

（1） 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=x-\int_0^1 tf(t)dt$，则 $f(x)=$ $x-\frac{2}{9}$

（2） 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{xz}=x^2+y^2$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=$______

（3） 原点到平面 $2x+2y+z-9=0$ 的距离为 3

$\frac{9}{\sqrt{9}}$

（4） 设一平面过原点和点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=7$ 垂直，则此平面方程为 $2x+2y-3z=0$

$\vec{n}=\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\{-4,-4,6\}$

$\{2,2,-3\}$

$\vec{n}=\{l,m,n\}$

（5） 曲线 $y=x^2$，$(0\le x\le 1)$，绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{\pi}{2}$

三、求下列不定积分：（每小题 6 分）

三题得分	

（1） $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$；

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$

(2) $\int \sec^6 x dx$；

$=\int \sec^4 x\, d\tan x$

$=\int(\tan^2 x+1)^2 d\tan x$

$t=\tan x$

$=\int(t^4+2t^2+1)\,dt$

$=\frac{1}{5}(\tan x)^5+\frac{2}{3}(\tan x)^3+\tan x+C.$

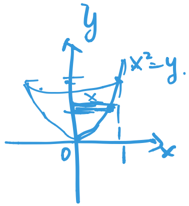
（3） $\int x\sin^2 x dx$；

$\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\int\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int x\,d\sin 2x$

草稿区



$dv=dy\cdot\pi x^2=\pi y\,dy$

$\pi\int_0^1 y\,dy$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\left[x\sin 2x - \int \sin 2x\, dx\right]$

$+C.$

姓名
学号
专业
任课教师

四、求下列定积分（每小题 7 分）：

四题得分	

$\frac{1}{2}$

(1) $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$；

$= \ln(1+\sqrt{x})\cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}x}{1+\sqrt{x}}dx$

$= \ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{2t^2}{1+t}dt$

$-\int$

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$；

$\sec^2 x$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\sec^2 x+3}dx$

$= \int \frac{1}{\tan^2 x+4}d\tan x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

(3) $\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$

$\int_{-2}^{0} x\ln(e^x+1)dx$

$= \int_{-2}^{0} x\ln e^x(e^{-x}+1)dx$

$= \int_{-2}^{0} x(x+\ln(e^{-x}+1))dx$

$= \int_{-2}^{0} x^2dx + \int_{-2}^{0} x\ln(e^{-x}+1)dx$ $x=-t$

$= \frac{8}{3} + \int_{2}^{0}(-t)\ln(e^t+1)\,d(-t)$

dx

五、(7 分) 设 $f(x) = x\int_1^x \frac{\arctan t^2}{t}dt$, 计算 $\int_0^1 f(x)dx$.

五题得分	

$= \frac{8}{3} - \int_0^2 t\ln(e^t+1)dt$

草稿区

姓名

学号

专业

任课教师

六、（8 分）设二元函数 $f(u,v)$.具有连续二阶偏导数，$z=f(2x+3y,x+y)$,

试求：$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

七题得分	

七、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，

且满足 $|f^{'}(x)|\le 1, f(0)=f(2)=1$, 证明：$1\le\int_0^2 f(x)dx\le 3$

七题得分	

草稿区