线性代数之三

吴民

南开大学　人工智能学院

由 mn 个数 a_{ij}（$i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n$）排成 m 行 n 列的方阵形式，用括号括起来：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，或 $m\times n$ 矩阵，简称**矩阵**。数 a_{ij} 称为矩阵的元。

矩阵的小历史

矩阵是线性代数这门课的核心概念。

英国十九世纪数学家 Arthur Cayley 于 1858 年首次引入矩阵。

cayley0.png

Figure: Authur Cayley (1821—1895)

矩阵的符号表示和若干特殊矩阵的定义

- 用大写字母表示矩阵：A、B。
- 用元的一般形式表示矩阵：(a_{ij})、(b_{ij})。
- 指出矩阵阶数的表示方法：$(a_{ij})_{m\times n}$、$B_{m\times n}$。
- 方阵：行数与列数相等的矩阵。又称 n 阶矩阵（n 阶方阵）。
- 实（复）矩阵：所有元都是实（复）数。
- n 维行向量：$1\times n$ 矩阵。元又称为分量。
- n 维列向量：$n\times 1$ 矩阵。元又称为分量。

矩阵的相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 相等，记为 $A=B$，如果

矩阵的相等

两个矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{p \times q}$ 相等，记为 $A = B$，如果

- $m = p$ 且 $n = q$。

矩阵的相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 相等，记为 $A=B$，如果

- $m=p$ 且 $n=q$。
- 对所有的 $i=1,\ldots,m$ 及 $j=1,\ldots,n$，都有

$$a_{ij}=b_{ij},$$

矩阵的相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 相等，记为 $A=B$，如果

- $m=p$ 且 $n=q$。
- 对所有的 $i=1,\ldots,m$ 及 $j=1,\ldots,n$，都有

$$a_{ij}=b_{ij},$$

例如：

矩阵的相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 相等，记为 $A=B$，如果

- $m=p$ 且 $n=q$。
- 对所有的 $i=1,\ldots,m$ 及 $j=1,\ldots,n$，都有

$$a_{ij}=b_{ij},$$

例如：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

矩阵的相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 相等，记为 $A=B$，如果

- $m=p$ 且 $n=q$。
- 对所有的 $i=1,\dots,m$ 及 $j=1,\dots,n$，都有

$$a_{ij}=b_{ij},$$

例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的相等

- 矩阵和数谈不上相等。
- $A = 5$ 必定是错误的式子。
- 例外：当 A 是一个一阶矩阵，即 $A = (a)$ 时，为了书写方便，可以写 $A = a$ 这个式子。
- 即补充定义：$A = a$ 含义是 A 为一阶矩阵，且唯一元等于 a。

两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，A 与 B 相加，记为 $A + B$，亦即 A 与 B 的和定义为

矩阵的加法

两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，A 与 B 相加，记为 $A+B$，亦即 A 与 B 的和定义为

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法

类似于数的加法，矩阵的加法成立交换律：$A+B=B+A$。

类似于数的加法，矩阵的加法成立交换律：$A+B=B+A$。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

类似于数的加法，矩阵的加法成立交换律：$A+B=B+A$。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}+a_{m1} & \dots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= B + A.
\end{aligned}
$$

矩阵的加法

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= B + A.
\end{aligned}
$$

这就证明了矩阵加法的交换律。

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= B + A.$$

这就证明了矩阵加法的交换律。

矩阵的加法还成立结合律：

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

矩阵的加法

- 零矩阵：每一个元都是 0 的 $m\times n$ 矩阵。
- 记为：$0_{m\times n}$ 或 0。遇到 0 要根据上下文区分数 0 或矩阵 0。
- 对一切矩阵 A，都有：$A+0=0+A=A$。
- 对任一矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，A 的**负矩阵**，记为 $-A$，定义为

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- 显然对任一矩阵 A，都有 $A+(-A)=0$。
- $A-B$ 定义为 $A+(-B)$。

矩阵的数量乘法

λ是一个数，$A=(a_{ij})$为一$m\times n$矩阵。

矩阵的数量乘法

λ是一个数，$A=(a_{ij})$为一$m\times n$矩阵。λ与矩阵A的**乘积**，也称为**数量乘积**。

矩阵的数量乘法

λ是一个数，$A=(a_{ij})$为一$m\times n$矩阵。λ与矩阵A的**乘积**，也称为**数量乘积**。记为λA或$A\lambda$。

矩阵的数量乘法

λ是一个数，$A=(a_{ij})$为一$m\times n$矩阵。λ与矩阵A的**乘积**，也称为**数量乘积**。记为λA或$A\lambda$。定义为

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xlongequal{\text{定义}} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

λ是一个数，$A=(a_{ij})$为一$m\times n$矩阵。λ与矩阵A的**乘积**，也称为**数量乘积**。记为λA或$A\lambda$。定义为

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \underline{\underline{\text{定义}}} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，

$$1A=1(a_{ij})_{m\times n}=(1\cdot a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=A.$$

矩阵的数量乘法

类似的，可以证明以下公式：

类似的，可以证明以下公式：

- $1A = A$.

矩阵的数量乘法

类似的，可以证明以下公式：

- $1A = A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

矩阵的数量乘法

类似的，可以证明以下公式：

- $1A = A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

矩阵的数量乘法

类似的，可以证明以下公式：

- $1A = A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

矩阵的数量乘法

类似的，可以证明以下公式：

- $1A = A$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$.

注意：这些公式形式上与过去公式很象，但含义完全不同。

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

设矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times s}$，

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则A与B的乘积，记为AB，

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则A与B的乘积，记为AB，定义为

$$AB=(c_{ij})_{m\times s},\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则A与B的乘积，记为AB，定义为

$$AB=(c_{ij})_{m\times s},\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

左边矩阵A的列数必须等于右边矩阵B的行数。

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则A与B的乘积，记为AB，定义为

$$AB=(c_{ij})_{m\times s},\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

左边矩阵A的列数必须等于右边矩阵B的行数。

AB得到的矩阵行数等于左边矩阵A的行数, 列数等于右边矩阵B的列数。

矩阵的乘法

矩阵乘法是线性代数中最核心的定义。

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$， 则A与B的乘积，记为AB，定义为

$$AB=(c_{ij})_{m\times s},\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

左边矩阵A的列数必须等于右边矩阵B的行数。

AB得到的矩阵行数等于左边矩阵A的行数, 列数等于右边矩阵B的列数。

乘法的法则是左边矩阵的第i行和右边矩阵的第j列的对应元素相乘再相加，就得到乘积矩阵的第i行第j列元素。

矩阵的乘法

计算：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

计算：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

结果是交换了(a_{ij})矩阵的第1行与第3行。

矩阵的乘法

考虑如下一组式子，如何利用矩阵乘法简化表示：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

矩阵的乘法

考虑如下一组式子，如何利用矩阵乘法简化表示：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

附：所谓方程组，只不过上式左边的$y_1, \ldots, y_m$都取为常数。

定义以下向量和矩阵：

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

定义以下向量和矩阵：

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

注意，Y是m维列向量，X是n维列向量。

矩阵的乘法

定义以下向量和矩阵：

$$
Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

注意，Y是m维列向量，X是n维列向量。

则上式可表示为$Y=AX$。

矩阵的乘法

定义以下向量和矩阵：

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

注意，Y是m维列向量，X是n维列向量。

则上式可表示为$Y=AX$。

反之，若Y,A,X均按上面定义，则$Y=AX$即表示前面式子。

矩阵的乘法

又若有：

$$
\begin{cases}
z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_m \\
z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_m \\
\quad \ldots \\
z_s = b_{s1}y_1 + b_{s2}y_2 + \cdots + b_{sn}y_m
\end{cases}
$$

又若有：

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_m \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_m \\ \quad \ldots \\ z_s = b_{s1}y_1 + b_{s2}y_2 + \cdots + b_{sn}y_m \end{cases}$$

即$Z = BY$，其中Y前面已定义，Z和B类似定义。

又若有：

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_m \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_m \\ \quad \dots \\ z_s = b_{s1}y_1 + b_{s2}y_2 + \cdots + b_{sn}y_m \end{cases}$$

即$Z = BY$，其中Y前面已定义，Z和B类似定义。

使用代入法，易知每个z_i都可以写成$x_1, \dots, x_n$的一次齐式。

矩阵的乘法

又若有：

$$\begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_m \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_m \\ \quad \cdots \\ z_s = b_{s1}y_1 + b_{s2}y_2 + \cdots + b_{sn}y_m \end{cases}$$

即$Z = BY$，其中Y前面已定义，Z和B类似定义。

使用代入法，易知每个z_i都可以写成$x_1, \ldots, x_n$的一次齐式。

z_i的表达式究竟是什么？

矩阵的乘法

$$Z = BY = B(AX).$$

矩阵的乘法

$$Z = BY = B(AX).$$

到此处仍不知道系数是多少。

矩阵的乘法

$$Z = BY = B(AX).$$

到此处仍不知道系数是多少。

矩阵乘法成立结合律：

矩阵的乘法

$$Z = BY = B(AX).$$

到此处仍不知道系数是多少。

矩阵乘法成立结合律：

设$A = (a_{ij})_{s\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times m}$，$C = (c_{ij})_{m\times r}$，则

$$(AB)C = A(BC).$$

矩阵的乘法

$$Z = BY = B(AX).$$

到此处仍不知道系数是多少。

矩阵乘法成立结合律：

设$A = (a_{ij})_{s\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times m}$，$C = (c_{ij})_{m\times r}$，则

$$(AB)C = A(BC).$$

设$AB = V = (v_{ij})_{s\times m}$，$BC = W = (w_{ij})_{n\times r}$。

$$Z = BY = B(AX).$$

到此处仍不知道系数是多少。

矩阵乘法成立结合律：

设$A = (a_{ij})_{s\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times m}$，$C = (c_{ij})_{m\times r}$，则

$$(AB)C = A(BC).$$

设$AB = V = (v_{ij})_{s\times m}$，$BC = W = (w_{ij})_{n\times r}$。

$$v_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad w_{jl} = \sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}$$

矩阵的乘法

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

矩阵的乘法

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$A(BC)$的第i行第l列的元为：

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$A(BC)$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl}$$

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$A(BC)$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right)$$

矩阵的乘法

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$A(BC)$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

矩阵的乘法

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$A(BC)$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

因为双重加号可以交换次序，所以以上两式相等。

矩阵的乘法

根据矩阵乘法定义，$(AB)C$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

根据矩阵乘法定义，$A(BC)$的第i行第l列的元为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

因为双重加号可以交换次序，所以以上两式相等。

即$(AB)C$和$A(BC)$的每个对应元都相等，故$(AB)C = A(BC)$。

矩阵的乘法

所以$Z = B(AX) = (BA)X$，

矩阵的乘法

所以$Z = B(AX) = (BA)X$，即系数是两个矩阵B与A的乘积。

矩阵的乘法

所以$Z=B(AX)=(BA)X$，即系数是两个矩阵B与A的乘积。

矩阵乘法，交换律不成立。存在A,B，$AB\neq BA$。

矩阵的乘法

所以$Z = B(AX) = (BA)X$，即系数是两个矩阵B与A的乘积。

矩阵乘法，交换律不成立。存在A, B，$AB \neq BA$。

矩阵乘法，削去律不成立：$AB = AC \ \not\Rightarrow \ B = C$。

矩阵的乘法

所以$Z = B(AX) = (BA)X$，即系数是两个矩阵B与A的乘积。

矩阵乘法，交换律不成立。存在A, B，$AB \neq BA$。

矩阵乘法，削去律不成立：$AB = AC \not\Rightarrow B = C$。

矩阵乘法，分配律成立：

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

矩阵的乘法

所以$Z = B(AX) = (BA)X$，即系数是两个矩阵B与A的乘积。

矩阵乘法，交换律不成立。存在A,B，$AB \neq BA$。

矩阵乘法，削去律不成立：$AB = AC \not\Rightarrow B = C$。

矩阵乘法，分配律成立：

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

结合律：$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$。

矩阵的乘法

回到前一组式子：

$$Y = AX$$

矩阵的乘法

回到前一组式子：

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

回到前一组式子：

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

矩阵的乘法

回到前一组式子：

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

回到前一组式子：

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

最后一个式子是常用的公式。

类似的有：

矩阵的乘法

类似的有：

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

类似的有：

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

类似的有：

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
=&x_1 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

文字描述为：行向量左乘矩阵得到矩阵行向量的线性组合；列向量右乘矩阵得到矩阵列向量的线性组合。（线性组合稍后定义）

矩阵的乘法

考虑以下矩阵乘积的第i列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

考虑以下矩阵乘积的第i列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

该第i列写成向量形式为：

矩阵的乘法

考虑以下矩阵乘积的第i列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

该第i列写成向量形式为：

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{i1} + \cdots + a_{1n}b_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{i1} + \cdots + a_{mn}b_{ni} \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

考虑以下矩阵乘积的第i列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

该第i列写成向量形式为：

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{i1} + \cdots + a_{1n}b_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{i1} + \cdots + a_{mn}b_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

写成矩阵形式，设：

矩阵的乘法

写成矩阵形式，设：

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \ldots & \beta_s \end{pmatrix}$$

其中$\beta_i(i = 1, \ldots, s)$为列向量。则有：

写成矩阵形式，设：

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s \end{pmatrix}$$

其中$\beta_i (i = 1, \dots, s)$为列向量。则有：

$$AB = A \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

写成矩阵形式，设：

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s \end{pmatrix}$$

其中$\beta_i (i = 1, \dots, s)$为列向量。则有：

$$AB = A \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\beta_1 & \dots & A\beta_s \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

写成矩阵形式，设：

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s \end{pmatrix}$$

其中$\beta_i (i = 1, \dots, s)$为列向量。则有：

$$AB = A \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\beta_1 & \dots & A\beta_s \end{pmatrix}$$

这也是一个很常用的公式。

矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B \text{ 的第}i\text{行为：}$$

矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B \text{ 的第}i\text{行为：} \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} B\text{。}$$

矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B \text{ 的第} i \text{行为：} \quad \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} B\text{。}$$

设$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$， $i = 1, \dots, m$。

矩阵的乘法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B \text{ 的第}i\text{行为：} \quad \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} B\text{。}$$

设$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$，$i = 1, \dots, m$。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B \text{ 的第}i\text{行为：} \quad \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} B\text{。}$$

设$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$，$i = 1, \dots, m$。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

n阶单位方阵，记为E_n，或简记为E，称单位矩阵。定义为：

n阶单位方阵，记为E_n，或简记为E，称单位矩阵。定义为：

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法

n阶单位方阵，记为E_n，或简记为E，称单位矩阵。定义为：

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

对任意$m \times n$矩阵$A_{m\times n}$，都有：

$$E_m A = A E_n = A.$$

矩阵的乘法

n阶单位方阵，记为E_n，或简记为E，称单位矩阵。定义为：

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

对任意$m \times n$矩阵$A_{m\times n}$，都有：

$$E_m A = AE_n = A.$$

也就是说，单位矩阵E类似于数1。

矩阵的乘法

设A为n阶方阵，则有限个A连续相乘有定义。

矩阵的乘法

设A为n阶方阵，则有限个A连续相乘有定义。矩阵A的n次幂符号为A^n，定义为：

矩阵的乘法

设A为n阶方阵，则有限个A连续相乘有定义。矩阵A的n次幂符号为A^n，定义为：

$$A^0 = E, \qquad A^{k+1} = A^k \cdot A.$$

设A为n阶方阵，则有限个A连续相乘有定义。矩阵A的n次幂符号为A^n，定义为：

$$A^0 = E, \qquad A^{k+1} = A^k \cdot A.$$

设k, l都为自然数，则有：

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l} \qquad (A^k)^l = A^{kl}.$$

设A为n阶方阵，则有限个A连续相乘有定义。矩阵A的n次幂符号为A^n，定义为：

$$A^0 = E, \qquad A^{k+1} = A^k \cdot A.$$

设k, l都为自然数，则有：

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l} \qquad (A^k)^l = A^{kl}.$$

但下式不一定成立：

$$(AB)^k = A^k B^k.$$

矩阵多项式

设$\phi(\lambda)$为如下多项式：

$$\phi(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

矩阵多项式

设$\phi(\lambda)$为如下多项式：

$$\phi(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

则定义$\phi(A)$为：

$$\phi(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E.$$

设$\phi(\lambda)$为如下多项式：

$$\phi(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

则定义$\phi(A)$为：

$$\phi(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E.$$

称为**矩阵A的多项式**。

矩阵多项式

同一矩阵的两个多项式相乘可交换：

$$\psi(A)\phi(A) = \phi(A)\psi(A).$$

矩阵多项式

同一矩阵的两个多项式相乘可交换：

$$\psi(A)\phi(A) = \phi(A)\psi(A).$$

先证$\phi(A)$与A^i相乘的情形。$\phi(A)$如前。

矩阵多项式

同一矩阵的两个多项式相乘可交换：

$$\psi(A)\phi(A) = \phi(A)\psi(A).$$

先证$\phi(A)$与A^i相乘的情形。$\phi(A)$如前。

$$\phi(A)\cdot A = [a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E] A^i$$

同一矩阵的两个多项式相乘可交换：

$$\psi(A)\phi(A) = \phi(A)\psi(A).$$

先证$\phi(A)$与A^i相乘的情形。$\phi(A)$如前。

$$\phi(A)\cdot A = [a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E]A^i$$

$$= a_m A^m \cdot A^i + \cdots + a_1 A \cdot A^i + a_0 E \cdot A^i$$

同一矩阵的两个多项式相乘可交换：

$$\psi(A)\phi(A)=\phi(A)\psi(A).$$

先证$\phi(A)$与A^i相乘的情形。$\phi(A)$如前。

$$\phi(A)\cdot A=[a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E]A^i$$

$$=a_mA^m\cdot A^i+\cdots+a_1A\cdot A^i+a_0E\cdot A^i$$

$$=A^i\cdot a_mA^m+\cdots+A^i\cdot a_1A+A^i\cdot a_0E$$

矩阵多项式

同一矩阵的两个多项式相乘可交换：

$$\psi(A)\phi(A)=\phi(A)\psi(A).$$

先证$\phi(A)$与A^i相乘的情形。$\phi(A)$如前。

$$\phi(A)\cdot A=[a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E]A^i$$

$$=a_mA^m\cdot A^i+\cdots+a_1A\cdot A^i+a_0E\cdot A^i$$

$$=A^i\cdot a_mA^m+\cdots+A^i\cdot a_1A+A^i\cdot a_0E$$

$$=A^i[a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0E]=A^i\phi(A).$$

矩阵多项式

再证两个矩阵多项式相乘。设$\psi(\lambda)=b_n\lambda^n+\cdots+b_1\lambda+b_0$，

矩阵多项式

再证两个矩阵多项式相乘。设$\psi(\lambda) = b_n\lambda^n + \cdots + b_1\lambda + b_0$，

$$\phi(A)\psi(A) = \phi(A)\left[b_nA^n + \cdots + b_1A + b_0E\right]$$

矩阵多项式

再证两个矩阵多项式相乘。设$\psi(\lambda) = b_n\lambda^n + \cdots + b_1\lambda + b_0$，

$$\begin{aligned}\phi(A)\psi(A) &= \phi(A)\left[b_nA^n + \cdots + b_1A + b_0E\right] \\ &= \phi(A)\cdot b_nA^n + \cdots + \phi(A)\cdot b_1A + \phi(A)\cdot b_0E\end{aligned}$$

再证两个矩阵多项式相乘。设$\psi(\lambda)=b_n\lambda^n+\cdots+b_1\lambda+b_0$，

$$
\begin{aligned}
\phi(A)\psi(A) &= \phi(A)\left[b_nA^n+\cdots+b_1A+b_0E\right] \\
&= \phi(A)\cdot b_nA^n+\cdots+\phi(A)\cdot b_1A+\phi(A)\cdot b_0E \\
&= b_nA^n\cdot\phi(A)+\cdots+b_1A\cdot\phi(A)+b_0E\cdot\phi(A)
\end{aligned}
$$

矩阵多项式

再证两个矩阵多项式相乘。设$\psi(\lambda)=b_n\lambda^n+\cdots+b_1\lambda+b_0$，

$$
\begin{aligned}
\phi(A)\psi(A) &= \phi(A)\left[b_nA^n+\cdots+b_1A+b_0E\right] \\
&= \phi(A)\cdot b_nA^n+\cdots+\phi(A)\cdot b_1A+\phi(A)\cdot b_0E \\
&= b_nA^n\cdot\phi(A)+\cdots+b_1A\cdot\phi(A)+b_0E\cdot\phi(A) \\
&= \left[b_nA^n+\cdots+b_1A+b_0E\right]\phi(A)
\end{aligned}
$$

矩阵多项式

再证两个矩阵多项式相乘。设$\psi(\lambda)=b_n\lambda^n+\cdots+b_1\lambda+b_0$，

$$\begin{aligned}
\phi(A)\psi(A) &= \phi(A)\left[b_nA^n+\cdots+b_1A+b_0E\right] \\
&= \phi(A)\cdot b_nA^n+\cdots+\phi(A)\cdot b_1A+\phi(A)\cdot b_0E \\
&= b_nA^n\cdot\phi(A)+\cdots+b_1A\cdot\phi(A)+b_0E\cdot\phi(A) \\
&= \left[b_nA^n+\cdots+b_1A+b_0E\right]\phi(A) \\
&= \psi(A)\phi(A).
\end{aligned}$$

矩阵乘积的行列式

考虑两个行列式的乘积，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

考虑两个行列式的乘积，我们证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \right|$$

矩阵乘积的行列式

$$
\text{左式} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\
-1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\
 & \dots & & \dots & \dots & \dots \\
 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
\text{左式} = \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\
-1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\
 & \dots & & \dots & \dots & \dots \\
 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

再利用行列式的性质，将上式中的$a_{\cdot}$全部消为0。

矩阵乘积的行列式

$$
左式 = \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\
-1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\
 & \dots & & \dots & \dots & \dots \\
 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

再利用行列式的性质，将上式中的$a.$全部消为0。利用左下部分的-1，将一行的适当倍数加到前n行中的某一行上。于是：

矩阵乘积的行列式

$$
左式 = \begin{vmatrix}
0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\
-1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\
 & \dots & & \dots & \dots & \dots \\
 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

矩阵乘积的行列式

$$
左式 = \begin{vmatrix}
0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\
-1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\
 & \dots & & \dots & \dots & \dots \\
 & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

其中，c_{ij}为削去$a_{i1}, \dots, a_{in}$而产生的数。因此，

矩阵乘积的行列式

$$
\text{左式} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & & & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ & & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}
$$

其中，c_{ij}为削去$a_{i1},\dots,a_{in}$而产生的数。因此，

$$
c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + \cdots + a_{in}b_{nj}
$$

矩阵乘积的行列式

因此，

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

因此，

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

于是，由Laplace定理，

矩阵乘积的行列式

因此，

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

于是，由Laplace定理，

$$|A| \cdot |B| = (-1)^{1+\dots+n+(n+1)+\dots+2n} |AB| \cdot (-1)^n$$

矩阵乘积的行列式

因此，

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

于是，由Laplace定理，

$$\begin{aligned} |A| \cdot |B| &= (-1)^{1+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n} |AB| \cdot (-1)^n \\ &= (-1)^{n(2n+1)+n} |AB| = (-1)^{2n(n+1)} |AB| = |AB| \end{aligned}$$