线性代数第二讲

吴民

南开大学 人工智能学院

行列式的性质（续）

利用前面已证明的性质，很容易证明下式：

行列式的性质（续）

利用前面已证明的性质，很容易证明下式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为 0，则行列式值为 0；

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为 0，则行列式值为 0；
- 互换行列式的两列，行列式反号；

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为 0，则行列式值为 0；
- 互换行列式的两列，行列式反号；
- 若行列式的某一列元均分别表为两个数的和，则行列式可表为两个行列式的和；

行列式的性质（续）

根据行列式行列互换，行列式值不变，容易将行列式关于行的性质推广到列上：

- 若行列式的一列全为 0，则行列式值为 0；
- 互换行列式的两列，行列式反号；
- 若行列式的某一列元均分别表为两个数的和，则行列式可表为两个行列式的和；
- 若行列式的某一列元均乘以 c，则行列式值将被乘以 c；

行列式的性质（续）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+\lambda a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij}+\lambda a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+\lambda a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的计算

计算不同的行列式，可能需要不同的计算方法。两个行列式直观看很相近，计算方法可能完全不同。某些行列式计算方法很特殊。计算方法对路，行列式的计算可能很容易。行列式的计算无统一方法可言，要靠尝试、摸索和积累经验。要学会整行整列的考虑问题。观察行列式的特点，决定如何去尝试。

- 将行列式化为上三角（下三角）。
- 让行列式中出现尽可能多的 0。

行列式的算例一

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$
\begin{vmatrix}
a & b & b & \dots & b \\
b & a & b & \dots & b \\
b & b & a & \dots & b \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b & b & b & \dots & a
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\
a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\
a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a+(n-1)b & b & b & \dots & a
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

行列式的算例一

$$
\begin{aligned}
&= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

行列式的算例一

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

n 阶行列式，用定义展开的方法很难化成最简形式。

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 左式第二行乘 yz，第三行乘 xz，第四行乘 xy。

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 左式第二行乘 yz，第三行乘 xz，第四行乘 xy。
- 左式第一列乘 $\frac{1}{xyz}$。

行列式的算例二

证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

- 左式第二行乘 yz，第三行乘 xz，第四行乘 xy。
- 左式第一列乘 $\frac{1}{xyz}$。
- 左式第二列乘 $\frac{1}{x}$，第二列乘 $\frac{1}{y}$，第三列乘 $\frac{1}{z}$。

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例一

$$d_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ -a & x & a & \dots & a \\ -a & -a & x & \dots & a \\ & \dots & & \dots & \\ -a & -a & -a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

行列式的思考算例二

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

行列式的思考算例二

- 自最后一行向上，逐个用上一行的 -1 倍加到下一行，就会让第 2 行 至第 n 行中每行的所有数除一个外都为 1。

行列式的思考算例二

- 自最后一行向上，逐个用上一行的 -1 倍加到下一行，就会让第 2 行 至第 n 行中每行的所有数除一个外都为 1。
- 再把所有列都加到第 1 行上，提出公因子 $\frac{n(n+1)}{2}$。

行列式的思考算例二

- 自最后一行向上，逐个用上一行的 -1 倍加到下一行，就会让第 2 行 至第 n 行中每行的所有数除一个外都为 1。
- 再把所有列都加到第 1 行上，提出公因子 $\frac{n(n+1)}{2}$。

$$D = \frac{(n+1)n}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- 自最后一行向上，逐个用上一行的 -1 倍加到下一行，就会让第 2 行 至第 n 行中每行的所有数除一个外都为 1。
- 再把所有列都加到第 1 行上，提出公因子 $\frac{n(n+1)}{2}$。

$$D = \frac{(n+1)n}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

上式中的行列式为 $n-1$ 阶。

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算 n 阶行列式：

- 先把某一行（如第 i 行）逐行互换到第 1 行：

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算 n 阶行列式：

- 先把某一行（如第 i 行）逐行互换到第 1 行：
  - 先第 i 行和第 $i-1$ 行交换；

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算 n 阶行列式：

- 先把某一行（如第 i 行）逐行互换到第 1 行：
  - 先第 i 行和第 $i-1$ 行交换；
  - 再第 $i-1$ 行和第 $i-2$ 行交换；

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算 n 阶行列式：

- 先把某一行（如第 i 行）逐行互换到第 1 行：
  - 先第 i 行和第 $i-1$ 行交换；
  - 再第 $i-1$ 行和第 $i-2$ 行交换；
  - 直到第 i 行成为第 1 行。

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算 n 阶行列式：

- 先把某一行（如第 i 行）逐行互换到第 1 行：
  - 先第 i 行和第 $i-1$ 行交换；
  - 再第 $i-1$ 行和第 $i-2$ 行交换；
  - 直到第 i 行成为第 1 行。
- 用加法公式化为 n 个第一行只有 1 个非 0 元的行列式之和；

行列式按某一行（列）展开

使用如下过程计算 n 阶行列式：

- 先把某一行（如第 i 行）逐行互换到第 1 行：
  - 先第 i 行和第 $i-1$ 行交换；
  - 再第 $i-1$ 行和第 $i-2$ 行交换；
  - 直到第 i 行成为第 1 行。
- 用加法公式化为 n 个第一行只有 1 个非 0 元的行列式之和；
- 再用行列式性质把第一行的非 0 元素都移动到第一列。

行列式按某一行（列）展开

以下推导暂未考虑符号。

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

以下推导暂未考虑符号。

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

以下推导暂未考虑符号。

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} a_{i1} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & a_{i2} & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} & & & a_{in} \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

$$\to \begin{vmatrix} a_{i1} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i2} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{in} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a_{i1} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{i2} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{in} & & & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow a_{i1} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + a_{i2} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：将原行列式的第 i 行第 j 列划去，所剩的 $n-1$ 行、$n-1$ 列不改变相对位置，拼成一个 $n-1$ 阶行列式。

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：将原行列式的第 i 行第 j 列划去，所剩的 $n-1$ 行、$n-1$ 列不改变相对位置，拼成一个 $n-1$ 阶行列式。

所对应的 a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 前面的正负号：

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：将原行列式的第 i 行第 j 列划去，所剩的 $n-1$ 行、$n-1$ 列不改变相对位置，拼成一个 $n-1$ 阶行列式。

所对应的 $a_{ij}\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 前面的正负号：取决于将 a_{ij} 交换到第 1 行第 1 列的互换次数。

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：将原行列式的第 i 行第 j 列划去，所剩的 $n-1$ 行、$n-1$ 列不改变相对位置，拼成一个 $n-1$ 阶行列式。

所对应的 a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 前面的正负号：取决于将 a_{ij} 交换到第 1 行第 1 列的互换次数。互换次数为

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：将原行列式的第 i 行第 j 列划去，所剩的 $n-1$ 行、$n-1$ 列不改变相对位置，拼成一个 $n-1$ 阶行列式。

所对应的 a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 前面的正负号：取决于将 a_{ij} 交换到第 1 行第 1 列的互换次数。互换次数为 $i-1+j-1$。

行列式按某一行（列）展开

a_{ij} 所对应的 $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 称为 a_{ij} 的余子式，常记为 M_{ij}：将原行列式的第 i 行第 j 列划去，所剩的 $n-1$ 行、$n-1$ 列不改变相对位置，拼成一个 $n-1$ 阶行列式。

所对应的 a_{ij} $\begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$ 前面的正负号：取决于将 a_{ij} 交换到第 1 行第 1 列的互换次数。互换次数为 $i-1+j-1$。

定义 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^{i-1+j-1}M_{ij}$。称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。

行列式按某一行（列）展开

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

行列式按某一行（列）展开

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样结果对于列也成立：

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样结果对于列也成立：

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

行列式按某一行（列）展开

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

同样结果对于列也成立：

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

当 $i \neq j$ 时，以下式子等于什么？

$$t_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

行列式按某一行（列）展开

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式按某一行（列）展开

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

行列式按某一行（列）展开

$$t_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

总结：书 22 页的**定理 4**。

行列式的思考算例三

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (a \neq b)$$

行列式的思考算例三

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad (a \neq b)$$

按第一行展开，得到：

行列式的思考算例三

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例三

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

行列式的思考算例三

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

得到递推公式：$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) \end{aligned}$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$
\begin{aligned}
D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\
&= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots
\end{aligned}
$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) \end{aligned}$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$
\begin{aligned}
D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\
&= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.
\end{aligned}
$$

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$\begin{aligned} D_n - aD_{n-1} &= b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n. \end{aligned}$$

因此 $$D_n = aD_{n-1} + b^n$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ 整理为

$$
\begin{aligned}
D_n-aD_{n-1}&=b(D_{n-1}-aD_{n-2})\\
&=b^2(D_{n-2}-aD_{n-1})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n.
\end{aligned}
$$

因此 $$D_n=aD_{n-1}+b^n=a(aD_{n-2}+b^{n-1})+b^n$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ 整理为

$$\begin{aligned} D_n-aD_{n-1} &= b(D_{n-1}-aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2}-aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2-aD_1) = b^n. \end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1}+b^n = a(aD_{n-2}+b^{n-1})+b^n \\ &= a^2(aD_{n-3}+b^{n-2})+ab^{n-1}+b^n = \cdots \end{aligned}$$

行列式的思考算例三

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$
$$= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.$$

因此 $$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n$$
$$= a^2(aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n = \cdots$$

另一计算方法：$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^n$。

将式子 $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$ 整理为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$
$$= b^2(D_{n-2} - aD_{n-1}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n.$$

因此 $$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n$$
$$= a^2(aD_{n-3} + b^{n-2}) + ab^{n-1} + b^n = \cdots$$

另一计算方法：$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^n$。与前面式子结合一起成为

将式子 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$ 整理为

$$\begin{aligned} D_n-aD_{n-1} &= b(D_{n-1}-aD_{n-2}) \\ &= b^2(D_{n-2}-aD_{n-1})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n. \end{aligned}$$

因此 $$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1}+b^n=a(aD_{n-2}+b^{n-1})+b^n \\ &= a^2(aD_{n-3}+b^{n-2})+ab^{n-1}+b^n=\cdots \end{aligned}$$

另一计算方法：$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=\cdots=a^n$。与前面式子结合一起成为 二元一次方程组。求解即得到 D_n。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 第 $n-1$ 行乘 $-x_1$ 加到第 n 行，将第 n 行第 1 列元消为 0。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 第 $n-1$ 行乘 $-x_1$ 加到第 n 行，将第 n 行第 1 列元消为 0。
- 第 $n-2$ 行乘 $-x_1$ 加到第 $n-1$ 行，将第 $n-1$ 行第 1 列元消为 0。如此重复下去，

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- 第 $n-1$ 行乘 $-x_1$ 加到第 n 行，将第 n 行第 1 列元消为 0。
- 第 $n-2$ 行乘 $-x_1$ 加到第 $n-1$ 行，将第 $n-1$ 行第 1 列元消为 0。如此重复下去，
- 第 1 行乘 $-x_1$ 加到第 2 行，将第 2 行第 1 列元消为 0。

范德蒙行列式

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \ldots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \ldots & x_n(x_n-x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_n(x_n - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \ldots & x_n - x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

得到 $n-1$ 阶范德蒙行列式。

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

得到 $n-1$ 阶范德蒙行列式。如此重复下去，使用数学归纳法，便得到最终结果：

范德蒙行列式

$$= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

得到 $n-1$ 阶范德蒙行列式。如此重复下去，使用数学归纳法，便得到最终结果：

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

行列式的思考算例四

整数 $1798 = 31 \cdot 58$, $2139 = 31 \cdot 69$, $3255 = 31 \cdot 105$, $4867 = 31 \cdot 157$, 都可被 31 整除，不计算出行列式的值，证明以下行列式可被 31 整除：

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

行列式的思考算例五

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$$

作业

6（4），8（1）（3），10（1）（2）

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理：

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理：在 n 阶行列式中任意选定 k 行（列），则 n 阶行列式等于位于这 k 个行（列）中一切 k 阶子式 M_i 与其代数余子式乘积的和。

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理：在 n 阶行列式中任意选定 k 行（列），则 n 阶行列式等于位于这 k 个行（列）中一切 k 阶子式 M_i 与其代数余子式乘积的和。

$$|A| = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} M_i A_i.$$

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理：在 n 阶行列式中任意选定 k 行（列），则 n 阶行列式等于位于这 k 个行（列）中一切 k 阶子式 M_i 与其代数余子式乘积的和。

$$|A| = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} M_i A_i.$$

证明过程简述：以 $k=3$ 来说明。

拉普拉斯定理

将行列式按多行（列）展开。

拉普拉斯定理： 在 n 阶行列式中任意选定 k 行（列），则 n 阶行列式等于位于这 k 个行（列）中一切 k 阶子式 M_i 与其代数余子式乘积的和。

$$|A| = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} M_i A_i.$$

证明过程简述：以 $k=3$ 来说明。

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}.$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\dots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\dots j_n)} a_{4j_4} \cdots a_{nj_n} +$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| = & a_{11}a_{22}a_{33}\sum_{123j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}+ \\
& + a_{11}a_{22}a_{34}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| =& a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \\
& + a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A| =& a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4} \cdots a_{nj_n} + \\
&+ a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4} \cdots a_{nj_n} + \cdots \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| =& a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \\
&+ a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} \sum_{231j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(231j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| = & a_{11}a_{22}a_{33} \sum_{123j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(123j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \\
& + a_{11}a_{22}a_{34} \sum_{124j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(124j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
& + a_{12}a_{23}a_{31} \sum_{231j_4\ldots j_n} (-1)^{\tau(231j_4\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
& + a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}} \sum_{\underline{n}\,\overline{n-1}\,\underline{n-2}\ldots j_n} (-1)^{\tau(\underline{n}\,\overline{n-1}\,\underline{n-2}\ldots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1 \ldots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1 \cdots j_s \| j_{s+1} \cdots j_n.$$

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1\dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\cdots j_s \| j_{s+1}\cdots j_n.$$

$j_1\cdots j_s j_{s+1}\cdots j_n$ 的逆序，可以分为三种情况：

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1 \dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1 \cdots j_s \| j_{s+1} \cdots j_n.$$

$j_1 \cdots j_s j_{s+1} \cdots j_n$ 的逆序，可以分为三种情况：

- 在 $j_1, \dots, j_s$ 中挑一对数构成逆序；

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1 \ldots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1 \cdots j_s \| j_{s+1} \cdots j_n.$$

$j_1 \cdots j_s j_{s+1} \cdots j_n$ 的逆序，可以分为三种情况：

- 在 $j_1, \ldots, j_s$ 中挑一对数构成逆序；
- 在$j_{s+1}, \ldots, j_n$中挑一对数构成逆序；

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1\dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\cdots j_s\big|\big|j_{s+1}\cdots j_n.$$

$j_1\dots j_s j_{s+1}\dots j_n$ 的逆序，可以分为三种情况：

- 在 $j_1,\dots,j_s$ 中挑一对数构成逆序；
- 在$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一对数构成逆序；
- $j_1,\dots,j_s$中挑一个数，$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一个数构成逆序；

对任意排列$j_1\dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\cdots j_s\big|\big|j_{s+1}\cdots j_n.$$

$j_1\cdots j_s j_{s+1}\cdots j_n$ 的逆序，可以分为三种情况：

- 在 $j_1,\dots,j_s$ 中挑一对数构成逆序；
- 在$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一对数构成逆序；
- $j_1,\dots,j_s$中挑一个数，$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一个数构成逆序；

因此关于逆序数，容易证明如下公式：

拉普拉斯定理

对任意排列$j_1\dots j_n$，将其分为前s元和后$n-s$元两部分：

$$j_1\dots j_s \| j_{s+1}\dots j_n.$$

$j_1\dots j_s j_{s+1}\dots j_n$ 的逆序，可以分为三种情况：

- 在 $j_1,\dots,j_s$ 中挑一对数构成逆序；
- 在$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一对数构成逆序；
- $j_1,\dots,j_s$中挑一个数，$j_{s+1},\dots,j_n$中挑一个数构成逆序；

因此关于逆序数，容易证明如下公式：

$$\begin{aligned}\tau(j_1\dots j_s j_{s+1}\dots j_n) = \tau(j_1\dots j_s)+\tau(j_{s+1}\dots j_n)\\ +\tau(j_1\dots j_s, j_{s+1}\dots j_n).\end{aligned}$$

其中$\tau(j_1\ldots j_s,j_{s+1}\ldots j_n)$为$j_1,\ldots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\ldots,j_n$中取一个数构成逆序的个数。

其中$\tau(j_1\dots j_s,j_{s+1}\dots j_n)$为$j_1,\dots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\dots,j_n$中取一个数构成逆序的个数。

- $\tau(j_1\dots j_s)$仅由$j_1,\dots,j_s$取值决定，与$j_{s+1},\dots,j_n$的排列无关。即$j_1,\dots,j_s$给定，则$\tau(j_1\dots j_s)$为常数。

其中$\tau(j_1\dots j_s,j_{s+1}\dots j_n)$为$j_1,\dots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\dots,j_n$中取一个数构成逆序的个数。

- $\tau(j_1\dots j_s)$仅由$j_1,\dots,j_s$取值决定，与$j_{s+1},\dots,j_n$的排列无关。即$j_1,\dots,j_s$给定，则$\tau(j_1\dots j_s)$为常数。
- $\tau(j_1,\dots,j_s,j_{s+1}\dots j_n)$仅决定于从$1,\dots,n$中取哪些数作为$j_1,\dots,j_s$，与$j_1\dots j_s$ 或$j_{s+1}\dots j_n$的排列方式无关。

其中$\tau(j_1\ldots j_s, j_{s+1}\ldots j_n)$为$j_1,\ldots,j_s$中取一个数，$j_{s+1},\ldots,j_n$中取一个数构成逆序的个数。

- $\tau(j_1\ldots j_s)$仅由$j_1,\ldots,j_s$取值决定，与$j_{s+1},\ldots,j_n$的排列无关。即$j_1,\ldots,j_s$给定，则$\tau(j_1\ldots j_s)$为常数。
- $\tau(j_1,\ldots,j_s, j_{s+1}\ldots j_n)$仅决定于从$1,\ldots,n$中取哪些数作为$j_1,\ldots,j_s$，与$j_1\ldots j_s$ 或$j_{s+1}\ldots j_n$的排列方式无关。

利用这些特点，前面式子等于

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\dots n)} \sum_{j_4\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_4\dots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\dots n)} \sum_{j_4\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_4\dots j_n)} a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\cdots+$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\cdots+$$

$$+a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(132,4\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| = & a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots + \\
& + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(132,4\ldots n)}\sum_{j_4\ldots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots +
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$
\begin{aligned}
|A| = & a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots + \\
& + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(132,4\ldots n)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n} \\
& + \cdots + \\
& + a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}}(-1)^{\tau(\cdot)}(-1)^{\tau(\cdot,\cdot)}\sum_{j_4\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_4\ldots j_n)}a_{4j_4}\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}$$

拉普拉斯定理

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}\begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$a_{11}a_{22}a_{34}(-1)^{\tau(124)}(-1)^{\tau(124,3\ldots n)}\begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & \ldots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{55} & \ldots & a_{5n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n3} & a_{n5} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}}(-1)^{\tau(\cdot)}(-1)^{\tau(n\overline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4,n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$a_{1n}a_{2\underline{n-1}}a_{3\underline{n-2}}(-1)^{\tau(\cdot)}(-1)^{\tau(n\overline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4,n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

而上式的项中含有因子$M_{4\ldots n} = \begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$的项有：

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^{\tau(213)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^{\tau(213)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}(-1)^{\tau(231)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}(-1)^{\tau(312)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}(-1)^{\tau(321)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

拉普拉斯定理

$$a_{11}a_{22}a_{33}(-1)^{\tau(123)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^{\tau(132)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^{\tau(213)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}(-1)^{\tau(231)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}(-1)^{\tau(312)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}(-1)^{\tau(321)}(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}$$

这些项的和为：

拉普拉斯定理

$$(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}[(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}]$$

拉普拉斯定理

$$(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}[(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}]=(-1)^{\tau(123,4\ldots n)}M_{4\ldots n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理

$$(-1)^{\tau(123,4\dots n)}M_{4\dots n}[(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}]=(-1)^{\tau(123,4\dots n)}M_{4\dots n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$|A|$中的其它项也有类似的结果，因此：

拉普拉斯定理

$$|A| = (-1)^{\tau(123,4\ldots n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{44} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{\tau(124,35\ldots n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & \ldots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{55} & \ldots & a_{5n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n3} & a_{n5} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

上式的最后一项为：

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$(-1)^{\tau(n\underline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{41} & \dots & a_{4n-3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$(-1)^{\tau(n\underline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

上式已经具备了拉普拉斯定理的主要形式。只是出现了$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$，与拉普拉斯定理不符。

拉普拉斯定理

上式的最后一项为：

$$(-1)^{\tau(n\underline{n-1}n-2,1\ldots n-3)}\begin{vmatrix} a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{41} & \ldots & a_{4n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-3} \end{vmatrix}$$

上式已经具备了拉普拉斯定理的主要形式。只是出现了$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$，与拉普拉斯定理不符。$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$除了按定义计算外，还可以如下计算：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1 < j_2 < j_3$。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_1而起的逆序数为：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1 j_2 j_3, j_4 \ldots j_n)$与$j_1 j_2 j_3$的排列方式无关。

假定$j_1 j_2 j_3$已经排好序：$j_1 < j_2 < j_3$。

- $j_1 j_2 j_3, j_4 \ldots j_n$的因$j_1$而起的逆序数为：$j_1 - 1$。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_1而起的逆序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_2而起的逆序数为：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_1而起的逆序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_2而起的逆序数为：j_2-2。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_1而起的逆序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_2而起的逆序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_3而起的逆序数为：

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_1而起的逆序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_2而起的逆序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_3而起的逆序数为：j_3-3。

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_1而起的逆序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_2而起的逆序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\dots j_n$的因j_3而起的逆序数为：j_3-3。

$$\therefore\quad \tau(j_1j_2j_3,j_4\dots j_n)=j_1-1+j_2-2+j_3-3.$$

拉普拉斯定理

前面已经说明，$\tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)$与$j_1j_2j_3$的排列方式无关。

假定$j_1j_2j_3$已经排好序：$j_1<j_2<j_3$。

- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_1而起的逆序数为：j_1-1。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_2而起的逆序数为：j_2-2。
- $j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n$的因j_3而起的逆序数为：j_3-3。

$$\therefore\quad \tau(j_1j_2j_3,j_4\ldots j_n)=j_1-1+j_2-2+j_3-3.$$

又

$$(-1)^{j_1-1+j_2-2+j_3-3}=(-1)^{j_1+1+j_2+2+j_3+3},$$

拉普拉斯定理

$$|A| = (-1)^{1+2+3+1+2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2+3+1+2+4} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} & \dots & a_{4n} \\ a_{53} & a_{55} & \dots & a_{5n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

拉普拉斯定理

这就是拉普拉斯定理。

拉普拉斯定理

这就是拉普拉斯定理。

例题：P. 33(4)。