线性代数之一

吴民

南开大学　人工智能学院

课程提示

- 课程的内容是教材的第一篇，共 7 章。
- 课程只有一个学期。
- 课程的参考书是北京大学的《高等代数》。
- 平时成绩占 20%，考试成绩占 80%，总和为最终成绩。总成绩不能达到及格，则需要重修。
- 课程目标是达到教材 100% 的要求，参考书的 75%。
- 本课程是数学基础课，后续的概率统计、图形学、图像处理等课程都会涉及本课程的内容，希望大家打好基础。

警告

- 要以理工科大学生的标准来学这门课。
- 学习的感受因人而异，学起来未必轻松，未必如大家过去学数学那样。
- 内容多。临阵磨枪不一定行。
- 不要光学笨办法而不学好办法。
- 不要抱不认真学就能通过的侥幸心理。不要认为付出 60% 的努力就能及格。
- 老师对大家的要求是已是最低标准，不可能再降低。

线性代数前导

- 什么是数学？数学中关注的是判断的对与错。
- 解决问题是数学的一个主要核心。
- 计算面积与平面几何，高斯的等差数列。
- 线性代数是数学中解决一类简单问题的分支。
- 简单是相对的。难度要远大于中学数学。对大家是挑战。
- 从数谈起。

数的概念

- 数是数学中的一个最基本的概念。

数的概念

- 数是数学中的一个最基本的概念。
- 谈数离不开数的运算。

数的概念

- 数是数学中的一个最基本的概念。
- 谈数离不开数的运算。
- 需要准确的理解数的概念，而不是靠笼统或模糊的直观，虽然后者容易。

数的概念

- 数是数学中的一个最基本的概念。
- 谈数离不开数的运算。
- 需要准确的理解数的概念，而不是靠笼统或模糊的直观，虽然后者容易。
- 什么是自然数、整数？

数的概念

- 数是数学中的一个最基本的概念。
- 谈数离不开数的运算。
- 需要准确的理解数的概念，而不是靠笼统或模糊的直观，虽然后者容易。
- 什么是自然数、整数？
- 什么是有理数？

数的概念

- 数是数学中的一个最基本的概念。
- 谈数离不开数的运算。
- 需要准确的理解数的概念，而不是靠笼统或模糊的直观，虽然后者容易。
- 什么是自然数、整数？
- 什么是有理数？
- 什么是实数？

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。$(0 \in P, 1 \in P)$

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。$(0 \in P, 1 \in P)$
  - P 关于加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）是封闭的。

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。$(0 \in P, 1 \in P)$
  - P 关于加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）是封闭的。
- 就称 P 是**数域**。

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。$(0 \in P, 1 \in P)$
  - P 关于加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）是封闭的。
- 就称 P 是**数域**。
- 有理数集、实数集、复数集都是数域。

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。$(0 \in P, 1 \in P)$
  - P 关于加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）是封闭的。
- 就称 P 是**数域**。
- 有理数集、实数集、复数集都是数域。
- 所有数域都包含有理数域作为它的一部分。

数域的概念

- 封闭：数的集合 P，运算 $\odot$。若 P 中任意两个数进行运算 $\odot$ 的结果仍在 P 中。就称集 P 关于运算 $\odot$ **封闭**。
- 数域：数的集合 P 如果满足：
  - P 中包含 0 和 1。$(0 \in P, 1 \in P)$
  - P 关于加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）是封闭的。
- 就称 P 是**数域**。
- 有理数集、实数集、复数集都是数域。
- 所有数域都包含有理数域作为它的一部分。
- 数学语言描述：有理数域记为 Q，若 P 是数域，则 $Q \subset P$。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体构成的集合，a,b 为有理数。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体构成的集合，a,b 为有理数。

设 $M=\{a+b\sqrt{2}|a\in Q,b\in Q\}$。证 M 是数域。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体构成的集合，a,b 为有理数。

设 $M=\{a+b\sqrt{2}|a\in Q,b\in Q\}$。证 M 是数域。

- 证 $0\in M$, $1\in M$。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体构成的集合，a,b 为有理数。

设 $M=\{a+b\sqrt{2}|a\in Q,b\in Q\}$。证 M 是数域。

- 证 $0\in M$, $1\in M$。
- 证 M 关于加法、减法、除法运算封闭。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体构成的集合，a,b 为有理数。

设 $M=\{a+b\sqrt{2}|a\in Q,b\in Q\}$。证 M 是数域。

- 证 $0\in M$, $1\in M$。
- 证 M 关于加法、减法、除法运算封闭。
- 关于乘法封闭。设 $a_1+b_1\sqrt{2},a_2+b_2\sqrt{2}$ 为 M 任意两数，
  $(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$,
- a_1,b_1,a_2,b_2 为有理数，所以 $a_1a_2+2b_1b_2$ 等是有理数。

数域的例子

数域的特点：数域内可以任意加减乘除（除数不为 0）。

所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的全体构成的集合，a,b 为有理数。

设 $M=\{a+b\sqrt{2}|a\in Q,b\in Q\}$。证 M 是数域。

- 证 $0\in M$, $1\in M$。
- 证 M 关于加法、减法、除法运算封闭。
- 关于乘法封闭。设 $a_1+b_1\sqrt{2},a_2+b_2\sqrt{2}$ 为 M 任意两数，
  $(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2},$
- a_1,b_1,a_2,b_2 为有理数，所以 $a_1a_2+2b_1b_2$ 等是有理数。
- 所以 $(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})\in M$。$M$ 关于乘法封闭。

从解线性方程组开始

- 什么是方程，方程的解和方程的解集。

从解线性方程组开始

- 什么是方程，方程的解和方程的解集。
- 初中数学中解决了一元一次方程 $ax = b$ 的求解。

从解线性方程组开始

- 什么是方程，方程的解和方程的解集。
- 初中数学中解决了一元一次方程 $ax=b$ 的求解。
- 中学数学中研究了二元一次方程组的求解，如求使以下两式

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

都成立的 x,y。回忆一下如何解二元一次方程。

从解线性方程组开始

- 什么是方程，方程的解和方程的解集。
- 初中数学中解决了一元一次方程 $ax = b$ 的求解。
- 中学数学中研究了二元一次方程组的求解，如求使以下两式

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

都成立的 x, y。回忆一下如何解二元一次方程。

- 未知数的个数更多、方程更多的**一般**方程组如何求解？

从解线性方程组开始

- 什么是方程，方程的解和方程的解集。
- 初中数学中解决了一元一次方程 $ax = b$ 的求解。
- 中学数学中研究了二元一次方程组的求解，如求使以下两式

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

  都成立的 x, y。回忆一下如何解二元一次方程。
- 未知数的个数更多、方程更多的**一般**方程组如何求解？
- 能否仅判定是否有解，而不需要解方程？

从解线性方程组开始

- 什么是方程，方程的解和方程的解集。
- 初中数学中解决了一元一次方程 $ax = b$ 的求解。
- 中学数学中研究了二元一次方程组的求解，如求使以下两式

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

  都成立的 x, y。回忆一下如何解二元一次方程。
- 未知数的个数更多、方程更多的**一般**方程组如何求解？
- 能否仅判定是否有解，而不需要解方程？
- 这是线性代数中的一个核心问题。

行列式的定义

n 为自然数。n 阶行列式的定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \dots, n$ 的一切排列求和。

行列式的相关名词与符号

定义式中出现一些中学未见过的符号：$\sum$、$\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)$，稍后讲，先说如何表述。

行列式的相关名词与符号

定义式中出现一些中学未见过的符号：$\sum$、$\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)$，稍后讲，先说如何表述。

- a_{ij} 称为该行列式的第 i 行第 j 列元，简称该行列式的元。

行列式的相关名词与符号

定义式中出现一些中学未见过的符号：$\sum$、$\tau(j_1j_2\ldots j_n)$，稍后讲，先说如何表述。

- a_{ij} 称为该行列式的第 i 行第 j 列元，简称该行列式的元。
- 该行列式可以用 $\det(a_{ij})$ 表示。

行列式的相关名词与符号

定义式中出现一些中学未见过的符号：$\sum$、$\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$，稍后讲，先说如何表述。

- a_{ij} 称为该行列式的第 i 行第 j 列元，简称该行列式的元。
- 该行列式可以用 $\det(a_{ij})$ 表示。
- 也可使用 $|A|$ 和 $|B|$ 来表示行列式（后面会清楚 A 和 B 指什么）。

行列式的书写

- $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列方块。

行列式的书写

- $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列方块。
- 竖要直。

行列式的书写

- $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列方块。
- 竖要直。
- 使用省略号，要能够表达清楚明白。

行列式的书写

- $n \times n$ 个数排成 n 行 n 列方块。
- 竖要直。
- 使用省略号，要能够表达清楚明白。
- 1 阶行列式符号与绝对值符号需要区别。通过上下文理解，通常是绝对值符号。

求和符号 $\sum$

- $\sum$ 之后的式子称为一般项，表示和式中的每一项。

求和符号 $\sum$

- $\sum$ 之后的式子称为一般项，表示和式中的每一项。
- $\sum$ 符号下面的小字指出是哪些一般项求和（给出范围）。

求和符号 $\sum$

- $\sum$ 之后的式子称为一般项，表示和式中的每一项。
- $\sum$ 符号下面的小字指出是哪些一般项求和（给出范围）。
- $\sum$ 与它之后的式子一起表示满足条件的所有一般项形式的项进行求和。因此看到 $\sum$ 就应该想到是一个大和式，和式的每一项都是通项形式。

- $\sum$ 之后的式子称为一般项，表示和式中的每一项。
- $\sum$ 符号下面的小字指出是哪些一般项求和（给出范围）。
- $\sum$ 与它之后的式子一起表示满足条件的所有一般项形式的项进行求和。因此看到 $\sum$ 就应该想到是一个大和式，和式的每一项都是通项形式。
- $\sum$ 和式中的虚变量。

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{100} i, \qquad \sum_{i=1}^{100} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{100} i, \qquad \sum_{i=1}^{100} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$$

- $$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\cdots+100.$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{100} i, \qquad \sum_{i=1}^{100} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$$
- $$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\cdots+100.$$
- $$\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2.$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{100} i, \qquad \sum_{i=1}^{100} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$$
- $$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\cdots+100.$$
- $$\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2.$$
- $$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}.$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \sum_{i+j=n} |a_i b_j|$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \sum_{i+j=n} |a_i b_j|$$

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in} = a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}.$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \sum_{i+j=n} |a_i b_j|$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in} = a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}.$$
- $$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

求和符号 $\sum$ 的例子

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \sum_{i+j=n} |a_i b_j|$$

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{in} = a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}.$$

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

- $$\sum_{i+j=n} |a_i b_j| = |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| \cdots + |a_n b_0|.$$

排列：$j_1j_2\dots j_n$

- 由 $1,2,\dots,n$ 的一个有序数组称为一个 n 级排列。

排列：$j_1j_2\ldots j_n$

- 由 $1,2,\ldots,n$ 的一个有序数组称为一个 n 级排列。
- $j_1j_2\ldots j_n$ 是表示所有 n 级排列中的某一排列，排在第一个位置的元素记为 j_1，$\ldots$，排在第 n 个位置的元素记为 j_n。

排列：$j_1j_2\dots j_n$

- 由 $1,2,\dots,n$ 的一个有序数组称为一个 n 级排列。
- $j_1j_2\dots j_n$ 是表示所有 n 级排列中的某一排列，排在第一个位置的元素记为 j_1，$\dots$，排在第 n 个位置的元素记为 j_n。
- $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示要对所有排列对应的一般项求和。

排列：$j_1j_2\ldots j_n$

- 由 $1,2,\ldots,n$ 的一个有序数组称为一个 n 级排列。
- $j_1j_2\ldots j_n$ 是表示所有 n 级排列中的某一排列，排在第一个位置的元素记为 j_1，…，排在第 n 个位置的元素记为 j_n。
- $\sum\limits_{j_1j_2\ldots j_n}$ 表示要对所有排列对应的一般项求和。
- $\sum\limits_{j_1j_2\ldots j_n}$ 中的 $j_1j_2\ldots j_n$ 是虚变量，所以可以换成其它符号，如 $i_1i_2\ldots i_n$。

排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 的逆序数：$\tau(j_1j_2\ldots j_n)$

- 逆序数，即排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 中逆序的个数。

排列 $j_1j_2\dots j_n$ 的逆序数：$\tau(j_1j_2\dots j_n)$

- 逆序数，即排列 $j_1j_2\dots j_n$ 中逆序的个数。
- 逆序是指排列中的一对数的前后位置与大小顺序相反。

排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 的逆序数：$\tau(j_1j_2\ldots j_n)$

- 逆序数，即排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 中逆序的个数。
- 逆序是指排列中的一对数的前后位置与大小顺序相反。
- 排列“3421”中的逆序？逆序数？

排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 的逆序数：$\tau(j_1j_2\ldots j_n)$

- 逆序数，即排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 中逆序的个数。
- 逆序是指排列中的一对数的前后位置与大小顺序相反。
- 排列“3421”中的逆序？逆序数？
- 逆序有：32、31、42、41、21。

排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 的逆序数：$\tau(j_1j_2\ldots j_n)$

- 逆序数，即排列 $j_1j_2\ldots j_n$ 中逆序的个数。
- 逆序是指排列中的一对数的前后位置与大小顺序相反。
- 排列“3421”中的逆序？逆序数？
- 逆序有：32、31、42、41、21。
- 逆序数为：5。

根据定义将行列式写成加式

考虑2阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

根据定义将行列式写成加式

考虑2阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

根据定义将行列式写成加式

考虑2阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$= (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21}$$

根据定义将行列式写成加式

考虑2阶行列式：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}
$$

$$
= (-1)^{\tau(12)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12} a_{21}
$$

$$
= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}
$$

行列式是什么？

- 行列式就是一个大算式。

行列式是什么？

- 行列式就是一个大算式。
- 行列式是一个特定形式的大算式。

行列式是什么？

- 行列式就是一个大算式。
- 行列式是一个特定形式的大算式。
- 行列式的主要问题是计算。

行列式是什么？

- 行列式就是一个大算式。
- 行列式是一个特定形式的大算式。
- 行列式的主要问题是计算。
- 用定义计算行列式太麻烦，特别是当n比较大的时候。

若行列式的一行全为 0，行列式值为 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若行列式的一行全为 0，行列式值为 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdot 0 \cdots a_{nj_n}$$

若行列式的一行全为 0，行列式值为 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdot 0 \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} 0$$

若行列式的一行全为 0，行列式值为 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdot 0 \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} 0 = 0$$

若行列式的一行全为 0，行列式值为 0

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdot 0 \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} 0 = 0$$

由此遇到其中某一行全 0 的行列式，无需再一步步计算。

上三角行列式的计算

形如下面的行列式称为上三角行列式：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

上三角行列式的计算

形如下面的行列式称为上三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

上三角行列式的计算

形如下面的行列式称为上三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

排列方式的数学描述为：当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$。

上三角行列式的计算

形如下面的行列式称为上三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

排列方式的数学描述为：当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$。 考虑到 $a_{n1} = a_{n2} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$，所以

上三角行列式的计算

形如下面的行列式称为上三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

排列方式的数学描述为：当 $i > j$ 时，$a_{ij} = 0$。 考虑到 $a_{n1} = a_{n2} = \cdots = a_{n,n-1} = 0$，所以

$$(-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} = 0, \quad \text{对所有 } j_n < n.$$

上三角行列式的计算

这就是说，上三角行列式的展开式中很多项都是 0。所以

$$上式 = \sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn},$$

上三角行列式的计算

这就是说，上三角行列式的展开式中很多项都是 0。所以

$$上式 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nn},$$

再考虑 j_{n-1} 的取值，j_{n-1} 不能再取 n 了，而

$$a_{n-1,1} = a_{n-1,2} = \cdots = a_{n-1,n-2} = 0,$$

这就是说，上三角行列式的展开式中很多项都是 0。所以

$$\text{上式} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_{n-1} n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nn},$$

再考虑 j_{n-1} 的取值，j_{n-1} 不能再取 n 了，而

$$a_{n-1,1} = a_{n-1,2} = \cdots = a_{n-1,n-2} = 0,$$

所以那些 j_{n-1} 取为 $j_{n-1} < n-1$ 的项：

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_{n-1} n)} a_{1j_1} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nn} = 0, \quad \text{对所有 } j_{n-1} < n-1$$

上三角行列式的计算

所以

$$\text{上式} = \sum_{\dots j_{n-2} n-1, n} (-1)^{\tau(\dots j_{n-2} n-1, n)} \cdots a_{n-2, j_{n-2}} a_{n-1, n-1} a_{nn},$$

上三角行列式的计算

所以

$$上式 = \sum_{\dots j_{n-2} n-1, n} (-1)^{\tau(\dots j_{n-2} n-1, n)} \cdots a_{n-2, j_{n-2}} a_{n-1, n-1} a_{nn},$$

如此重复下去，知

上三角行列式的计算

所以

$$\text{上式} = \sum_{\dots j_{n-2} n-1, n} (-1)^{\tau(\dots j_{n-2} n-1, n)} \cdots a_{n-2, j_{n-2}} a_{n-1, n-1} a_{nn},$$

如此重复下去，知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

由此遇到上三角行列式，无需再一步步计算。

对换行列式中两行的位置，行列式反号

.

对换行列式中两行的位置，行列式反号

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad .$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

$$\text{左式} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

$$\text{左式} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$$

$$\text{右式} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{nj_n}$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

因为数的乘法成立交换律，

$$\text{右式} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n},$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

因为数的乘法成立交换律，

$$右式 = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n},$$

上式不符合行列式的定义，因为

对换行列式中两行的位置，行列式反号

因为数的乘法成立交换律，

$$右式 = \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n},$$

上式不符合行列式的定义，因为 $\tau(\cdot)$ 中的排列与后面乘积下标中的排列不是同一个排列。

对换行列式中两行的位置，行列式反号

因为数的乘法成立交换律，

$$\text{右式} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n},$$

上式不符合行列式的定义，因为 $\tau(\cdot)$ 中的排列与后面乘积下标中的排列不是同一个排列。

若 $j_1\ldots j_i\ldots j_k\ldots j_n$ 是排列，则 $j_1\ldots j_k\ldots j_i\ldots j_n$ 也是排列。

对换行列式中两行的位置，行列式反号

因为数的乘法成立交换律，

$$右式 = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n},$$

上式不符合行列式的定义，因为 $\tau(\cdot)$ 中的排列与后面乘积下标中的排列不是同一个排列。

若 $j_1 \ldots j_i \ldots j_k \ldots j_n$ 是排列，则 $j_1 \ldots j_k \ldots j_i \ldots j_n$ 也是排列。

且两组排列存在一一对应关系。

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的排列称为偶排列。

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的排列称为偶排列。

引理：对换改变排列的奇偶性。

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的排列称为偶排列。

引理：对换改变排列的奇偶性。

（对换得到的新排列奇偶性与原排列不同。）

逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的排列称为偶排列。

引理：对换改变排列的奇偶性。

（对换得到的新排列奇偶性与原排列不同。）

- 对换排列中相邻两个元素的情形：

$$\dots jk \dots \quad \to \quad \dots kj \dots$$

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的排列称为偶排列。

引理：对换改变排列的奇偶性。

（对换得到的新排列奇偶性与原排列不同。）

- 对换排列中相邻两个元素的情形：

$$\ldots jk \ldots \quad \to \quad \ldots kj \ldots$$

  对换前后，排列中除 jk 与 kj 外，其它正序和逆序都未发生变化。因此逆序个数或增 1 或减 1，引理成立。

排列的奇偶性

逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的排列称为偶排列。

引理：对换改变排列的奇偶性。

（对换得到的新排列奇偶性与原排列不同。）

- 对换排列中相邻两个元素的情形：

$$\dots jk \dots \quad \to \quad \dots kj \dots$$

  对换前后，排列中除 jk 与 kj 外，其它正序和逆序都未发生变化。因此逆序个数或增 1 或减 1，引理成立。

- 兑换排列中非相邻两个元素的情形：

$$\dots j \cdots k \dots \quad \to \quad \dots k \cdots j \dots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots \widehat{ja}bck \ldots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots\widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\dots \widehat{ja}bck \dots \to \dots a\widehat{jb}ck \dots \to \dots ab\widehat{jc}k \dots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\dots\widehat{ja}bck\dots \to \dots a\widehat{jb}ck\dots \to \dots ab\widehat{jc}k\dots \to \dots abcjk\dots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots\widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k\ldots \to \ldots abcjk\ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots\widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k\ldots \to \ldots abcjk\ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots \widehat{ja}bck \ldots \rightarrow \ldots a\widehat{jb}ck \ldots \rightarrow \ldots ab\widehat{jc}k \ldots \rightarrow \ldots abcjk \ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \rightarrow abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

$$\ldots abc\widehat{kj} \ldots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots \widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k\ldots \to \ldots abcjk\ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

$$\ldots ab\widehat{ck}j\ldots \to \ldots a\widehat{bk}cj\ldots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots\widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k\ldots \to \ldots abcjk\ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

$$\ldots ab\widehat{ck}j\ldots \to \ldots a\widehat{bk}cj\ldots \to \ldots \widehat{ak}bcj\ldots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots\widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k\ldots \to \ldots abcjk\ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

$$\ldots ab\widehat{ck}j\ldots \to \ldots a\widehat{bk}cj\ldots \to \ldots\widehat{ak}bcj\ldots \to \ldots kabcj\ldots$$

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots\widehat{ja}bck\ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck\ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k\ldots \to \ldots abcjk\ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

$$\ldots ab\widehat{ck}j\ldots \to \ldots a\widehat{bk}cj\ldots \to \ldots \widehat{ak}bcj\ldots \to \ldots kabcj\ldots$$

总的交换次数为 $2m+1$ 次，其中 m 为 j 和 k 之间元的个数。

排列的奇偶性

转化为一系列交换相邻两个元素的情形：

先把 j 交换到与 k 相邻：

$$\ldots \widehat{ja}bck \ldots \to \ldots a\widehat{jb}ck \ldots \to \ldots ab\widehat{jc}k \ldots \to \ldots abcjk \ldots$$

j 与 k 交换一次：$\ldots abc\widehat{jk} \to abckj$。

再把 k 交换到最终位置：

$$\ldots ab\widehat{ck}j \ldots \to \ldots a\widehat{bk}cj \ldots \to \ldots \widehat{ak}bcj \ldots \to \ldots kabcj \ldots$$

总的交换次数为 $2m+1$ 次，其中 m 为 j 和 k 之间元的个数。

所以对换也改变了排列的奇偶性。两种情形引理都成立。

对换行列式中两行的位置，行列式反号

所以，

$$\text{右式} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n},$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

所以，

$$
\begin{aligned}
\text{右式} &= \sum_{j_1\ldots j_n} (-1)(-1)^{\tau(j_1\ldots j_k\ldots j_i\ldots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}, \\
&=(-1)\sum_{j_1\ldots j_n} (-1)^{\tau(j_1\ldots j_k\ldots j_i\ldots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n},
\end{aligned}
$$

对换行列式中两行的位置，行列式反号

所以，

$$
\begin{aligned}
\text{右式} &= \sum_{j_1\cdots j_n}(-1)(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n},\\
&=(-1)\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n},\\
&=-\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

推论：若行列式中的两行完全相同，行列式为0

因为，

$$A = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

推论：若行列式中的两行完全相同，行列式为0

因为，

$$A=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

所以$2A=0$，即$A=0$。

行列式某行的c倍

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式某行的c倍

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{左式} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \cdots c a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

行列式某行的c倍

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \cdots ca_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= c \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

行列式某行的c倍

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{i3} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \cdots c a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= c \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = c \det(a_{ij}) = \text{右式} \end{aligned}$$

行列式某行的元表为两个数的和

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & b_{i3}+c_{i3} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式某行的元表为两个数的和

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式某行的元表为两个数的和

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A=B+C.$$

行列式某行的元表为两个数的和

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A = B + C.$$

证明过程与前面类似。

行列式行列互换，行列式值不变

行列互换，是指把行列式的各行都变为列，又称转置行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式行列互换，行列式值不变

行列互换，是指把行列式的各行都变为列，又称转置行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式行列互换，行列式值不变

行列互换，是指把行列式的各行都变为列，又称转置行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式行列互换，行列式值不变

行列互换，是指把行列式的各行都变为列，又称转置行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{右式} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

行列式行列互换，行列式值不变

对行列式的每一项应用乘法交换律，得到：

$$\text{右式} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

应用乘法交换律交换乘数位置时，乘数的两个下标总是同时移动。

行列式行列互换，行列式值不变

对行列式的每一项应用乘法交换律，得到：

$$\text{右式} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

应用乘法交换律交换乘数位置时，乘数的两个下标总是同时移动。例如对 $j_1j_2j_3j_4 = 4312$：

$a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}$	$a_{13}a_{32}a_{41}a_{24}$	$a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}$	$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$
4312	1342	1243	1234
1234	3214	3412	3421

行列式行列互换，行列式值不变

对行列式的每一项应用乘法交换律，得到：

$$右式 = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

应用乘法交换律交换乘数位置时，乘数的两个下标总是同时移动。例如对 $j_1 j_2 j_3 j_4 = 4312$：

$a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}$	$a_{13}a_{32}a_{41}a_{24}$	$a_{13}a_{24}a_{41}a_{32}$	$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$
4312	1342	1243	1234
1234	3214	3412	3421

得到 $k_1 k_2 k_3 k_4 = 3421$。

行列式行列互换，行列式值不变

- $k_1,\ldots,k_n$ 是将第一下标 $j_1,\ldots,j_n$ 通过互换得到 $1,\ldots,n$ 时，对 $1,\ldots,n$ 进行相同互换得到。

行列式行列互换，行列式值不变

- $k_1,\ldots,k_n$ 是将第一下标 $j_1,\ldots,j_n$ 通过互换得到 $1,\ldots,n$ 时，对 $1,\ldots,n$ 进行相同互换得到。
- $k_1\ldots k_n$ 也是一个排列。

行列式行列互换，行列式值不变

- $k_1,\ldots,k_n$ 是将第一下标 $j_1,\ldots,j_n$ 通过互换得到 $1,\ldots,n$ 时，对 $1,\ldots,n$ 进行相同互换得到。
- $k_1\ldots k_n$ 也是一个排列。
- $j_1\ldots j_n$ 与 $k_1\ldots k_n$ 之间一一对应，不同的 $j_1\ldots j_n$ 对应不同的 $k_1\ldots k_n$。

行列式行列互换，行列式值不变

- $k_1, \ldots, k_n$ 是将第一下标 $j_1, \ldots, j_n$ 通过互换得到 $1, \ldots, n$ 时，对 $1, \ldots, n$ 进行相同互换得到。
- $k_1 \ldots k_n$ 也是一个排列。
- $j_1 \ldots j_n$ 与 $k_1 \ldots k_n$ 之间一一对应，不同的 $j_1 \ldots j_n$ 对应不同的 $k_1 \ldots k_n$。
- $j_1 \ldots j_n$ 取遍 $1, \ldots, n$ 的一切排列时，$k_1 \ldots k_n$ 也取遍 $1, \ldots, n$ 的一切排列。

行列式行列互换，行列式值不变

- $k_1,\ldots,k_n$ 是将第一下标 $j_1,\ldots,j_n$ 通过互换得到 $1,\ldots,n$ 时，对 $1,\ldots,n$ 进行相同互换得到。
- $k_1\ldots k_n$ 也是一个排列。
- $j_1\ldots j_n$ 与 $k_1\ldots k_n$ 之间一一对应，不同的 $j_1\ldots j_n$ 对应不同的 $k_1\ldots k_n$。
- $j_1\ldots j_n$ 取遍 $1,\ldots,n$ 的一切排列时，$k_1\ldots k_n$ 也取遍 $1,\ldots,n$ 的一切排列。
- 两个排列 $j_1\ldots j_n$ 与 $k_1\ldots k_n$ 具有相同的奇偶性。

$$(-1)^{\tau(j_1\ldots j_n)}=(-1)^{\tau(k_1\ldots k_n)}.$$

行列式行列互换，行列式值不变

因为互换总是同时进行的，若 $j_1 \ldots j_n$ 经过奇数次互换得到 $12 \ldots n$，则 $k_1 \ldots k_n$ 就是 $12 \ldots n$ 经过同样奇数次互换得到的排列；若 $j_1 \ldots j_n$ 经过偶数次互换得到 $12 \ldots n$，则 $k_1 \ldots k_n$ 就是 $12 \ldots n$ 经过同样偶数次互换得到的排列。因此 $j_1 \ldots j_n$ 与 $k_1 \ldots k_n$ 的奇偶性相同。

行列式行列互换，行列式值不变

因为互换总是同时进行的，若 $j_1\ldots j_n$ 经过奇数次互换得到 $12\ldots n$，则 $k_1\ldots k_n$ 就是 $12\ldots n$ 经过同样奇数次互换得到的排列；若 $j_1\ldots j_n$ 经过偶数次互换得到 $12\ldots n$，则 $k_1\ldots k_n$ 就是 $12\ldots n$ 经过同样偶数次互换得到的排列。因此 $j_1\ldots j_n$ 与 $k_1\ldots k_n$ 的奇偶性相同。

所以

$$\begin{aligned}\text{右式} &= \sum_{k_1\ldots k_n}(-1)^{\tau(j_1\ldots j_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\\ &= \sum_{k_1\ldots k_n}(-1)^{\tau(k_1\ldots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} = \text{左式}.\end{aligned}$$