南开大学 2021-2022 第二学期“高等数学（A 类）II”结课统考试卷（A 卷）

一、（本题 8 分）求曲面 $x^3+y^2+z^3=1$ 在 $P(-1,1,1)$ 处的切平面与法线方程。

二、（本题 10 分）求函数 $f(x,y)=x-2y$ 在区域 $D:(x-1)^2+(y+2)^2\le 5$ 上的最大值、最小值。

三、（本题 $3\times 8=24$ 分）计算下列二重积分或三重积分

1. $\iint_D (2x-y^2)\,dxdy$，其中 $D: x+y\le 2, x,y\ge 0$；
2. $\iint_D \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$；
3. $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le z$。

四、（本题 $2\times 6=12$ 分）求下列广义积分

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$；
2. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$。

五、（本题 10 分）求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\left(\frac{x}{3}\right)^n$ 的收敛域及和函数。

六、（本题 10 分）将函数 $f(x)=\pi-x, 0\le x\le\pi$ 展开为周期为 2π 的余弦级数。

七、（本题 $2\times 8=16$ 分）计算下列曲线或曲面积分

1. 求 $\displaystyle\int_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}$，其中 L 为 $20x^2+21y^2=1$ 取逆时针方向；
2. 设 Σ 为平面 $2x+2y+z=1$ 在第一卦限的部分，求 $I=\iint_\Sigma (8x+8y+4z)\,dS$。

八、（本题 10 分）计算第二类型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma \left(yz\,dydz+zx\,dzdx+z(x^2+y^2)\,dxdy\right)$$

其中 Σ 为 $3-z=x^2+y^2, z>0$，取外侧。

南开大学2021-2022第二学期“高等数学（A类）II”结课统考试卷（B卷）

一、（本题8分）求曲面 $x^2+2xy-y^2+z^2=7$ 上过 $P(1,-1,3)$ 的切平面和法线方程。

二、（本题10分）求函数 $f(x,y,z)=x^2-2y+z$ 在区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 5$ 上的最大值、最小值。

三、（本题 $3\times 8=24$ 分）计算下列二重积分或三重积分

1. $\iint_D \sqrt{x+y}\,dxdy$，其中 $D: x,y\ge 0, x+y\le 1$；
2. $\iiint_\Omega (x-y+z)^2\,dxdydz$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$；
3. $\iiint_\Omega z^3\,dxdydz$，其中 Ω 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域。

四、（本题 $2\times 6=12$ 分）求下列广义积分

1. $\int_2^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-2}}$；

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x}\,dx$。

五、（本题10分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2\big(\frac{x}{2}\big)^n$ 的收敛域及和函数。

六、（本题10分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le \pi \\ (x+2\pi)^2 & -\pi\le x<0 \end{cases}$，求其以 2π 为周期的傅里叶级数及其和函数。

七、（本题 $2\times 8=16$ 分）计算下列曲线积分

1. 求极坐标下曲线 $C: r=2(1+\cos\theta), \theta\in[0,2\pi]$ 的长度；
2. 求 $\oint_{C+} \frac{(3x-4y)\,dy-(x+3y)\,dx}{x^2+4y^2}$，其中 $C: \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的椭圆，取逆时针方向。

八、（本题10分）计算第二类型曲面积分

$$I=\iint_S \left(x^2\,dydz+y^2\,dzdx+z^2\,dxdy\right)$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2 (R>0)$ 在第一卦限的部分，取上侧。