线性代数之四

吴民

南开大学　计控学院

逆矩阵

若 a, b, c 都是数，且 $a \neq 0$，则以下推导成立：

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

逆矩阵

若 a,b,c 都是数，且 $a \neq 0$，则以下推导成立：

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

推导的原理是等式两边同时乘以 $\frac{1}{a}$。

逆矩阵

若 a,b,c 都是数，且 $a\neq 0$，则以下推导成立：

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

推导的原理是等式两边同时乘以 $\frac{1}{a}$。

矩阵乘法不成立削去律。但如果存在矩阵 X 满足 $XA = E$，则

逆矩阵

若 a,b,c 都是数，且 $a\neq 0$，则以下推导成立：

$$ab=ac \quad \Rightarrow \quad b=c.$$

推导的原理是等式两边同时乘以 $\frac{1}{a}$。

矩阵乘法不成立削去律。但如果存在矩阵 X 满足 $XA=E$，则

$$AB=AC$$

逆矩阵

若 a,b,c 都是数，且 $a\neq 0$，则以下推导成立：

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

推导的原理是等式两边同时乘以 $\frac{1}{a}$。

矩阵乘法不成立削去律。但如果存在矩阵 X 满足 $XA = E$，则

$$AB = AC$$

就可以推导出 $B = C$。

逆矩阵

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

逆矩阵

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

定理：逆矩阵唯一。（若 A 存在逆矩阵，则其逆矩阵唯一。）

逆矩阵

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

定理：逆矩阵唯一。（若 A 存在逆矩阵，则其逆矩阵唯一。）

如何证唯一？

逆矩阵

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

定理：逆矩阵唯一。（若 A 存在逆矩阵，则其逆矩阵唯一。）

如何证唯一？证如果有两个，则两个相等。

逆矩阵

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

定理：逆矩阵唯一。（若 A 存在逆矩阵，则其逆矩阵唯一。）

如何证唯一？证如果有两个，则两个相等。

设 B, C 都是 A 的逆矩阵，$AB = BA = E$，$AC = CA = E$。则

逆矩阵

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

定理：逆矩阵唯一。（若 A 存在逆矩阵，则其逆矩阵唯一。）

如何证唯一？证如果有两个，则两个相等。

设 B, C 都是 A 的逆矩阵，$AB = BA = E$，$AC = CA = E$。则

$$B = B \cdot E = B(AC) = (BA)C = E \cdot C = C.$$

定义：设 A 是一个 n 阶矩阵。若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E,$$

则称 A 为**可逆矩阵**，B 是 A 的**逆矩阵**。

可逆矩阵还可称为**非奇异矩阵**、**非退化矩阵**。

定理：逆矩阵唯一。（若 A 存在逆矩阵，则其逆矩阵唯一。）

如何证唯一？证如果有两个，则两个相等。

设 B, C 都是 A 的逆矩阵，$AB = BA = E$，$AC = CA = E$。则

$$B = B \cdot E = B(AC) = (BA)C = E \cdot C = C.$$

定理证毕。

逆矩阵

引理：方阵 A,B,C 满足：$BA = AC = E$，则 $B = C$。

逆矩阵

引理：方阵 A, B, C 满足：$BA = AC = E$，则 $B = C$。

因逆矩阵唯一，故 A 的逆矩阵可用一个符号表示。即 A^{-1}。

逆矩阵

引理：方阵 A,B,C 满足：$BA=AC=E$，则 $B=C$。

因逆矩阵唯一，故 A 的逆矩阵可用一个符号表示。即 A^{-1}。

注意：矩阵没有除法运算，形如 $\frac{A}{B}$ 的式子完全错误。

逆矩阵

引理：方阵 A,B,C 满足：$BA=AC=E$，则 $B=C$。

因逆矩阵唯一，故 A 的逆矩阵可用一个符号表示。即 A^{-1}。

注意：矩阵没有除法运算，形如 $\frac{A}{B}$ 的式子完全错误。

由 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，

逆矩阵

引理：方阵 A, B, C 满足：$BA = AC = E$，则 $B = C$。

因逆矩阵唯一，故 A 的逆矩阵可用一个符号表示。即 A^{-1}。

注意：矩阵没有除法运算，形如 $\frac{A}{B}$ 的式子完全错误。

由 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$，

根据逆矩阵的定义，得到：$(A^{-1})^{-1} = A$（条件是 A 可逆）。

逆矩阵

引理：方阵 A,B,C 满足：$BA=AC=E$，则 $B=C$。

因逆矩阵唯一，故 A 的逆矩阵可用一个符号表示。即 A^{-1}。

注意：矩阵没有除法运算，形如 $\frac{A}{B}$ 的式子完全错误。

由 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，

根据逆矩阵的定义，得到：$(A^{-1})^{-1}=A$（条件是 A 可逆）。

定理：n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$。

逆矩阵

引理：方阵 A,B,C 满足：$BA=AC=E$，则 $B=C$。

因逆矩阵唯一，故 A 的逆矩阵可用一个符号表示。即 A^{-1}。

注意：矩阵没有除法运算，形如 $\frac{A}{B}$ 的式子完全错误。

由 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，

根据逆矩阵的定义，得到：$(A^{-1})^{-1}=A$（条件是 A 可逆）。

定理：n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq 0$。

必要性。设 A 可逆，即存在逆矩阵 A^{-1}，有

$$A\cdot A^{-1}=E,$$

逆矩阵

于是 $|A|\cdot|A^{-1}|=|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$。

逆矩阵

于是 $|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$。所以 $|A| \neq 0$。

逆矩阵

于是 $|A|\cdot|A^{-1}|=|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$。所以 $|A|\neq 0$。

充分性。（构造出 A 的逆矩阵。）

于是 $|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |E| = 1$。所以 $|A| \neq 0$。

充分性。（构造出 A 的逆矩阵。）

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，定义 A 的**伴随矩阵** A^*：

于是 $|A|\cdot|A^{-1}|=|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$。所以 $|A|\neq 0$。

充分性。（构造出 A 的逆矩阵。）

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，定义 A 的**伴随矩阵** A^*：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中 A_{ij} 为 A 中 a_{ij} 的代数余子式。注意 A_{ij} 的排列方式。

逆矩阵

计算：

$$A \cdot A^* =$$

逆矩阵

计算：

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

计算:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$$

逆矩阵

计算：

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

逆矩阵

计算:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = |A|E.$$

逆矩阵

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = \quad$ 。

逆矩阵

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$。

逆矩阵

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$。

类似的可以计算出，

逆矩阵

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$。

类似的可以计算出，

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = E$。

类似的可以计算出，

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = |A|E$$

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = E$。

类似的可以计算出，

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = |A|E$$

所以 $\frac{1}{|A|} A^* \cdot A = |A|E$。于是

逆矩阵

因为已知 $|A| \neq 0$，所以 $A \cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$。

类似的可以计算出，

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = |A|E$$

所以 $\frac{1}{|A|}A^* \cdot A = |A|E$。于是

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

逆矩阵

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

逆矩阵

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

逆矩阵

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，也就是 $A[k(kA)^{-1}] = [k(kA)^{-1}]A = E$，

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，

也就是 $A[k(kA)^{-1}] = [k(kA)^{-1}]A = E$，

kA 的每个元的代数余子式是 A 对应代数余子式的 k^{n-1} 倍。

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，

也就是 $A[k(kA)^{-1}] = [k(kA)^{-1}]A = E$，

kA 的每个元的代数余子式是 A 对应代数余子式的 k^{n-1} 倍。

定理：n 阶方阵 A,B ，如果 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$。

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，

也就是 $A[k(kA)^{-1}] = [k(kA)^{-1}]A = E$，

kA 的每个元的代数余子式是 A 对应代数余子式的 k^{n-1} 倍。

定理：n 阶方阵 A,B ，如果 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$。

与逆矩阵定义相比，此定理减少了验证的式子。

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，

也就是 $A[k(kA)^{-1}] = [k(kA)^{-1}]A = E$，

kA 的每个元的代数余子式是 A 对应代数余子式的 k^{n-1} 倍。

定理：n 阶方阵 A,B ，如果 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$。

与逆矩阵定义相比，此定理减少了验证的式子。

证明：因 $AB = E$，所以 $|A||B| = 1$，故 $|A| \neq 0$。

不仅证明了 A^{-1} 的存在，而且给出了 A^{-1} 的计算方法。

练习：A 为 n 阶可逆方阵，k 为数，$(kA)^{-1}$ 与 A^{-1} 之间的关系。$(kA)^*$ 与 A^*之间的关系（此时不必要求 A 可逆）。

提示：k 应满足 $k \neq 0$。成立 $(kA)(kA)^{-1} = (kA)^{-1}(kA) = E$，

也就是 $A[k(kA)^{-1}] = [k(kA)^{-1}]A = E$，

kA 的每个元的代数余子式是 A 对应代数余子式的 k^{n-1} 倍。

定理：n 阶方阵 A,B ，如果 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$。

与逆矩阵定义相比，此定理减少了验证的式子。

证明：因 $AB = E$，所以 $|A||B| = 1$，故 $|A| \neq 0$。

所以由上面定理，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$。

逆矩阵

由 $A^{-1}A = E$ 和 $AB = E$，推出 $B = A^{-1}$。

逆矩阵

由 $A^{-1}A = E$ 和 $AB = E$，推出 $B = A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB = E$，则 $BA = E$。

逆矩阵

由 $A^{-1}A = E$ 和 $AB = E$，推出 $B = A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB = E$，则 $BA = E$。

练习：n 阶方阵 A, B，如果成立 $AB = A + B$，则 $AB = BA$。

逆矩阵

由 $A^{-1}A=E$ 和 $AB=E$，推出 $B=A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB=E$，则 $BA=E$。

练习：n 阶方阵 A,B，如果成立 $AB=A+B$，则 $AB=BA$。

式子改写为：$AB-A-B+E=E$，

逆矩阵

由 $A^{-1}A = E$ 和 $AB = E$，推出 $B = A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB = E$，则 $BA = E$。

练习：n 阶方阵 A, B，如果成立 $AB = A + B$，则 $AB = BA$。

式子改写为：$AB - A - B + E = E$，

也就是 $(A - E)(B - E) = E$，

逆矩阵

由 $A^{-1}A = E$ 和 $AB = E$，推出 $B = A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB = E$，则 $BA = E$。

练习：n 阶方阵 A, B，如果成立 $AB = A + B$，则 $AB = BA$。

式子改写为：$AB - A - B + E = E$，

也就是 $(A - E)(B - E) = E$，

由前面定理，知 $(B - E)(A - E) = E$，化简即得要证式子。

逆矩阵

由 $A^{-1}A=E$ 和 $AB=E$，推出 $B=A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB=E$，则 $BA=E$。

练习：n 阶方阵 A,B，如果成立 $AB=A+B$，则 $AB=BA$。

式子改写为：$AB-A-B+E=E$，

也就是 $(A-E)(B-E)=E$，

由前面定理，知 $(B-E)(A-E)=E$，化简即得要证式子。

定理：n 阶可逆方阵 A,B。$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

由 $A^{-1}A=E$ 和 $AB=E$，推出 $B=A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB=E$，则 $BA=E$。

练习：n 阶方阵 A,B，如果成立 $AB=A+B$，则 $AB=BA$。

式子改写为：$AB-A-B+E=E$，

也就是 $(A-E)(B-E)=E$，

由前面定理，知 $(B-E)(A-E)=E$，化简即得要证式子。

定理：n 阶可逆方阵 A,B。$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

证明：因为

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

逆矩阵

由 $A^{-1}A=E$ 和 $AB=E$，推出 $B=A^{-1}$。

此定理即表明，如果 $AB=E$，则 $BA=E$。

练习：n 阶方阵 A,B，如果成立 $AB=A+B$，则 $AB=BA$。

式子改写为：$AB-A-B+E=E$，

也就是 $(A-E)(B-E)=E$，

由前面定理，知 $(B-E)(A-E)=E$，化简即得要证式子。

定理：n 阶可逆方阵 A,B。$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

证明：因为

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

所以由定义，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

逆矩阵

定理：A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。则 $AX=B$ 有唯一解

$$X=A^{-1}B.$$

X 应为 $n\times m$ 矩阵。

逆矩阵

定理：A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。则 $AX=B$ 有唯一解

$$X=A^{-1}B.$$

X 应为 $n\times m$ 矩阵。

证：由 $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B$，

逆矩阵

定理：A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。则 $AX=B$ 有唯一解

$$X=A^{-1}B.$$

X 应为 $n\times m$ 矩阵。

证：由 $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B$，

所以 $X=A^{-1}B$ 是 $AX=B$ 的（一个）解。

逆矩阵

定理：A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。则 $AX=B$ 有唯一解

$$X=A^{-1}B.$$

X 应为 $n\times m$ 矩阵。

证：由 $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B$，

所以 $X=A^{-1}B$ 是 $AX=B$ 的（一个）解。

又由 $AX=B$，此式两边都左乘 A^{-1}，

逆矩阵

定理：A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。则 $AX=B$ 有唯一解

$$X=A^{-1}B.$$

X 应为 $n\times m$ 矩阵。

证：由 $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B$，

所以 $X=A^{-1}B$ 是 $AX=B$ 的（一个）解。

又由 $AX=B$，此式两边都左乘 A^{-1}，得到 $X=A^{-1}B$。所以 $X=A^{-1}B$ 又是唯一解。

定理：A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。则 $AX=B$ 有唯一解

$$X=A^{-1}B.$$

X 应为 $n\times m$ 矩阵。

证：由 $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B$，

所以 $X=A^{-1}B$ 是 $AX=B$ 的（一个）解。

又由 $AX=B$，此式两边都左乘 A^{-1}，得到 $X=A^{-1}B$。所以 $X=A^{-1}B$ 又是唯一解。

（书上证明有误）。

逆矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{与 } AX = b$$

逆矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{与 } AX = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

逆矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \text{与 } AX=b$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

两者是同解的。是同一方程组的两个形式。

当 A 可逆时（为此， $m=n$ ），$AX=b$ 的唯一解为 $X=A^{-1}b$。即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

当 A 可逆时（为此， $m=n$ ），$AX=b$ 的唯一解为 $X=A^{-1}b$。

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

写成分量形式，

逆矩阵

当 A 可逆时（为此， $m = n$ ），$AX = b$ 的唯一解为 $X = A^{-1}b$。

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

写成分量形式，

$$x_i = \frac{1}{|A|} \left[A_{1i}b_1 + \cdots + A_{ni}b_n \right].$$

逆矩阵

再根据行列式按一列展开以及代数余子式的定义，

再根据行列式按一列展开以及代数余子式的定义，

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

逆矩阵

再根据行列式按一列展开以及代数余子式的定义，

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上结论写成方程组形式，便得到克莱姆法则。

再根据行列式按一列展开以及代数余子式的定义，

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上结论写成方程组形式，便得到克莱姆法则。

克莱姆法则的逆否命题是：

逆矩阵

再根据行列式按一列展开以及代数余子式的定义，

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上结论写成方程组形式，便得到克莱姆法则。

克莱姆法则的逆否命题是：

若方程组不存在唯一解，则系数矩阵的行列式等于 0。

再根据行列式按一列展开以及代数余子式的定义，

$$x_i = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上结论写成方程组形式，便得到克莱姆法则。

克莱姆法则的逆否命题是：

若方程组不存在唯一解，则系数矩阵的行列式等于 0。

系数矩阵行列式为 0 时解的情况，克莱姆法则未阐述。

练习：n 阶可逆矩阵 A。A 的每行元的和为 2，证明 A^{-1} 的每行元的和为 $\frac{1}{2}$。

逆矩阵

练习：n 阶可逆矩阵 A。A 的每行元的和为 2，证明 A^{-1} 的每行元的和为 $\frac{1}{2}$。

已知可简写为：

逆矩阵

练习：n 阶可逆矩阵 A。A 的每行元的和为 2，证明 A^{-1} 的每行元的和为 $\frac{1}{2}$。

已知可简写为：$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \vdots\\ 2\end{pmatrix}$。

逆矩阵

练习：n 阶可逆矩阵 A。A 的每行元的和为 2，证明 A^{-1} 的每行元的和为 $\frac{1}{2}$。

已知可简写为：$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \vdots\\ 2\end{pmatrix}$。两种方法计算 $A^{-1}A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$。

逆矩阵

练习：n 阶可逆矩阵 A。A 的每行元的和为 2，证明 A^{-1} 的每行元的和为 $\frac{1}{2}$。

已知可简写为：$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \vdots\\ 2\end{pmatrix}$。两种方法计算 $A^{-1}A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$。

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}2=A^{-1}\left[A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right]=(A^{-1}A)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$