线性代数第十二讲

吴民

南开大学　人工智能学院

二次型

二次型是 n 元二次齐次多项式。

二次型

二次型是 n 元二次齐次多项式。

齐次是指多项式所有项的次数相同。

二次型

二次型是 n 元二次齐次多项式。

齐次是指多项式所有项的次数相同。

设其变元为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，则和式中所有的项只可能为

x_1^2，x_1x_2，$\ldots$，x_1x_n，x_2^2，x_2x_3，$\ldots$，x_2x_n，

x_3^2，x_3x_4 $\ldots$，x_{n-1}^2，$x_{n-1}x_n$，x_n^2 中的某一个。

二次型

二次型是 n 元二次齐次多项式。

齐次是指多项式所有项的次数相同。

设其变元为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，则和式中所有的项只可能为

x_1^2，x_1x_2，$\ldots$，x_1x_n，x_2^2，x_2x_3，$\ldots$，x_2x_n，

x_3^2，x_3x_4 $\ldots$，x_{n-1}^2，$x_{n-1}x_n$，x_n^2 中的某一个。

二次型的一般形式：

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdot+2a_{1n}x_1x_n \\
& +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\
& +a_{33}x_3^2+\cdots+2a_{3n}x_3x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

二次型

限定数域为实数域，称为 n 元实二次型。

限定数域为实数域，称为 n 元实二次型。

定义 $A=(a_{ij})$ 和 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$，

二次型

限定数域为实数域，称为 n 元实二次型。

定义 $A=(a_{ij})$ 和 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$，

二次型

限定数域为实数域，称为 n 元实二次型。

定义 $A=(a_{ij})$ 和 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$，

即将二次型写为矩阵乘积的形式。

二次型

限定数域为实数域，称为 n 元实二次型。

定义 $A=(a_{ij})$ 和 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则 $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$,

即将二次型写为矩阵乘积的形式。

其中拆项是把那些交叉项平分为两项。保证了最后得到的矩阵 A 是实对称矩阵。

限定数域为实数域，称为 n 元实二次型。

定义 $A=(a_{ij})$ 和 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$，

即将二次型写为矩阵乘积的形式。

其中拆项是把那些交叉项平分为两项。保证了最后得到的矩阵 A 是实对称矩阵。

矩阵乘积形式，特别是 A，是被二次型所唯一确定。

二次型

给出对称矩阵 A，则由 $X^{\mathrm{T}}AX$ 又得到二次型。

二次型

给出对称矩阵 A，则由 $X^{\mathrm{T}}AX$ 又得到二次型。

所以，对称矩阵 A 称为**二次型** $f(x_1,\ldots,x_n)$ **的矩阵**。

二次型

给出对称矩阵 A，则由 $X^{\mathrm{T}}AX$ 又得到二次型。

所以，对称矩阵 A 称为**二次型** $f(x_1,\ldots,x_n)$ **的矩阵**。

矩阵 A 的秩**定义**为二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的秩。

给出对称矩阵 A，则由 $X^{\mathrm{T}}AX$ 又得到二次型。

所以，对称矩阵 A 称为**二次型** $f(x_1,\ldots,x_n)$ **的矩阵**。

矩阵 A 的秩**定义**为二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的秩。

$x_1,\ldots,x_n$ 和 $y_1,\ldots,y_n$ 是两组变量，数域 P 中的一组关系式：

$$\begin{cases} x_1 & = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 & = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ & \ldots \\ x_n & = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \end{cases}$$

称为由 $x_1,\ldots,x_n$ 到 $y_1,\ldots,y_n$ 的线性替换。

二次型

如果行列式 $\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

如果行列式 $\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号 $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为 $X = CY$。

二次型

如果行列式 $\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号 $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为 $X = CY$。

线性替换后得到的仍是二次型。要作非退化线性替换。

$$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$$

还可以从二次型的一般形式中验证。

二次型

如果行列式 $\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号 $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为 $X = CY$。

线性替换后得到的仍是二次型。要作非退化线性替换。

$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$

还可以从二次型的一般形式中验证。

$C^{\mathrm{T}}AC$ 是对称矩阵，

如果行列式 $\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号 $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为 $X = CY$。

线性替换后得到的仍是二次型。要作非退化线性替换。

$f(x_1, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$

还可以从二次型的一般形式中验证。

$C^{\mathrm{T}}AC$ 是对称矩阵，

所以线性替换后得到的二次型的矩阵是 $C^{\mathrm{T}}AC$。

二次型

如果行列式 $\det(c_{ij}) \neq 0$，则称非退化线性替换。

引入记号 $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $C = (c_{ij})$，则以上线性替换可表示为 $X = CY$。

线性替换后得到的仍是二次型。要作非退化线性替换。

$f(x_1, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y,$

还可以从二次型的一般形式中验证。

$C^{\mathrm{T}}AC$ 是对称矩阵，

所以线性替换后得到的二次型的矩阵是 $C^{\mathrm{T}}AC$。

定理：二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 经过非退化线性替换 $X = CY$ 化为二次型 $Y^{\mathrm{T}}BY$，其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$。

定义：数域 $\mathbf{P}$ 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B。如果存在数域 $\mathbf{P}$ 上的可逆矩阵 C, 使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

二次型

定义：数域 $\mathbf{P}$ 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B。如果存在数域 $\mathbf{P}$ 上的可逆矩阵 C, 使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

定义：数域 $\mathbf{P}$ 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B。如果存在数域 $\mathbf{P}$ 上的可逆矩阵 C, 使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。

二次型

定义：数域 $\mathbf{P}$ 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B。如果存在数域 $\mathbf{P}$ 上的可逆矩阵 C, 使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A 与自身合同，因为 $A=E^{\mathrm{T}}AE$。

定义：数域 $\mathbf{P}$ 上的 $n \times n$ 矩阵 A, B。如果存在数域 $\mathbf{P}$ 上的可逆矩阵 C, 使 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A 与自身合同，因为 $A = E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若 A 与 B 合同，则 B 与 A 也合同。

定义：数域 **P** 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B。如果存在数域 **P** 上的可逆矩阵 C, 使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A 与自身合同，因为 $A=E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若 A 与 B 合同，则 B 与 A 也合同。

  因为若 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则 $A=(C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$。

定义：数域 **P** 上的 $n\times n$ 矩阵 A,B。如果存在数域 **P** 上的可逆矩阵 C, 使 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A 与自身合同，因为 $A=E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若 A 与 B 合同，则 B 与 A 也合同。
  因为若 $B=C^{\mathrm{T}}AC$，则 $A=(C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$。
- 传递性。A_1 与 A_2 合同，A_2 与 A_3 合同，则 A_1 与 A_3 合同。

定义：数域 **P** 上的 $n \times n$ 矩阵 A, B。如果存在数域 **P** 上的可逆矩阵 C, 使 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 B 是**合同矩阵**。

合同关系具有：

- 反身性。A 与自身合同，因为 $A = E^{\mathrm{T}}AE$。
- 对称性。若 A 与 B 合同，则 B 与 A 也合同。
  因为若 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，则 $A = (C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$。
- 传递性。A_1 与 A_2 合同，A_2 与 A_3 合同，则 A_1 与 A_3 合同。 因为若 $A_1 = C_1^{\mathrm{T}}AC_1$ 和 $A_2 = C_2^{\mathrm{T}}A_1C_2$，
  则 $A_2 = C_2^{\mathrm{T}}A_1C_2 = C_2^{\mathrm{T}}(C_1^{\mathrm{T}}AC_1)C_2 = (C_1C_2)^{\mathrm{T}}A(C_1C_2)$。

二次型

定义：如果两个二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

二次型

定义：如果两个二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个 n 元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

定义：如果两个二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个 n 元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个 n 元二次型等价，那么它们有相同的秩。

二次型

定义：如果两个二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个 n 元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个 n 元二次型等价，那么它们有相同的秩。

将一个二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换后化成平方和的形式，则这个平方和就叫做 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的**标准形**。

定义：如果两个二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个 n 元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个 n 元二次型等价，那么它们有相同的秩。

将一个二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换后化成平方和的形式，则这个平方和就叫做 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的**标准形**。

标准形的矩阵为对角形矩阵。

定义：如果两个二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 可经过非退化线性替换相互转化，则称这两个二次型是**等价**的。

两个 n 元二次型等价的充要条件是，它们的矩阵是合同的。

若两个 n 元二次型等价，那么它们有相同的秩。

将一个二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换后化成平方和的形式，则这个平方和就叫做 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的**标准形**。

标准形的矩阵为对角形矩阵。

所以标准形的秩等于其非 0 平方项的个数。

二次型

定理：任意二次型 $f(x_1,\dots,x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$ 必可经过非退化线性替换 $X = CY$ 化成标准形，其中 r 为 $f(x_1,\dots,x_n)$ 的秩：

$f(x_1,\dots,x_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2.$

二次型

定理：任意二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 必可经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成标准形，其中 r 为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域 P 上，任意一个对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 都合同于一个对角行矩阵。即存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

定理：任意二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^TAX$ 必可经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成标准形，其中 r 为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域 P 上，任意一个对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 都合同于一个对角行矩阵。即存在可逆矩阵 C，使 C^TAC 为对角形矩阵。

C 为可逆矩阵，所以 C 可表示为一系列初等矩阵的乘积：

$C=E_1E_2\cdots E_t,$

定理：任意二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 必可经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成标准形，其中 r 为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域 P 上，任意一个对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 都合同于一个对角行矩阵。即存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

C 为可逆矩阵，所以 C 可表示为一系列初等矩阵的乘积：

$C=E_1E_2\cdots E_t,$

所以 $C^{\mathrm{T}}AC=(E_1E_2\cdots E_t)^{\mathrm{T}}A(E_1E_2\cdots E_t)$

定理：任意二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 必可经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成标准形，其中 r 为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 的秩：

$f(x_1,\ldots,x_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2.$

定理：在数域 P 上，任意一个对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 都合同于一个对角行矩阵。即存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

C 为可逆矩阵，所以 C 可表示为一系列初等矩阵的乘积：

$C=E_1E_2\cdots E_t,$

所以 $C^{\mathrm{T}}AC=(E_1E_2\cdots E_t)^{\mathrm{T}}A(E_1E_2\cdots E_t)$

$=E_t^{\mathrm{T}}\cdots E_2^{\mathrm{T}}E_1^{\mathrm{T}}AE_1E_2\cdots E_t=E_t^{\mathrm{T}}\cdots[E_2^{\mathrm{T}}(E_1^{\mathrm{T}}AE_1)E_2]\cdots E_t,$

二次型

$E_j^{\mathrm{T}} A E_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行 E_j^{T} 对应的初等行变换所得到的矩阵。

二次型

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行 E_j^{T} 对应的初等行变换所得到的矩阵。

E_j^{T} 对应的初等行变换与 E_j 对应的初等列变换之间有对应关系。

二次型

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行 E_j^{T} 对应的初等行变换所得到的矩阵。

E_j^{T} 对应的初等行变换与 E_j 对应的初等列变换之间有对应关系。

所以 $E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行相应的初等行变换。

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行 E_j^{T} 对应的初等行变换所得到的矩阵。

E_j^{T} 对应的初等行变换与 E_j 对应的初等列变换之间有对应关系。

所以 $E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行相应的初等行变换。

将这种先后作两个行和与之相应的列初等变换的对矩阵的操作称为行列初等变换。

$E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行 E_j^{T} 对应的初等行变换所得到的矩阵。

E_j^{T} 对应的初等行变换与 E_j 对应的初等列变换之间有对应关系。

所以 $E_j^{\mathrm{T}}AE_j$ 是对 A 先进行 E_j 对应的初等列变换，再进行相应的初等行变换。

将这种先后作两个行和与之相应的列初等变换的对矩阵的操作称为行列初等变换。

所以前面定理等价于：

定理：任意一个对称矩阵都可经过一系列的行列初等变换化成对角形矩阵。

证明：分情况施行以下行列初等变换，可将 A 的第 1 行和第 1 列中，只有 a_{11} 可能非 0，其它元素都为 0：

- 若 $a_{11} \neq 0$，则对第 j 行，$j = 2, \ldots, n$，将 A 的第 1 行乘以 $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 加到第 j 行，再作相应的列变换。

二次型

证明：分情况施行以下行列初等变换，可将 A 的第 1 行和第 1 列中，只有 a_{11} 可能非 0，其它元素都为 0：

- 若 $a_{11} \neq 0$，则对第 j 行，$j = 2, \ldots, n$，将 A 的第 1 行乘以 $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 加到第 j 行，再作相应的列变换。
- 当 $a_{11} = 0$，则若某个 $a_{jj} \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。则交换第 1 行与第 j 行，再交换第 1 列与第j列，如此得到的矩阵即满足 $a_{11} \neq 0$。以下按前面的方法处理。

证明：分情况施行以下行列初等变换，可将 A 的第 1 行和第 1 列中，只有 a_{11} 可能非 0，其它元素都为 0：

- 若 $a_{11} \neq 0$，则对第 j 行，$j = 2, \ldots, n$，将 A 的第 1 行乘以 $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 加到第 j 行，再作相应的列变换。
- 当 $a_{11} = 0$，则若某个 $a_{jj} \neq 0$，$j = 1, \ldots, n$。则交换第 1 行与第 j 行，再交换第 1 列与第j列，如此得到的矩阵即满足 $a_{11} \neq 0$。以下按前面的方法处理。
- 当 $a_{11} = 0$，且 $a_{jj} = 0$，$j = 1, \ldots, n$。但某对 $a_{1i} = a_{i1} \neq 0$。则将第 i 行加到第 1 行上，再将第 i 列加到第 1 列上，如此得到的矩阵即满足 $a_{11} \neq 0$。以下按(1)中的方法处理。

当实现了第 1 行与第 1 列只有 a_{11} 可能非 0 后，可再用以上办法处理 A 的由第 2 行至第 n 行、第 2 列至第 n 列构成的分块矩阵。如此下去，就将 A 经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

当实现了第 1 行与第 1 列只有 a_{11} 可能非 0 后，可再用以上办法处理 A 的由第 2 行至第 n 行、第 2 列至第 n 列构成的分块矩阵。如此下去，就将 A 经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将 A 经行列初等变换的过程求出 C?

当实现了第 1 行与第 1 列只有 a_{11} 可能非 0 后，可再用以上办法处理 A 的由第 2 行至第 n 行、第 2 列至第 n 列构成的分块矩阵。如此下去，就将 A 经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将 A 经行列初等变换的过程求出 C?

注意到 $C = E_1 E_2 \cdots E_t$,

当实现了第 1 行与第 1 列只有 a_{11} 可能非 0 后，可再用以上办法处理 A 的由第 2 行至第 n 行、第 2 列至第 n 列构成的分块矩阵。如此下去，就将 A 经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将 A 经行列初等变换的过程求出 C?

注意到 $C = E_1E_2\cdots E_t$，

$C = EE_1\cdots E_t$，说明对 E 进行处理 A 矩阵所使用的那一系列行列初等变换中的初等列变换，就得到 C。

当实现了第 1 行与第 1 列只有 a_{11} 可能非 0 后，可再用以上办法处理 A 的由第 2 行至第 n 行、第 2 列至第 n 列构成的分块矩阵。如此下去，就将 A 经一系列行列初等变换化成对角形。证毕。

如何利用将 A 经行列初等变换的过程求出 C?

注意到 $C = E_1 E_2 \cdots E_t$,

$C = EE_1 \cdots E_t$，说明对 E 进行处理 A 矩阵所使用的那一系列行列初等变换中的初等列变换，就得到 C。

所以写法是将 A 与 E 构造成 $2n \times n$ 矩阵，作行列初等变换。当上半部分变为对角形矩阵时，下半部分就是矩阵 C。

二次型

再根据 C 写出非退化线性替换 $X = CY$。

再根据 C 写出非退化线性替换 $X = CY$。

书上的练习。

再根据 C 写出非退化线性替换 $X=CY$。

书上的练习。

配方法就是非退化线性替换。书上例题中的一步配方就是

$$\begin{cases} y_1 &= x_1+2x_2+x_3+2x_4 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \\ y_4 &= x_4 \end{cases}$$

写成线性替换时要将 x_i 写成 $y_1,\ldots,y_4$ 的一次齐式。

再根据 C 写出非退化线性替换 $X=CY$。

书上的练习。

配方法就是非退化线性替换。书上例题中的一步配方就是

$$\begin{cases} y_1 &= x_1+2x_2+x_3+2x_4 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \\ y_4 &= x_4 \end{cases}$$

写成线性替换时要将 x_i 写成 $y_1,\ldots,y_4$ 的一次齐式。

配方时不要犯如下错误：$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

$=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2$。

二次型

当把实二次型化为标准形，也就是平方和后，可再通过适当的非退化线性替换，将每个系数不为 0 的平方和的系数变为 $+1$ 或 -1。这就得到二次型的所谓**规范形**。

复数域上的二次型的规范形，平方项的系数是 0 或 1。

定理：一个二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 化为规范形时，系数为 $+1$ 的项的个数是唯一确定的，系数为 -1 的项的个数也是唯一确定的。此定理称为惯性定理。

证明：设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,

其中 r 为 f 的秩。

证明：设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形

$$f(x_1,\dots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

其中 r 为 f 的秩。

又 $f(x_1,\dots,x_n)$ 经另一非退化线性替换 $X=DZ$ 化成规范形

$$f(x_1,\dots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

证明：设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$

其中 r 为 f 的秩。

又 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经另一非退化线性替换 $X=DZ$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$

因非退化线性替换不改变二次型的秩，所以两个规范形都有 r 个非 0 项。要证明的是 $p=q$。

证明：设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$

其中 r 为 f 的秩。

又 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经另一非退化线性替换 $X=DZ$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$

因非退化线性替换不改变二次型的秩，所以两个规范形都有 r 个非 0 项。要证明的是 $p=q$。

反证法。如果 $p<q$。由 $X=CY$ 与 $X=DZ$ 有 $Y=C^{-1}DZ$。

证明：设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$

其中 r 为 f 的秩。

又 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 经另一非退化线性替换 $X=DZ$ 化成规范形

$f(x_1,\ldots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2,$

因非退化线性替换不改变二次型的秩，所以两个规范形都有 r 个非 0 项。要证明的是 $p=q$。

反证法。如果 $p<q$。由 $X=CY$ 与 $X=DZ$ 有 $Y=C^{-1}DZ$。

记 $C^{-1}D=(g_{ij})$，则 $Y=C^{-1}DZ$ 即写为

二次型

$$
\begin{cases}
y_1 & = g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n \\
y_2 & = g_{21}z_1 + g_{22}z_2 + \cdots + g_{2n}z_n \\
 & \ldots \\
y_n & = g_{n1}z_1 + g_{n2}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n
\end{cases}
$$

二次型

$$\begin{cases} y_1 & = g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n \\ y_2 & = g_{21}z_1 + g_{22}z_2 + \cdots + g_{2n}z_n \\ & \ldots \\ y_n & = g_{n1}z_1 + g_{n2}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n \end{cases}$$

构造齐次线性方程组：
$$\begin{cases} g_{11}z_1 + g_{12}z_2 + \cdots + g_{1n}z_n = 0 \\ \ldots \\ g_{p1}z_1 + g_{p2}z_2 + \cdots + g_{pn}z_n = 0 \\ z_{q+1} = 0 \\ \ldots \\ z_n = 0 \end{cases}$$

二次型

此方程组的前 p 个方程就是 $0 = C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

此方程组的前 p 个方程就是 $0 = C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

二次型

此方程组的前 p 个方程就是 $0=C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

此方程组所含方程的个数为 $p+n-q<n$，

此方程组的前 p 个方程就是 $0=C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

此方程组所含方程的个数为 $p+n-q<n$，

因此此方程组有非 0 解。

二次型

此方程组的前 p 个方程就是 $0 = C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

此方程组所含方程的个数为 $p+n-q<n$，

因此此方程组有非 0 解。

设其一个非 0 解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \ldots & z_q & z_{q+1} & \ldots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \ldots & k_q & k_{q+1} & \ldots & k_n \end{pmatrix},$$

二次型

此方程组的前 p 个方程就是 $0 = C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

此方程组所含方程的个数为 $p+n-q<n$，

因此此方程组有非 0 解。

设其一个非 0 解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $k_{q+1} = \cdots = k_n = 0$。

此方程组的前 p 个方程就是 $0 = C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

此方程组所含方程的个数为 $p+n-q<n$，

因此此方程组有非 0 解。

设其一个非 0 解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $k_{q+1} = \cdots = k_n = 0$。

所以 $k_1, \dots, k_q$ 不全为 0。

此方程组的前 p 个方程就是 $0=C^{-1}DZ$ 中的前 p 个式子，

后 $n-q$ 个方程限定了若干个 z_j 为 0。

此方程组所含方程的个数为 $p+n-q<n$，

因此此方程组有非 0 解。

设其一个非 0 解为

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_q & z_{q+1} & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & \dots & k_q & k_{q+1} & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $k_{q+1}=\cdots=k_n=0$。

所以 $k_1,\dots,k_q$ 不全为 0。

将这组数代入 z 所表达的规范形，得

$f(x_1,\dots,x_n)=k_1^2+\cdots+k_q^2>0$,

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组 l 带入 y 所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组 l 带入 y 所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以 $p < q$ 不成立。

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组 l 带入 y 所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以 $p < q$ 不成立。

同理可证 $p > q$ 也不成立。所以 $p = q$。

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组 l 带入 y 所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以 $p < q$ 不成立。

同理可证 $p > q$ 也不成立。所以 $p = q$。

正平方和的个数称为该二次型的**正惯性指数**；

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组 l 带入 y 所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以 $p < q$ 不成立。

同理可证 $p > q$ 也不成立。所以 $p = q$。

正平方和的个数称为该二次型的**正惯性指数**；

负平方和的个数称为该二次型的**负惯性指数**。

而 z 取这组 k 值时，对应的 y 值为

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_p & y_{p+1} & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_p & l_{p+1} & \dots & l_n \end{pmatrix},$$

由方程组知 $l_1 = \cdots = l_p = 0$，

将这组 l 带入 y 所表达的规范形，得

$$f(x_1, \dots, x_n) = -l_{p+1}^2 - \cdots - l_n^2 \leqslant 0,$$

与前式矛盾。所以 $p < q$ 不成立。

同理可证 $p > q$ 也不成立。所以 $p = q$。

正平方和的个数称为该二次型的**正惯性指数**；

负平方和的个数称为该二次型的**负惯性指数**。

正惯性指数减负惯性指数为**符号差**。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵 A 称为**负定矩阵**。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵 A 称为**负定矩阵**。

二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 负定的充要条件是 $X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵 A 称为**负定矩阵**。

二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 负定的充要条件是 $X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

引理：n 元实二次型（平方和）$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_n^2$ 正定的充要条件是所有的 c_i 都满足 $c_i > 0$。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵 A 称为**负定矩阵**。

二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 负定的充要条件是 $X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

引理：n 元实二次型（平方和）$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_n^2$ 正定的充要条件是所有的 c_i 都满足 $c_i > 0$。

证明：必要性。原二次型正定，则对 $X = \begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，二次型应大于 0。

正定二次型

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型**正定**。

正定二次型的矩阵 A 称为**正定矩阵**。

定义：若对任意 $X \neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX < 0$，则称实二次型**负定**。

负定二次型的矩阵 A 称为**负定矩阵**。

二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 负定的充要条件是 $X^{\mathrm{T}}(-A)X$ 正定。

引理：n 元实二次型（平方和）$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \cdots + c_nx_n^2$ 正定的充要条件是所有的 c_i 都满足 $c_i > 0$。

证明：必要性。原二次型正定，则对 $X = \begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，二次型应大于 0。

而此时二次型的值为 $c_i \cdot 1^2 = c_i$，所以 $c_i > 0$。

正定二次型

充分性。所有的 $c_i > 0$。则对任意 $X \neq 0$，则 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0，

正定二次型

充分性。所有的 $c_i > 0$。则对任意 $X \neq 0$，则 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i \neq 0$，

正定二次型

充分性。所有的 $c_i > 0$。则对任意 $X \neq 0$，则 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

正定二次型

充分性。所有的 $c_i>0$。则对任意 $X\neq 0$，则 $x_1,\ldots,x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i\neq 0$，

$c_1x_1^2+\cdots+c_ix_i^2+\cdots+c_nx_n^2\geqslant c_ix_i^2>0$。

即该二次型正定。

正定二次型

充分性。所有的 $c_i > 0$。则对任意 $X \neq 0$，则 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i \neq 0$，

$c_1x_1^2 + \cdots + c_ix_i^2 + \cdots + c_nx_n^2 \geqslant c_ix_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

引理：二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定，它经非退化线性替换 $X = CY$ 得到二次型 $Y^{\mathrm{T}}BY$。则 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 也正定。

正定二次型

充分性。所有的 $c_i > 0$。则对任意 $X \neq 0$，则 $x_1, \ldots, x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i \neq 0$，

$c_1 x_1^2 + \cdots + c_i x_i^2 + \cdots + c_n x_n^2 \geqslant c_i x_i^2 > 0$。

即该二次型正定。

引理：二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定，它经非退化线性替换 $X = CY$ 得到二次型 $Y^{\mathrm{T}}BY$。则 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 也正定。

证明：因为 $X = CY$ 成立时，$X^{\mathrm{T}}AX = Y^{\mathrm{T}}BY$。

正定二次型

充分性。所有的 $c_i>0$。则对任意 $X\neq 0$，则 $x_1,\ldots,x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i\neq 0$，

$c_1x_1^2+\cdots+c_ix_i^2+\cdots+c_nx_n^2\geqslant c_ix_i^2>0$。

即该二次型正定。

引理：二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定，它经非退化线性替换 $X=CY$ 得到二次型 $Y^{\mathrm{T}}BY$。则 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 也正定。

证明：因为 $X=CY$ 成立时，$X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}BY$。

对任意的 $Y\neq 0$，$X=CY\neq 0$。

正定二次型

充分性。所有的 $c_i>0$。则对任意 $X\neq 0$，则 $x_1,\ldots,x_n$ 不全为 0，

不妨设 $x_i\neq 0$，

$c_1x_1^2+\cdots+c_ix_i^2+\cdots+c_nx_n^2\geqslant c_ix_i^2>0$。

即该二次型正定。

引理：二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定，它经非退化线性替换 $X=CY$ 得到二次型 $Y^{\mathrm{T}}BY$。则 $Y^{\mathrm{T}}BY$ 也正定。

证明：因为 $X=CY$ 成立时，$X^{\mathrm{T}}AX=Y^{\mathrm{T}}BY$。

对任意的 $Y\neq 0$，$X=CY\neq 0$。

因 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定，所以 $Y^{\mathrm{T}}BY=X^{\mathrm{T}}AX>0$。

正定二次型

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

正定二次型

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

正定二次型

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

正定二次型

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于 0。

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于 0。

所以它的正惯性指数是 n。

正定二次型

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于 0。

所以它的正惯性指数是 n。

充分性类似可证。

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于 0。

所以它的正惯性指数是 n。

充分性类似可证。

推论：n 元实二次型负定的充要条件是：它的负惯性指数是 n。

正定二次型

定理：n 元实二次型正定的充要条件是：它的正惯性指数是 n。

证明：前面已经证明，二次型都可以经过非退化线性替换化成标准形。

所以二次型正定的充要条件是它的标准形正定。

如果原二次型正定，则其标准形正定。所以其所有平方项系数都大于 0。

所以它的正惯性指数是 n。

充分性类似可证。

推论：n 元实二次型负定的充要条件是：它的负惯性指数是 n。

推论：二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定，则 $\det(A) > 0$。

正定二次型

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$，其中所有 $d_i>0$。

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有 $d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

正定二次型

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有 $d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为 $\det^2(C) > 0$，所以有 $\det(A) > 0$。

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$，其中所有 $d_i>0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}|\cdot|A|\cdot|C|=d_1\cdots d_n$。

又因为 $\det^2(C)>0$，所以有 $\det(A)>0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有 $d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为 $\det^2(C) > 0$，所以有 $\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

第 n 个顺序主子式是取第 $1, \ldots, n$ 行和列的主子式。

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有 $d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为 $\det^2(C) > 0$，所以有 $\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

第 n 个顺序主子式是取第 $1, \ldots, n$ 行和列的主子式。

定理：n 元实二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

正定二次型

证明：A 正定。所以存在可逆矩阵 C，使

$C^{\mathrm{T}}AC = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$，其中所有 $d_i > 0$。

两边取行列式，$|C^{\mathrm{T}}| \cdot |A| \cdot |C| = d_1 \cdots d_n$。

又因为 $\det^2(C) > 0$，所以有 $\det(A) > 0$。

主子式是指取行和列相同的子式。

第 n 个顺序主子式是取第 $1, \ldots, n$ 行和列的主子式。

定理：n 元实二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

因 A 正定，由上一个定理，$|A| > 0$。

对任意 $k=1,2,\ldots,n$，只要 $x_1,\ldots,x_k$ 不全为 0，就有

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0.$$

正定二次型

对任意 $k=1,2,\ldots,n$，只要 $x_1,\ldots,x_k$ 不全为 0，就有
$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0.$
因为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 正定，所以 $f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)>0$。

正定二次型

对任意 $k=1,2,\ldots,n$，只要 $x_1,\ldots,x_k$ 不全为 0，就有
$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0.$

因为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 正定，所以 $f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)>0$。

但 $f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ 是关于 $x_1,\ldots,x_k$ 的一个二次型。

正定二次型

对任意 $k=1,2,\ldots,n$，只要 $x_1,\ldots,x_k$ 不全为 0，就有 $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq 0.$

因为 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 正定，所以 $f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)>0$。

但 $f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ 是关于 $x_1,\ldots,x_k$ 的一个二次型。

$$f_k(x_1,\ldots,x_k)=\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

正定二次型

$$
= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]
$$

正定二次型

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}$$

其中 A_k 为 A 的前 k 行前 k 列所构成的矩阵，其行列式就是 A 的第 k 个顺序主子式。

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_k & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \left[A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}$$

其中 A_k 为 A 的前 k 行前 k 列所构成的矩阵，其行列式就是 A 的第 k 个顺序主子式。

上式说明 A_k 就是 $f_k(x_1, \dots, x_k)$ 的矩阵。

正定二次型

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k| > 0$。

正定二次型

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k| > 0$。

充分性。n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$。已知 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

正定二次型

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k| > 0$。

充分性。n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$。已知 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

对 n 进行数学归纳法。

正定二次型

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k| > 0$。

充分性。n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$。已知 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

对 n 进行数学归纳法。

$n = 1$ 时，二次型为 $f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知 $a_{11} > 0$，所以二次型 $f(x_1)$ 正定。

正定二次型

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k|>0$。

充分性。n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$。已知 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

对 n 进行数学归纳法。

$n=1$ 时，二次型为 $f(x_1)=a_{11}x_1^2$，因为已知 $a_{11}>0$，所以二次型 $f(x_1)$ 正定。

故 $n=1$ 时定理成立。假设对 $n-1$，定理成立。

正定二次型

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k| > 0$。

充分性。n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$。已知 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

对 n 进行数学归纳法。

$n = 1$ 时，二次型为 $f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知 $a_{11} > 0$，所以二次型 $f(x_1)$ 正定。

故 $n = 1$ 时定理成立。假设对 $n-1$，定理成立。

对 n，因为已知 $a_{11} > 0$，将 A 的第 1 列乘 $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ 加到第 j 列上，A 的第 1 行乘 $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 加到第 j 行上，$j = 2, \ldots, n$。

前面已证明 f_k 正定，所以依前面已证的定理知 $|A_k| > 0$。

充分性。n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$。已知 A 的各阶顺序主子式都大于 0。

对 n 进行数学归纳法。

$n = 1$ 时，二次型为 $f(x_1) = a_{11}x_1^2$，因为已知 $a_{11} > 0$，所以二次型 $f(x_1)$ 正定。

故 $n = 1$ 时定理成立。假设对 $n-1$，定理成立。

对 n，因为已知 $a_{11} > 0$，将 A 的第 1 列乘 $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ 加到第 j 列上，A 的第 1 行乘 $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 加到第 j 行上，$j = 2, \ldots, n$。

这是一系列行列初等变换，也是合同变换。即得到等式：

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意到所用的初等变换是第三类的，不改变行列式的值。所以

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{k-1,2} & \dots & b_{k-1,k-1} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1,2} & \dots & b_{k-1,k-1} \end{vmatrix},$$

$k = 2, \dots, n.$

正定二次型

因为已知 $|A_k| > 0$，所以上式表明矩阵 $(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$ 的各阶顺序主子式都大于 0。

正定二次型

因为已知 $|A_k| > 0$，所以上式表明矩阵 $(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$ 的各阶顺序主子式都大于 0。

但前面矩阵等式表明，二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 经非退化线性替换 $X = PY$ 得到二次型

$$Y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} Y = a_{11}y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n),$$

正定二次型

因为已知 $|A_k| > 0$，所以上式表明矩阵 $(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$ 的各阶顺序主子式都大于 0。

但前面矩阵等式表明，二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 经非退化线性替换 $X = PY$ 得到二次型

$$Y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} Y = a_{11}y_1^2 + g(y_2,\dots,y_n),$$

上式中的 $g(y_2,\dots,y_n)$ 是 $y_2,\dots,y_n$ 的二次型，且该二次型的矩阵为 $(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$。

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

根据归纳法假设，$g(y_2, \ldots, y_n)$ 是正定的二次型。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

根据归纳法假设，$g(y_2,\ldots,y_n)$ 是正定的二次型。

所以二次型 $a_{11}y_1^2+g(y_2,\ldots,y_n)$ 正定。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

根据归纳法假设，$g(y_2,\dots,y_n)$ 是正定的二次型。

所以二次型 $a_{11}y_1^2+g(y_2,\dots,y_n)$ 正定。

所以 f 正定。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

根据归纳法假设，$g(y_2,...,y_n)$ 是正定的二次型。

所以二次型 $a_{11}y_1^2+g(y_2,...,y_n)$ 正定。

所以 f 正定。

由数学归纳法，对一切正整数 n，定理成立。

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

根据归纳法假设，$g(y_2,\ldots,y_n)$ 是正定的二次型。

所以二次型 $a_{11}y_1^2+g(y_2,\ldots,y_n)$ 正定。

所以 f 正定。

由数学归纳法，对一切正整数 n，定理成立。

推论：n 元实二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 为负定的充要条件是：矩阵 A 的所有奇数阶顺序主子式都为负，一切偶数阶顺序主子式都为正。

正定二次型

前面已经证明，(b_{ij}) 的各阶顺序主子式都大于 0。

根据归纳法假设，$g(y_2,\dots,y_n)$ 是正定的二次型。

所以二次型 $a_{11}y_1^2+g(y_2,\dots,y_n)$ 正定。

所以 f 正定。

由数学归纳法，对一切正整数 n，定理成立。

推论：n 元实二次型 $f(x_1,\dots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 为负定的充要条件是：矩阵 A 的所有奇数阶顺序主子式都为负，一切偶数阶顺序主子式都为正。

定理指出，判定二次型正定与否只需要计算若干个行列式。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

如果进一步要求 Q 为正交矩阵，能否让 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵？

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

如果进一步要求 Q 为正交矩阵，能否让 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵？

如果存在正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵，那么 A 会满足哪些条件：

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

如果进一步要求 Q 为正交矩阵，能否让 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵？

如果存在正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵，那么 A 会满足哪些条件：

- 矩阵 A 的特征值必为实数。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

如果进一步要求 Q 为正交矩阵，能否让 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵？

如果存在正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵，那么 A 会满足哪些条件：

- 矩阵 A 的特征值必为实数。
- A 的关于不同特征值的特征向量彼此正交。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

如果进一步要求 Q 为正交矩阵，能否让 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵？

如果存在正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵，那么 A 会满足哪些条件：

- 矩阵 A 的特征值必为实数。
- A 的关于不同特征值的特征向量彼此正交。
- A 的 k 重特征值 λ_i 的特征子空间的维数恰为 k。

正交变换化二次型为标准形

前面讲到，对任意实对称矩阵 A，可以找到实矩阵 C，C 可逆，而使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵。

如果进一步要求 Q 为正交矩阵，能否让 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵？

如果存在正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角形矩阵，那么 A 会满足哪些条件：

- 矩阵 A 的特征值必为实数。
- A 的关于不同特征值的特征向量彼此正交。
- A 的 k 重特征值 λ_i 的特征子空间的维数恰为 k。

将证明，实对称矩阵都满足这三条。

正交变换化二次型为标准形

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

正交变换化二次型为标准形

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

定理：n 阶实对称矩阵的特征值必为实数。

正交变换化二次型为标准形

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

定理：n 阶实对称矩阵的特征值必为实数。

证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵。复数 λ 为 A 的一个特征值。

正交变换化二次型为标准形

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

定理：n 阶实对称矩阵的特征值必为实数。

证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵。复数 λ 为 A 的一个特征值。X 为 A 的关于 λ 的特征向量，也是在复数域。

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

定理：n 阶实对称矩阵的特征值必为实数。

证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵。复数 λ 为 A 的一个特征值。X 为 A 的关于 λ 的特征向量，也是在复数域。

$$AX = \lambda X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

定理：n 阶实对称矩阵的特征值必为实数。

证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵。复数 λ 为 A 的一个特征值。

X 为 A 的关于 λ 的特征向量，也是在复数域。

$$AX = \lambda X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式两边左乘 $\overline{X}^{\mathrm{T}}$，得 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX = \lambda\overline{X}^{\mathrm{T}}X$。

正交变换化二次型为标准形

再证对任意实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 使 A 对角化。

定理：n 阶实对称矩阵的特征值必为实数。

证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵。复数 λ 为 A 的一个特征值。

X 为 A 的关于 λ 的特征向量，也是在复数域。

$$AX = \lambda X, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式两边左乘 $\overline{X}^{\mathrm{T}}$，得 $\overline{X}^{\mathrm{T}} AX = \lambda \overline{X}^{\mathrm{T}} X$。

注意 $\overline{X}^{\mathrm{T}} X = \overline{x_1} x_1 + \cdots + \overline{x_n} x_n$ 是实数，且 > 0。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端，注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X^{\mathrm{T}}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}=\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X}=X^{\mathrm{T}}A\overline{X}=(X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$=\overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 的唯一一个元素是实数。

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 的唯一一个元素是实数。

所以 $\lambda = \frac{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}{X^{\mathrm{T}}X}$ 也是实数。证毕。

正交变换化二次型为标准形

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX} = \overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X} = X^{\mathrm{T}}A\overline{X} = (X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$= \overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 的唯一一个元素是实数。

所以 $\lambda = \frac{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}{X^{\mathrm{T}}X}$ 也是实数。证毕。

定理说明在该实对称矩阵的特征向量中可以找到实向量。

前式等号的另一端, 注意到 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 1×1 矩阵。

因为 A 是实矩阵，又是对称矩阵。

$$\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}=\overline{\overline{X}^{\mathrm{T}}}\cdot\overline{A}\cdot\overline{X}=X^{\mathrm{T}}A\overline{X}=(X^{\mathrm{T}}A\overline{X})^{\mathrm{T}}$$

$$=\overline{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\overline{X}^{\mathrm{T}}AX,$$

由上式知 $\overline{X}^{\mathrm{T}}AX$ 的唯一一个元素是实数。

所以 $\lambda=\frac{\overline{X}^{\mathrm{T}}AX}{X^{\mathrm{T}}X}$ 也是实数。证毕。

定理说明在该实对称矩阵的特征向量中可以找到实向量。

定理：设 λ_1 与 λ_2 是实对称矩阵 A 的两个不等特征值。X_1 与 X_2 分别是 A 的关于 λ_1 和关于 λ_2 的特征向量，则 X_1 与 X_2 正交。

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且 $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，都为实向量。

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且 $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵，所以 $X_1^T A = \lambda_1 X_1^T$，

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且 $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵, 所以 $X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘 X_2，得

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且 $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵, 所以 $X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘 X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1^{\mathrm{T}} A X_2 = X_1^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^{\mathrm{T}} X_2$。

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且 $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵, 所以 $X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘 X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1^{\mathrm{T}} A X_2 = X_1^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^{\mathrm{T}} X_2$。

所以 $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^{\mathrm{T}} X_2 = 0.$

正交变换化二次型为标准形

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1 X_1$，$AX_2=\lambda_2 X_2$，

且 $X_1\neq 0$，$X_2\neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵, 所以 $X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$,

此式两边右乘 X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}X_2=X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_2 X_2=\lambda_2 X_1^{\mathrm{T}}X_2$。

所以 $(\lambda_1-\lambda_2)X_1^{\mathrm{T}}X_2=0.$

但 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $X_1^{\mathrm{T}}X_2=0$，即 X_1 与 X_2 正交。

证明：由题设，$AX_1=\lambda_1X_1$，$AX_2=\lambda_2X_2$，

且 $X_1\neq 0$，$X_2\neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵，所以 $X_1^{\mathrm{T}}A=\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}$，

此式两边右乘 X_2，得

$\lambda_1X_1^{\mathrm{T}}X_2=X_1^{\mathrm{T}}AX_2=X_1^{\mathrm{T}}\cdot\lambda_2X_2=\lambda_2X_1^{\mathrm{T}}X_2$。

所以 $(\lambda_1-\lambda_2)X_1^{\mathrm{T}}X_2=0.$

但 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $X_1^{\mathrm{T}}X_2=0$，即 X_1 与 X_2 正交。

对将每个不同特征值取一个特征向量放到一起构成向量组的情形，用此定理就可以知道该向量组是一个正交组。

证明：由题设，$AX_1 = \lambda_1 X_1$，$AX_2 = \lambda_2 X_2$，

且 $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，都为实向量。

将第一式转置，注意 A 是实对称矩阵，所以 $X_1^{\mathrm{T}} A = \lambda_1 X_1^{\mathrm{T}}$，

此式两边右乘 X_2，得

$\lambda_1 X_1^{\mathrm{T}} X_2 = X_1^{\mathrm{T}} A X_2 = X_1^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^{\mathrm{T}} X_2$。

所以 $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1^{\mathrm{T}} X_2 = 0.$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $X_1^{\mathrm{T}} X_2 = 0$，即 X_1 与 X_2 正交。

对将每个不同特征值取一个特征向量放到一起构成向量组的情形，用此定理就可以知道该向量组是一个正交组。

若每个不同特征值取多个向量，则未必是正交组。

正交变换化二次型为标准形

但因为特征向量的线性组合只要不是 0 向量，就是特征向量。

正交变换化二次型为标准形

但因为特征向量的线性组合只要不是 0 向量，就是特征向量。所以若找到 l 个 A 的关于特征值 λ_i 的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到 l 个两两正交的 A 的关于 λ_i 的特征向量。

但因为特征向量的线性组合只要不是 0 向量，就是特征向量。所以若找到 l 个 A 的关于特征值 λ_i 的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到 l 个两两正交的 A 的关于 λ_i 的特征向量。

定理：设 λ_0 是 n 阶实对称矩阵的 k 重特征值，则 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数恰为 k，即齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系恰有 k 个解向量。

正交变换化二次型为标准形

但因为特征向量的线性组合只要不是 0 向量，就是特征向量。所以若找到 l 个 A 的关于特征值 λ_i 的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到 l 个两两正交的 A 的关于 λ_i 的特征向量。

定理：设 λ_0 是 n 阶实对称矩阵的 k 重特征值，则 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数恰为 k，即齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系恰有 k 个解向量。

设 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数为 l，矩阵的对角化那一节已经证明 $l \leqslant k$。

正交变换化二次型为标准形

但因为特征向量的线性组合只要不是 0 向量，就是特征向量。

所以若找到 l 个 A 的关于特征值 λ_i 的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到 l 个两两正交的 A 的关于 λ_i 的特征向量。

定理：设 λ_0 是 n 阶实对称矩阵的 k 重特征值，则 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数恰为 k，即齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系恰有 k 个解向量。

设 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数为 l，矩阵的对角化那一节已经证明 $l \leqslant k$。

现在只要证 $l < k$ 不可能。

但因为特征向量的线性组合只要不是 0 向量，就是特征向量。

所以若找到 l 个 A 的关于特征值 λ_i 的特征向量，就可以通过施密特正交化，得到 l 个两两正交的 A 的关于 λ_i 的特征向量。

定理：设 λ_0 是 n 阶实对称矩阵的 k 重特征值，则 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数恰为 k，即齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系恰有 k 个解向量。

设 A 的关于 λ_0 的特征子空间的维数为 l，矩阵的对角化那一节已经证明 $l \leqslant k$。

现在只要证 $l < k$ 不可能。

若 $l < k$，即只能找到 l 个线性无关的 A 关于 λ_0 的特征向量。

正交变换化二次型为标准形

在这 l 个向量的基础上添加 $n-l$ 个向量，构成 n 维向量空间的一组基底。将这组基底施密特正交化，再单位化，得到向量组设为 $X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$。

在这 l 个向量的基础上添加 $n-l$ 个向量，构成 n 维向量空间的一组基底。将这组基底施密特正交化，再单位化，得到向量组设为 $X_1,\ldots,X_l,X_{l+1},\ldots,X_n$。

由施密特正交化过程知，$X_1,\ldots,X_l$ 是关于 λ_0 的特征向量。于是

$$A\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_l & X_{l+1} & \ldots & X_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_0 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & \ldots & \lambda_0 & * \\ & & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

正交变换化二次型为标准形

在这 l 个向量的基础上添加 $n-l$ 个向量，构成 n 维向量空间的一组基底。将这组基底施密特正交化，再单位化，得到向量组设为 $X_1,\dots,X_l,X_{l+1},\dots,X_n$。

由施密特正交化过程知，$X_1,\dots,X_l$ 是关于 λ_0 的特征向量。于是

$$A\begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_l & X_{l+1} & \dots & X_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_0 & * \\ & & 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

此时 $P=\begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_l & X_{l+1} & \dots & X_n \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，所以 $P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP$，故 $P^{\mathrm{T}}AP$ 仍是对称矩阵。

正交变换化二次型为标准形

因此肯定 A_1 的上方的矩阵元素都为 0，即上式中的 $* = 0$。

因此肯定 A_1 的上方的矩阵元素都为 0，即上式中的 $* = 0$。

因为 $l < k$，所以 λ_0 也是 A_1 的特征值。

因此肯定 A_1 的上方的矩阵元素都为 0，即上式中的 $* = 0$。

因为 $l < k$，所以 λ_0 也是 A_1 的特征值。

于是至少存在一个 A_1 的关于 λ_0 的实特征向量。

因此肯定 A_1 的上方的矩阵元素都为 0，即上式中的 $* = 0$。

因为 $l < k$，所以 λ_0 也是 A_1 的特征值。

于是至少存在一个 A_1 的关于 λ_0 的实特征向量。

对 A_1 重复前面的步骤，即补充 $n-l-1$ 个向量形成线性无关组，再正交化并单位化，得到一个 $n-l$ 阶的正交矩阵 P_1，

因此肯定 A_1 的上方的矩阵元素都为 0，即上式中的 $* = 0$。

因为 $l < k$，所以 λ_0 也是 A_1 的特征值。

于是至少存在一个 A_1 的关于 λ_0 的实特征向量。

对 A_1 重复前面的步骤，即补充 $n-l-1$ 个向量形成线性无关组，再正交化并单位化，得到一个 $n-l$ 阶的正交矩阵 P_1，

于是 $P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

因此肯定 A_1 的上方的矩阵元素都为 0，即上式中的 $* = 0$。

因为 $l < k$，所以 λ_0 也是 A_1 的特征值。

于是至少存在一个 A_1 的关于 λ_0 的实特征向量。

对 A_1 重复前面的步骤，即补充 $n-l-1$ 个向量形成线性无关组，再正交化并单位化，得到一个 $n-l$ 阶的正交矩阵 P_1，

于是 $P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

构造 n 阶矩阵：$Q = P\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & P_1 \end{pmatrix} = PP_2$。$Q$ 是正交矩阵。

计算 $Q^{\mathrm{T}}AQ$：

$$P_2^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}APP_2=\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & 1 & \\ & & P_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \\ \cdots & \lambda_0 & 0 \\ & 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & 1 & \\ & & P_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_0 & \\ & & & P_1'A_1P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_0 & 0 & \\ & & 0 & \lambda_0 & \\ & & & & A_2\end{pmatrix}.$$

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

与假设的只有 l 个 A 的关于 λ_0 的线性无关特征向量矛盾。

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

与假设的只有 l 个 A 的关于 λ_0 的线性无关特征向量矛盾。

于是 $l=k$。证毕。

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

与假设的只有 l 个 A 的关于 λ_0 的线性无关特征向量矛盾。

于是 $l=k$。证毕。

定理：任意 n 阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵 C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}.$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值。

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

与假设的只有 l 个 A 的关于 λ_0 的线性无关特征向量矛盾。

于是 $l=k$。证毕。

定理：任意 n 阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵 C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值。

证明：设 A 共有 l 个互异特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，其重数分别为 $t_1, \ldots, t_l$。

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

与假设的只有 l 个 A 的关于 λ_0 的线性无关特征向量矛盾。

于是 $l=k$。证毕。

定理：任意 n 阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵 C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值。

证明：设 A 共有 l 个互异特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$，其重数分别为 $t_1, \ldots, t_l$。

显然 $t_1 + \cdots + t_l = n$。

正交变换化二次型为标准形

这说明找到了 $l+1$ 个 A 的关于 λ_0 的线性无关的特征向量。

与假设的只有 l 个 A 的关于 λ_0 的线性无关特征向量矛盾。

于是 $l=k$。证毕。

定理：任意 n 阶实对称矩阵，都存在一个正交矩阵 C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}.$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值。

证明：设 A 共有 l 个互异特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$，其重数分别

为 $t_1,\ldots,t_l$。

显然 $t_1+\cdots+t_l=n$。

前面已经证明对每个 λ_i，可以找到 t_i 个线性无关的特征向量。

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

正交变换化二次型为标准形

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$$X_{11},\ldots,X_{1t_1},X_{21},\ldots,X_{2t_2},\ldots,X_{l1},\ldots,X_{lt_l}.$$

正交变换化二次型为标准形

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\dots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\dots,X_{1t_1},X_{21},\dots,X_{2t_2},\dots,X_{l1},\dots,X_{lt_l}$.

一共 n 个 n 维列向量。

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\ldots,X_{1t_1},X_{21},\ldots,X_{2t_2},\ldots,X_{l1},\ldots,X_{lt_l}.$

一共 n 个 n 维列向量。

由前面定理，这 n 个列向量两两正交，且都是单位向量。

正交变换化二次型为标准形

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\dots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\dots,X_{1t_1},X_{21},\dots,X_{2t_2},\dots,X_{l1},\dots,X_{lt_l}$.

一共 n 个 n 维列向量。

由前面定理，这 n 个列向量两两正交，且都是单位向量。

于是将它们排成一个矩阵 C，C 是正交矩阵。且

$C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_1,\dots,\lambda_l,\dots,\lambda_l\}$.

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\ldots,X_{1t_1},X_{21},\ldots,X_{2t_2},\ldots,X_{l1},\ldots,X_{lt_l}.$

一共 n 个 n 维列向量。

由前面定理，这 n 个列向量两两正交，且都是单位向量。

于是将它们排成一个矩阵 C，C 是正交矩阵。且

$C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_1,\ldots,\lambda_l,\ldots,\lambda_l\}.$

证毕。

将这 t_i 个向量正交化，单位化，得到 t_i 个两两正交的特征向量：$X_{i1},\ldots,X_{it_i}$。

如此便得到向量组：

$X_{11},\ldots,X_{1t_1},X_{21},\ldots,X_{2t_2},\ldots,X_{l1},\ldots,X_{lt_l}.$

一共 n 个 n 维列向量。

由前面定理，这 n 个列向量两两正交，且都是单位向量。

于是将它们排成一个矩阵 C，C 是正交矩阵。且

$C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_1,\ldots,\lambda_l,\ldots,\lambda_l\}.$

证毕。

证明过程就是求正交矩阵 C 的过程。

正交变换化二次型为标准形

n 元实二次型 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$，其中 A 为实对称矩阵，都存在正交变换 $X=CY$，把该二次型化为标准形

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的特征值。

总复习

区分“相等”与“等价”：

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。
- 二次型的相等和二次型的等价。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。
- 二次型的相等和二次型的等价。
- 线性变换的相等。

总复习

区分“相等”与“等价”：

- 矩阵的相等和矩阵的等价。
- 向量组的相等与等价。
- 二次型的相等和二次型的等价。
- 线性变换的相等。

初等变换：