姓名

学号

专业

任课教师

南开大学 2019 级“一元函数积分（信）”结课统考试卷（A 卷） 2019 年 12 月 30 日

草稿区

（说明：答案务必写在装订线右侧，写在装订线左侧无效。影响成绩后果自负。）

题号	一	二	三	四	五	六	七	卷面成绩	核分签名	复核签名
得分										

一 题得分	

一、选择题(每小题 4 分)

$-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2)$

（1）设 $\int f(x)dx=\sin x+C$，则 $\int xf(1-x^2)dx$ =(   ):

(A) $2\sin(1-x^2)+C$; (B) $-2\sin(1-x^2)+C$; (C) $(1/2)\sin(1-x^2)+C$; (D) $-(1/2)\sin(1-x^2)+C$

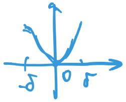
（2）设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则 $\int f(2x)dx=$（   ）:

$\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)$

（A）$F(2x)+C$；（B）$F(x/2)+C$；(C) $(1/2)F(2x)+C$; (D) $2F(x/2)+C$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有二次导数，$\delta>0$，$f''(x)>0$，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，则 $I=\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dx$ 满足（   ）:

$\delta>0, f'(x)$ 单



（A）$I=0$；（B）$I>0$；(C) $I<0$；(D) 正负号不确定

设 $x=n\pi+x_0$ $x_0<\pi$

$\int_0^{n\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}$

（4）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\,dt}{x}=$（ D ）:

$\int_0^{\pi\cdot\frac{x}{\pi}}|\sin t|\,dt$

$=\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt.$

$-\cos t\Big|_0^{\pi}=2.$

（A）1；(B) 0；（C）不存在；（D）$2/\pi$

(4). $\int_0^{n\pi}|\sin t|dt+\int_{n\pi}^{x}|\sin t|dt$

$=n\int_0^{\pi}\sin t\,dt+\int_0^{x-n\pi}\sin t\,dt$

$=2n-\cos t\Big|_0^{x_0}$

$=2n+1-\cos(x_0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1-\cos x_0}{n\pi+x_0}$

$=\frac{2}{\pi}.$

(5) 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,x=y=0\end{cases}$，则该函数在（0，0）点（   ）:

(A) 连续，且偏导数存在，但不可微；（B）不连续；(C) 连续，但偏导数不存在；(D）可微

$\int_0^{n\pi}|\sin t|dt+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt.$

$n\int_0^{\pi}\sin t\,dt.$

姓名

姓名

学号

专业

任课教师

设 $f(x)=x-a$

$\int_0^1 t(t-a)\,dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1-\frac{a}{2}t^2\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}=a.$

$\frac{3}{2}a=\frac{1}{3}$

草稿区

二、填空题（每小题 4 分）:

二题得分	

（1） 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=x-\int_0^1 \underbrace{tf(t)dt}_{a.}$，则 $f(x)=$ $x-\frac{2}{9}$

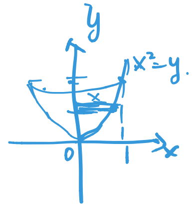
（2） 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{xz}=x^2+y^2$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=$________

（3） 原点到平面 $2x+2y+z-9=0$ 的距离为 $\frac{|9|}{\sqrt{9}}$ 3

（4） 设一平面过原点和点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=7$ 垂直，则此平面方程为 $2x+2y-3z=0$

$\vec{n}=\begin{vmatrix}6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=\{-4,-4,6\}$ $\{2,2,-3\}$ $\vec{n}=\{l,m,n\}$

（5） 曲线 $y=x^2$，$(0\le x\le 1)$，绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{\pi}{2}$



$dv=dy\cdot\pi x^2=\pi y\,dy$

$\pi\int_0^1 y\,dy$

三、求下列不定积分:（每小题 6 分）

三题得分	

（1） $\int\frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$；

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$

(2) $\int\sec^6 xdx$；

$=\int\sec^4 x\,d\tan x$

$=\int(\tan^2 x+1)^2\,d\tan x$

$t=\tan x$

$=\int(t^4+2t^2+1)\,dt$

$=\frac{1}{5}(\tan x)^5+\frac{2}{3}(\tan x)^3+\tan x+C.$

（3） $\int x\sin^2 xdx$；

$\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\int\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int x\,d\sin 2x$

$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\left[x\sin 2x - \int \sin 2x\,dx\right] + C.$

姓名

学号

专业

任课教师

四、求下列定积分（每小题 7 分）：

四题得分	

（1） $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$；

$= \ln(1+\sqrt{x})\cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}x}{1+\sqrt{x}}dx$

$= \ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{2t^2}{1+t}dt$

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$；

$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{} \cdot \frac{1}{\sec^2 x + 3}dx$ （$\sec^2 x$）

$= \int \frac{1}{\tan^2 x + 4}d\tan x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

（3） $\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$

草稿区

$\int_{-2}^{0} x\ln(e^x+1)dx$

$= \int_{-2}^{0} x\ln e^x(e^{-x}+1)dx$

$= \int_{-2}^{0} x(x+\ln(e^{-x}+1))dx$

$= \int_{-2}^{0} x^2dx + \int_{-2}^{0} x\ln(e^{-x}+1)dx$ $\quad x=-t$

$= \frac{8}{3} + \int_{2}^{0}(-t)\ln(e^t+1)d(-t)$

dx

$= \frac{8}{3} - \int_0^2 t\ln(e^t+1)dt$

五、(7 分) 设 $f(x) = x\int_1^x \frac{\arctan t^2}{t}dt$, 计算 $\int_0^1 f(x)dx$.

五题得分	

$\frac{f(x)}{x} = \int_1^x \frac{\arctan t^2}{t}dt$

两边求导

$\frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2} = \frac{\arctan x^2}{x}$

$f'(x)\cdot x - f(x) = x\arctan x^2$ ①

由于 $\int_0^1 f(x)dx = f(x)\cdot x\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\cdot x\,dx = -\int_0^1 f'(x)x\,dx$

由此知 两式 两边求积分

$\int_0^1 f'(x)x\,dx - \int_0^1 f(x)dx = -2\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\arctan x\ dx$

$= \frac{1}{8}(\pi - 2\ln 2)$

从而 $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{16}(\pi - 2\ln 2)$

姓名

学号

专业

任课教师

草稿区

六、（8 分）设二元函数 $f(u,v)$.具有连续二阶偏导数， $z = f(2x+3y, x+y)$,

七题 得分	

试求： $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

七、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，

七题 得分	

且满足 $|f'(x)| \le 1, f(0) = f(2) = 1$, 证明: $1 \le \int_0^2 f(x)dx \le 3$

在 $x \in [0,1]$ 上用 Lagrange 中值定理， $\exists \xi \in (0,x)$

$f(x) = f(0) + f'(\xi)\cdot x = 1 + f'(\xi)\cdot x$

从而 $1 - x \le f(x) \le 1 + x$

在 $[1,2]$ 上类似的 $\exists \eta \in (x,2)$

$f(x) = f(2) + f'(\eta)(x-2)$

$x - 1 \le f(x) \le 3 - x$

从而 $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

$$\leq \int_0^1 (1+x)\,dx + \int_1^2 (3-x)\,dx = 3$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$\geq \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = 1$$