几个题目.

P139. 1.(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to0}\frac{e\left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right)}{x}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}-1=0$$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}{x}$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$ $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$

$$=-\frac{1}{2}e$$

2.(7) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to1}e^{\tan\frac{\pi}{2}x\ln(2-x)}$$

由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{\ln(2-x)}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sec^2\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{(2-x)\ln^2(2-x)}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2-x)\ln^2(2-x)}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2}=\frac{2}{\pi}$$

由此原极限 $=e^{\frac{2}{\pi}}$

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{\sin x}+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(e^{\tan x}+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$

解: 令 $\begin{cases}\sin x=s=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ \tan x=t=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\end{cases}$

则考虑 $(e^s+s)^{\frac{1}{s}}-(e^t+t)^{\frac{1}{t}}$

$$=e^{\frac{1}{t}\ln(e^t+t)}\left(e^{\frac{1}{s}\ln(e^s+s)-\frac{1}{t}\ln(e^t+t)}-1\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{t}\ln(e^t+t)}=2$ $\quad t=\tan x$

$x\to0$ 时. $e^{\frac{1}{s}\ln(e^s+s)-\frac{1}{t}\ln(e^t+t)}-1\sim\frac{1}{s}\ln(e^s+s)-\frac{1}{t}\ln(e^t+t)$

下面将 $\frac{1}{s}\ln(e^s+s)$ 进行 Taylor 展开

$= \frac{1}{s} \ln\left(1+2s+\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + o(s^3)\right)$ → 没有必要 后续会抵消

$= \frac{1}{s}\left(2s+\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\left(2s+\frac{s^2}{2}\right)^2+o(s^4)\right)$

$= 2-\frac{3}{2}s+o(s^4)$ s^3 抵消

同理有. $\frac{1}{s}\ln(e^s+s)-\frac{1}{t}\ln(e^t+t)$

$= -\frac{3}{2}(s-t)+o(s^4)+o(t^4) = -\frac{3}{2}x-\frac{x^3}{2} = \frac{3}{4}x^3$

从而 原极限 $= e^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{4}x^3}{x^3} = \frac{3}{4}e^2$