吴民　整理

线性代数辅导（补充题）

（第三版）

二零一六年十月

前　言

计算机与控制工程学院（原信息学院）线性代数课程所使用的教材是四川大学数学学院编写的《高等数学》（物理类专业用）第三册的第一部分（线性代数）。在多年讲授该课程的过程中，不断整理使用的资料，形成这个小册子，作为课程的辅导材料。

小册子的主要内容是：教材习题中部分习题的答案，给出答案的原因，有些是因为题目有些小难度，有些则是希望学生学习正确的答题格式，养成良好的学习习惯。目前给出了教材的 41 道习题的答案；列举了若干从相关教材或习题集（见参考文献）中筛选的习题，共 175 题。这些补充题中，有些题目具有教材没有出现的题型，另一些题目难度稍大。希望同学们能通过作补充题开阔眼界，也开拓思路。部分习题给出了多种解法或证法。

吴民

目录

第一章　教材部分习题答案

希望同学们先不看答案自己动手做题，待自己作完后再参考答案。同时也应参考题目解答的格式，包括书上例题的写法，作到不仅会做题，而且能把答案表述清晰。

第一节　行列式

本章的最基本内容：行列式的简单计算；行列式按某一行（列）展开的公式，余子式的公式；拉普拉斯定理。基本要求是能熟练的计算简单的行列式。

习题 1: 已知排列$i_1i_2\dots i_n$的反序数，求排列$i_ni_{n-1}\dots i_1$的反序数。

解: 由$1,\dots,n$构成的任意排列，从中选出不同的数对的个数为$\binom{n}{2}$。而这些数对中，要么为正序，要么为反序。因此如果$i_1i_2\dots i_n$的正序数为x，反序数为$y=\tau(i_1i_2\dots i_n)$，则

$$x+y=\binom{n}{2}.$$

而对于排列$i_1i_2\dots i_n$中的每个数对，若为正序，则在$i_ni_{n-1}\dots i_1$中就是反序；若为反序，则在$i_ni_{n-1}\dots i_1$中是正序。因此$i_ni_{n-1}\dots i_1$的反序数为

$$\tau(i_ni_{n-1}\dots i_1)=x=\binom{n}{2}-\tau(i_1i_2\dots i_n).$$

习题 2: 证明当 $n\geqslant 2$ 时，n 个不同自然数的一切排列中偶排列和奇排列各占一半。

证: 当 $n\geqslant 2$ 时，对 $1,\dots,n$ 的每个奇排列 $i_1i_2i_3\dots i_n$，互换 i_1i_2 得到的排列 $i_2i_1i_3\dots i_n$ 必定是偶排列。并且，若 $j_1j_2j_3\dots j_n$ 是另一个奇排列，则 $j_3\dots j_n$ 与 $i_3\dots i_n$ 必定不全相同，否则 $j_1j_2j_3\dots j_n$ 或者是偶排列，或者就是 $i_1i_2i_3\dots i_n$。于是互换排列头两个位置得到的偶排列 $j_2j_1j_3\dots j_n$ 必定不同于 $i_2i_1i_3\dots i_n$。因此 $1,\dots,n$ 的偶排列的个数

大于等于奇排列的个数。同理可证奇排列的个数大于等于偶排列的个数。因此命题成立。

习题 3: 利用行列式的定义计算行列式：

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

解: 设以上行列式为 $|A| = \det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为上面行列式中的各元。根据行列式的定义，

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$$

j_1 取为 $3,4,5$ 时，展开式对应项因 $a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0$ 而等于 0。所以

$$\begin{aligned} |A| = &\sum_{1 j_2 j_3 j_4 j_5} (-1)^{\tau(1 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{11} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} \\ &+ \sum_{2 j_2 j_3 j_4 j_5} (-1)^{\tau(2 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{12} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}. \end{aligned}$$

当 $j_1 = 1$ 时，则因 $a_{52} = a_{53} = a_{54} = 0$，仅当 j_5 取 5 时，行列式的展开式的项非 0。当 $j_1 = 2$ 时，因 $a_{21} = a_{24} = a_{25} = 0$，仅当 $j_2 = 3$ 时行列式展开式的项非 0。因此

$$\begin{aligned} |A| = &\sum_{1 j_2 j_3 j_4 5} (-1)^{\tau(1 j_2 j_3 j_4 5)} a_{11} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{55} \\ &+ \sum_{2 3 j_3 j_4 j_5} (-1)^{\tau(2 3 j_3 j_4 j_5)} a_{12} a_{23} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}. \end{aligned}$$

以此推导下去，知

$$|A| = (-1)^{\tau(12345)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} + (-1)^{\tau(23451)} a_{12} a_{23} a_{34} a_{45} a_{51} = x^5 + y^5.$$

计算完毕。

习题 4: 若n阶行列式$\det(a_{ij})$中为零的元多于$n^2 - n$个，则$\det(a_{ij}) = 0$。

证: 若行列式的每行的0元个数都小于n个，即小于等于$n-1$个，则行列式中0元的总个数应小于等于$n(n-1) = n^2 - n$个。但已知0元个数多于$n^2 - n$个。因此行列式中必定有全0行，因此行列式值为0。

习题 5: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n-m \end{vmatrix}$$

解: 将第二列、…、第n列都加到第一列上，得到:

$$原式 = \begin{vmatrix} x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \dots & x_n \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2-m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1+\cdots+x_n-m & x_2 & \dots & x_n-m \end{vmatrix},$$

再把第一列提出公因子 $(x_1+\cdots+x_n-m)$，

$$\begin{aligned} 原式 =&(x_1+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_2-m & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_2 & \dots & x_n-m \end{vmatrix} \\ =&(x_1+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -m \end{vmatrix} \\ =&(x_1+\cdots+x_n-m)(-m)^{n-1} \end{aligned}$$

计算完毕。

习题 6: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解: 按第一列展开，得到

$$\text{原式}=x\begin{vmatrix}x & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & x & y\\ 0 & \dots & 0 & x\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & y & 0\\ 0 & \dots & x & y\end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

习题 7: 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n\\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n\\ a_3^n & a_3^{n-1}b_3 & \dots & a_3b_3^{n-1} & b_3^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^{n-1}\end{vmatrix}$$

解: 将行列式的第1行都乘以$\frac{1}{a_1^n}$，第2行乘以$\frac{1}{a_2^n}$，…，第$n+1$行乘以$\frac{1}{a_{n+1}^n}$，得到：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a_1^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix}1 & \frac{b_1}{a_1} & \dots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n}\\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \dots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n}\\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \dots & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^{n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \dots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n}\end{vmatrix}\\ &=a_1^n\cdots a_{n+1}^n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_ib_j-a_jb_i).\end{aligned}$$

习题 8: 计算行列式

$$\begin{vmatrix}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\end{vmatrix}$$

解: 按第1列展开，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} =& \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\left[\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right]-\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\left[\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right]\\
&+\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\left[\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}\right]\\
=&\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\\
=&\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\gamma).
\end{aligned}
$$

习题 9: 计算以下行列式:

$$
d=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}.
$$

解: 设 a,b,c,d 是方程 $x^4+k_3x^3+k_2x^2+k_1x+k_0=0$ 的四个根。于是 a,b,c,d 满足

$$
x^4+k_2x^2+k_1x+k_0=-k_3x^3.
$$

另由 vieta 定理，知 $k_3=-(a+b+c+d)$。将行列式的第 1 行乘 k_0 倍加到第 4 行，第 2 行和第 3 行分别乘 k_1、k_2 倍加到第 4 行，便得到

$$
d=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}.
$$

再由范得蒙行列式，便得出值。

习题 10: $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$是互不相同的实数。说明$P(x)$是 $n-1$次多项式。并求$P(x)$的根。

$$
P(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1}\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}
$$

解: 将行列式按第一行展开，因为自第二行到最后一行的所有元都是常数，所以第一行元的代数余子式都是常数。而这些常数就分别是$P(x)$的常数项，一次项系数，

…，$n-1$次项系数。因此$P(x)$是$n-1$次多项式。

当$x=a_1$时，行列式的第一行与第二行完全相同，因此知此时行列式值为0。所以$x=a_1$是$P(x)$的一个根。同理，$x=a_2$，…，$x=a_{n-1}$也都使$P(x)=0$成立。再又已知$a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$两两不同，所以

$$x_1=a_1,\ldots,x_{n-1}=a_{n-1}$$

是$P(x)$的$n-1$个根。但$P(x)$是$n-1$次多项式，所以以上就是$P(x)$的全部根。

第二节 矩阵

本章的最基本内容：矩阵的计算（包括转置）；逆矩阵存在的情况下，解简单的矩阵方程；初等变换求逆矩阵；若干特殊矩阵的定义和计算；分块矩阵的计算，分块初等变换求逆矩阵。

习题 11: 计算矩阵方幂：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$$

解: 将上式中矩阵记为 A，则

$$A=aE+M, \qquad \text{其中 } M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

注意到 aE 和 M 相乘是可交换的，所以 $A^n=(aE+M)^n$ 的展开式具有二项式定理的形式。但计算 M 的方幂知，

$$M^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0.$$

所以

$$\begin{aligned} A^n &= a^nE+\binom{n}{1}a^{n-1}EM+\binom{n}{2}a^{n-2}EM^2+\binom{n}{3}A^{n-3}EM^3+\cdots, \\ &= a^nE+\binom{n}{1}a^{n-1}M+\binom{n}{2}a^{n-2}M^2 \end{aligned}$$

即

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \binom{n}{1}a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \binom{n}{1}a^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \binom{n}{2}a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^n & \binom{n}{1}a^{n-1} & \binom{n}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & \binom{n}{1}a^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

计算完毕。

习题 12: 证明：两个 n 阶上三角矩阵的乘积仍然是上三角矩阵。

证: 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 为两个 n 阶上三角矩阵，也就是 A 和 B 满足：

$$a_{ij}=b_{ij}=0, \quad （当 i>j，i,j=1,\ldots,n）$$

设 $C=(c_{ij})=AB$，于是 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$。当 $i>j$ 时，

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \\ &= (a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{i,i-1}b_{i-1,j})+(a_{ii}b_{ij}+a_{i,i+1}b_{i+1,j}+\cdots+a_{in}b_{nj}), \end{aligned}$$

第一个括号里的式子，因为有 $a_{i1}=\cdots=a_{i,i-1}=0$，所以等于 0。第二个括号里的式子，因为已知 $i>j$，所以 $b_{ij}=\cdots=b_{nj}=0$，所以第二个括号里的式子也为 0。这也就是证明了当 $i>j$ 时，$c_{ij}=0$ 成立。所以 C 是上三角矩阵。

习题 13: 已知

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 两两不等。矩阵 B 满足 $AB=BA$。证明：B 为对角形矩阵。

证: 设 $B=(b_{ij})$。根据矩阵乘法定义，AB 的第 i 行第 j 列元为 a_ib_{ij}，BA 的第 i 行第 j 列元为 $b_{ij}a_j$。已知 $AB=BA$。因此对应元相等，即 $a_ib_{ij}=b_{ij}a_j$。又 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，所以 $i\neq j$ 时 $b_{ij}=0$。故 B 是对角形矩阵。

习题 14: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

解: 因为

$$\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

以下计算略。

习题 15: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \frac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \frac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}.$$

解: 因为

$$\begin{pmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \dots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \dots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \dots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0}^{n-1}(a_1b_1)^j & \sum\limits_{j=1}^{n-1}(a_1b_2)^j & \dots & \sum\limits_{j=0}^{n-1}(a_1b_n)^j \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1}(a_2b_1)^j & \sum\limits_{j=1}^{n-1}(a_2b_2)^j & \dots & \sum\limits_{j=0}^{n-1}(a_2b_n)^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1}(a_nb_1)^j & \sum\limits_{j=1}^{n-1}(a_nb_2)^j & \dots & \sum\limits_{j=0}^{n-1}(a_nb_n)^j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

以下计算略。

习题 16: 求A^{-1}。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

解: 对以下矩阵进行行初等变换，

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 12 & -10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

限于篇幅，以下步骤略，最终求得，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}.$$

计算完毕。

习题 17: $a\neq b$，$a'\neq b'$，$a''\neq b''$。解线性方程组：

$$\begin{cases}a(x+t)+b(y+z)=c,\\ a'(y+t)+b'(z+x)=c',\\ a''(z+t)+b''(x+y)=c'',\\ x+y+z+t=d,\end{cases}$$

解: 第一个方程改写为：$a(x+y+z+t)+(b-a)(y+z)=c$，后两个方程类似变化，并将第四个方程代入，得到方程组：

$$\begin{cases}(b-a)(y+z)=c-ad,\\ (b'-a')(z+x)=c'-a'd,\\ (b''-a'')(x+y)=c''-a''d,\\ x+y+z+t=d,\end{cases}$$

前三个方程等号左边常数分别除到右边，再加起来，得到

$$x+y+z=\frac{1}{2}\left[\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right],$$

于是有：

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left[-\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right]\\ y=\frac{1}{2}\left[\frac{c-ad}{b-a}-\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right]\\ z=\frac{1}{2}\left[\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}-\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right]\\ t=d-\frac{1}{2}\left[\frac{c-ad}{b-a}+\frac{c'-a'd}{b'-a'}+\frac{c''-a''d}{b''-a''}\right]\end{cases}$$

计算完毕。

习题 18: A 为 n 阶对称矩阵，且对任意 $n\times 1$ 矩阵 X，都有 $X^{\mathrm{T}}AX=0$，则必有 $A=0$。

证: 因对任意列向量 X，都有 $X^{\mathrm{T}}AX=0$，所以分别取 X 为第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的列向量，$i=1,2,\ldots,n$，计算得到
$$0=X^{\mathrm{T}}AX=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in}\end{pmatrix}X=a_{ii}, \qquad (i=1,\ldots,n).$$
于是 A 的对角线上元素都为 0。再对任意的 i,j，$i,j=1,\ldots,n$，取 X 为第 i 个和第 j 个分量为 1，其它分量为 0 的列向量，计算得
$$0=X^{\mathrm{T}}AX=\begin{pmatrix}a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \ldots & a_{in}+a_{jn}\end{pmatrix}X=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj},$$
前面已经知道 $a_{ii}=a_{jj}=0$，再因 A 为对称矩阵，所以 $a_{ij}=a_{ji}$，于是由上式知，对任意的 $i,j=1,\ldots,n$，都有 $a_{ij}=0$。

于是知 $A=0$。

习题 19: 设 B 为 n 阶可逆矩阵，又
$$U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}, \qquad V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix},$$
令 $A=B+UV^{\mathrm{T}}$，证明：当 $\gamma=1+V^{\mathrm{T}}B^{-1}U\neq 0$ 时，
$$A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1}).$$
证: 计算 $A[B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1})]$，有：
$$\begin{aligned}
&A\left[B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1})\right]\\
=&(B+UV^{\mathrm{T}})\left[B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1})\right]\\
=&E+UV^{\mathrm{T}}B^{-1}-B\cdot\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1})-(UV^{\mathrm{T}})\cdot\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1})\\
=&E+UV^{\mathrm{T}}B^{-1}-\frac{1}{\gamma}UV^{\mathrm{T}}B^{-1}-\frac{V^{\mathrm{T}}B^{-1}U}{\gamma}UV^{\mathrm{T}}B^{-1}\\
=&E+UV^{\mathrm{T}}B^{-1}-\frac{1+V^{\mathrm{T}}B^{-1}U}{\gamma}UV^{\mathrm{T}}B^{-1}=E+UV^{\mathrm{T}}B^{-1}-UV^{\mathrm{T}}B^{-1}=E.
\end{aligned}$$
这就证明了 $A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}U)(V^{\mathrm{T}}B^{-1})$。

第三节　线性方程组

本章最基本要求是会：解线性方程组；求向量组的秩，证明向量组线性相关

（无关）或秩的关系；初等变换求矩阵的秩，矩阵的标准形（最简形）；矩阵的秩等式和不等式；线性方程组解的结构。

习题 20: 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$ 等价，则它们的秩相等。

证: 设向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的极大线性无关组为 $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}$，向量组 $\beta_1,\dots,\beta_m$ 的极大线性无关组为 $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_t}$。此时，$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的秩为 r，$\beta_1,\dots,\beta_m$ 的秩为 t。

因为 $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的极大线性无关组，所以 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 可以被 $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。$\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_t}$ 是 $\beta_1,\dots,\beta_m$ 的极大线性无关组，所以 $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_t}$ 也可被 $\beta_1,\dots,\beta_m$ 线性表出。又已知 $\beta_1,\dots,\beta_m$ 可被 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性表出，所以 $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_t}$ 可被 $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。

又因为 $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_t}$ 线性无关，所以 $t\leqslant r$。

类似可证 $r\leqslant t$。所以 $r=t$。

习题 21: 给定 n 维向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$$
$$\alpha_2=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\end{pmatrix}$$
$$\dots$$
$$\alpha_m=\begin{pmatrix}a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

若从每个向量中去掉第 $i_1,i_2,\dots,i_s(1\leqslant s<n)$ 个分量，得到一个 $n-s$ 维向量组 $\alpha'_1,\dots,\alpha'_m$。证明当 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性相关时，$\alpha'_1,\alpha'_2,\dots,\alpha'_m$ 也线性相关。

证: $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性相关，即存在不全为 0 的数 $k_1,\dots,k_m$ 使

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

将 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 式子代入，根据向量加法、数乘、相等定义得到 $k_1,\dots,k_m$ 使线性方程组

$$\begin{cases} k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_ma_{m1}=0\\ k_1a_{12}+k_2a_{22}+\cdots+k_ma_{m2}=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\dots\\ k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+\cdots+k_ma_{mn}=0\end{cases}$$

成立。于是将此方程组的第 $i_1,i_2,\dots,i_s$ 个方程去掉，剩余方程组成的方程组也成立。

不妨设剩余方程为第 $j_1,\dots,j_{n-s}$ 个方程：

$$\begin{cases} k_1a_{1j_1}+k_2a_{2j_1}+\cdots+k_ma_{mj_1}=0 \\ k_1a_{1j_2}+k_2a_{2j_2}+\cdots+k_ma_{mj_2}=0 \\ \cdots \\ k_1a_{1j_{n-s}}+k_2a_{2j_{n-s}}+\cdots+k_ma_{mj_{n-s}}=0 \end{cases}$$

将这个方程组写成向量线性组合形式，等号左边每个向量依次为α_i中去掉第$i_1,\dots,i_s$个分量得到的向量，因此为α_i'，$i=1,\dots,m$。即得到：

$$k_1\alpha_1'+k_2\alpha_2'+\cdots+k_m\alpha_m'=0.$$

由于 $k_1,\dots,k_m$ 不全为 0，所以 $\alpha_1',\dots,\alpha_m'$线性相关。

习题 22: 向量组 $B:\beta_1,\dots,\beta_t$ 可以由向量组 $A:\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性表出，

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_t\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_s\end{pmatrix},$$

其中 K 为 $t\times s$ 矩阵。且向量组 A 线性无关。证明：

1. $t=s$ 时，B 线性无关的充要条件是 $\det(K)\neq 0$。
2. 对一般的 t 和 s，B 线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=t$。

证: 若数 $k_1,k_2,\dots,k_t$ 使 $k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t=0$，也就是

$$\begin{aligned} 0=\begin{pmatrix}k_1 & \dots & k_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_t\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}k_1 & \dots & k_t\end{pmatrix}\left[K\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_s\end{pmatrix}\right] \\ &=\left[\begin{pmatrix}k_1 & \dots & k_t\end{pmatrix}K\right]\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_s\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1}$$

但已知向量组 A 线性无关，所以由上式知

$$\begin{pmatrix}k_1 & \dots & k_t\end{pmatrix}K=0, \tag{1.2}$$

当 $t=s$ 时，K 为方阵。因此若 $\det(K)\neq 0$，则 K 可逆，由上式有

$$k_1=\cdots=k_t=0,$$

所以 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性无关。反之，若 $\det(K)=0$，则 K 的 n 个行向量线性相关，所以可以找到不全为 0 的数 $k_1,\ldots,k_t$ 使式 (1.2) 成立，从而式 (1.1) 成立。因此 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性相关。(1) 证毕。

对一般情形的 t,s，若 $R(K)=t$，则因 K 只有 t 个行，所以，K 的行向量线性无关，由式 (1.2) 得 $k_1=\cdots=k_t=0$，所以 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性无关。

而若 $R(K)\neq t$，因 K 只有 t 行，所以 $R(K)\leqslant t$，所以必有 $R(K)<t$，也就是 K 的行向量组的极大线性无关组含有向量的个数小于 t，所以 K 的 t 个行向量线性相关。因此存在不全为 0 的数使式 (1.2) 成立，从而使式 (1.1) 成立。所以 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性相关。这就证明了，若 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性无关，则必有 $R(K)=t$。(2) 证毕。

习题 23: A 与 B 是同型矩阵，证明 $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$。 **证:**

证: 设 A 和 B 都是 $m\times n$ 矩阵，由分块矩阵乘法，有

$$A+B=\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n\\ E_n\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}E_m & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}E_n\\ E_n\end{pmatrix},$$

因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B)&\leqslant\operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix}E_m & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\right]\leqslant\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\\ &=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).\end{aligned}$$

命题得证。

习题 24: 写出方程组

$$x_1-x_2=a_1,\ x_2-x_3=a_2,\ x_3-x_4=a_3,\ x_4-x_5=a_4,\ x_5-x_1=a_5$$

有解的充要条件，并求解。

解: 对方程组的增广矩阵作行初等变换，得到

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{5}a_i\end{pmatrix}.$$

因此方程组系数矩阵的秩为 4。方程组有解的充要条件是增广矩阵的秩也为 4。即充

要条件为：

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0.$$

求解暂略。

习题 25: 求解线性方程组：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

解: 此方程组的增广矩阵 (A,b) 为：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

对增广矩阵进行初等行变换得：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3\end{pmatrix}\\ \rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.3}$$

解方程 $2-\lambda-\lambda^2=0$ 得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$。因此当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时，方程组系数矩阵的秩为 3，等于增广矩阵的秩，也等于未知数个数，此时有唯一解。依次求 x_3,x_2,x_1：

$$\begin{aligned}x_3&=\frac{(\lambda+1)^2(1-\lambda)}{-(\lambda+2)(\lambda-1)}=\frac{(\lambda+1)^2}{2+\lambda},\\ x_2&=x_3-\lambda=\frac{(\lambda+1)^2-\lambda^2-2\lambda}{2+\lambda}=\frac{1}{2+\lambda}\\ x_1&=\lambda-\lambda x_2-x_3=\lambda-\frac{\lambda}{2+\lambda}-\frac{(\lambda+1)^2}{2+\lambda}=\frac{\lambda^2+2\lambda-\lambda-\lambda^2-2\lambda-1}{2+\lambda}\\ &=-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}\end{aligned}$$

当 $\lambda=1$ 时，由式 (1.3) 知方程组系数矩阵与增广矩阵的秩都为 1，小于未知数个数 3。此时方程组化为：

$$x_1+x_2+x_3=1,$$

有无穷多解。令 x_2, x_3 为自由未知量，$x_2 = \tilde{x_2}$， $x_3 = \tilde{x_3}$，得

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \tilde{x_2} - \tilde{x_3} \\ x_2 = \tilde{x_2} \\ x_3 = \tilde{x_3} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x_3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\tilde{x_2}, \tilde{x_3}$ 为给定数域内任意数。

当 $\lambda = -2$ 时，由式 (1.3) 知系数矩阵的秩为 2，而增广矩阵的秩为 3。因此此时方程组无解。

总之：

1. $\lambda = 1$ 时，方程组有无穷多解：
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x_3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
其中 $\tilde{x_2}, \tilde{x_3}$ 为给定数域内任意数。
2. $\lambda = -2$ 时，方程组无解。
3. $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，方程组有唯一解：
$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1+\lambda}{2+\lambda} \\ x_2 = \dfrac{1}{2+\lambda} \\ x_3 = \dfrac{(\lambda+1)^2}{2+\lambda} \end{cases}$$

解毕。

习题 26: 以下两个线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(I)} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m = 0 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m = 0 \\ b_1y_1 + \cdots + b_my_m = 1 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

证：方程组 (I) 有解的充要条件是方程组 (II) 无解。

解: 用 A 和 (A, α) 分别表示方程组 (I) 的系数矩阵和增广矩阵，用 B 和 (B, β) 表示 (II) 的系数矩阵和增广矩阵。注意到 (II) 的系数矩阵是 (I) 的增广矩阵的转置：

$B=(A,\alpha)^{\mathrm{T}}$。因此

$$\operatorname{rank}(B,\beta)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}} & 0\\ \alpha^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})+1=\operatorname{rank}(A)+1.$$

因此若 (I) 有解，则

$$\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(A,\alpha)=\operatorname{rank}(A)<\operatorname{rank}(A)+1=\operatorname{rank}(B,\beta),$$

所以 (II) 无解。而若 (II) 无解，则

$$\operatorname{rank}(A)+1=\operatorname{rank}(B,\beta)=\operatorname{rank}(B)+1=\operatorname{rank}(A,\alpha)+1,$$

所以 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,\alpha)$，因此 (I) 有解。

习题 27: 非齐次线性方程组 $AX=b$。若 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A,b)=r$。前面已经证明可以找到它的 $n-r+1$ 个线性无关的解 $X_1,X_2,\ldots,X_{n-r+1}$。证明它的任一解可表为

$$X=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r+1}X_{n-r+1}.$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$。

解: 先证明对方程组的任意解 X，$X,X_1,\ldots,X_{n-r+1}$ 必定线性相关。但 $X_1,\ldots,X_{n-r+1}$ 线性无关，于是 X 必可被 $X_1,\ldots,X_{n-r+1}$ 线性表出，设为

$$X=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r+1}X_{n-r+1},$$

又 X 满足方程组，所以有

$$b=AX=A(k_1X_1+\cdots+k_{n-r+1}X_{n-r+1})=(k_1+\cdots+k_{n-r+1})b,$$

移项得：$(k_1+\cdots+k_{n-r+1}-1)b=0$，因为 b 不是 0 向量，所以

$$k_1+\cdots+k_{n-r+1}-1=0,$$

即 $k_1,\ldots,k_{n-r+1}$ 必满足 $k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1$。

解: 设 $A=(a_{ij})$，$b=(b_j)$。容易证明下面两个方程组同解：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\quad\text{(I)}\qquad\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1x_{n+1}\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_mx_{n+1}\\ x_{n+1}=1\end{cases}\quad\text{(II)}$$

更准确的说，(I) 的所有解都添加 1 作为第 $n+1$ 个分量，就是 (II) 的全部解；(II) 的所有解都去掉第 $n+1$ 个分量就得到 (I) 的全部解。(I) 就是 $AX=b$。(II) 为一个 $n+1$

元一次方程组。于是可以去表达 (II) 的全部解来得到 (I) 的全部解。而这里求 (II) 的解分为两步：先求满足 (II) 的前 m 个方程的解，即解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1x_{n+1} \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_mx_{n+1} \end{cases} \quad \text{(III)}$$

再在求得的解中找满足 $x_{n+1}=1$ 的解。(III) 为齐次线性方程组，其系数矩阵为 $(A,-b)$。系数矩阵的秩 $\mathrm{rank}(A,-b)=\mathrm{rank}(A,b)=r$。因此知 (III) 的基础解系含有 $n+1-r$ 个向量。因为 $X_1,X_2,\ldots,X_{n-r+1}$ 为 (I) 的解，所以 $(X_1,1),(X_2,1),\ldots,(X_{n-r+1},1)$ 都是 (III) 的解。又因为 $X_1,X_2,\ldots,X_{n-r+1}$ 线性无关，所以 $(X_1,1),(X_2,1),\ldots,(X_{n-r+1},1)$ 也线性无关。所以 $(X_1,1)\ldots,(X_{n-r+1},1)$ 这 $n-r+1$ 个向量是 (III) 的基础解系，(III) 的全部解可表示为

$$X'=(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=k_1(X_1,1)+k_2(X_2,1)+\cdots+k_{n-r+1}(X_{n-r+1},1). \tag{1.4}$$

这些解中满足 $x_{n+1}=1$ 的那些解就是 (II) 的全部解。即 (II) 的全部解为满足式子

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$$

的式 (1.4)。取 (II) 的解的前 n 个分量，得到方程组 (I) 的全部解为：

$$X=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r+1}X_{n-r+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$。

习题 28: A^*是A的伴随矩阵。证明：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & 当R(A)=n， \\ 1, & 当R(A)=n-1(n>1)， \\ 0, & 当R(A)<n-1。 \end{cases}$$

解: 当$R(A)=n$时，说明$|A|$，作为自己的唯一一个n阶子式，非0，又由

$$A\cdot A^*=|A|\cdot E, \tag{1.5}$$

所以A^*的行列式$|A^*|\neq 0$。所以$R(A^*)=n$。

当$R(A)=n-1$时，说明$|A|=0$，但存在A的一个$n-1$阶子式非0。由$|A|=0$的式(1.5)，利用前面题目的结论有

$$R(A^*)\leqslant n-R(A)=n-(n-1)=1.$$

但A有一个$n-1$阶子式非0，这个子式必定是A的某个元的余子式。由A^*的定义知，A^*中某个元非0，因此$R(A^*)\geqslant 1$。两式综合，得到$R(A^*)=1$。

当 $R(A)<n-1$ 时，说明 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0，也就是 A 的所有余子式和代数余子式都为 0，于是 A^* 的所有元都为 0。$A^*=0$，所以 $R(A^*)=0$。

第四节　线性空间

学习本章的最基本要求：证明一个集合是线性空间，求 n 维线性空间的一个基，求生成子空间的基或证明两个生成子空间相等，求向量在给定基下的坐标，基变换和坐标变换。

习题 29: 全体二元有序数组(a,b)构成的集合。其中加法与数量乘积按下面定义：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$$
$$k\odot(a,b)=\left(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)$$

解: 显然以上集合为非空集合，且由上面定义的加法运算满足对集合中的任意两元都唯一确定了集合中的一个元素作为它们的和；数乘运算满足对集合中的任意元素及数域中的任意数都唯一确定了一个集合中的元素作为它们的乘积。以下逐条验证线性空间定义中的式子。

加法满足交换律很容易验证。验证结合律，对 V 中任意 3 个元素 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)$，

$$\begin{aligned}
&\big[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)\big]\oplus(a_3,b_3)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,b_3)\\
=&\big(a_1+a_2+a_3,[b_1+b_2+a_1a_2]+b_3+(a_1+a_2)a_3\big)\\
=&\big(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3\big),\\
&(a_1,b_1)\oplus\big[(a_2,b_2)\oplus(a_3,b_3)\big]=(a_1,b_1)\oplus(a_2+a_3,b_2+b_3+a_2a_3)\\
=&\big(a_1+a_2+a_3,b_1+(b_2+b_3+a_2a_3)+a_1(a_2+a_3)\big)\\
=&\big(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3\big).
\end{aligned}$$

所以加法的结合律也成立。对任意的$(a,b)\in V$，

$$(0,0)\oplus(a,b)=(0+a,0+b+0a)=(a,b)$$
$$(-a,-b+a^2)\oplus(a,b)=\big(-a+a,-b+a^2+b+(-a)a\big)=(0,0)$$

说明集合中存在零元素，且每个元素存在负元素。再有，

$$1\odot(a,b)=\left(1a,1b+\frac{1(1-1)}{2}a^2\right)=(a,b).$$

以下验证分配律，对任意的数 k,l 及 $(a,b)\in V$，有

$$\begin{aligned}(k+l)\odot(a,b)&=\left((k+l)a,(k+l)b+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}a^2\right)\\&=\left(ka+la,kb+lb+\frac{(k+l)^2-k-l}{2}a^2\right)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}k\odot(a,b)\oplus l\odot(a,b)&=\left(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)\oplus\left(la,lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2\right)\\&=\left(ka+la,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2+lb+\frac{l(l-1)}{2}a^2+kla^2\right)\\&=\left(ka+la,kb+lb+\frac{(k+l)^2-k-l}{2}a^2\right)\end{aligned}$$

因此有 $(k+l)\odot(a,b)=k\odot(a,b)\oplus l\odot(a,b)$。类似可以证明剩下两个式子成立。综上，知此集合构成一个线性空间。

习题 30: 求 n 阶对称矩阵关于矩阵的线性运算所成的线性空间的维数。

解: 对任意 n 阶对称矩阵 $A=(a_{ij})$，a_{ij} 满足 $a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\ldots,n$。因此

$$
\begin{aligned}
A=&\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\\
=&a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\\
&+a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\\
&+a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}+\cdots
\end{aligned}
$$

上式将 A 表示为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个对称矩阵的线性组合。说明任意 n 阶对称矩阵都可表示为此 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个矩阵的线性组合。另一方面，如果这 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个矩阵的线性组合为零矩阵（零矩阵是该线性空间的零元素），则由上式等于零矩阵有

$$a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{nn}=0.$$

这说明由这 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个矩阵构成的向量组线性无关。因此它们就是线性空间的一个基底，所以该空间的维数为 $\frac{n(n+1)}{2}$。

习题 31: R^n中前两个分量之和等于0的全体向量所成的线性子空间的维数。

解: 设所求线性子空间为L。

$$L=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \Big| x_1+x_2=0\right\}.$$

因此L就是方程$x_1+x_2=0$的解集合。L的基底就是方程$x_1+x_2=0$的基础解系。方程

的全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -\tilde{x_2} \\ x_2 = \tilde{x_2} \\ x_3 = \tilde{x_3} \\ \cdots \\ x_n = \tilde{x_n} \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{x_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \tilde{x_n}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上求出的 $x_1 + x_2 = 0$ 的基础解系就是 L 的一个基底，因此该子空间的维数为 $n-1$。

习题 32: 证明以下的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基，并求 $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在这个基下的坐标。

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \varepsilon_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, & \varepsilon_4 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

解: 先证明 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 线性无关。也就是证明由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 四个行向量构成的矩阵行向量线性无关。这是一个 4×4 方阵，因此只需要计算其行列式：

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)(-2) = -4.$$

因此矩阵的四个行向量，即 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 线性无关。又 $\mathbf{R}^4$ 的维数为 4，因此 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的极大线性无关组，即基。β 在这组基下的坐标为满足

$$x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4 = \beta$$

的列向量 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，该方程组为一线性方程组，对其增广矩阵进行初等行

变换，

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\1&-1&0&0&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&\frac{3}{2}\\1&-1&0&0&1\\0&0&-1&-1&\frac{1}{2}\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\1&-1&0&0&1\\0&0&-1&0&\frac{1}{4}\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

因此 β 的坐标为 $\begin{pmatrix}\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

第五节　线性变换

学习本章的最基本要求：求一个线性变换在给定基底下的矩阵，求方阵的特征值和关于这个特征值的特征向量，判断方阵能否对角化，能的话将其对角化，A 能对角化的前提下计算 A^n。

第六节　欧几里得空间

学习本章的最基本要求：计算内积和利用柯西施瓦兹不等式证明，施密特正交化，求与一个向量正交的正交向量组。正交变换的定义和一个变换是正交变换的充要条件。

习题 33: 证明$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$。

解: 只需证：$|\alpha+\beta|^2\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^2$。计算：

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2-(|\alpha|+|\beta|)^2&=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle-|\alpha|^2-2|\alpha||\beta|-|\beta|^2\\&=\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle-\langle\alpha,\alpha\rangle-2|\alpha||\beta|-\langle\beta,\beta\rangle\\&=2\langle\alpha,\beta\rangle-2|\alpha||\beta| \qquad (1.6)\end{aligned}$$

由柯西－施瓦兹不等式$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leqslant\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$，于是

$$-|\alpha||\beta|\leqslant\langle\alpha,\beta\rangle\leqslant|\alpha||\beta|,$$

所以式(1.6)小于0，所以$|\alpha+\beta|^2\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^2$。于是待证不等式成立。

习题 34: n 维欧几里得空间 V。α 是 V 中的一个固定向量。证明

$$M=\{\beta\big|\beta\in V,\langle\beta,\alpha\rangle=0\}$$

是 V 的一个子空间。若 $\alpha\neq 0$，则 M 的维数为 $n-1$。

解: 对 M 中的任意两个向量 β_1,β_2，$\langle\beta_1,\alpha\rangle=0$，$\langle\beta_2,\alpha\rangle=0$，所以

$$\langle\beta_1+\beta_2,\alpha\rangle=\langle\beta_1,\alpha\rangle+\langle\beta_2,\alpha\rangle=0+0=0.$$

所以 $\beta_1+\beta_2\in M$。对数域中的任意数 k‘以及 M 中任意向量 β，$\langle k\beta,\alpha\rangle=k\langle\beta,\alpha\rangle=k0=0$。所以 $k\beta\in M$。因此 M 是一线性子空间。

当 $\alpha\neq 0$ 时，在 α 的基础上添加 $n-1$ 个向量 $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 使得 $\alpha,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 构成 V 的一个基底。对这个基底进行施密特正交化，得到 V 的一个正交基底 $\eta,\eta_2,\ldots,\eta_n$。且有 $\eta=\alpha$。因此

$$\langle\eta_j,\alpha\rangle=\langle\eta_j,\eta\rangle=0,\qquad j=2,\ldots,n.$$

因此 $\eta_2,\ldots,\eta_n\in M$。即它们是 M 中的一个正交组。又对任意 $\beta\in M$，β 可表示为

$$\beta=k_1\alpha+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n,$$

但 $\langle\beta,\alpha\rangle=0$，$\langle\beta,\alpha\rangle=\langle k_1\alpha+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n,\alpha\rangle=k_1\langle\alpha,\alpha\rangle$，因 $\langle\alpha,\alpha\rangle\neq 0$，所以有 $k_1=0$。这说明 M 中的任意向量 β 可表示为 $\beta=k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n$，所以 $\eta_2,\ldots,\eta_n$ 是 M 的一个基底，故 M 的维数为 $n-1$。

习题 35: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 中的一个向量组。令

$$D=\begin{vmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \cdots & & & \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \ldots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{vmatrix},$$

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $D\neq 0$。

证: 只需证 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关的充要条件是 $D=0$。若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关，不妨设 α_1 可被 $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表出：

$$\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,$$

将行列式 D 的第二列乘以 $-k_2$ 加到第一列，$\ldots$，第 n 列乘以 $-k_n$ 倍加到第一列，第一列的第 i 个元（$i=1,\ldots,n$）为：

$$\langle\alpha_i,\alpha_1\rangle-k_2\langle\alpha_i,\alpha_2\rangle-\cdots-k_n\langle\alpha_i,\alpha_n\rangle=\langle\alpha_i,\alpha_1-k_2\alpha_2-k_n\alpha_n\rangle=\langle\alpha_i,0\rangle=0.$$

这样得到的行列式的第一列全都是 0。所以 $D=0$。

若 $D=0$，则 D 的 n 个行作为 n 个行向量组成的向量组线性相关。不妨设第一行可被其它行线性表出，用 ε_i 表示 D 的第 i 行，$i=1,\dots,n$。设：

$$\varepsilon_1=k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n,$$

将行列式 D 的第二行乘以 $-k_2$ 加到第一行，...，第 n 行乘以 $-k_n$ 倍加到第一行，则第一行的所有元都变为 0。第一行的第 i 个元（$i=1,\dots,n$）为：

$$0=\langle\alpha_1,\alpha_i\rangle-k_2\langle\alpha_2,\alpha_i\rangle-\cdots-k_n\langle\alpha_n,\alpha_i\rangle=\langle\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n,\alpha_i\rangle,$$

将第一行的第 2 个元乘以 $-k_2$ 倍，...，第 n 个元乘以 $-k_n$ 倍加到第一个元，得到

$$\begin{aligned}0=&\langle\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n,\alpha_1\rangle-k_2\langle\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n,\alpha_2\rangle-\cdots\\&-k_n\langle\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n,\alpha_n\rangle\\=&\langle\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n,\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n\rangle\end{aligned}$$

因此有 $\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_n\alpha_n=0$。所以 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性相关。

第七节　实二次型

学习本章的最基本要求：用行列初等变换将实对称矩阵（二次型）化为对角形矩阵（标准形），用正交变换化二次型为标准形，二次型正定、负定、不定等的判定。

习题 36: 证明: 一个实二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 和符号差等于 0，或者秩等于 1。

解: 必要性。假定 $f=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$，如果 $(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)$ 线性无关, 我们不妨假定 a_1,a_2 与 b_1,b_2 不成比例. 于是用两个满秩线性替换

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n\\y_3=x_3\\\vdots\\y_n=x_n\end{cases}\qquad\begin{cases}z_1=y_1+y_2\\z_2=y_1-y_2\\z_3=y_3\\\vdots\\z_n=y_n\end{cases}$$

把f化为$f=y_1y_2$，再做一次非退化线性替换就得到$f=z_1^2-z_2^2$。因此这种情况下f的秩是2、符号差为0。如果$(a_1,\dots,a_n)$，$(b_1,\dots,b_n)$线性相关，假定 $(b_1,\dots,b_n)=k(a_1,\dots,a_n)$，

并且假定$a_1\neq 0$，那么满秩线性替换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \\ y_2=x_2 \\ \vdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

把f化为$f=ky_1^2$. 因此这时f的秩为1, 于是必要条件成立.

充分性。假定 f 的秩是 2，符号差是 0，那么可通过满秩线性替换 $X=CY$ 将 f 化为

$$f=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2),$$

因此 f 是 $x_1,\dots,x_n$ 的两个一次齐式的乘积。假如 f 的秩是 1，则通过满秩线性替换

$$f=\pm y_1^2.$$

因此 f 也是两个一次齐式的乘积。于是充分性成立。

注: 二次型$f=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$的矩阵$A$可以表为

$$A=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & \dots & b_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & \dots & a_n\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left[B+B'\right],$$

显然 $\mathrm{rank}(B)=1$，因此 $\mathrm{rank}(B^{\mathrm{T}})=1$。于是矩阵 A 的秩至多为 2。

习题 37: A 是 n 阶实对称矩阵。$|A|<0$。证明存在实列向量 X，满足 $X^{\mathrm{T}}AX<0$。

解: A 为实对称矩阵，因此存在正交矩阵 T，使得

$$T^{\mathrm{T}}AT=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\},$$

其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值（实数）。因此 $|A|=\lambda_1\lambda_n\cdots\lambda_n$，又已知 $|A|<0$。所以必定存在某个 k 满足 $\lambda_k<0$，令 $X=T\varepsilon_k$，其中 ε_k 是第 k 个分量为 1，其余分量都为 0 的 n 维列向量。则

$$X^{\mathrm{T}}AX=\varepsilon_k(T^{\mathrm{T}}AT)\varepsilon_k=\begin{pmatrix}\dots & 1 & \dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & \lambda_k & \\ & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix}=\lambda_k<0.$$

证毕。

习题 38: 证明：

1. A 正定的充要条件是，A 合同于单位矩阵。
2. A 正定的充要条件是，存在可逆矩阵 P 使 $A = PP^{\mathrm{T}}$。
3. A 是正定的，则 A^{-1} 也是正定的。
4. A 是正定的，又 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 是任意 n 个非 0 实数，则 $B = (a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$ 也是正定的。
5. A, B 是同阶正定矩阵，则 $A + B$ 也是正定的。

证: 设 A 为 n 阶矩阵。

(1) 矩阵A 正定，即二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定。设 $X^{\mathrm{T}}AX$ 经非退化线性替换 $X = CY$ 化成标准形

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2,$$

此标准形也正定，因此 $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$。同时，A 与 $\operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ 合同。而

$$\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_n}}\right\}\operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d_n}}\right\} = E,$$

因此 A 合同于单位矩阵。充分性，A 合同于单位矩阵，设 $C^{\mathrm{T}}AC = E$，则 $X^{\mathrm{T}}AX$ 经非退化线性替换 $X = CY$ 得到标准形

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

此标准形是正定的，因此 $X^{\mathrm{T}}AX$ 也是正定的，因此 A 正定。

(2) 若 A 正定，由 (1) 知，存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC = E$。所以

$$A = \left(C^{\mathrm{T}}\right)^{-1}C^{-1} = \left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}}C^{-1} = \left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left[\left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$

取 $P = \left(C^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$，则 $A = PP^{\mathrm{T}}$。

充分性。$A = PP^{\mathrm{T}}$，P 可逆，则 $P^{-1}A(P^{\mathrm{T}})^{-1} = E$，即

$$\left[\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}A\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = E,$$

所以 A 合同于单位阵，所以 A 正定。

(3) A 正定，由 (2)，存在可逆矩阵 P，使 $A = PP^{\mathrm{T}}$，所以

$$A^{-1} = \left(PP^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left[\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$

所以 A^{-1} 也正定。

(4) 由已知，

$$B=(a_{ij}b_ib_j)=\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\cdots&\\&&&b_n\end{pmatrix}(a_{ij}b_j)$$
$$=\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\cdots&\\&&&b_n\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\cdots&\\&&&b_n\end{pmatrix},$$

又 $b_1,\dots,b_n$ 均不为 0，所以 A 与 B 合同。又 A 正定，因此 B 也正定。

(5) 对任意 n 维列向量 $X\neq 0$，因 A 和 B 都正定，所以

$$X^{\mathrm{T}}AX>0,,\qquad X^{\mathrm{T}}BX>0,$$

所以

$$X^{\mathrm{T}}(A+B)X=X^{\mathrm{T}}AX+X^{\mathrm{T}}BX>0+0=0,$$

即 $X^{\mathrm{T}}(A+B)X$ 是正定二次型，$A+B$ 是正定矩阵。

习题 39: 用正交变换化二次型为标准形。

$$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3,$$

解: 记该二次型的矩阵为 A，A为:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix},$$

A 的特征多项式为:

$$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-2&2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}.$$

计算

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda)&=(\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-3)-4]-2[2(\lambda-3)-0]\\&=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)-4\lambda+4-4\lambda+12\\&=(\lambda-2)[\lambda^2-4\lambda+3-8]=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+1)\end{aligned}$$

因此该矩阵有 3 个两两不等的特征值：$\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-1$。求 A 的关于 $\lambda_1=2$ 的特征向量，即解线性方程组 $(\lambda_1 E-A)X=0$，即解：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}X=0,$$

其基础解系包含一个解向量 $X_1=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，类似的解方程组 $(\lambda_2 E-A)X=0$，求得 A 的关于 $\lambda=5$ 的特征向量 $X_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，解方程组 $(\lambda_3 E-A)X=0$，求得 A 的关于 $\lambda=-1$ 的特征向量 $X_3=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，将 X_1,X_2,X_3 分别单位化，得到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 三个列向量：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{3}X_1,\quad \varepsilon_2=\frac{1}{3}X_2,\quad \varepsilon_3=\frac{1}{3}X_3,$$

令 $C=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$，$C$ 为一 3 阶正交矩阵，有：

$$C^{\mathrm{T}}AC=\operatorname{diag}\{2,5,-1\},$$

因此对原二次型作如下线性替换（正交变换），

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

二次型将化为标准形 $f=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$。

习题 40: 用正交变换化二次型为标准形。

$$f=2x_1x_2+2x_3x_4,$$

解: 记该二次型的矩阵为 A，A为：

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

A 的特征多项式为：

$$\phi_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2-1)^2=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

因此 A 有 2 个不等的特征值：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，它们都是特征方程的二重根。

求 A 的关于 $\lambda_1=1$ 的线性无关的特征向量组，即求 $(\lambda_1E-A)X=0$ 的基础解系，即解线性方程组：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}X=0,$$

解得其基础解系有两个向量：$X_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $X_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。$X_1$ 和 X_2 已经正交，无需再施密特正交化。

求 A 的关于 $\lambda_2=-1$ 的线性无关的特征向量组，即求 $(\lambda_2E-A)X=0$ 的基础解系，即解线性方程组：

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}X=0,$$

解得其基础解系有两个向量：$X_3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},X_4=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。$X_3$ 和 X_4 已经正交，无需再施密特正交化。

将 X_1,X_2,X_3,X_4 分别单位化，得到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 三个列向量：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}X_1,\quad \varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}X_2,\quad \varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}X_3,\quad \varepsilon_4=\frac{1}{\sqrt{2}}X_4,$$

令 $C=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4\end{pmatrix}$，$C$ 为一 4 阶正交矩阵，有：

$$C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{1,1,-1,-1\},$$

因此对原二次型作如下线性替换（正交变换），

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix},$$

二次型将化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$。

习题 41: 已知 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，且 A 是正定矩阵。证明，存在一个可逆矩阵 P，使 $P^{\mathrm{T}}AP$ 和 $P^{\mathrm{T}}BP$ 都是对角形矩阵。

解: 因 A 正定，所以存在一个可逆矩阵 T_1，使得 $T_1^{\mathrm{T}}AT_1=E$。令 $C=T_1^{\mathrm{T}}BT_1$，C 是对称矩阵 B 经过合同变换得到，因此是对称矩阵。所以存在一个正交矩阵 T_2，使得

$T_2^{\mathrm{T}}CT_2$ 为一个对角形矩阵。令 $T=T_1T_2$，

$$T^{\mathrm{T}}AT=(T_1T_2)^{\mathrm{T}}A(T_1T_2)=T_2^{\mathrm{T}}(T_1^{\mathrm{T}}AT_1)T_2=T_2^{\mathrm{T}}ET_2=E,$$

$$T^{\mathrm{T}}BT=(T_1T_2)^{\mathrm{T}}B(T_1T_2)=T_2^{\mathrm{T}}(T_1^{\mathrm{T}}BT_1)T_2=T_2^{\mathrm{T}}CT_2=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}.$$

上式中，$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是 C 的特征值。上式说明命题得证。

第二章　补充习题

本章习题为从其它教材、习题集中摘选出的题目，作为教材习题的补充。这些习题大部分同教材的习题一样在教学大纲的范围内，需要按照教材习题进行认真的学习和练习；小部分为较难的题目，供学有余力的同学练习。

第一节　行列式

补充题 1: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

的值。再考虑 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式分解。

补充题 2: 整数 $1798 = 31\cdot 58$，$2139 = 31\cdot 69$，$3255 = 31\cdot 105$，$4867 = 31\cdot 157$，都可被 31 整除，不用计算证明行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

可被 31 整除。

补充题 3: 计算行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

补充题 4: 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&2&\dots&2\\2&2&2&\dots&2\\2&2&3&\dots&2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\2&2&2&\dots&n\end{vmatrix},\qquad |B|=\begin{vmatrix}1&n&n&\dots&n\\n&2&n&\dots&n\\n&n&3&\dots&n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\n&n&n&\dots&n\end{vmatrix}$$

的值。

补充题 5: 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}-a_1&a_1&0&\dots&0&0\\0&-a_2&a_2&\dots&0&0\\0&0&-a_3&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-a_n&a_n\\1&1&1&\dots&1&1\end{vmatrix}$$

的值。

补充题 6: 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a&-1&0&\dots&0\\ax&a&-1&\dots&0\\ax^2&ax&a&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ax^n&ax^{n-1}&ax^{n-2}&\dots&a\end{vmatrix}$$

的值。

补充题 7: 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a&a^2&0&\dots&0&0\\1&2a&a^2&\dots&0&0\\0&1&2a&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&2a&a^2\\0&0&0&\dots&1&2a\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&a_1&&&&\\-1&1-a_1&a_2&&&\\&-1&1-a_2&a_3&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1-a_{n-1}&a_n\\&&&&-1&1-a_n\end{vmatrix}$$

的值。

补充题 8: 计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \dots & a & a \\ a & a+x_2 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \dots & a & a+x_n \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 9: 计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 10: 计算：

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 11: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 12: 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_n & 0 \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 13: 用 Laplace 定理计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & w & 0 & 0 & w^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & w^2 & c_2 & w \\ a_3 & b_3 & 1 & w & c_3 & w^2 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 & w & 0 \end{vmatrix},$$

其中 w 满足 $w^3=1$。

补充题 14: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 15: 证明 $a\neq b$ 时：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \quad (a\neq b)$$

解: 按第一行展开, 得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix}1 & ab & 0 & \dots & 0\\ 0 & a+b & ab & \dots & 0\\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}. \tag{2.1}$$

因为直接计算行列式知，

$$D_1=a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b},\quad D_2=a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}.$$

知对 $n=1$，$n=2$ 时命题都成立。假设当 $n<k$ 时等式成立，当 $n=k$ 时，

$$D_k=(a+b)D_{k-1}-abD_{k-2}=(a+b)\frac{a^k-b^k}{a-b}-ab\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}.$$

故等式对一切正整数都成立。

补充题 16: 计算行列式

$$B=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

的值。

补充题 17: 证明：

$$\begin{vmatrix}1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0\\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0\\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2\end{vmatrix}=1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}$$

成立。

补充题 18: 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 19: 计算行列式

$$|B|=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_2 & \dots & n-1+a_{n-1} & n+a_n \\ 2+a_1 & 3+a_2 & \dots & n+a_{n-1} & 1+a_n \\ 3+a_1 & 4+a_2 & \dots & 1+a_{n-1} & 2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+a_1 & 1+a_2 & \dots & n-2+a_{n-1} & n-1+a_n \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 20: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & x_1^2+x_1 & \dots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2} \\ 1 & x_2+1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} \\ 1 & x_3+1 & x_3^2+x_3 & \dots & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n+1 & x_n^2+x_n & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

的值。

补充题 21: 已知以下行列式, 记 A_{ij} 为该行列式的第 i 行第 j 列元素的代数余子式。

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & p \\ b_1 & b_2 & b_3 & p \\ c_1 & c_2 & c_3 & p \\ d_1 & d_2 & d_3 & p \end{vmatrix}.$$

求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$。

补充题 22: α, β, γ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根，证明：

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0$$

成立。

第二节　矩阵

补充题 23: 已知矩阵 A,B 如下：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $4A^2-B^2-2BA+2AB$。

补充题 24: 已知矩阵 B,C 如下：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 X,Y 满足 $X+Y=B$，$3X-Y=C$。求 X,Y。

补充题 25: 求与矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相乘可交换的所有矩阵 B。

补充题 26: 3 阶方阵如下，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 A^n。

补充题 27: 已知 A 为如下三阶矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 A^n-2A^{n-1}，（$n\geqslant 2$ 且为整数）。

补充题 28: 已知如下矩阵 A,B,C，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

求 A^{100},B^k,C^{51}。

补充题 29: 求实数 a，使下式

$$A=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix},\qquad A^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

成立。

补充题 30: 矩阵 A 如下，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

证明 $n\geqslant 3$ 时，恒有 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$，并求 A^{100}。

补充题 31: 已知 $a_i\neq 0$，$i=1,2,\dots,n$。设

$$X=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\dots&0\\0&0&a_2&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\dots&0\end{pmatrix},$$

求 X^{-1}。

补充题 32: 已知 $AP=PB$, 其中 B,P 如下，

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

计算 A 和 A^5。

补充题 33: 已知方阵 A,C 如下，

$$C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&1\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

方阵 B 满足 $AB=A-2B$。矩阵 D 满足 $C^2D-C-D=E$，E 为 3 阶单位阵，求 B，$\det(D)$。

补充题 34: 矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，矩阵 A 如下，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

求 X。

补充题 35: 矩阵 A 如下，X 满足 $X=AX-A^2+E$，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

求 X。

补充题 36: A,B 是 3 阶方阵，A 可逆，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$。证明 $A-2E$ 可逆，若 B 如下，

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

求 A。

补充题 37: A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$。求

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-10A^*\right|$$

的值。

补充题 38: n 阶方阵 A。实数 a，证明：

1. $(aA)^*=a^{n-1}A^*$；
2. A 可逆时，$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$。

补充题 39: 假定 A,B 是 n 阶矩阵，如果 $AB = A+B$，求证：$AB = BA$。

补充题 40: 方阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，写出 $(A+2E)^{-1}$ 的表达式。

补充题 41: n 阶方阵 A 满足 $2A(A-E)=A^3$，证明 $(E-A)^{-1}$ 有意义，写出它的表达式。

补充题 42: A 为元都为 1 的 n 阶方阵，证明

$$(E-A)^{-1} = E - \frac{1}{n-1}A$$

成立。

补充题 43: A 是 $m\times n$ 实矩阵，且 $AA^{\mathrm{T}}=0$。证明：$A=0$。

补充题 44: A 是 n 阶实方阵，$A\neq 0$ 且 $A^*=A^{\mathrm{T}}$。证明 A 可逆。

补充题 45: 证明若矩阵 B 满足 $B^{\mathrm{T}}B=E$，则 $(B^*)^{\mathrm{T}}=(B^*)^{-1}$。

补充题 46: n 阶方阵 A 满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$，且 $|A|<0$。求 $\det(A+E)$。

补充题 47: 方阵 A 满足 $A^2=E$，且 $|A|=-1$，证明 $A+E$ 不可逆。

补充题 48: n 阶方阵 A,B 满足 $A^2=B^2=E$，且 $|A|+|B|=0$，证明 $A+B$ 不可逆。

补充题 49: $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，矩阵 $A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，a 为非 0 实数，计算 $|aE-A^n|$。

补充题 50: 设 α 是三维行向量，且满足 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$。

补充题 51: $A=E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 E 为 n 阶单位阵，α 为 n 维非 0 列向量。证明：

1. $A^2=A$ 的充要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$。
2. 当 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$ 时，A 不可逆。

补充题 52: M 为 $m\times n$矩阵。MM^{T} 可逆。又 $P=E-M^{\mathrm{T}}(MM^{\mathrm{T}})^{-1}M$，证明 P 对称且 $P^2=P$。

补充题 53: 设 $X=\begin{pmatrix}0 & A\\ C & 0\end{pmatrix}$，已知 A^{-1},C^{-1} 存在。求 X^{-1}。

补充题 54: A,B,C,D 都是 n 阶矩阵。$|A|\neq 0$，$AC=CA$。证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$$

成立。

补充题 55: 已知：

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 AB 及 C^{-1}。

补充题 56: A 是 n 阶可逆矩阵，把 A 的第 i 行和第 j 行互换, 所得的矩阵记为 B。证明 B 可逆，求 AB^{-1}。

补充题 57: A 为二阶复方阵，$\det(A)=1$。则 A 可表为第三类初等矩阵的乘积。

补充题 58: 证矩阵的交换某两行的初等变换可以几次其他两种初等变换来实现。

第三节　线性方程组

补充题 59: 证明 $n+1$ 个 n 维向量必定线性相关。

解: 记 ε_i 为第 i 个分量为 1 ，其它分量都为 0 的列（行）向量，$i=1,\ldots,n$。对任意 $n+1$ 个向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$，$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ 可以被 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ 线性表出，所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ 线性相关。

补充题 60: 解方程组：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$$

求 a,b 取值时方程组解的情况。

补充题 61: a 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=0 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$$

有非零解。

补充题 62: 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & c & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，如果 η 是线性方程组 $AX=b$ 的一个解，试求 $AX=b$ 的通解。

补充题 63: 四元线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

又齐次线性方程组 (II) 的基础解系为 $k_1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+k_2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，求方程组 (I) 的基础解系，并求方程组 (I) 和 (II) 的公共解。

补充题 64: 已知四阶方阵 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$，其中 α_2,α_3 和 α_4 线性无关。而

$$\alpha_1=2\alpha_2-3\alpha_3,$$

若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $AX=\beta$ 的通解。

补充题 65: 求以下向量组的秩和一个极大线性无关组。

$$\begin{aligned} \alpha_1&=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_2&=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 & 3 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3&=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_4&=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \\ \alpha_5&=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

并把其它向量用该极大线性无关组线性表出.

补充题 66: 已知两个向量组 $\beta_1=(1,1,0),\beta_2=(1,1,1),\beta_3=(2,a,b)$ 与 $\alpha_1=(0,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(1,0,-1)$ 的秩相同，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。求 a,b。

补充题 67: 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$（其中 $\alpha_1\neq 0$）线性相关的充要条件是至少有一个 α_i，这里 $1<i\leqslant s$，可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表出。

补充题 68: 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是 4 个 3 维向量，且 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 线性无关。证明存在非零向量 γ，γ 既可被 α_1,α_2 线性表出，又可被 β_1,β_2 线性表出。

补充题 69: 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出。证明：这两个向量组等价。

补充题 70: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}$，证明 $\operatorname{rank}\{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}\}\geqslant r+m-s$。

补充题 71: $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量，且

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j\qquad(i=1,2,\ldots,r),$$

证明 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ 线性无关的充要条件是 $\det(a_{ij})\neq 0$。

补充题 72: λ 为实数，矩阵 A 如下，

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}.$$

求 $\operatorname{rank}(A)$。

补充题 73: B 的秩为 3，求k。$n\geqslant 2$，其中

$$B=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}a&b&\ldots&b\\b&a&\ldots&b\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\b&b&\ldots&a\end{pmatrix}.$$

讨论 n 阶方阵 A 的秩。

补充题 74: 矩阵 C 为 4 阶方阵，且满足 $\operatorname{rank}(C)=2$，则 $\operatorname{rank}(C^*)=?$

补充题 75: 已知 A 如下，B 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}.$$

求 t。

补充题 76: A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $s\times t$ 矩阵。证明

$$R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R(A)+R(B).$$

补充题 77: A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $s\times t$ 矩阵。证明

$$R\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}\geqslant R(A)+R(B).$$

补充题 78: A 是 $n\times n$ 阶矩阵，证明：存在一个 $n\times n$ 阶非零矩阵 B 满足 $AB=0$ 的充分必要条件是 $\det(A)=0$。

补充题 79: B 为一 $r\times r$ 阶矩阵，C 为一 $r\times n$ 阶矩阵，且 $\operatorname{rank}(C)=r$。证明：

1. 如果 $BC=0$，则 $B=0$；
2. 如果 $BC=C$，则 $B=E$。

补充题 80: A 为 $m\times n$ 矩阵。$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 为 s 个 n 维列向量。$\beta_i=A\alpha_i$，$i=1,\ldots,s$。

1. 如果 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 也线性无关；
2. 如果 $\operatorname{rank}(A)=n$，且 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 也线性无关。

补充题 81: A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$。若 $AB=E_{n\times n}$，证明 B 的列向量线性无关。

补充题 82: A 为 $m\times n$矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，若 $AB=C$，且矩阵 C 的行向量线性无关，证明 A 的行向量线性无关。

补充题 83: A 为实矩阵，证明 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}}A)=\operatorname{rank}(A)$。

补充题 84: A 是一 n 阶方阵。$R(A)=1$。证明 A 可表示为：

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \ldots & b_n\end{pmatrix}.$$

并且 A^2 可表示为 $A^2=kA$，其中 k 为某个数。

补充题 85: A 是一 2×2 矩阵，且已知对某个 $l\geqslant 2$，有 $A^l=0$。证明：$A^2=0$。

补充题 86: $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q，使 $A=PQ$。这称为矩阵的满秩分解。

补充题 87: A 是一 $n\times n$ 矩阵，且 $R(A)=r$。证明存在一可逆矩阵 P，使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为 0。

补充题 88: A 是 n 阶方阵。证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$。

补充题 89: 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$，$1\leqslant i\leqslant s$，$\beta=(b_1,\dots,b_n)$。证明: 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 β 可被 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性表出。

第四节　线性空间

补充题 90: 实数域上矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\qquad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

求此线性空间的维数与一个基底。

补充题 91: A 是 n 阶方阵。证明：全体与 A 相乘可交换的矩阵构成一个线性空间。当

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&2&0&\dots&0\\0&0&3&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&n\end{pmatrix}$$

时，求该线性空间的维数和一个基底。

补充题 92: 线性空间 V。$\alpha,\beta,\gamma\in V$。数 c_1,c_2,c_3 满足：

$$c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma=0.$$

且 $c_1c_3\neq 0$。证明 $L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$。

补充题 93: 线性空间 V。V_1 和 V_2 是 V 的线性子空间。证明 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的线性子空间。

补充题 94: 在向量 $\alpha_1 = (1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (1,2,3,-3)^{\mathrm{T}}$ 的基础上添加两个向量，使之构成 $\mathbf{R}^4$ 的一个基底。

补充题 95: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基底。A 是一 $n \times s$ 矩阵，

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} A,$$

证明 $L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ 的维数等于 A 的秩。

第五节 线性变换

补充题 96: 给定 $\mathbf{R}^3$ 的两个基底：

$$\varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (2,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$$
$$\eta_1 = (1,2,-1), \eta_2 = (2,2,-1), \eta_3 = (2,-1,-1).$$

定义线性变换 A：$A\varepsilon_i = \eta_i$，$i = 1,2,3$。写出由基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基底 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵。写出 A 在基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵；写出 A 在基底 η_1, η_2, η_3 下的矩阵。

补充题 97: 以下矩阵 A 与 B 相似，求 x, y：

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}.$$

补充题 98: 已知 ξ 是 A 的一个特征向量，求 a, b 以及 ξ 所对应的特征值。

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}.$$

补充题 99: 已知矩阵 A 有三个线性无关的特征向量，求 a。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

补充题 100: 证明：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相似。其中$i_1 i_2 \ldots i_n$是$1,2,\ldots,n$的一个排列。

补充题 101: 已知 A 可逆，证明 AB 与 BA 相似。

补充题 102: 如果 A 与 B 相似，则 A^{T} 与 B^{T} 相似。

补充题 103: 已知 A 与 B 相似，C 与 D 相似，证明

$$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$$

相似。

补充题 104: n 阶矩阵 A 的每一行 n 个元的和都为 a，证明 $\lambda = a$ 是 A 的特征根，且 $(1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 的关于 $\lambda = a$ 的特征向量。

补充题 105: 假如矩阵 A 满足 $A^2 = E$，证明 A 的特征根只能是 ± 1。再证明 A 与对角形矩阵相似。

补充题 106: A 是奇数阶正交矩阵。如果 $|A| = 1$，证明 1 是 A 的特征值。

补充题 107: 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$。矩阵 $B = A^3 - 5A^2$。求 B 的特征值，$|B|$ 和 $|A - 5E|$。

补充题 108: 矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = 0$。证明 A 的特征值只能是 1 和 2，且 A 可经过相似变换对角化。

补充题 109: A,B 为两个 n 阶矩阵。且 A 有 n 个不同的特征值，若 A 的特征向量恒为 B 的特征向量。证明：$AB = BA$。

补充题 110: 设三阶矩阵 A, B 如下。判断 A 与 B 是否相似，求 M 满足 $B = M^{-1}AM$。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

补充题 111: A 是三阶方阵，有 3 个特征值：$\lambda_1 = 1$、$\lambda_2 = 2$、$\lambda_3 = 3$，$B = (A-E)(A-2E)(A-3E)$，证明: $B = 0$。

补充题 112: $B=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\alpha\neq 0$。$a_i$ 都是实数。求矩阵 P，使

$$P^{-1}AP$$

成为对角形矩阵，并写出对角形矩阵。

补充题 113: A 与 B 均为 n 阶方阵，且 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)<n$。证明存在某个向量 α，它既是 A 的特征向量，又是 B 的特征向量。

补充题 114: 如果任意 n 维向量都是 n 阶矩阵 A 的特征向量，证明 A 是数量矩阵。

补充题 115: Fibonacci 数列。设数列 $F_1.F_2,\ldots,F_n,\ldots$ 满足条件

$$F_1=F_2=1;\qquad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad n\geqslant 3.$$

求数列的通项公式。

第六节 欧几里得空间

补充题 116: 欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$是$V$中的一个标准正交组。$\alpha$是$V$中的一个向量。设

$$\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle=a_i,\quad i=1,\ldots,k.$$

证明：$\langle\alpha,\alpha\rangle\geqslant a_1^2+\cdots+a_k^2$。

补充题 117: n 维欧氏空间 V。$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ 是 V 中的 $n-1$ 个线性无关的向量。V 中另外两个向量 β_1,β_2。β_i 与 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ 都正交，$i=1,2$。证明 β_1,β_2 线性相关。

补充题 118: $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基底。证明：

$$\alpha_1=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3),\quad \alpha_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3),\quad \alpha_2=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$$

也是 V 的一个标准正交基底。

补充题 119: $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基底。线性子空间 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3)$。其中：

$$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,\quad \alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4,\quad \alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

求 V_1 的一个标准正交基底。

补充题 120: n维欧氏空间V。η是V中的一个单位向量。对V中任意向量α，定义

$$T\alpha=\alpha-2\langle\alpha,\eta\rangle\eta,$$

证明T是正交变换。

补充题 121: n维欧几里得空间V。$\alpha,\beta\in V$，$|\alpha|=|\beta|$。证明存在V上的正交变换T，满足$T\alpha=\beta$。

补充题 122: 欧几里得空间V中, 向量$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 满足$|\alpha_1|=|\beta_1|,|\alpha_2|=|\beta_2|$, 且

$$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\langle\beta_1,\beta_2\rangle,$$

证明: 存在V上的正交变换T, 满足 $T\alpha_1=\beta_1,T\alpha_2=\beta_2$.

补充题 123: ξ_1,ξ_2是2维欧氏空间V的一个标准正交基底，$\eta_1=-\xi_1$，$\eta_2=\xi_1+2\xi_2$，V上的线性变换T在基底η_1,η_2下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

T是正交变换吗？

第七节　实二次型

补充题 124: 设实二次型 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$，证明 f 的秩等于下面矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ & \dots & \dots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

的秩。

补充题 125: 证明以下两个矩阵合同。

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix},$$

其中 $i_1i_2\dots i_n$ 是 $1,2,\dots,n$ 的一个排列。

补充题 126: 已知矩阵 A 如下，

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

求矩阵 P，使得 $A = PP^{\mathrm{T}}$。

补充题 127: 已知二次型 $f(x_1,\dots,x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩等于 n，证明：二次型 $f(x_1,\dots,x_n)$ 与二次型 $g(x_1,\dots,x_n) = X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 有相同的正、负惯性指数。

补充题 128: 已知 3 阶矩阵实对称矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$。且关于 λ_2,λ_3 的特征向量为$(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(2,3,-3)^{\mathrm{T}}$。求 A 的关于 λ_1 的特征向量，并求 A。

补充题 129: A 与 B 为实对称矩阵，证明：若 A 与 B 相似，则 A 与 B 合同；反之不成立。

补充题 130: 所有 3 阶实对称矩阵按合同关系可以分为几类？写出每一类的一个对角形矩阵。（类似可以问，3 元二次型按二次型等价关系可以分成几类，写出每一类的规范形。）

补充题 131: 实二次型 f 与 $-f$ 合同（经非退化线性替换得到），证明 f 的秩为偶数，且符号差为 0。

补充题 132: 某实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$，若有实 n 维向量 X_1,X_2，使

$$X_1^{\mathrm{T}}AX_1 > 0, \quad X_2^{\mathrm{T}}AX_2 < 0,$$

证明必存在 n 维实向量 $X_0 \neq 0$，使 $X_0^{\mathrm{T}}AX_0 = 0$。

补充题 133: 如果二次型 $\sum a_{ij}x_ix_j$ （其中 $a_{ij} = a_{ji}$）是正定二次型。那么

$$f(y_1,y_2,\dots,y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型。

补充题 134: 设 A 是实对称矩阵，证明只要实数 t 充分大，$tE+A$ 是正定矩阵。

补充题 135: $f = X^{\mathrm{T}}AX = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，且 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$是 A 的特征向量。求正交变换 $X = QY$，将二次型化为标准形。

补充题 136: 已知二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_2x_3,$$

其特征值为 $2,2,b$。求 a,b。

补充题 137: 矩阵 A 如下，写出以 A 和 A^{-1} 为矩阵的二次型；

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

求 A，A^{-1} 和 A^2+A 的特征值；求相应的 A 和 A^{-1} 的二次型的标准形。

补充题 138: 实对称矩阵 A 正定，证明 A^3 正定。B 也正定，证明以下矩阵

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

正定。

补充题 139: 矩阵 A 如下，A 有一个特征值为 3，求 y，

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix},$$

并求正交矩阵 P，使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角形矩阵。

补充题 140: A 是 n 阶正定矩阵，证明 $|A+E|>1$。

补充题 141: A 是 n 阶正定矩阵。证明对任意正数 α，

$$|A+\alpha E|>\alpha^n$$

都成立。

补充题 142: n 阶实方阵 A 有 n 个两两正交的特征向量 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$，证明 A 是对称矩阵。

补充题 143: A 为 $m\times n$ 实矩阵，$m<n$。证明矩阵 AA^{T} 正定的充要条件是 $\mathrm{rank}(A)=m$。

补充题 144: A 为 $m\times n$ 实矩阵。$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，证明方程组 $AX=0$ 只有 0 解的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}A$ 正定。

补充题 145: A 为 m 阶实正定矩阵，B 为 $m\times n$ 实矩阵。证明：矩阵 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定的充要条件是 $\mathrm{rank}(B)=n$。

补充题 146: 欧几里得空间 V。$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是 V 中的 n 个向量，定义

$$A=\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \dots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \dots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \dots & & & \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \dots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix},$$

证明 A 正定的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关。

补充题 147: n 阶实对称矩阵 A。A 为正定矩阵的充要条件是存在 n 个线性无关的向量

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ni}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

使得 $A=\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}$。

补充题 148: A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，相应的标准正交的特征向量为 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$，证明：

$$A=\lambda_1\eta_1\eta_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\eta_2\eta_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\eta_n\eta_n^{\mathrm{T}}.$$

补充题 149: 实对称矩阵 A 的所有特征值的绝对值都是 1，证明 A 是正交矩阵。

第八节 提高类习题

补充题 150: 在 n 个元素的所有排列中，一共有多少个逆序？

补充题 151: A 和 B 均为 n 阶方阵，且满足 $A^2=A$，$B^2=B$，$(A+B)^2=A+B$。证明:

$$AB=0.$$

解: 计算 $(A+B)^2$，

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+AB+BA+B=A+B,$$

$$\therefore\quad AB+BA=0. \tag{2.2}$$

上式分别左乘和右乘 A，得：

$$\begin{cases}A^2B+ABA=AB+ABA=0\\ ABA+BA^2=ABA+BA=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad AB=BA.$$

再由式 (2.2)，得 $AB=0$。

补充题 152: n 阶方阵 A,B 满足 $A^2=-A$，$B^2=-B$，$(A+B)^2=-A-B$，证明

$$AB=0.$$

补充题 153: 三阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足：对任意 $1\leqslant i,j\leqslant 3$，$a_{ij}=A_{ij}$，其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式；并且 $a_{11}\neq 0$。证明 A 可逆，求 $\det(A^{-1})$。

补充题 154: 两个矩阵$A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, 且 $m\geqslant n$, 证明$|\lambda E-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E-BA|$. 这是Sylvester定理.

解: 当 $\lambda\neq 0$ 时, 通过分块矩阵的初等变换，容易证明如下分块行列式的等式：

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & A \\ 0 & \lambda E_n-BA \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} E_m & -\frac{1}{\lambda}A \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m-\frac{1}{\lambda}AB & 0 \\ B & \lambda E_n \end{pmatrix}$$

所乘的两个分块初等矩阵的行列式值都为 1，因此有：

$$\begin{vmatrix} E_m-\frac{1}{\lambda}AB & 0 \\ B & \lambda E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & A \\ B & \lambda E_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_m & A \\ 0 & \lambda E_n-BA \end{vmatrix}.$$

因此有，$\lambda^{-m}|\lambda E-AB|\cdot\lambda^n=|\lambda E-BA|$，所以 $|\lambda E-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E-BA|$。

当$\lambda=0$时, $|\lambda E-AB|=|-AB|$, $|\lambda E-BA|=|-BA|$. 若$m=n$, 则由$|-AB|=|-BA|$, 知命题成立(此时, 写λ^{m-n} 不合适); 若$m>n$, $-AB$为$m\times m$ 级矩阵, 而A, B的秩为n, 所以$|0\cdot E-AB|=0=0^{m-n}|0\cdot E-BA|$.

综上, 知命题成立.

补充题 155: A和$E+A$可逆. B满足$B=(E+A)^{-1}(E-A)$, 求$(B+E)^{-1}$.

补充题 156: A, B和$A+B$都为n阶可逆矩阵, 证明:

1. $A^{-1}+B^{-1}$可逆, 且$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.
2. $A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

补充题 157: A 为 n 阶对称矩阵，且可逆，B 为 n 阶对称矩阵，且 $(E+AB)$ 可逆。证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵。

补充题 158: 矩阵 $A_{n\times k}$ 及 $B_{k\times m}$，证明：

$$\operatorname{rank}(AB)\geqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-k.$$

证: 设 $\mathrm{rank}(A)=s$，$\mathrm{rank}(B)=t$。因 $\mathrm{rank}(A)=s$，所以存在满秩矩阵 $P_{n\times n},Q_{k\times k}$，使

$$A=P\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}Q.$$

所以

$$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}\left(P\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}QB\right)=\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}E_s & \\ & 0\end{pmatrix}C\right),\quad C=QB.$$

而 $\mathrm{rank}(C)=\mathrm{rank}(QB)=\mathrm{rank}(B)=t$。矩阵 $\mathrm{diag}(E_s,0)C$ 的前 s 行为 C 的前 s 行，后 $k-s$ 行为 0 向量。C 的前 s 行的秩至少是 $t-(k-s)=s+t-k$。命题得证。

证: 设 $\mathrm{rank}(AB)=r_1$，找出 AB 的列向量的极大线性无关组，设为 AB 的第 $i_1,i_2,\dots,i_{r_1}$ 个列向量构成，共 r_1 个向量，记为 $\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_{r_1}}$。因为 B 的第 $i_1,i_2,\dots,i_{r_1}$ 个列向量 $\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{r_1}}$ 经线性变换得到 γ 这个向量组，所以向量组 $\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{r_1}}$ 线性无关。再取 $AX=0$ 的基础解系，设为 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$。对 B 的任意列 β，$A\beta$ 可表为 $A\beta=k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\gamma_{i_{r_1}}$，即 β 为

$$AX=k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\gamma_{i_{r_1}}$$

的解，但 $k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\beta_{i_{r_1}}$ 是以上方程的一个特解，所以 β 可表示为

$$\beta=t_1\alpha_1+\cdots+t_{r_2}\alpha_{r_2}+k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_{r_1}\beta_{i_{r_1}},$$

所以 B 的每个列向量都可以被 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2},\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_{r_1}}$ 线性表出，所以 B 的秩满足：

$$\mathrm{rank}(B)\leqslant r_1+r_2=k-R(A)+R(AB).$$

移项即得到要证的不等式。

补充题 159: 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足如下条件，证明 $|A|\neq 0$。

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\dots,n.$$

证: 只要证明齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解，即对于任意

$$Y=(y_1,\dots,y_n)^{\mathrm{T}}\neq 0,$$

必有 $AY\neq 0$，亦即只要证 AY 的某个分量，如第 i 个分量，不等于 0，即

$$a_{i1}y_1+\cdots+a_{in}y_n\neq 0.$$

设分量 $y_1,\dots,y_n$ 中绝对值最大的一个是 y_s，即 $|y_s|\geqslant|y_j|$，$j=1,\dots,n$。从而有

$$|a_{ss}y_s|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}||y_s|\geqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}|a_{sj}||y_j|\geqslant\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}a_{sj}y_j\right|,$$

$$\therefore \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{sj}y_j\right| \geqslant |a_{ss}y_s| - \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{n} a_{sj}y_j\right| > 0.$$

所以 AY 的第 s 个分量 $a_{s1}y_1+\cdots+a_{ss}y_s+\cdots+a_{sn}y_n \neq 0$。于是，$AX=0$ 当且仅当 $X=0$，故$|A|\neq 0$。

补充题 160: 设n阶矩阵$A=(a_{ij})$满足如下条件, 证明$|A|>0$.

$$a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.3}$$

解: 对$0\leqslant t\leqslant 1$, 作行列式

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}t & \ldots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22} & \ldots & a_{2n}t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

显然对任意的$t\in[0,1]$, 行列式$D(t)$都满足上题的条件, 从而由上题知恒有$D(t)\neq 0$. 另一方面$D(t)$展开后是t的连续函数. 且由$D(t)$ 的定义,

$$D(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \qquad D(1)=\det(A).$$

用反证法证$\det(A)>0$. 若$\det(A)=D(1)<0$, 但$D(0)>0$. 由$D(t)$的连续性, 必定存在一点t_1满足$D(t_1)=0$. 这与前一题的结论矛盾. 所以 $\det(A)=D(1)>0$.

补充题 161: 三个矩阵 A,B,C，已知 ABC 有意义。证明：

$$\mathrm{rank}(ABC)\geqslant \mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC)-\mathrm{rank}(B).$$

这是 **Frobenious 不等式**。

补充题 162: 若 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$，则 $\mathrm{rank}(ABC)=\mathrm{rank}(BC)$。

解: 因为 $Bx=0$ 的解必定满足 $ABx=0$。而又已知 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$，说明 $ABX=0$ 的解空间与 $BX=0$ 的解空间维数相同。因此 $BX=0$ 的解就是 $ABX=0$ 的全部解。

证明方程组$ABCx=0$与$BCx=0$同解. 易知 $BCx=0$的解是$ABCx=0$的解. 而若x满足$ABCx=0$, 设$y=Cx$, 则 y满足$ABy=0$, 因此y必定满足$By=0$. 也就是$BCx=0$. 所以$ABCx=0$的解是$BCx=0$的解. 因此必定$\mathrm{rank}(ABC)=\mathrm{rank}(AB)$.

补充题 163: 设A为n阶方阵, 证明 $\mathrm{rank}(A^n)=\mathrm{rank}(A^{n+1})$.

补充题 164: 证 A 为 n 阶幂等方阵, 即 $A^2=A$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(E-A)=n$; 证 A 为 n 阶对合方阵, 即 $A^2=E$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(E+A)+\operatorname{rank}(E-A)=n$.

解: 必要性. 由 $A^2=A$, 得 $A(E-A)=0$. 因此 $E-A$ 的列向量是线性方程组 $AX=0$ 的解. 因此 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(E-A)\leqslant n$. 但

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(E-A)\geqslant \operatorname{rank}(A+E-A)=\operatorname{rank}(E)=n.$$

充分性。对分块矩阵作初等变换：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & E-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-A^2 & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

由于作的是一系列的矩阵初等变换，因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E-A \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(E-A)+\operatorname{rank}(A)=n.$$

这说明 $A-A^2$ 是零矩阵，因此 $A^2=A$。

补充题 165: 已知齐次线性方程组$AX=0$的通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}+k_2\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

求此线性方程组.

补充题 166: 已知如下两个线性方程组为同解方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=1-t \end{cases}$$

求 m,n,t。

补充题 167: 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性方程组 $AX=0$的一个基础解系,

$$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\quad \beta_3=\alpha_3+t\alpha_4,\quad \beta_4=\alpha_4+t\alpha_1,$$

讨论t满足什么关系时, $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是 $AX=0$的一个基础解系.

补充题 168 (北大): 今天考了高代, 是蓝老师出的题, 又是最后一道 5 分的题, 本届三位金牌当时都未做出来. 给定数域 K 内的数所组成的无穷序列 $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$, 对于

任意的非负整数 s,m, 定义

$$A_{s,m}=\begin{pmatrix} a_s & a_{s+1} & \cdots & a_{s+m}\\ a_{s+1} & a_{s+2} & \cdots & a_{s+m+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s+m} & a_{s+m+1} & \cdots & a_{s+2m}\end{pmatrix}.$$

如果存在非负整数 n,k，使当 $s\geqslant k$ 时，$|A_{s,n}|=0$。证明: 存在不全为 0 的数 $b_0,b_1,\ldots,b_n$ 及非负整数 S，使得当 $s\geqslant S$ 时，有

$$a_sb_n+a_{s+1}b_{n-1}+\cdots+a_{s+n}b_0=0$$

成立。

补充题 169: 线性空间V。V_1和V_2是V的非平凡子空间。证明V中必存在一个向量γ,

$$\gamma\notin V_1,\qquad \gamma\notin V_2.$$

解: 因为V_1是非平凡子空间, 故存在向量 $\alpha\notin V_1$. 若$\alpha\notin V_2$, 则α即为所求. 若$\alpha\in V_2$, 也就是 α满足$\alpha\notin V_1$, $\alpha\in V_2$. 用同样方法, 我们要么可以找到$\beta\notin V_1$且$\beta\notin V_2$, 也就是β即为所求, 要么找到$\beta\in V_1$且$\beta\notin V_2$, 则此时 $\alpha+\beta$即为所求:

$$\alpha+\beta\notin V_1\quad 且\quad \alpha+\beta\notin V_2.$$

因为若$\alpha+\beta\in V_1$的话，就可以推出$\alpha\in V_1$；若$\alpha+\beta\in V_2$的话，则$\beta\in V_2$。都与已知矛盾。

补充题 170: 只与自身相似的矩阵必是数量矩阵。

补充题 171: A为一n阶实矩阵，$|A|\neq 0$。证明A可表示为:

$$A=QT,$$

其中Q是一正交矩阵，T是一上三角矩阵。且T的对角线上元素均大于0。并证明以上表示式是唯一的。

补充题 172: A 是 n 阶实对称矩阵，且 A 是幂零矩阵，则 $A=0$。

补充题 173: 证明：实反对称矩阵的特征根是零或纯虚数。

补充题 174: 证明：如果实对称矩阵 A 正定，则存在正定矩阵 B，使 $A=B^2$。

补充题 175: A 是正定矩阵，又是正交矩阵，证明 $A=E$。

证: A 对称，且为正交矩阵，所以 $A^2=A^{\mathrm{T}}A=E$。所以

$$(A+E)(A-E)=0,$$

又因为 A 正定，前面已证明 $|A+E|>0$，所以 $A+E$ 可逆。上式两边左乘 $(A+E)^{-1}$，得到 $A-E=0$，即 $A=E$。

证: 因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$$

成立，其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的特征值。所以 $A=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}Q^{\mathrm{T}}$。因已知 $A^{\mathrm{T}}A=E$，计算：

$$E=A^{\mathrm{T}}A=AA=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}Q^{\mathrm{T}}=Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2\}Q^{\mathrm{T}},$$

所以 $\mathrm{diag}\{\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2\}=Q^{\mathrm{T}}EQ=E$。因此 $\lambda_i=\pm1$，$i=1,\ldots,n$。但已知 A 正定，所以有 $\lambda_i=1$，$i=1,\ldots,n$。所以

$$A=Q\,\mathrm{diag}\{1,\ldots,1\}Q^{\mathrm{T}}=QQ^{\mathrm{T}}=E.$$

证毕。

第三章　补充题参考答案或提示

第一节　行列式

补充题 1: 略。

补充题 2: 略。

补充题 3: 略。

补充题 4: 略。

补充题 5: 提示：化成下三角。

补充题 6: 答案：$a(x+a)^n$。

补充题 7: 答案：a^n 和 1。

补充题 8: 答案：$x_1x_2\cdots x_n(1+\frac{a}{x_1}+\frac{a}{x_2}+\cdots+\frac{a}{x_n})$。

补充题 9: 答案：$b_1b_2\cdots b_n(1+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n})$。

补充题 10: 解:

利用行列式的性质，

$$原式=\begin{vmatrix} \lambda-b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & a & a & a & \dots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix},$$

因此

$$原式=\begin{vmatrix} \lambda-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ 0 & \alpha-a & \beta-a & \dots & \beta-a \\ 0 & \beta-a & \alpha-a & \dots & \beta-a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \beta-a & \beta-a & \dots & \alpha-a \end{vmatrix}$$

将上式中的两个行列式分别按第一行和第一列展开, 可知它们都可利用下式求值:

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

以下计算略。

补充题 11: 答案：x^4。

补充题 12: 答案：$-\prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n}(a_k - x_k)$。

补充题 13: 略。

补充题 14: 答案：$1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 和 $\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}(x_k-x_j)[2\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)]$。

补充题 15: 略。

补充题 16: 略。

补充题 17: 略。

补充题 18: 略。

补充题 19: 答案：$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{i=1}^{n} a_i\right]$。

补充题 20: 略。

补充题 21: 略。

补充题 22: 略。

第二节　矩阵

补充题 23: 略。

补充题 24: 略。

补充题 25: 答案：B 可表示为：

$$B=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ 0 & x_1\end{pmatrix},$$

其中 x_1,x_2 为数域内任意数。

补充题 26: 答案：

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

用数学归纳法证明。

补充题 27: 计算得到：$A^2=2A$。所以 $A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=A^{n-2}0=0$。

补充题 28: $A^{100}=6^{99}A$。

$$B^k=\begin{pmatrix}2^k & 0 & k2^{k-1}\\ 0 & 2^k & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}.$$

$C^2=4E$。所以 $C^{51}=2^{50}C$。

补充题 29: 计算得到：

$$A^{100}=\begin{pmatrix}1 & 100a\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以 $a=0$。

补充题 30: 答案：$A^{100}=A^2+49(A^2-E)$。

补充题 31: 略。

补充题 32: 计算得：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix},$$

$A^5=A$。

补充题 33: 略。

补充题 34: 略。

补充题 35: 略。

补充题 36: 略。

补充题 37: 略。

补充题 38: 略。

补充题 39: **证:** 由 $AB = A + B$，知 $AB - A - B - E = E$，也就是

$$(A-E)(B-E) = E.$$

所以

$$(B-E)(A-E) = E.$$

化简得到：$BA = A + B$。因此 $AB = BA$。

补充题 40: 略。

补充题 41: 略。

补充题 42: 略。

补充题 43: 略。

补充题 44: 略。

补充题 45: 略。

补充题 46: 略。

补充题 47: 略。

补充题 48: 略。

补充题 49: 答案：$a^2(a-2^n)$。

补充题 50: 答案：3。

补充题 51: 略。

补充题 52: 略。

补充题 53: 略。

补充题 54: 略。

补充题 55: 略。

补充题 56: 略。

补充题 57: 证: 设 $a \neq 0$，注意 $\det(A) = 1$ 即为 $ad - bc = 1$。所以进行第三类初等变换，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

以上最后得到的矩阵亦可继续进行第三类行初等变换，

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故 A 可左乘一系列第三类初等矩阵得到单位矩阵，因此 A 可表示为一系列第三类初等矩阵的逆矩阵的乘积，但第三类初等矩阵的逆矩阵仍是第三类初等矩阵。因此，A 可表示为一系列第三类初等矩阵的乘积。

补充题 58: 解: 只需证交换两行初等变换所对应的初等矩阵可写成其他两种初等矩阵的乘积。即证明可以通过其他两种初等变换将单位矩阵化为交换两行对应的初等矩阵。变换如下：

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

证毕。

第三节　线性方程组

补充题 59: 略。

补充题 60: 解: 方程组的增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

对增广矩阵进行初等行变换，化为阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

此时将 x_2 与 x_3 互换位置，则方程组的增广矩阵已是阶梯形。由此可知，当 $b=0$ 时，方程组无解。若 $b \neq 0$，情况为：

$a \neq 1$ 时，系数矩阵的秩为 3，所以方程组有唯一解。

$a=1$ 时，系数矩阵的秩为 2，增广矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-b & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其秩被行列式

$$\begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}$$

的值所决定，$b=\frac{1}{2}$ 时，增广矩阵秩为 2，有无穷多解；$b \neq \frac{1}{2}$ 时，增广矩阵秩为 3，方程组无解。

综合以上结果，方程组解的情形为：

- $b=0$ 时，方程组无解。
- $b=\frac{1}{2}$ 时，
  1. $a=1$ 时，方程组有无穷多组解；
  2. $a \neq 1$ 时，方程组有唯一解。
- $b \neq 0$ 且 $b \neq \frac{1}{2}$ 时，
  1. $a=1$ 时，方程组无解；
  2. $a \neq 1$ 时，有唯一解。

另一种初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1 & b & 1 & 3\\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a\\ 0 & b & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & b & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a\\ 0 & b & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & b & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a\\ 0 & 0 & -(1-a)b & 1-(4-2a)b\end{pmatrix}.$$

以下作类似讨论。

补充题 61: 答案：$a=-1$ 或 $a=3$。

补充题 62: **解:** η 代入方程组 $AX=b$ 得到：$a=c$。对 A 作初等行变换：

$$A \to \begin{pmatrix}1 & a & a & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1-2a & 1-2a & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & a & a & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2(1-2a) & -(1-2a)\end{pmatrix}.$$

因此当 $a=\frac{1}{2}$ 时系数矩阵的秩为 2，否则系数矩阵秩为 3。

$a=\frac{1}{2}$ 时导出组为

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+2x_4 & =0\\ x_2+3x_3+x_4 & =0\end{cases}$$

基础解系为 $X_1=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $X_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

$a\neq\frac{1}{2}$ 时导出组为

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+2x_4 & =0\\ x_2+3x_3+x_4 & =0\\ 2x_3+x_4 & =0\end{cases}$$

基础解系为 $X_1=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。写出通解部分略。

补充题 63: 答案：(I) 的基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \eta_2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

公共解为 $k\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

补充题 64: 略。

补充题 65: 略。

补充题 66: 略。

补充题 67: **证:** 充分性。若存在某个 α_i 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$ 线性表出，即存在数 $k_1,\ldots,k_{i-1}$ 使

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1},$$

则

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s,$$

即 α_i 可被向量组中其余向量线性表出，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关。

必要性。若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关，即存在不全为 0 的数 $k_1,\ldots,k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

成立，设 $k_1,\ldots,k_s$ 中不为 0 的数中下标最大的为 i，即 $k_{i+1} = \cdots = k_s = 0$，上式变为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i = 0, \tag{3.1}$$

此时，必有 $i > 1$。因为若 $i = 1$，式 (3.1) 变为 $k_1\alpha_1 = 0$，但已知 $\alpha_1 \neq 0$，所以有 $k_1 = 0$，这与 k_i 是 $k_1,\ldots,k_s$ 中不为 0 的数中下标最大的矛盾。因此 $i > 1$，所以式 (3.1) 可改写为

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1},$$

符合命题的要求。命题得证。

补充题 68: 略。

补充题 69: 略。

补充题 70: 略。

补充题 71: 略。

补充题 72: 略。

补充题 73: 略。

补充题 74: 略。

补充题 75: 略。

补充题 76: 证: 设 $R(A)=r_1$，$R(B)=r_2$。则存在可逆矩阵 P_1 和 Q_1，以及可逆矩阵 P_2 和 Q_2，成立

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_{r_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad P_2BQ_2=\begin{pmatrix}E_{r_2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以准对角形矩阵 $\mathrm{diag}\{P_1,P_2\}$ 和 $\mathrm{diag}\{Q_1,Q_2\}$ 都是可逆矩阵，且

$$\begin{pmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1 & \\ & Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1AQ_1 & \\ & P_2BQ_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{r_1} & & & \\ & 0 & & \\ & & E_{r_2} & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

所以

$$R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}E_{r_1} & & & \\ & 0 & & \\ & & E_{r_2} & \\ & & & 0\end{pmatrix},$$

上式中最后一个矩阵的秩是 r_1+r_2。因此待证等式成立。

补充题 77: 证: 设 $R(A)=r_1$，$R(B)=r_2$，则 A 中有 r_1 阶子式 D_{r_1} 非 0，B 中有 r_2 阶子式 D_{r_2} 非 0。在

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$$

中选出这两个子式所在的行与列，构成一个 r_1+r_2 阶子式

$$D_{r_1+r_2}=\begin{vmatrix}D_{r_1} & 0\\ * & D_{r_2}\end{vmatrix},$$

由拉普拉斯定理知，$D_{r_1+r_2}=D_{r_1}\cdot D_{r_2}\neq 0$。即矩阵 $\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$ 中有一个 r_1+r_2 阶子式非 0，所以 $R\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\geqslant r_1+r_2=R(A)+R(B)$。

补充题 78: 略。

补充题 79: 提示：$\mathrm{rank}(C)=r$，所以 C 的行秩为 r。但 C 只有 r 行，所以 C 的所有行组成的行向量组线性无关。

补充题 80: 略。

补充题 81: 略。

补充题 82: 略。

补充题 83: **解:** $\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A) \leqslant \mathrm{rank}(A)$ 是显然的。

以下证方程组 $A^{\mathrm{T}}AX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解。若 X 满足 $A^{\mathrm{T}}AX = 0$，则

$$X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX = 0,$$

此即 $(AX)^{\mathrm{T}}AX = 0$，因此对 $A^{\mathrm{T}}AX = 0$ 的任何实解 X，令 $Y = AX$，因 A 是实矩阵，故 Y 是实向量，上式即 $Y^{\mathrm{T}}Y = 0$。但 $Y^{\mathrm{T}}Y$ 是实数的平方和，因此 $Y = 0$。即 X 满足 $AX = 0$。这说明 $A^{\mathrm{T}}AX = 0$ 的基础解系所包含的 $n - \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A)$ 个实解也都是 $AX = 0$ 的解。即

$$n - \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A) \leqslant n - \mathrm{rank}(A),$$

于是 $\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A) \geqslant \mathrm{rank}(A)$。综上知结论成立。

补充题 84: A 的秩为 1，因此存在可逆矩阵 P 和 Q，使

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} Q,$$

其中 0_{n-1}表示 $n-1$ 阶 0 矩阵。记 P 的第 1 列、Q的第 1 行分别为

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

于是，

$$\begin{aligned} A = P\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right] Q &= \left[P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} Q\right] \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

命题第一个式子证明完毕。由命题第 1 个式子，

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \\
&= k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = kA,
\end{aligned}
$$

其中 $k = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$。

证: A 的秩为 1，所以 A 的列秩为 1，即 A 的列向量构成的向量组的极大线性无关组包含 1 个向量。不妨设 A 的第 i列 α_k 为列向量组的极大线性无关组。因此 A 的第 i 列（$i = 1, \dots, n$）都可以被 α_k 线性表出，即等于 α_k 与某个数作数量乘积，设：

$$
\alpha_1 = b_1\alpha_k, \quad \alpha_2 = b_2\alpha_k, \quad \dots, \quad \alpha_n = b_n\alpha_k, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix},
$$

则

$$
A = \begin{pmatrix} b_1\alpha_k & \dots & b_n\alpha_k \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.
$$

这就是要证的式子。

补充题 85: 略。

补充题 86: **解:** 因为 A 的秩为 r，故存在 m 阶非奇异矩阵 P 和 n 阶非奇异矩阵 Q，

使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, \qquad \text{注意: } \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}.$$

所以令 $M = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$，$N = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}Q$，

$$A = \left[P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}Q\right] = MN.$$

容易验证 M,N 满足题目要求。

补充题 87: 略。

补充题 88: 略。

补充题 89: **解:** 用 (I) 表示原方程组，再作新方程组 (II)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

由题设知 (I) 与 (II) 同解，因此它们有相同的基础解系。但基础解系所含向量的个数与系数矩阵之秩的和为 n。所以 (I) 与 (II) 的系数矩阵的秩相等。即 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta$ 的秩相等，因而它们等价。故 β 可被 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性表出。

第四节 线性空间

补充题 90: 略。

补充题 91: 略。

补充题 92: 略。

补充题 93: 略。

补充题 94: 略。

补充题 95: 略。

第五节　线性变换

补充题 96: 略。

补充题 97: 答案：$y=-2$，$x=0$。

补充题 98: 答案：$a=-3$，$b=0$，$\lambda=-1$。

补充题 99: 答案：$a=5$。

补充题 100: 略。

补充题 101: 略。

补充题 102: 略。

补充题 103: 略。

补充题 104: 略。

补充题 105: 略。

补充题 106: 略。

补充题 107: 略。

补充题 108: 略。

补充题 109: 略。

补充题 110: 略。

补充题 111: 略。

补充题 112: 略。

补充题 113: 略。

补充题 114: **证:** 先证明 A 不能有互异的特征值，即特征值只能有 1 个，记为 λ。

由已知，任取 n 个线性无关的列向量，它们都是 A 的关于 λ 的特征向量，将它们排成 n 阶矩阵 M，M 可逆。所以

$$A=M\cdot\lambda E\cdot M^{-1}=\lambda E.$$

证毕。

补充题 115: 解: 递推关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

反复应用式 (3.2)得到

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

以下只需计算方阵 A 的 $n-2$ 次幂，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式为 $\phi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$，有两个不相等的特征值：

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

分别求 A 的关于 λ_1 和 λ_2 的特征向量 X_1 和 X_2：

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

依次以 X_1, X_2 为列向量构成可逆矩阵 P：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -1 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

有

$$\begin{aligned} A &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ A^{n-2} &= P \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-2} & \\ & \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-2} & \\ & \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -1 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

计算 A^{n-2} 得

$$A^{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-2} - \lambda_1^{n-2} \\ * & * \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-2} - \lambda_1^{n-2} \\ * \end{pmatrix},$$

所以

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_2^{n-2}(\lambda_2+1)-\lambda_1^{n-2}(\lambda_1+1)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_2^{n-2}\lambda_2^2-\lambda_1^{n-2}\lambda_1^2)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

将数列项之间的递推关系转化为连续两项组成的向量之间的递推关系，再借助矩阵相似于对角形矩阵计算矩阵的幂解决问题。

第六节　欧几里得空间

补充题 116: 略。

补充题 117: 略。

补充题 118: 略。

补充题 119: 略。

补充题 120: 略。

补充题 121: 略。

补充题 122: 略。

补充题 123: 略。

第七节　实二次型

补充题 124: **解:** 设

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \quad\cdots\quad\cdots \\ y_s = a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n \end{cases} \quad 即 \quad Y = AX, \tag{3.4}$$

则 $f = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_s^2$，也就是

$$f = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX.$$

$A^{\mathrm{T}}A$ 是对称矩阵，因此此二次型的矩阵是 $A^{\mathrm{T}}A$。因此 f 的秩是 $\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A)$。而前面已证明

$$\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{rank}(A),$$

因此 f 的秩等于 $\mathrm{rank}(A)$。

补充题 125: 略。

补充题 126: 略。

补充题 127: 略。

补充题 128: 略。

补充题 129: **证:** A 与 B 相似，所以 A 和 B 有相同的特征多项式，又因为 A 是实对称矩阵，所以 A 相似于某个对角形矩阵 M，因此 B 也相似于 M。又因 A 和 B 都是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q_1 和 Q_2，使得

$$Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1 = M, \qquad Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2 = M,$$

所以 $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1 = Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2$，所以$(Q_2^{\mathrm{T}})^{-1}Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1(Q_2)^{-1} = B$，因为 Q_1, Q_2 是正交矩阵，所以有

$$(Q_1Q_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A(Q_1Q_2^{\mathrm{T}}) = B,$$

其中因 Q_1, Q_2 都是正交矩阵，所以 $|Q_1|$ 和 $|Q_2|$ 都不为 0，所以 $Q_1Q_2^{\mathrm{T}}$ 是可逆矩阵。上式说明 A 与 B 合同。

反之，若 A 与 B 合同，则 A 与 B 不一定相似。例如取，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 $C = \mathrm{diag}\{2, 1\}$，则 $B = C^{\mathrm{T}}AC$。但因 A 与 B 有不同的特征值，知它们不相似。

补充题 130: 解:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

共 10 个类。

补充题 131: 证: 设 f 的秩为 r，正惯性指数为 p，f 的矩阵为 A，二次型为 $f=X^{\mathrm{T}}AX$。则存在可逆矩阵 C，作非退化线性替换 $X=CY$，得到二次型的规范形：

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

$-f=-X^{\mathrm{T}}AX$，对它也作非退化线性替换 $X=CY$，得到

$$-f=-(y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2)=y_{p+1}^2+\cdots+y_r^2-y_1^2-\cdots-y_p^2,$$

因已知 $-f$ 可由 f 经非退化线性替换得到，所以上式也是 f 的一个规范形，但规范形是唯一的。所以有 $r-p=p$，即 $r=2p$。因此知 r 是偶数，且符号差为 0。

补充题 132: 证: 先证明 X_2 不能被 X_1 线性表出。因若 $X_2=kX_1$，则

$$X_2^{\mathrm{T}}AX_2=t^2X_1^{\mathrm{T}}AX_1\geqslant 0,$$

这与已知矛盾。

令 $X=tX_1+X_2$，其中 t 为待定系数。由上面证明的 X_2 不能被 X_1 线性表出知，无论 t 取何值，$X\neq 0$。而

$$\begin{aligned}X^{\mathrm{T}}AX&=t^2X_1^{\mathrm{T}}AX_1+tX_1^{\mathrm{T}}AX_2+tX_2^{\mathrm{T}}AX_1+X_2^{\mathrm{T}}AX_2\\&=t^2X_1^{\mathrm{T}}AX_1+2tX_1^{\mathrm{T}}AX_2+X_2^{\mathrm{T}}AX_2,\end{aligned}\tag{3.5}$$

式 (3.5) 是一个关于 t 的二次函数，其判别式

$$\Delta=\left(2X_1^{\mathrm{T}}AX_2\right)^2-4X_1^{\mathrm{T}}AX_1\cdot X_2^{\mathrm{T}}AX_2>0,$$

因此二次函数(3.5)有根 $t=t_0$，取 $X_0=t_0X_1+X_2$，则由式 (3.5) 知 $X_0^{\mathrm{T}}AX_0=0$。

证: A 为实对称矩阵，所以存在正交矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$，若对所有的 $i=1,\dots,n$，都有 $\lambda_i\geqslant 0$，则对任意的 $X\neq 0$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX\geqslant 0$，这与已知 $X_2^{\mathrm{T}}AX_2<0$ 矛盾。因此必有某个 λ_k 满足 $\lambda_k<0$。同理可证存在某个 λ_l 满足 $\lambda_l>0$。显然 $k\neq l$。令 ε_k 为 C 的第 k 个列向量，它是 A 的关于 $\lambda=\lambda_k$ 的特征向量；令 ε_l 为 C 的第 l 个列向量，它是 A 的关于 $\lambda=\lambda_l$ 的特征向量；取 $X_0=\sqrt{\lambda_l}\varepsilon_k+\sqrt{-\lambda_k}\varepsilon_l$，则

$$\begin{aligned}X_0^{\mathrm{T}}AX_0&=\left(\sqrt{-\lambda_k}\varepsilon_l+\sqrt{\lambda_l}\varepsilon_k\right)^{\mathrm{T}}A\left(\sqrt{-\lambda_k}\varepsilon_l+\sqrt{\lambda_l}\varepsilon_k\right)\\&=(-\lambda_k)\varepsilon_l^{\mathrm{T}}A\varepsilon_l+0+0+\lambda_l\varepsilon_k^{\mathrm{T}}A\varepsilon_k=-\lambda_k\lambda_l+\lambda_k\lambda_l=0,\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon_k,\varepsilon_l$ 正交，所以线性无关，所以 $X_0\neq 0$，此 X_0 即满足题目要求。

补充题 133: 证: 因 A 正定，所以 $|A|>0$。因此线性替换 $Y=AZ$ 是非退化线性替换。对此二次型作线性替换 $Y=AZ$，即 $y_i=a_{i1}z_1+\cdots+a_{in}z_n$，其中 $i=1,\dots,n$。于是

$$\begin{aligned}f(y_1,\dots,y_n)&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&a_{11}z_1+\cdots+a_{1n}z_n\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&a_{21}z_1+\cdots+a_{2n}z_n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}&a_{n1}z_1+\cdots+a_{nn}z_n\\y_1&y_2&\dots&y_n&0\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}&0\\y_1&y_2&\dots&y_n&-y_1z_1+\cdots-y_nz_n\end{vmatrix}=-|A|Y^{\mathrm{T}}Z=-|A|Z^{\mathrm{T}}AZ.\end{aligned}$$

因 A 正定，所以 $f(y_1,\dots,y_n)$ 是负定二次型。

补充题 134: 略。

补充题 135: 解: 将 f 的矩阵进行初等变换，求其秩，

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&a-b&0\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&a-b&0\\a-b&1&b\\0&b&1\end{pmatrix},$$

若 $a-b\neq 0$，上式的最后一个矩阵的行列式非 0，与 $\mathrm{rank}(A)=2$ 矛盾。所以必有 $a=b$。代入上式的最后一个矩阵，由 $\mathrm{rank}(A)=2$ 则必有 $1-b^2\neq 0$。即 $b\neq\pm 1$。

又 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的特征向量，设它所对应的特征值为 λ，所以

$$\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以 $a=b=0$，向量 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的关于 $\lambda=1$ 的特征向量。

补充题 136: 解: 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

因 $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，所以 $\mathrm{rank}(2E-A)=1$。所以 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2-a & -1 \\ -1 & 2-1 \end{vmatrix} = 0,$$

计算行列式得到 $a=1$。再由特征值的和等于矩阵的迹，得到 $b=0$。

补充题 137: 解: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = X^{\mathrm{T}}AX = 2x_1x_2 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2$。

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$g(x_1,x_2,x_3,x_4) = X^{\mathrm{T}}A^{-1}X = 2x_1x_2 + \frac{2}{3}x_3^2 - \frac{2}{3}x_3x_4 + \frac{2}{3}x_4^2$。

$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-3)$。

因此 A 的特征值：$\lambda_1=1, \lambda_2=1, \lambda_3=-1, \lambda_4=3$。

因此 A^{-1} 的特征值：$\mu_1=1, \mu_2=1, \mu_3=-1, \mu_4=\frac{1}{3}$。

因此 A^2+A 的特征值为：$\theta_1 = \lambda_1^2+\lambda = 2, \theta_2 = \lambda_2^2+\lambda_2 = 2, \theta_3 = 0, \theta_4 = 12$。

矩阵 A 对应的二次型的标准形为：

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2,$$

矩阵 A^{-1} 对应的二次型的标准形为 $g = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 + \frac{1}{3}z_4^2$。

补充题 138: 证: 因为 A 正定，所以 $|A| \neq 0$。前面已经证明存在一对称矩阵 B，满足 $A=B^2$。所以 $|B| \neq 0$。而

$$A^3 = AB^2A = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BA = (BA)^{\mathrm{T}}(BA),$$

这说明 A^3 可表示为一个可逆矩阵与其转置乘积的形式，所以 A^3 是正定矩阵。

注: 直接考虑特征值也可证明。

补充题 139: 解: $y=2$，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=\mathrm{diag}\{1,1,1,9\}$。

补充题 140: 证: 因为 A 是实对称矩阵，因此存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}.$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，同时也是将 A 所对应的二次型化成标准形时的平方项系数。因 A 正定，所以 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\ldots,n$。而

$$\begin{aligned}|A+E| &= |Q^{\mathrm{T}}||A+E||Q|=|Q^{\mathrm{T}}(A+E)Q|=|Q^{\mathrm{T}}AQ+Q^{\mathrm{T}}EQ|\\ &= \left|\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}+E\right|=\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n+1\end{vmatrix}\\ &= (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1),\end{aligned}$$

前面已经证明 $\lambda_i>0(i=1,\ldots,n)$，所以上式显然大于 1。

注: 上面式子明显大于$1+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，而

$$|A|=|Q\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}Q^{\mathrm{T}}|=\lambda_1\cdots\lambda_n,$$

所以有 $|E+A|>1+|A|$。

补充题 141: 略。

补充题 142: 略。

补充题 143: 略。

补充题 144: 略。

补充题 145: 略。

补充题 146: 略。

补充题 147: 略。

补充题 148: 略。

补充题 149: 略。

第四章　自测题

第一节　自测题 1

补充题 176: 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}19 & -9 & -6\\ 25 & -11 & -9\\ 17 & -9 & -4\end{pmatrix},$$

求 A 的特征值和特征向量。

补充题 177: 证明 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求

$$\beta=\begin{pmatrix}5 & 9 & -2\end{pmatrix}$$

在此基下的坐标。

补充题 178: λ 为何值时，如下方程组有解、无解？

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\lambda\\ \lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$$

并求通解。

补充题 179: A 是 5 阶方阵，满足 $A^2=0$。则齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中解向量的个数至少是几个？

补充题 180: k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4\\ -x_1+kx_2+x_3=k^2\\ x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$$

分别有唯一解、无解和无穷多解？求有解时的全部解。

补充题 181: 已知二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3,$$

用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交变换。

补充题 182: A 是 $m\times n$ 矩阵。且 $\mathrm{rank}(A)=n$。如果 $AB=A$，证明：$B=E$。

若干概念补充：

- 可逆矩阵，又可称满秩矩阵、非退化矩阵。
- 两个矩阵 A,B 可交换，是指 A,B 相乘可交换，也就是 $AB=BA$。
- 两个**矩阵** A,B **等价**，是指矩阵 A 经过一系列初等变换（行、列变换都可以用）得到矩阵 B。容易证明，若矩阵 A 和 B 等价，则 B 和 A 等价。两个矩阵等价的充要是它们有相同的行数和列数，且有相等的秩。
- 二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 半正定，是指对任意 $X\neq 0$，都有 $f\geqslant 0$。类似的可以定义二次型半负定，若一个二次型既不半正定、也不半负定；则称此二次型为不定的。容易证明，二次型半正定的充要条件是二次型的负惯性指数为 0。半正定的另一充要条件是二次型的矩阵的所有特征值都大于等于 0。

参考文献

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编, **高等代数（第二版）**, 高等教育出版社, 1988 年。

[2] 熊全淹、叶明训编，**线性代数**，高等教育出版社，1977 年。

[3] 谢邦杰, **线性代数**，人民教育出版社，1978 年。

[4] 刘丁酉主编, **高等代数习题精解**，中国科学技术大学出版社，2004 年 8 月。

[5] 樊恽, **线性代数学习指导**，科学出版社，2003 年 2 月。

[6] 李忠范等编, **线性代数与随机数学习题课教程**，高等教育出版社，2006 年 5 月。

[7] 李尚志主编，**线性代数**，高等教育出版社，2006 年 5 月。