线性代数第十讲

吴民

南开大学　计控学院

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。如果对 V 内任意一对向量 α, β，按某一法则在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数，记为 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 与之对应，且满足：

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。如果对 V 内任意一对向量 α,β，按某一法则在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数，记为 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 与之对应，且满足：

- $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$ 对所有 $\alpha,\beta\in V$ 都成立，

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。如果对 V 内任意一对向量 α, β，按某一法则在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数，记为 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 与之对应，且满足：

- $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$ 对所有 $\alpha, \beta \in V$ 都成立，
- $\langle\alpha+\beta, \gamma\rangle = \langle\alpha, \gamma\rangle + \langle\beta, \gamma\rangle$，

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。如果对 V 内任意一对向量 α,β，按某一法则在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数，记为 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 与之对应，且满足：

- $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$ 对所有 $\alpha,\beta\in V$ 都成立，
- $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$，
- $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$，

欧几里德空间

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。如果对 V 内任意一对向量 α,β，按某一法则在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数，记为 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 与之对应，且满足：

- $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$ 对所有 $\alpha,\beta\in V$ 都成立，
- $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$，
- $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$，
- $\alpha\neq 0$ 时，$\langle\alpha,\alpha\rangle>0$。

将二维平面中向量的内积概念推广到线性空间中。

定义：V 是实线性空间。如果对 V 内任意一对向量 α,β，按某一法则在 $\mathbf{R}$ 中有唯一确定的实数，记为 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 与之对应，且满足：

- $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$ 对所有 $\alpha,\beta\in V$ 都成立，
- $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$，
- $\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$，
- $\alpha\neq 0$ 时，$\langle\alpha,\alpha\rangle>0$。

则称 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 是向量 α 和 β 的**标准内积**。简称内积。

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义：

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义：

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义：

$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$,

$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义：

$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$,

$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

欧几里德空间中内积的性质：

- 对任意的 $\alpha \in V$，$\langle 0, \alpha \rangle = 0$。

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义：

$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$,

$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.

欧几里德空间中内积的性质：

- 对任意的 $\alpha \in V$，$\langle 0, \alpha \rangle = 0$。
- 如果 $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$，则 $\alpha = 0$。

欧几里德空间

定义了内积的实线性空间称为**欧几里德空间**。简称欧氏空间。

n 维欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的内积定义：

$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$,

$\langle \alpha, \beta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.

欧几里德空间中内积的性质：

- 对任意的 $\alpha \in V$，$\langle 0, \alpha \rangle = 0$。
- 如果 $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$，则 $\alpha = 0$。
- $\left\langle \sum_{i=1}^{l} a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{t} b_j \beta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{t} a_i b_j \langle \alpha_i, \beta_j \rangle$。

欧几里德空间

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \beta_t \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \alpha_l, \beta_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_l, \beta_t \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_t \end{pmatrix}$$

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1 & \dots & \beta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix}a_1 & \dots & a_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\beta_1\rangle & \dots & \langle\alpha_1,\beta_t\rangle\\ \dots & \dots & \dots\\ \langle\alpha_l,\beta_1\rangle & \dots & \langle\alpha_l,\beta_t\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_t\end{pmatrix}$$

此式使用了 1 阶矩阵与数相等的概念。

上式的矩阵形式：

$$\left\langle \begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1 & \dots & \beta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix}a_1 & \dots & a_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\beta_1\rangle & \dots & \langle\alpha_1,\beta_t\rangle\\ \dots & \dots & \dots\\ \langle\alpha_l,\beta_1\rangle & \dots & \langle\alpha_l,\beta_t\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \dots\\ b_t\end{pmatrix}$$

此式使用了 1 阶矩阵与数相等的概念。

欧几里德空间中基本定理：Cauchy-Schwarz 定理。

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α, β，恒有

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α, β，恒有

$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle$。

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α, β，恒有

$$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle。$$

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α, β，恒有

$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leqslant \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α, β 线性相关，则 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = k\alpha$，

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α,β 线性相关，则 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α,β 线性相关，则 $\alpha=0$ 或者 $\beta=k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若 α,β 线性无关，则对任意的实数 k，都有 $k\alpha+\beta\neq 0$，从而

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2\leqslant\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α,β 线性相关，则 $\alpha=0$ 或者 $\beta=k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若 α,β 线性无关，则对任意的实数 k，都有 $k\alpha+\beta\neq 0$，从而

$\langle k\alpha+\beta,k\alpha+\beta\rangle>0$ 对所有实数 k 都成立，

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α,β 线性相关，则 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若 α,β 线性无关，则对任意的实数 k，都有 $k\alpha+\beta \neq 0$，从而

$\langle k\alpha+\beta, k\alpha+\beta\rangle > 0$ 对所有实数 k 都成立，

即 $k^2\langle\alpha,\alpha\rangle + 2k\langle\alpha,\beta\rangle + \langle\beta,\beta\rangle > 0$，

欧几里德空间

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α, β，恒有

$\langle\alpha, \beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α, β 线性相关，则 $\alpha = 0$ 或者 $\beta = k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若 α, β 线性无关，则对任意的实数 k，都有 $k\alpha + \beta \neq 0$，从而

$\langle k\alpha + \beta, k\alpha + \beta\rangle > 0$ 对所有实数 k 都成立，

即 $k^2\langle\alpha, \alpha\rangle + 2k\langle\alpha, \beta\rangle + \langle\beta, \beta\rangle > 0$，

因 $\langle\alpha, \alpha\rangle > 0$。根据二次函数的性质知成立：

定理：对欧几里德空间中的任意两个向量 α,β，恒有

$\langle\alpha,\beta\rangle^2 \leqslant \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。

其中等号成立的充要条件是 α 和 β 线性相关。

证明：若 α,β 线性相关，则 $\alpha=0$ 或者 $\beta=k\alpha$，

不论那种情形都容易验证待证不等式成立，且等号成立。

若 α,β 线性无关，则对任意的实数 k，都有 $k\alpha+\beta\neq 0$，从而

$\langle k\alpha+\beta,k\alpha+\beta\rangle>0$ 对所有实数 k 都成立，

即 $k^2\langle\alpha,\alpha\rangle+2k\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle>0$，

因 $\langle\alpha,\alpha\rangle>0$。根据二次函数的性质知成立：

$\langle\alpha,\beta\rangle^2<\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle$。即待证不等式成立。

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

定义：欧氏空间 V 中，向量 α 的**模** $|\alpha|$ 定义为：

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

定义：欧氏空间 V 中，向量 α 的**模** $|\alpha|$ 定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}。$$

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

定义：欧氏空间 V 中，向量 α 的**模** $|\alpha|$ 定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}。$$

模为 1 的向量称为**单位向量**。

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

定义：欧氏空间 V 中，向量 α 的**模** $|\alpha|$ 定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}。$$

模为 1 的向量称为**单位向量**。

$|a\alpha| = |a|\cdot|\alpha|$。

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

定义：欧氏空间 V 中，向量 α 的**模** $|\alpha|$ 定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}。$$

模为 1 的向量称为**单位向量**。

$|a\alpha| = |a| \cdot |\alpha|$。

当 $|\alpha| \neq 0$ 时，$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是单位向量。

前面已经推导出若 α,β线性相关，则等号成立。后面推导出若 α,β 线性无关，则成立严格的小于。因此等号成立的充要条件是 α,β 线性相关。

定义：欧氏空间 V 中，向量 α 的**模** $|\alpha|$ 定义为：

$$|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}。$$

模为 1 的向量称为**单位向量**。

$|a\alpha| = |a|\cdot|\alpha|$。

当 $|\alpha| \neq 0$ 时，$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是单位向量。

练习：证明 $|\alpha+\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$。

欧几里德空间

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle \alpha,\beta \rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α,β 是欧几里德空间中的任意两个非零向量，角

$$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

称为向量 α 与 β 之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α,β 是欧几里德空间中的任意两个非零向量，角

$$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

称为向量 α 与 β 之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非 0 向量夹角为 $\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

欧几里德空间

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β 是欧几里德空间中的任意两个非零向量，角

$$\theta = \arccos\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

称为向量 α 与 β 之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非 0 向量夹角为 $\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

欧几里德空间

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β 是欧几里德空间中的任意两个非零向量，角

$$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

称为向量 α 与 β 之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非 0 向量夹角为 $\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

因此，α, β 正交的充要条件是 $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$。

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β 是欧几里德空间中的任意两个非零向量，角

$$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

称为向量 α 与 β 之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非 0 向量夹角为 $\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

因此，α, β 正交的充要条件是 $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$。

V 中一组两两正交的非零向量，称为 V 的一个正交组。

由 Cauchy-Schwarz 定理，$-1 \leqslant \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|} \leqslant 1$，

定义：α, β 是欧几里德空间中的任意两个非零向量，角

$$\theta = \arccos \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}$$

称为向量 α 与 β 之间的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。

如果两个非 0 向量夹角为 $\frac{\pi}{2}$，就称这两个向量正交。

补充定义零向量与任何向量都正交。

因此，α, β 正交的充要条件是 $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$。

V 中一组两两正交的非零向量，称为 V 的一个正交组。

若正交组中每个向量都是单位向量，则称为标准正交组。

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是欧氏空间中的一个正交组。

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是欧氏空间中的一个正交组。

若数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是欧氏空间中的一个正交组。

若数 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，

则 $0=\langle 0,\alpha_i\rangle=\langle k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,\alpha_i\rangle=k_i\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle$,

欧几里德空间

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是欧氏空间中的一个正交组。

若数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

则 $0 = \langle 0, \alpha_i \rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = k_i\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$,

但 $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \neq 0$，所以 $k_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$。

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是欧氏空间中的一个正交组。

若数 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，

则 $0=\langle 0,\alpha_i\rangle=\langle k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,\alpha_i\rangle=k_i\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle$,

但 $\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle\neq 0$，所以 $k_i=0(i=1,\ldots,n)$。

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。

定理：欧几里德空间中的正交组必定是线性无关组。

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是欧氏空间中的一个正交组。

若数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$，

则 $0 = \langle 0, \alpha_i \rangle = \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i \rangle = k_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$,

但 $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \neq 0$，所以 $k_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$。

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关。

定理：欧氏空间 V。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是 V 中一组线性无关的向量，则存在 V 的一个正交组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$，其中 β_k 是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 的线性组合。

证明：取 $\beta_1 = \alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1 \neq 0$。

证明：取 $\beta_1 = \alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1 \neq 0$。

取 $\beta_2 = \alpha_2 + k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1, α_2 的线性组合。

证明：取 $\beta_1 = \alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1 \neq 0$。

取 $\beta_2 = \alpha_2 + k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1, α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2 \neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle \beta_2, \beta_1 \rangle = 0$。

证明：取 $\beta_1 = \alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1 \neq 0$。

取 $\beta_2 = \alpha_2 + k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1, α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2 \neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle \beta_2, \beta_1 \rangle = 0$。

k_1 要满足 $\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle + k_1 \langle \beta_1, \beta_1 \rangle = 0$。

证明：取 $\beta_1=\alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1\neq 0$。

取 $\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1,α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1 要满足 $\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出 k_1，于是 $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

证明：取 $\beta_1=\alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1\neq 0$。

取 $\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1,α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1 要满足 $\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出 k_1，于是 $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2 满足定理的要求。

证明：取 $\beta_1=\alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1\neq 0$。

取 $\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1,α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1 要满足 $\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出 k_1，于是 $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2 满足定理的要求。

同样方法求 β_3，即令 $\beta_3=\alpha_3+t_1\beta_1+t_2\beta_2$，$t_1,t_2$ 待定。

证明：取 $\beta_1=\alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1\neq 0$。

取 $\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1,α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1 要满足 $\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出 k_1，于是 $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2 满足定理的要求。

同样方法求 β_3，即令 $\beta_3=\alpha_3+t_1\beta_1+t_2\beta_2$，$t_1,t_2$ 待定。

β_3 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，α_3 的系数为 1，所以 $\beta_3\neq 0$。

证明：取 $\beta_1=\alpha_1$。显然 β_1 是 α_1 的线性组合且 $\beta_1\neq 0$。

取 $\beta_2=\alpha_2+k_1\beta_1$，$k_1$ 为待定系数。β_2 是 α_1,α_2 的线性组合。

无论 k_1 取为何值，$\beta_2\neq 0$。取恰当的 k_1 使 $\langle\beta_2,\beta_1\rangle=0$。

k_1 要满足 $\langle\alpha_2,\beta_1\rangle+k_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle=0$。

求出 k_1，于是 $\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1$。

β_1,β_2 满足定理的要求。

同样方法求 β_3，即令 $\beta_3=\alpha_3+t_1\beta_1+t_2\beta_2$，$t_1,t_2$ 待定。

β_3 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，α_3 的系数为 1，所以 $\beta_3\neq 0$。

求适当的 t_1 和 t_2，使得 $\langle\beta_3,\beta_1\rangle=0$ 且 $\langle\beta_3,\beta_2\rangle=0$。

与前面类似便可求得。如此求得的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足定理中的要求。

与前面类似便可求得。如此求得的 β_1,β_2,β_3 满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

与前面类似便可求得。如此求得的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

与前面类似便可求得。如此求得的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

与前面类似便可求得。如此求得的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

定义：如果 n 维欧氏空间的某个基又是正交组，那么就称该基是**正交基**。

与前面类似便可求得。如此求得的 β_1,β_2,β_3 满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

定义：如果 n 维欧氏空间的某个基又是正交组，那么就称该基是**正交基**。

定义：如果正交基又是个标准正交组，就称为**标准正交基**。

与前面类似便可求得。如此求得的 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足定理中的要求。

对于更一般的情形需要对向量个数应用数学归纳法。

以上求正交组的方法称为施米特正交化方法。

因为欧氏空间的基是线性无关组，可以对基进行施米特正交化。

定义：如果 n 维欧氏空间的某个基又是正交组，那么就称该基是**正交基**。

定义：如果正交基又是个标准正交组，就称为**标准正交基**。

定理：任何 n 维欧氏空间一定有正交基，也必有标准正交基。

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标？

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标?

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

则 $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \varepsilon_i \rangle$

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

则 $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \varepsilon_i \rangle = x_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle$

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

则 $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \varepsilon_i \rangle = x_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = x_i$.

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

则 $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \varepsilon_i \rangle = x_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = x_i$.

也就是在标准正交基下求向量的坐标只需要求 n 次内积。

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标？

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

则 $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \varepsilon_i \rangle = x_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = x_i$.

也就是在标准正交基下求向量的坐标只需要求 n 次内积。

定理：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基。α, β 在此基下的坐标为列向量 X 和 Y。

欧几里德空间

n 维欧几里德空间 V，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

V 中的任一向量 α，α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标?

在线性空间中，求坐标就是把向量写成基所含向量的线性组合。

在欧几里德空间中，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

则 $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \langle x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, \varepsilon_i \rangle = x_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = x_i$.

也就是在标准正交基下求向量的坐标只需要求 n 次内积。

定理：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是欧氏空间 V 的一个标准正交基。α, β 在此基下的坐标为列向量 X 和 Y。

则 $\langle \alpha, \beta \rangle = X^{\mathrm{T}} Y$。

正交变换

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall\alpha\in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

正交变换

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall \alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

定理：欧氏空间 V 上的线性变换 T 是正交变换的充要条件是对任意的 $\alpha, \beta \in V$，恒有 $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$。

正交变换

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall\alpha\in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

定理：欧氏空间 V 上的线性变换 T 是正交变换的充要条件是对任意的 $\alpha,\beta\in V$，恒有 $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$。

证明：充分性。对任意的 α，取 $\beta=\alpha$，由已知，

正交变换

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall\alpha\in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

定理：欧氏空间 V 上的线性变换 T 是正交变换的充要条件是对任意的 $\alpha,\beta\in V$，恒有 $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle$。

证明：充分性。对任意的 α，取 $\beta=\alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle.$$

正交变换

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall \alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

定理：欧氏空间 V 上的线性变换 T 是正交变换的充要条件是对任意的 $\alpha, \beta \in V$，恒有 $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle\alpha, \beta\rangle$。

证明：充分性。对任意的 α，取 $\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha, \alpha\rangle.$$

所以 $|T\alpha| = |\alpha|$。所以 T 是 V 上的正交变换。

正交变换

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall \alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

定理：欧氏空间 V 上的线性变换 T 是正交变换的充要条件是对任意的 $\alpha, \beta \in V$，恒有 $\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$。

证明：充分性。对任意的 α，取 $\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

所以 $|T\alpha| = |\alpha|$。所以 T 是 V 上的正交变换。

必要性。如果 T 是线性变换，则对任意的 $\alpha, \beta \in V$，都有

定义：欧氏空间 V。T 是 V 上的线性变换。如果 $\forall \alpha \in V$，

$$|T\alpha| = |\alpha|,$$

则称 T 为**正交变换**。

定理：欧氏空间 V 上的线性变换 T 是正交变换的充要条件是对任意的 $\alpha, \beta \in V$，恒有 $\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$。

证明：充分性。对任意的 α，取 $\beta = \alpha$，由已知，

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

所以 $|T\alpha| = |\alpha|$。所以 T 是 V 上的正交变换。

必要性。如果 T 是线性变换，则对任意的 $\alpha, \beta \in V$，都有 $|T\alpha| = |\alpha|$，$|T\beta| = |\beta|$，$|T(\alpha+\beta)| = |\alpha+\beta|$。

正交变换

$$0 = |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2$$

正交变换

$$0 = |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2$$

$$= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle$$

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle - \langle \beta, \beta\rangle
\end{aligned}
$$

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle\alpha,\alpha\rangle - 2\langle\alpha,\beta\rangle - \langle\beta,\beta\rangle \\
&= 2\langle T\alpha, T\beta\rangle - 2\langle\alpha,\beta\rangle
\end{aligned}
$$

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle - \langle \beta, \beta\rangle \\
&= 2\langle T\alpha, T\beta\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle
\end{aligned}
$$

即$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$。

正交变换

$$
\begin{aligned}
0 &= |T(\alpha+\beta)|^2 - |\alpha+\beta|^2 = |T\alpha+T\beta|^2 - |\alpha+\beta|^2 \\
&= \langle T\alpha+T\beta, T\alpha+T\beta\rangle - \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle \\
&= \langle T\alpha, T\alpha\rangle + 2\langle T\alpha, T\beta\rangle + \langle T\beta, T\beta\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle - \langle \beta, \beta\rangle \\
&= 2\langle T\alpha, T\beta\rangle - 2\langle \alpha, \beta\rangle
\end{aligned}
$$

即$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$。

推论：正交变换保持向量的夹角不变。

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\varepsilon_1, T\varepsilon_2, \ldots, T\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\rangle=\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\rangle=\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

所以$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是标准正交组，

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\varepsilon_i,T\varepsilon_j\rangle=\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

所以$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是标准正交组，

所以$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$构成$V$的一个标准正交基。

正交变换

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。

证明：必要性。T是正交变换，则

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

所以$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$是标准正交组，

所以$T\varepsilon_1,T\varepsilon_2,\ldots,T\varepsilon_n$构成$V$的一个标准正交基。

充分性。对V内任意向量α，α必可写成基的向量线性组合：

正交变换

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$

正交变换

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

正交变换

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = x_1^2 \langle T\varepsilon_1, T\varepsilon_1 \rangle + \cdots + x_n^2 \langle T\varepsilon_n, T\varepsilon_n \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

正交变换

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$

$\langle\alpha,\alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$

$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = x_1^2\langle T\varepsilon_1, T\varepsilon_1\rangle + \cdots + x_n^2\langle T\varepsilon_n, T\varepsilon_n\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2,$

所以$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$。故$T$是正交变换。

正交变换

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

$\langle\alpha,\alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，

$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = x_1^2\langle T\varepsilon_1, T\varepsilon_1\rangle + \cdots + x_n^2\langle T\varepsilon_n, T\varepsilon_n\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$，

所以$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$。故$T$是正交变换。

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T$在基$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$下的矩阵是正交矩阵。

正交变换

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$,

$\langle \alpha, \alpha \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,

$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = x_1^2 \langle T\varepsilon_1, T\varepsilon_1 \rangle + \cdots + x_n^2 \langle T\varepsilon_n, T\varepsilon_n \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$,

所以$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$。故$T$是正交变换。

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T$在基$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵是正交矩阵。

证明：设T在基$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵是$H = (h_{ij})_{n \times n}$，即

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

$\langle\alpha,\alpha\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$，

$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = x_1^2\langle T\varepsilon_1, T\varepsilon_1\rangle + \cdots + x_n^2\langle T\varepsilon_n, T\varepsilon_n\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$，

所以$\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$。故$T$是正交变换。

定理：n维欧氏空间V。$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基。线性变换$T$是正交变换的充要条件是$T$在基$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$下的矩阵是正交矩阵。

证明：设T在基$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$下的矩阵是$H = (h_{ij})_{n\times n}$，即

$$(T\varepsilon_1,\ldots,T\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)H,$$

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

而$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\varepsilon_1 + \cdots + h_{ni}\varepsilon_j, h_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + h_{nj}\varepsilon_n\rangle$,

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

而$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\varepsilon_1 + \cdots + h_{ni}\varepsilon_j, h_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + h_{nj}\varepsilon_n\rangle$,

因为$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基,

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

而$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\varepsilon_1+\cdots+h_{ni}\varepsilon_j, h_{1j}\varepsilon_1+\cdots+h_{nj}\varepsilon_n\rangle$,

因为$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基,

所以上式等于$h_{1i}h_{1j}+\cdots+h_{ni}h_{nj}$。

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

而$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\varepsilon_1+\cdots+h_{ni}\varepsilon_j, h_{1j}\varepsilon_1+\cdots+h_{nj}\varepsilon_n\rangle$,

因为$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基,

所以上式等于$h_{1i}h_{1j}+\cdots+h_{ni}h_{nj}$。

于是T是正交变换等价于$h_{1i}h_{1j}+\cdots+h_{ni}h_{nj} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

正交变换

T是正交变换等价于

$$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

而$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle h_{1i}\varepsilon_1+\cdots+h_{ni}\varepsilon_j, h_{1j}\varepsilon_1+\cdots+h_{nj}\varepsilon_n\rangle$，

因为$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的一个标准正交基，

所以上式等于$h_{1i}h_{1j}+\cdots+h_{ni}h_{nj}$。

于是T是正交变换等价于$h_{1i}h_{1j}+\cdots+h_{ni}h_{nj} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

于是T是正交变换等价于H是正交矩阵。