题目

例 1 证明平均值不等式：若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都为正数，则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

其中等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

答案

分析与证明 这个不等式的证法很多，通常都是采用反向归纳法，我们先介绍众多反向归纳证法中的一种非常巧妙的证法.

证法 1 对 n 归纳：当 $n=2$ 时，不等式显然成立；

设 $n=k$ 时不等式成立，即

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant k \cdot \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

那么

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}) \\
&\geqslant k \cdot \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + k \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}} \\
&\geqslant 2k \cdot \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k}}} \\
&= 2k \cdot \sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{2k}},
\end{aligned}$$

所以 $n=2k$ 时，不等式成立；

令 $A_{k-1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}$，则

$$\begin{aligned}
A_{k-1} = \frac{kA_{k-1}}{k} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + A_{k-1}}{k} \\
&\geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} A_{k-1}},
\end{aligned}$$

两边 k 次方，得

$$(A_{k-1})^{k-1} \geqslant a_1 a_2 \cdots a_{k-1},$$

所以

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}},$$

故 $n=k-1$ 时不等式成立，根据归纳原理，原不等式获证.

显然，上述证明的难点是由 $n=k$ 时不等式成立推出 $n=k-1$ 时不等式成立.

从表面上看，突破这一难点的关键步骤是换元：

$$A_{k-1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}.$$

其实不然，换元不过是使书写简便而已，真正的关键变形是项的凑配，然后得到回归不等式：

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$$

$$\geqslant k\cdot\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}},$$

解此关于 $a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$ 的回归不等式，即得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\geqslant\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}.$$

这种凑配变形是非常“巧”的了，但它是如何想到的？通过思考，我们找到了与之类似的其他 9 个不同的“新”证明，这 9 种证法好像还没有其他人提及过.

容易看出，上述证明过程中的变形来源于对解题目标的审视. 我们的目标是

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\geqslant(k-1)\cdot\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}.$$

假定我们从不等式的左边入手，为了利用归纳假设，左边必须添加一项使 $k-1$ 个项变为 k 个项，但为什么是添加项 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$，而不是其他一个什么项呢？这是由目标的结构特征所决定的.

观察目标不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\geqslant\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}$$

的几何特点，它可以理解为

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1},\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}\right)\geqslant 0.$$

也就是说，目标不等式所含的变元是两种字母团体

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}\quad 与\quad \sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}.$$

其次，目标不等式还有一个显著的特点是：等号成立的条件为 $a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}$. 我们所添加的项应使得推理的中间结果至少符合上述两个特点.

假定添加的项为 $g(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})$（满足特点之一），那么，由归纳假设有

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+g(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})$$

$$\geqslant k\cdot\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}g(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1})},$$

此不等式等号成立的条件是

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = g(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}).$$

因此，为了满足另一个特点，必须由 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1}$能推出

$$a_1 = g(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}).$$

显然，满足这一要求的一个多项式为

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1},$$

这样便得到我们前述的证法.

此外，能否有其他形式的多项式 g 合乎要求？易知

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}) = \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}$$

也合乎要求，由此便得到一个新证法（我们只证明在 $n = k$ 时命题成立必有 $n = k-1$ 时命题成立）.

证法 2 （添加项$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}$） 由归纳假设，有

$$\begin{aligned}
& a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \\
& \geqslant k \cdot \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}} \\
& = k \cdot \sqrt[k]{\sqrt[k-1]{(a_1 a_2 \cdots a_{k-1})^{k-1}} \cdot \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}} \\
& = k \cdot \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}},
\end{aligned}$$

此式变形即得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}.$$

上述两个证明都是对“和”的一边（左边）进行凑配（配项）的，如果对“积”的一边（右边）凑配（配因子），又可得到两个类似的新证法.

证法 3 $\left(配因子\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}\right)$ 由归纳假设，有

$$\begin{aligned}
& a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \\
& \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}}{k}\right)^k \\
& = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1}\right)^k,
\end{aligned}$$

此式变形即得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}.$$

证法 4 （配因子$\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}$） 由归纳假设，有

$$\begin{aligned}
& a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \cdot \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \\
& \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}}{k}\right)^k,
\end{aligned}$$

此式变形即得

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}.$$

上述四种方法都是反向归纳法，我们自然提出这样的问题：上述思路能否适应于正向归纳法的证明呢？回答是肯定的.

实际上，设 $n = k$ 时不等式成立，要证明 $n = k + 1$ 时不等式成立，即

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} \geqslant (k+1)\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}. \qquad ①$$

假定从左边入手，为了利用归纳假设，应将左边的 $k+1$ 项“变为”k 项，这似乎要减少 1 项. 但这里的项是无法舍弃的，由此想到将其平均分成两组（每组的项相对减少），然后对每一组使用归纳假设即可.

但总项数未必是偶数，这可用“充分条件分类”的方法来处理：当项数是偶数时，直接分成两组；当项数是奇数时，添加一项后再分成两组.

同样，所添加的项应使得推理的中间结果至少符合目标式①具备的两个类似特点. 因此，选择不同的添加项又可得到不同的证法.

为叙述问题方便，对正整数 n，记 $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$，$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

证法 5 （正向归纳法，分类添加项 A_{k+1}） 设 $n \leqslant k$ 时结论成立，那么，当 k 为奇数时，令 $k + 1 = 2t$（直接将 $k+1$ 个项分为两组），则

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \\ & = (a_1 + a_2 + \cdots + a_t) + (a_{t+1} + a_{t+2} + \cdots + a_{k+1}) \\ & \geqslant t\sqrt[t]{a_1 a_2 \cdots a_t} + t \cdot \sqrt[t]{a_{t+1} a_{t+2} \cdots a_{2t}} \\ & \geqslant 2t \cdot \sqrt[2t]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}} \\ & = (k+1) \cdot \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}, \end{aligned}$$

所以 $n = k + 1$ 时不等式成立.

当 k 为偶数时（先补充一个项 A_{k+1}，再将 $k+2$ 个项分为两组），令 $k = 2t - 2$，则

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + A_{k+1} \\ & = (a_1 + a_2 + \cdots + a_t) + (a_{t+1} + a_{t+2} + \cdots + a_{k+1} + A_{k+1}) \\ & \geqslant t\sqrt[t]{a_1 a_2 \cdots a_t} + t \cdot \sqrt[t]{a_{t+1} a_{t+2} \cdots a_{k+1} A_{k+1}} \\ & \geqslant 2t \cdot \sqrt[2t]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} A_{k+1}}, \end{aligned}$$

$$(k+2)A_{k+1} \geqslant (k+2) \cdot \sqrt[k+2]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} A_{k+1}},$$

解此关于 A_{k+1} 的回归不等式，得

$$A_{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

证法 6 （正向归纳法，分类添加项 G_{k+1}） 设 $n\leqslant k$ 时结论成立，考虑 $k+1$ 的情形：当 k 为奇数时，同上，直接将 $k+1$ 个项分为两组，可证结论成立；

当 k 为偶数时（先补充一个项 G_{k+1}，再将 $k+2$ 个项分为两组），令 $k=2t-2$，则

$$
\begin{aligned}
&a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+G_{k+1}\\
&\quad=(a_1+a_2+\cdots+a_t)+(a_{t+1}+a_{t+2}+\cdots+a_{k+1}+G_{k+1})\\
&\quad\geqslant t\sqrt[t]{a_1a_2\cdots a_t}+t\cdot\sqrt[t]{a_{t+1}a_{t+2}\cdots a_{k+1}G_{k+1}}\\
&\quad\geqslant 2t\cdot\sqrt[2t]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}G_{k+1}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k+1)A_{k+1}+G_{k+1}&\geqslant(k+2)\cdot\sqrt[k+2]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}G_{k+1}}\\
&=(k+2)\cdot G_{k+1},
\end{aligned}
$$

$$A_{k+1}\geqslant G_{k+1},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

证法 7 （正向归纳法，分类配因子 A_{k+1}） 设 $n\leqslant k$ 时结论成立，那么，当 k 为奇数时，令 $k+1=2t$，则

$$
\begin{aligned}
a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}&=(a_1a_2\cdots a_t)\cdot(a_{t+1}a_{t+2}\cdots a_{2t})\\
&\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_t}{t}\right)^t\cdot\left(\frac{a_{t+1}+a_{t+2}+\cdots+a_{2t}}{t}\right)^t\\
&\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{2t}\right)^{2t}\\
&=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1},
\end{aligned}
$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

当 k 为偶数时，令 $k=2t-2$，则

$$
\begin{aligned}
&a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdot A_{k+1}\\
&\quad=(a_1a_2\cdots a_t)\cdot(a_{t+1}a_{t+2}\cdots a_{k+1}A_{k+1})\\
&\quad\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_t}{t}\right)^t\cdot\left(\frac{a_{t+1}+a_{t+2}+\cdots+a_{k+1}+A_{k+1}}{t}\right)^t\\
&\quad\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+A_{k+1}}{2t}\right)^{2t}\\
&\quad=\left(\frac{(k+2)A_{k+1}}{k+2}\right)^{k+2}=A_{k+1}^{k+2},
\end{aligned}
$$

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\leqslant A_{k+1}^{k+1},$$

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}\leqslant A_{k+1},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

证法 8 （正向归纳法，分类配因子 G_{k+1}） 设 $n\leqslant k$ 时结论成立

立,那么,当 k 为奇数时,同上可证结论成立;

当 k 为偶数时,令 $k=2t-2$,则

$$
\begin{aligned}
& a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdot G_{k+1}\\
&=(a_1a_2\cdots a_t)\cdot(a_{t+1}a_{t+2}\cdots a_{k+1}G_{k+1})\\
&\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_t}{t}\right)^t\cdot\left(\frac{a_{t+1}+a_{t+2}+\cdots+a_{k+1}+G_{k+1}}{t}\right)^t\\
&\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+G_{k+1}}{2t}\right)^{2t}\\
&=\left(\frac{(k+1)A_{k+1}+G_{k+1}}{k+2}\right)^{k+2},
\end{aligned}
$$

解此关于 G_{k+1} 的回归不等式,得

$$G_{k+1}\leqslant A_{k+1},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

我们进一步思考:正向归纳法能否不分类使不等式获证?这只需添加若干个项,使其凑成偶数个项即可.显然,添加 $k-1$ 个项可凑成两个"k 项的和".

证法 9 (正向归纳法,避免分类,添加多个项 A_{k+1}) 由归纳假设,有

$$
\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+(k-1)A_{k+1})\\
&\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}\\
&\geqslant 2k\cdot\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}}\\
&=2k\cdot\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}},
\end{aligned}
$$

$$(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\geqslant 2k\cdot\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}},$$

$$(A_{k+1})^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1},$$

$$A_{k+1}\geqslant\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

证法 10 (正向归纳法,避免分类,添加多个项 G_{k+1}) 由归纳假设,有

$$
\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+(k-1)G_{k+1})\\
&\geqslant k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}\\
&\geqslant 2k\cdot\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}}\\
&=2k\cdot\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}G_{k+1}^{k-1}}\\
&=2k\cdot\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1}G_{k+1}^{k-1}}=2k\cdot G_{k+1}.
\end{aligned}
$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}\geqslant(k+1)G_{k+1},$$

即 $n=k+1$ 时不等式成立.

证法 11 （正向归纳法，避免分类，配多个因子 A_{k+1}） 由归纳假设，有

$$
\begin{aligned}
&(a_1a_2\cdots a_k)\cdot(a_{k+1}A_{k+1}^{k-1})\\
&\quad\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\cdot\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}\right)^k\\
&\quad\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right)^{2k}\\
&\quad=\left(\frac{(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{2k}\right)^{2k}\\
&\quad=A_{k+1}^{2k},
\end{aligned}
$$

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\leqslant A_{k+1}^{k+1},$$

$$\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_{k+1}}\leqslant A_{k+1},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

证法 12 （正向归纳法，避免分类，配多个因子 G_{k+1}） 由归纳假设，有

$$
\begin{aligned}
&(a_1a_2\cdots a_k)(a_{k+1}\cdot G_{k+1}^{k-1})\\
&\quad\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^k\cdot\left(\frac{a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k}\right)^k\\
&\quad=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\cdot\frac{a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{k}\right)^k\\
&\quad\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{2k}\right)^{2k},
\end{aligned}
$$

$$(G_{k+1})^{k+1}(G_{k+1})^{k-1}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{2k}\right)^{2k},$$

$$G_{k+1}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+(k-1)G_{k+1}}{2k},$$

$$G_{k+1}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1},$$

所以 $n=k+1$ 时不等式成立.

上述正向归纳法证明都是通过“先添项，后分组”达到减项目的的，能否采用“并项”技巧直接减项？我们来试试.

设不等式对小于 n 的自然数成立，考察 n 的情形，其目标不等式为

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

假定从左边入手，则要将左边的 n 个项变成 $n-1$ 个项，如果将 a_{n-1}，a_n 合并为一项，则由归纳假设，有

$$
\begin{aligned}
&a_1+a_2+\cdots+(a_{n-1}+a_n)\\
&\quad\geqslant(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n)},
\end{aligned}
$$

但这种变形破坏了等号成立的条件，因为 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，$a_1\neq$

$a_{n-1}+a_n$.

如果将 $a_{n-1}+a_n$ 除以 2,则可保证等号成立,但这种变形也不能使解题获得成功$\left(\text{因为左边又多出一个部分:}\frac{a_{n-1}+a_n}{2}\right)$,大家不妨一试.

而一种可行的方案是:将 a_{n-1}, a_n 合并后再减去一个算术平均值 A_n:$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,这样,由归纳假设,有

$$\begin{aligned}(n-1)A_n &= a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-A_n\\ &= a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+(a_{n-1}+a_n-A_n)\\ &\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n-A_n)},\end{aligned}$$

所以

$$A_n \geqslant \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n-A_n)},$$

去根号,得

$$A_n^{n-1} \geqslant a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n-A_n),$$

两边同乘以 A_n,得

$$A_n^n \geqslant a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n-A_n)\cdot A_n.$$

瞄准目标,期望有

$$a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n-A_n)\cdot A_n \geqslant a_1a_2\cdots a_n,$$

即

$$(a_{n-1}+a_n-A_n)\cdot A_n \geqslant a_{n-1}a_n,$$

这等价于

$$(a_{n-1}-A_n)\cdot(a_n-A_n) \leqslant 0,$$

此式成立的一个充分条件是 $a_{n-1}\leqslant A_n\leqslant a_n$,这只需限定 a_{n-1}, a_n 分别是$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小者和最大者即可. 由此得到如下的证法.

证法 13 当 $n=2$ 时,不等式显然成立;设不等式对小于 n 的自然数成立.

对自然数 n,设 a_{n-1}, a_n 分别是$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小者和最大者,那么 $a_{n-1}\leqslant A_n\leqslant a_n$,于是

$$(a_{n-1}-A_n)\cdot(a_n-A_n) \leqslant 0,$$

$$(a_{n-1}+a_n-A_n)\cdot A_n \geqslant a_{n-1}a_n.$$

因此

$$\begin{aligned}(n-1)A_n &= a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n-A_n\\ &= a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+(a_{n-1}+a_n-A_n)\\ &\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-2}(a_{n-1}+a_n-A_n)},\end{aligned}$$

所以

$$A_n \geqslant \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}(a_{n-1} + a_n - A_n)},$$

解此关于 A_n 的回归不等式，得

$$A_n \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

如果改变入手方向，则又可得到如下一个新证法.

证法 14 当 $n=2$ 时，不等式显然成立；设不等式对小于 n 的自然数成立，对自然数 n，令 $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$，并设 a_{n-1}, a_n 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小者和最大者，那么

$$a_{n-1} \leqslant G_n \leqslant a_n,$$

$$(a_{n-1} - G_n) \cdot (a_n - G_n) \leqslant 0,$$

$$a_{n-1} a_n + G_n^2 \leqslant (a_{n-1} + a_n) G_n,$$

$$\frac{a_{n-1} a_n}{G_n} + G_n \leqslant a_{n-1} + a_n.$$

于是

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-2}\left(\frac{a_{n-1} a_n}{G_n}\right)}$$

$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + \frac{a_{n-1} a_n}{G_n}}{n-1},$$

解此关于 G_n 的回归不等式，得

$$G_n \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{}.$$