

悬臂梁弹性（10 分）

开始答题前请阅读其它题袋中的综合说明。

I. 介绍

悬臂梁是一种常见的力学结构装置（见图 1），不仅在工程结构设计中作为抵抗剪切弯曲的主体构件，在其它非工程领域也十分常见。在应用物理领域，分析纳米悬臂梁的弹性响应同阐释应力应变之间的关系是一样重要的。但是，直接测量纳米材料的力学特性相当困难，只能通过不同于宏观单轴拉伸测量的压痕测试方法得到。对纳米悬臂梁利用原子力显微镜或者纳米压痕方式施加作用力，观测悬臂梁的弯曲形变来推断其杨氏模量，成为测量纳米材料的力学特性的重要方法之一。

(A)



(B)

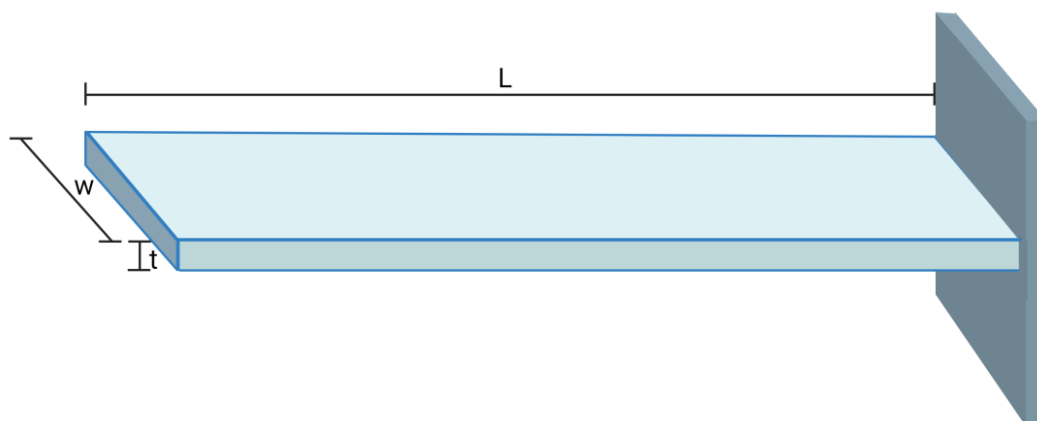
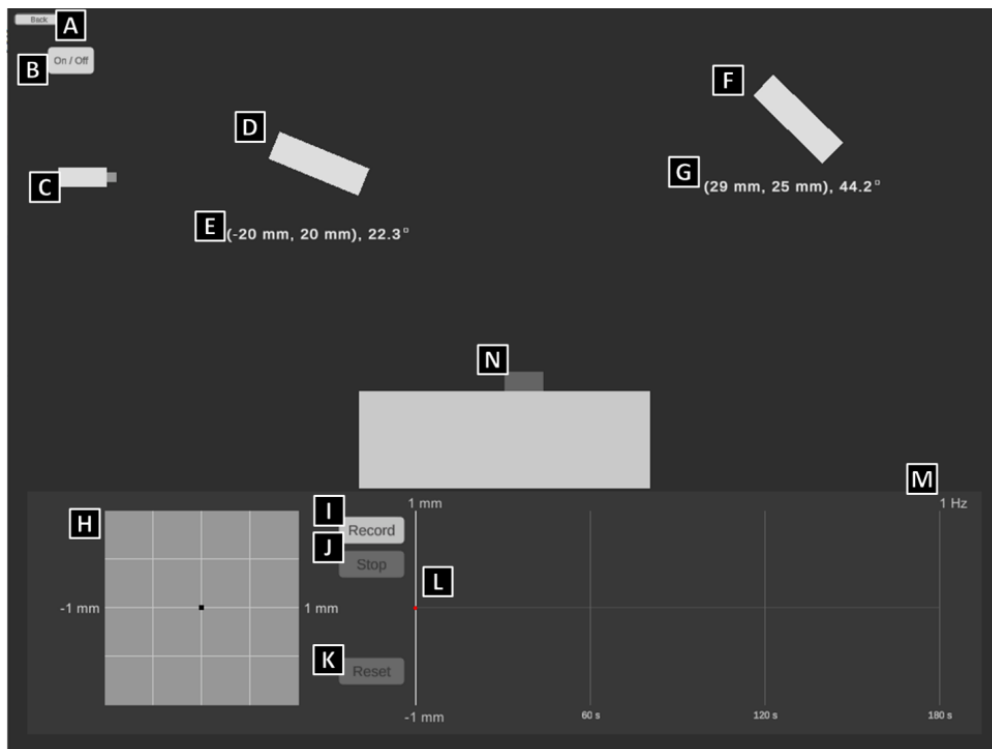


图 1(A)悬臂梁扫描电镜（SEM）照片(B)悬臂梁结构图示：长度 L 、宽度 w 及厚度 t 。

II. 仿真实验装置介绍

1A

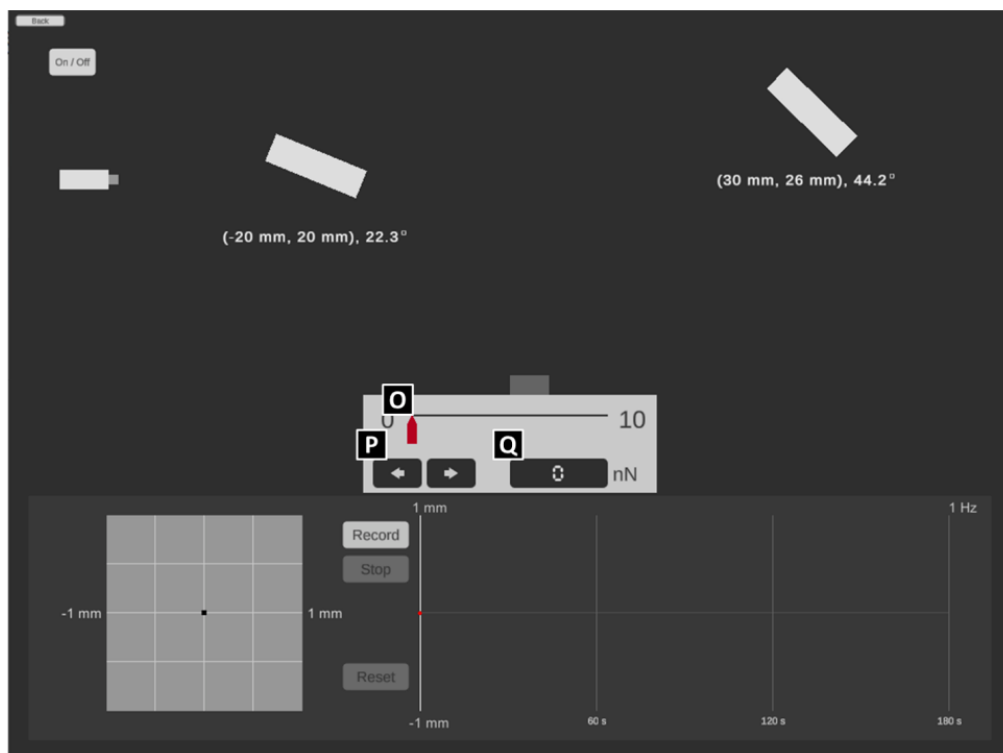


一般介绍

- A. 返回上一页
- B. 激光开关
- C. 激光器
- D. 反射镜：点击旁边的箭头精确控制该器件，或者直接利用鼠标左键在水平方向拖动它。
- E. 反射镜位置：坐标精度 $1 \times 10^{-3} \text{m}$ ，方位角精度 0.1° 。
- F. 位置敏感探测器（PSD）：点击旁边的箭头精确控制该器件，或者直接利用鼠标左键拖动它。
- G. PSD 位置：坐标精度 $1 \times 10^{-3} \text{m}$ ，方位角精度 0.1° 。
- H. PSD 显示记录系统：此系统在竖直和水平方向的边界在 $\pm 1 \times 10^{-3} \text{m}$ 。
- I. PSD 记录：开始记录按钮

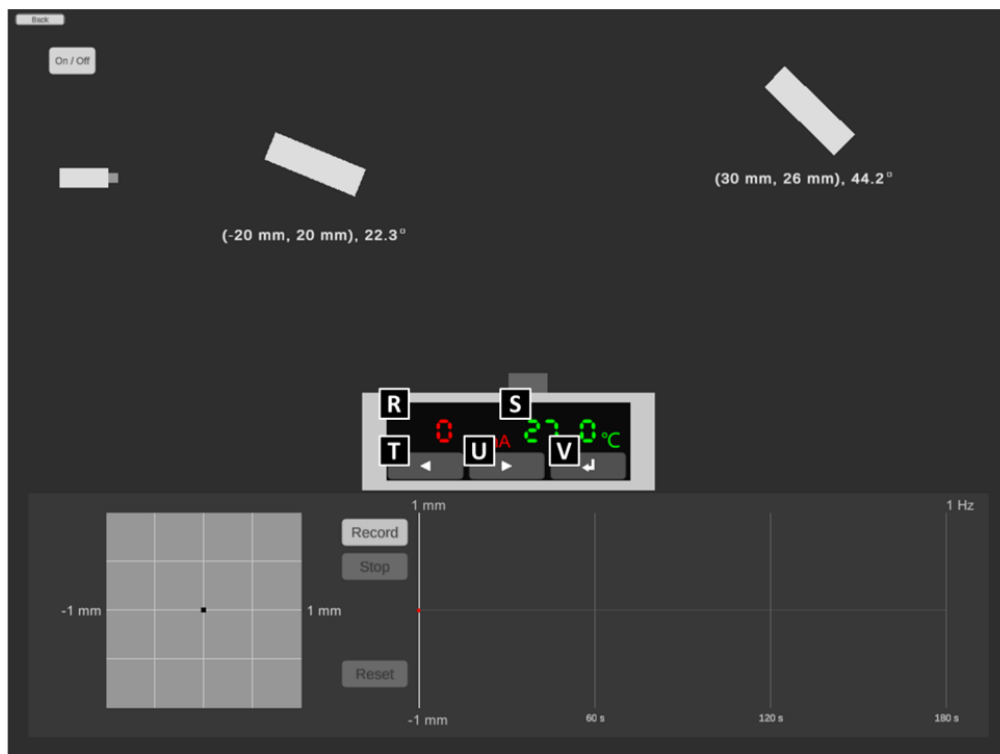
- J. PSD 记录：停止记录按钮
- K. PSD 记录：记录复位按钮
- L. PSD 记录历史：读数精度 $0.0001 \times 10^{-3} \text{m}$ ，最大记录时长 180s。你可以在图表上利用鼠标左键或者键盘箭头键查询所记录的数据。
- M. PSD 记录频率：1Hz
- N. 纳米梁载体：载体左上角位置坐标为(0, 0)，纳米梁安装在载体的顶部左边沿。

1B



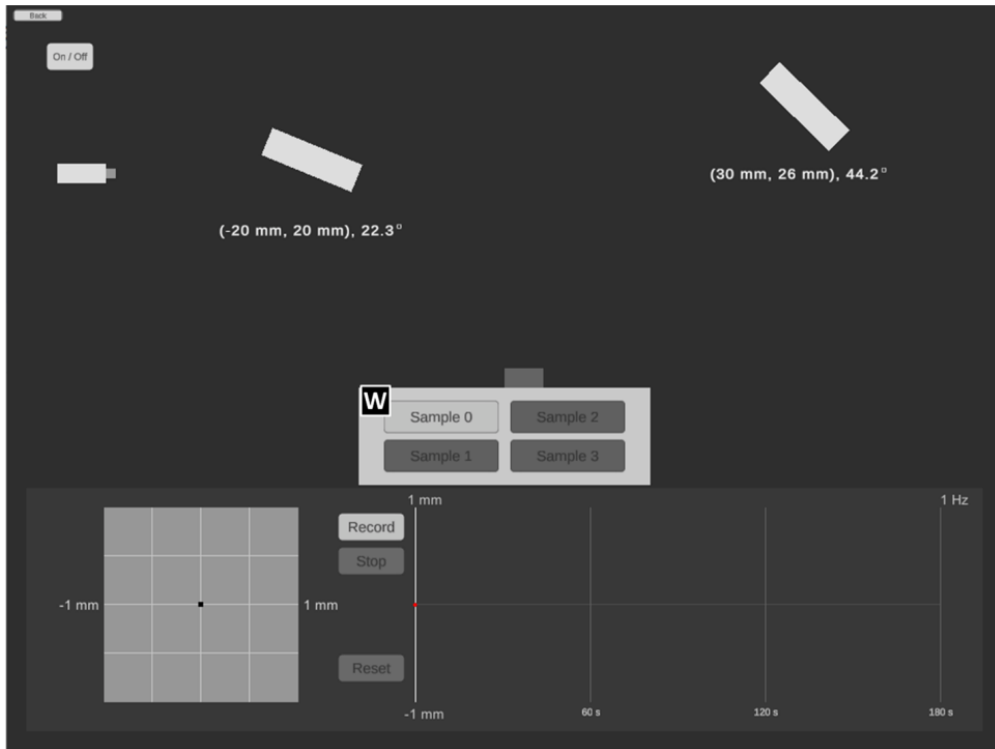
- O. 载荷控制器：通过在水平方向拖动红色光标改变载荷大小。
- P. 载荷微控制器：利用鼠标左键点击箭头按钮精确调整载荷大小。
- Q. 载荷监视器：精度 $0.01 \times 10^{-9} \text{N}$

1C



- R. 加热电流监视器：精度 $1 \times 10^{-3} \text{ A}$
- S. 加热温度监视器：精度 0.1° C
- T. 降低加热器电流按钮：每点击一次降低 $2 \times 10^{-3} \text{ A}$
- U. 增加加热器电流按钮：每点击一次增加 $2 \times 10^{-3} \text{ A}$
- V. 电流加热启停按钮：**注意**加热或冷却样品的时间是指真实世界的真正时间，**不能**随意复位。这意味着：如果样品被超额电流过度加热的话，相应地样品冷却下来的时间将会延长。

1D



- W. 样品转换：用鼠标左键直接点击转换测试样品。

III.实验

注意：数据和答案必须用科学计数法表示并采用国际单位制。长度当用以米为单位。

实验 A. 光路搭建（2.4 分）

在显微尺度上的纳米悬臂梁的形变直接采用光学显微镜是很难测量的，所以利用激光的准直特性和反射特性并运用位置敏感探测器（PSD）来进行测量。实验所用的纳米悬臂梁长度 L 约 $100 \times 10^{-6} \text{m}$ 。请运行程序 1A，回答问题 A.1—A.3。

A.1 设计光路，使激光照在悬臂梁反光区域的中间位置，并确保激光点位置能够稳定在 PSD 显示屏的原点附近。在答题纸上画出每个器件的相对位置（坐标和角度）。 0.6 分

A.2 刚开始仿真时悬臂梁处于紊乱抖动状态，因此需要花一些时间使其达到静止状态。打开仪器后，光点在 PSD 上的位置图像和时间将会显示在程序界面的右下方。按下“记录”按钮后，每 3 秒钟记录一次在环境扰动下光点在 PSD 上的位置 d 。至少记录 40 个数据点，然后按下“停止”按钮停止悬臂梁获取数据。 0.8 分

A.3 选取 A.2 结果中较为**稳定**的一部分数据，计算在本实验环境条件下悬臂梁的测量基准值。（ \bar{d} 为 d 的平均值）。 1.0 分

注意：为了便于测量，假定在环境扰动的影响下悬臂梁已处于稳定状态，也就是光学器件的振动不会影响测量结果。

注意：数据和答案必须用科学计数法表示并采用国际单位制。长度以米为单位。

注意：在实验 B 部分，数据分析不要求计算标准偏差。

实验 B. 悬臂梁的形变及杨氏模量的测量 (2.4 分)

悬臂梁材料的杨氏模量可利用原子力显微镜或者纳米压痕仪通过在其自由端施加外力的方式得到。通过测量悬臂梁的形变，就能得到其量值。当给纳米悬臂梁施加力的时候，如果悬臂梁的形变量未超出材料的弹性限度，则其自由端的形变与外力之间的关系可用下式表示：

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} \quad (1)$$

这里， F 为施加在末端的作用力， E 为杨氏模量； I 为悬臂梁的截面惯性矩， L 为悬臂梁的长度， δ 为弯曲形变量。截面惯性矩 I 是一个反映物体在发生弯曲时其横截面尺寸受形变影响大小的物理量。截面惯性矩的值可用简单的积分计算。如图 2 所示，悬臂梁的横截面高度为 t ，宽度为 w ，则其截面惯性矩通过以下积分式求得：

$$I = \int_A y^2 dA = \frac{1}{12} wt^3 \quad (2)$$

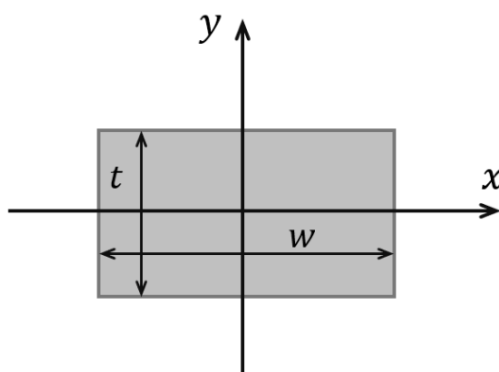


图 2. 悬臂梁横截面示意图

实验所用悬臂梁的长度 L 为 $100 \times 10^{-6} \text{m}$ ，宽度 w 为 $35 \times 10^{-6} \text{m}$ ，高度 t 为 $0.20 \times 10^{-6} \text{m}$ 。硅用作衬底材料，其标准杨氏模量 E 为 $280 \times 10^9 \text{Pa}$ 。

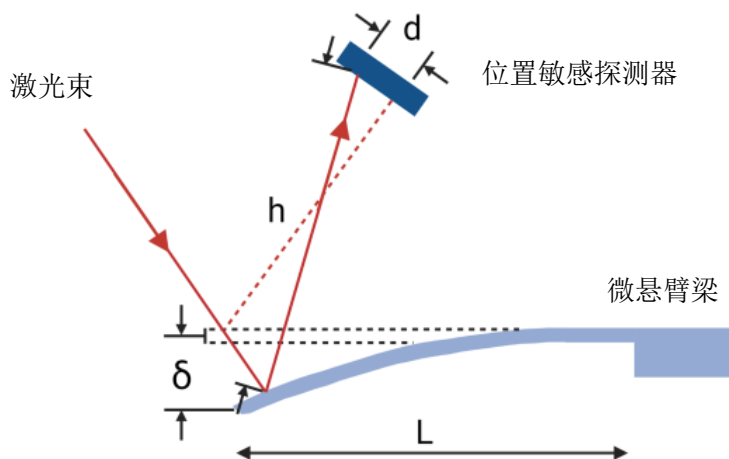


图 3. 光杠杆装置说明示意图

请运行程序 1B 并回答问题 B.1—B.3.

B.1 设计搭建外作用力为 0N 时的光路，使激光点打到悬臂梁反射面的中间部位，同时确保激光点在 PSD 上的位置稳定出现在 PSD 显示屏的中心附近。在表格中记录数据，计算测量基准值 d_0 。此时光点在 PSD 上的位置对应的位移 $\Delta d=0$ 。然后在悬臂梁上施加 5 种不同大小的外力，在答题纸的表格中记录实验结果。 1.0 分

B.2 填写表格，作图：以弯曲形变 δ 为 y 轴，光点在 PSD 上的平均位移 $\overline{\Delta d}$ 为 x 轴。 1.0 分

B.3 利用光杠杆关系式 $\delta = C_1 \overline{\Delta d}$ 确定 C_1 的值，参见图 3。 0.4 分

注意：为了便于测量，假定在环境扰动的影响下悬臂梁已处于稳定状态，也就是光学器件的振动不会影响测量结果。

注意：数据和答案必须用科学计数法表示并采用国际单位制。长度以米为单位。

注意：在实验 C 部分，数据分析不要求计算标准偏差。

实验 C. 双层悬臂梁 (2.6 分)

双层悬臂梁是在纳米工程应用领域常用的一种结构（例如集成印刷电路板或者纳米驱动器）。它由两层具有不同热胀系数的材料构成。按照铁木辛柯厚梁理论（Timoshenko beam theory），两种材料弯曲刚度的差别需要考虑。图 4 所示的双层悬臂梁由两层材料构成，厚度分别为 t_1 、 t_2 ，热膨胀系数分别为 α_1 、 α_2 ，杨氏模量分别为 E_1 、 E_2 。



图 4. 两种材料构成的双层悬臂梁示意图

根据悬臂梁理论，对于两种材料的应力，可表示为

$$\gamma_1 = \alpha_1 \Delta T + \frac{P_1}{wt_1 E_1} + \frac{t_1}{2r} \quad (3)$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 \Delta T + \frac{P_2}{wt_2 E_2} + \frac{t_2}{2r} \quad (4)$$

这里 P_i 是净作用力， ΔT 为温度改变量， w 为宽度， r 为曲率半径。如图 4 所示，净作用力需要被抵消。合成力矩 M 与净作用力 P_i 的关系为：

$$M = \sum_i P_i \frac{h}{2} \quad (5)$$

合成力矩 M 可写为弯曲刚度 $E_i I_i$ 和曲率半径 r 的函数：

$$M = \sum_i \frac{E_i I_i}{r} \quad (6)$$

E_i 为杨氏模量， I_i 为转动惯量。此边界条件要求应力连续，亦即 $\gamma_1 = \gamma_2$ 。在此边界条件下，可

得到以下等式：

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(T - 300)}{\frac{2}{hw} \left(\frac{t_1 E_1 + t_2 E_2}{t_1 E_1 t_2 E_2} \right) (E_1 I_1 + E_2 I_2) + 0.5h} \quad (7)$$

$$\delta = \kappa L^2 \quad (8)$$

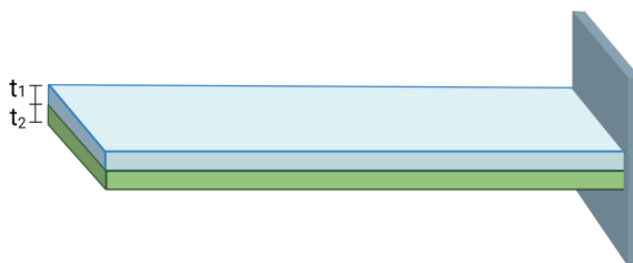


图 5. 双层悬臂梁（上层为金属 X，下层为硅 Si。）

双层梁结构如图 5 所示。本实验的相关参数依次为： $L=100 \times 10^{-6} \text{m}$ ， $w=35 \times 10^{-6} \text{m}$ ， $t_2=0.2 \times 10^{-6} \text{m}$ ， $t_1=0.04 \times 10^{-6} \text{m}$ ，热胀系数 α_1 、 α_2 分别为 $14.2 \times 10^{-6} / \text{K}$ 和 $0.8 \times 10^{-6} / \text{K}$ ；截面惯性矩 I_1 、 I_2 分别为 $1.867 \times 10^{-28} \text{m}^4$ 、 $2.333 \times 10^{-26} \text{m}^4$ 。下层为硅基底，其杨氏模量为 $280 \times 10^9 \text{Pa}$ 。请运行程序 C1 并回答问题 C.1—C.3。

C.1 画出简单实验光路图。要求激光束照在梁的反射面中心位置附近。记录室 1.0 分
温，找到测量基准 d_0 ，以此为基准对应 $\Delta d=0$ 。然后升温，当双层梁达到
稳定状态时记录数据。至少测量 5 种不同温度情况，数据记录在答题纸的
表格里。

C.2 填写表格。以弯曲形变量 δ 为 y 轴，温度 T 为 x 轴作图。通过数据分析计 1.0 分
算斜率。可以使用 B.3 中 δ 和 $\overline{\Delta d}$ 的关系式。

C.3 利用 C.2 的数据结果计算上层材料的杨氏模量。 0.6 分

注意：为了便于测量，假定在环境扰动的影响下悬臂梁已处于稳定状态，也就是光学器件的振动不会影响测量结果。

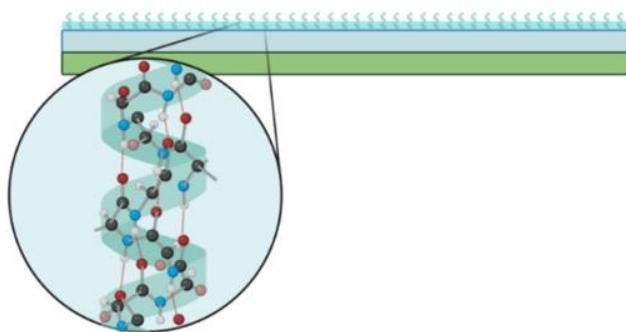
注意：数据和答案必须用科学计数法表示并采用国际单位制。长度以米为单位。

注意：在实验 D 部分，数据分析不要求计算标准偏差。

实验 D. 测量悬臂梁因吸附分子引起的弯曲 (2.6 分)

复合悬臂梁不仅可以作为纳米驱动器，还可以作为纳米传感器。图 6 所示为由双层悬臂梁构成的纳米蛋白质传感器，其表面融合有微流体通道，并涂敷一层蛋白质。当有其它生物蛋白质分子吸附到梁的表面的时候，由于吸附分子之间的范德瓦尔斯相互作用力，使得这种蛋白质吸附作用在悬臂梁上产生表面应力以及可观测弯曲形变。对于特定的蛋白质，这种应力的分布是唯一的。

(A)



(B)

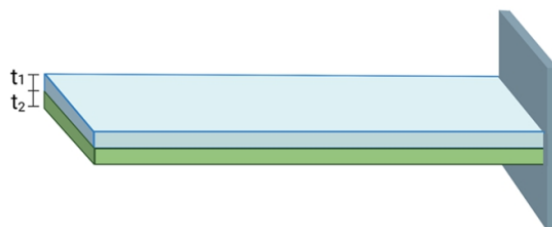


图 6. (A)用作纳米传感器的双层悬臂梁，上层涂有蛋白质。(B)悬臂梁

结构示意图（未按比例画出），上层是金属 X，下层是硅(Si)。

实验所用双层悬臂梁结构示意图如图 6(B)所示。长度 L 约 $100 \times 10^{-6} \text{m}$ ， w 约 $35 \times 10^{-6} \text{m}$ 。



^6m , t_2 约 $0.2 \times 10^{-6}\text{m}$, t_1 约 $0.04 \times 10^{-6}\text{m}$. 下层是硅衬底。硅的杨氏模量是 $280 \times 10^9\text{Pa}$. 样品 0 和样品 1 的覆盖率(CR)分别 0 和 1%. 由于悬臂梁涂层分子的量很少且覆盖率较低, 因此忽略其厚度及杨氏模量的影响。假定有效弯曲刚度 $EI^* \approx 1.84 \times 10^{-13}\text{N}\cdot\text{m}^2$. 请运行程序 D1 并回答问题 D.1—D.4.

D.1 针对样品 0 设计搭建光路, 使得反射激光点位于反射区域的中心, 亦即激光点在 PSD 上的位置稳定出现在 PSD 屏的原点。在答题纸表格中记录测量基准 d_0 , 此时设定激光点的位移 Δd 为 0, 即 $\Delta d=0$. 然后换样品 1 重复此实验过程。答案记录在答题纸的表格中。注意所有样品中, 样品 1 的覆盖 (CR) 率最高。 0.6 分

D.2 假定弯曲形变量 δ 和覆盖率 (CR) 之间的函数形式为: $\delta = C_2 \frac{CR}{EI^*} L^4$ 。基于 D.1 的测量数据, 估算 C_2 的值。这里可以利用 B.3 中 δ 和 $\overline{\Delta d}$ 的关系式。 0.6 分

D.3 换用样品 2 和样品 3, 这两个样品吸附分子种类相同但覆盖率 CR 不同。分别测量激光点在 PSD 上的位移 Δd , 数据记录在答题纸上。 0.8 分

D.4 估算样品 2 和样品 3 的 CR (用百分数%表示)。 0.6 分