概率论与数理统计第一章作业及答案

1. 第 1 题

A,B,C 为任意三个随机事件，则事件 $(A-B)\cup(B-C)$ 下哪个事件，并给出推导过程。

(A) $A-C$

(B) $A\cup(B-C)$

(C) $(A\cup B)-C$

(D) $(A\cup B)-BC$

答案

因 $A-B=A\bar{B}$，故有 $(A-B)\cup(B-C)=A\bar{B}\cup B\bar{C}$，而

$(A\cup B)-BC$

$=(A\cup B)\bar{BC}$

$=(A\cup B)(\bar{B}\cup\bar{C})$

$=A\bar{B}\cup A\bar{C}\cup B\bar{B}\cup B\bar{C}$

$=A\bar{B}\cup A\bar{C}\cup B\bar{C}$

$=A\bar{B}\cup(A\bar{B}\cup AB)\bar{C}\cup B\bar{C}$

$=(A\bar{B}\cup A\bar{B}\bar{C})\cup(AB\bar{C}\cup B\bar{C})$

$=A\bar{B}\cup B\bar{C}$

因此应该选 D。

2. 第 2 题

在伯努利试验中，每次试验成功的概率为 p，则在第 n 次成功之前恰好失败了 m 次的概率为多少?

答案

“在第 n 次成功之前失败了 m 次” 意味着第 n 次成功之前有 (n-1) 次成功和 m 次失败。总共做了 (n+m) 次实验，最后一次是成功，则前 n+m-1 次实验中有 (n-1) 次成功和 m 次失败。

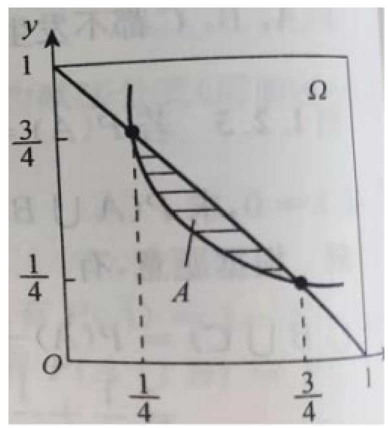
则事件的概率应为 $C_{n+m-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^m p = C_{n+m-1}^{n-1}p^n(1-p)^m$，

答案应填 $C_{n+m-1}^{n-1}p^n(1-p)^m$。

3. 第 3 题

从 $[0,1]$ 区间中随机取得 2 个数，求其积不小于 $\frac{3}{16}$，且其和不大于 1 的概率

答案



设两个数分别为 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，把 (x,y) 看作平面 x0y 上一点的直角坐标，则样本空间所对应的集合区域为边长为 1 的正方形，记作 Ω 如图 3所示。

其积不小于 $\frac{3}{16}$ 的区域为双曲线 $y=\frac{3}{16x}$ 的上方；其和不大于 1 的区域为直线 $y=1-x$ 的下方。

因此区域 A 即为所求事件的概率，$S_A=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}(1-x-\frac{3}{16x})dx=\frac{1}{4}-\frac{3}{16}ln3$

4. 第 4 题

设 A,B 为随机事件，若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，试证明：$P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是 $P(B|A)>P(B|\bar{A})$。

答案

题设条件 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 等价于 $\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，即 $P(AB)-P(B)P(AB)>$

$P(A)P(B)-P(B)P(AB)$，所以 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 等价于 $P(AB)>P(A)P(B)$。

如果将这两个等价的不等式中的 A, B 对换，就有 $P(B|A)>P(B|\bar{A})$ 等价于 $P(BA)>P(B)P(A)$，即等价于 $P(AB)>P(A)P(B)$，因此 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 等价于 $P(B|A)>P(B|\bar{A})$。

5. 第 5 题

袋子中有 5 只红球和 3 只白球，从中任取 3 只球，已知取出的有红球，求至多取到 1 只白球的概率。

答案

设 A= 取出的 3 只球中有红球，B= 至多取到 1 只白球，B_i= 恰取出 i 只白球（i=0,1,2,3），则有 $A=\bar{B}_3=B_0+B_1+B_2$，$B=B_0+B_1$，$P(B_i)=\frac{C_3^iC_5^{3-i}}{C_8^3}$。

所以所求概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B_0+B_1)}{P(B_0+B_1+B_2)}=\frac{C_5^3+C_3^1C_5^2}{C_5^3+C_3^1C_5^2+C_3^2C_5^1}=\frac{8}{11}$

6. 第 6 题

从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，求下列事件的概率：（1）没有成对的鞋子（2）至少 2 只可以配成 1 双

答案

设 A= 没有成对的鞋子，B= 至少 2 只可以配成一双，则 $B=\bar{A}$。

方法一：$P(A)=\frac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}$（从 5 双中任取 4 双，再从每双中任取 1 只），则 $P(B)=P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$

方法二：$P(A)=\frac{C_{10}^1C_8^1C_6^1C_4^1}{A_{10}^4}=\frac{8}{21}$（第一次从 10 只中任取 1 只，第二次从其他 4 双中任取 1 只，第三次从其他 3 双中任取 1 只，第四次从其他 2 双中任取 1 只）

方法三：$P(B)=\frac{C_5^1C_4^2(C_2^1)^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$（恰有两只成 1 双另两只来自不同双，或者恰成 2 双）

7. 第 7 题

在数字通信中信号是由 0 和 1 的长序列组成的，由于随机干扰，当发出信号 0 时，收到的信号为 0 和 1 的概率分别为 0.8 和 0.2；当发出信号 1 时，收到的信号为 0 和 1 的概率分别为 0.1 和 0.9。

现假设发出 0 和 1 的概率分别为 0.6 和 0.4，试求：

（1）收到一个信号，它是 1 的概率

（2）收到信号是 1 时，发出的信号确实是 1 的概率

答案

以 A 表示事件“收到的信号是 1”，以 $B_i(i=0,1)$ 表示事件“发出的信号是 i”，易知 B_0,B_1 是一个划分，且有：$P(B_0)=0.6$；$P(B_1)=0.4$；$P(A|B_0)=0.2$；$P(A|B_1)=0.9$。

（1）根据全概率公式得到，所求概率为 $P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)=0.48$

（2）根据贝叶斯公式得到，所求概率为 $P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=0.75$

8. 第 8 题

一个工厂生产了 n 台微波炉，以事件 A_i 表示生产的第 i 台微波炉是正品（$1\leq i\leq n$），请用 A_i（$1\leq i\leq n$）来表示下列事件：

（1）没有一台微波炉是次品

（2）仅有一台微波炉是次品；

（3）至少有一台微波炉是次品；

（4）至少两台微波炉不是次品。

答案

（1）$A_1A_2\ldots A_n$，或者 $\cap_{i=1}^n A_i$

（2）$\bar{A}_1A_2A_3\ldots A_n\cup A_1\bar{A}_2A_3\ldots A_n\cup\cdots\cup_1 A_2A_3\ldots\bar{A}_n$，或者 $\cup_{i=1}^n[\bar{A}_i(\underbrace{\cap_{j=1}^n A_j}_{j\neq i})]$

（3）$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_n$，或者 $\cup_{i=1}^n\bar{A}_i$

（4）$A_1A_2\cup A_1A_3\cup\cdots\cup A_1A_n\cup A_2A_3\cup A_2A_4\cup\cdots\cup A_2A_n\cup\cdots\cup A_{n-1}A_n$，或者 $\underbrace{\cup_{i,j=1}^n A_iA_j}_{i\neq j}$

9. 第 9 题

12 个乒乓球中有 9 个新球和 3 个旧球，第一次比赛时取出 3 个球，用完后放回去，第二次比赛又从中取出 3 个球，求：

（1）第二次取出的 3 个球中恰有 2 个新球的概率；

(2) 若第二次取出的 3 个球中恰有 2 个新球，求第一次取到的 3 个球中恰有 1 个新球的概率。

答案

记 A_i= 第一次取出 i 个新球，$i=0,1,2,3$，B_i= 第二次取出 i 个新球，$i=0,1,2,3$。根据古典概率计算有：

$P(A_0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$

$P(A_1)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$

$P(A_2)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{55}$

$P(A_3)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{21}{55}$

第一次取到 i 个新球以后，第二次取球是在 $9-i$ 个新球，$3+i$ 个旧球中任取 3 个，则有：

$P(B_2|A_0)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{55}$

$P(B_2|A_1)=\frac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{28}{55}$

$P(B_2|A_2)=\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{105}{220}$

$P(B_2|A_3)=\frac{C_6^2C_6^1}{C_{12}^3}=\frac{90}{220}$

（1）$P(B_2)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B_2|A_i)=\frac{1377}{3025}\approx 0.455$

（2）$P(A_1|B_2)=\frac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)}=\frac{7}{51}\approx 0.137$

10. 第 10 题

对同一目标进行三次独立射击，第一、二、三次射击的命中概率分别为 0.4、0.5、0.7，试求：

(1) 在这三次射击中，恰好有一次击中目标的概率；

(2) 至少有一次击中目标的概率。

答案

设 A_i = 第 i 次射击时击中目标 $(i=1,2,3)$，A_1,A_2,A_3 相互独立，则 $A_1=0.4, A_2=0.5, A_3=0.7$。

（1）设 B_1 = 恰好有一次射击时击中目标，则 $B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$，于是 $P(B_1)$

$=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$

$=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$

$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$

$=0.36$

（2）设 A = 至少有一次击中目标，则 $A=A_1+A_2+A_3$，于是 $P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91$