随堂作业答案解析

1.（10 分）假设有 3 张形状完全相同但颜色不同的卡片，第一张两面全是红色，第二张两面全是黑色，而第三张是一面红一面黑. 将这 3 张卡片放在帽子里混合后，随机地取出 1 张放在地上. 如果取出的卡片朝上的一面是红色的，那么另一面为黑色的概率是多少？

解：

令 RR，BB，RB 分别表示取出的卡片是“两面红”、“两面黑”以及“一面红一面黑”这三个事件. 再令 R 表示取出的卡片“朝上一面是红色”这一事件. 我们可按照如下方式得到所求概率：

$$\mathrm{P(RB|R)} = \frac{P(RB\cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR)+P(R|RB)P(RB)+P(R|BB)P(BB)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}}{1*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+0*\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ .$$

2.（10 分）将 n 个不同的球随机放入 N 个盒中，直至某指定的盒中有球为止. 设每个球被等可能地放入每个盒中，每盒容纳球数不限. 求放球次数 X 的概率分布律.

解：

根据题意，X 的可能取值为 1,2,…,k,…,n，当$1\le k<n$时，$\{X=k\}$ =前 k-1 次都没放入指定盒中，第 k 次才放入指定盒中，则有

$$P\{X=k\} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}\ ,$$

当 k=n 时，$\{X=n\}$ =前 n-1 次都没放入指定盒中，第 n 次放入指定盒中，或者没放入指定盒中，则有

$$P\{X=n\} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{N}+\frac{N-1}{N}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1},$$

因此，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\begin{cases}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{k-1}\dfrac{1}{N}, & k=1,2,\ldots,n-1\\ \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n-1}, & k=n\end{cases}.$$

3.（10 分）设随机变量 ε 的分布函数为 F(x)，且 F(x)是连续函数，求随机变量 η=F(ε)的分布函数.

解：

由分布函数函数的性质，$0\le F(x)\le 1$，F(x)是不减的函数，$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}$，对任意$0<y<1$，定义 $a(y)=\sup\{x: F(x)\le y\}$，由于 F(x)是连续函数，得$F\big(a(y)\big)=y$，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le a(y)\}=F\big(a(y)\big)=y,$$

当$y\ge 1$时，$\{F(X)\le y\}=S, F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{S\}=1$；

由$F_Y(y)$右连续得，$F_Y(0)=0$；当$y<0$时，$\{F(X)\le y\}=\emptyset$，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=0,$$

故随机变量 Y=F(X)的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}.$$

4.（15 分）设二维随机变量(X，Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}.$$

(a) 写出(X,Y)的概率密度；

(b) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(c) 求 Z=U+X 的分布函数.

解：

(a)根据题意，区域 D 的面积为$S_D = \int_0^1 (\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy)\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{1}{3}$，则(X，Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 3, & (x,y) \in D \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

(b)对于$0 < t < 1$，有

$$P(U \le 0, X \le t) = P(X > Y, X \le t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^{x} 3dy = \frac{3}{2}t^2 - t^3,$$

$$P(U \le 0) = P(X > Y) = \frac{1}{2},$$

$$P(\,X \le t) = \int_0^t dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy = 2t^{\frac{3}{2}} - t^3\,,$$

由于$P(U \le 0, X \le t) \ne P(U \le 0)P(\,X \le t)$，所以 U 与 X 不互相独立.

(c)当$z < 0$时，$F(z) = 0$，当$0 \le z < 1$时，有

$$F(z) = P(U + X \le z) = P(U = 0, X \le z) = P(X > Y, X \le z) = \frac{3}{2}z^2 - z^3\,,$$

当$1 \le z < 2$时，有

$$F(z) = P(U + X \le z) = P(U = 0, X \le z) + P(U = 1, X \le z - 1)$$
$$= \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2\,,$$

当$z \ge 2$时，有

$$F(z) = P(U + X \le z) = 1\,,$$

所以 Z=U+X 的分布函数为

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \le z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}.$$

5.（15 分）设二维随机变量(X,Y)在区域$D: 0 \le x \le 1, 0 < y \le 2x$内服从均匀分布，求

(a)$P\left\{Y \ge 1 \middle| X = \frac{3}{4}\right\}$;

(b)$P\left\{Y \geq 1 | X < \frac{3}{4}\right\}$.

解：

(a)当$X = \frac{3}{4}$时，$f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则

$$P\left\{Y \geq 1 | X = \frac{3}{4}\right\} = \int_{1}^{+\infty} f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{3}{4}\right) dy = \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} dy = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$P\left\{Y \geq 1 | X < \frac{3}{4}\right\} = \frac{P\left(Y \geq 1, X < \frac{3}{4}\right)}{P\left(X < \frac{3}{4}\right)} = \frac{\iint_{x<\frac{3}{4}, y\geq 1}^{y \leq 2x} 1\, dxdy}{\int_{0}^{\frac{3}{4}} 2x dx} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_{1}^{2x} 1\, dydx}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{9}$$

6.（10 分）设随机变量 X 服从拉普拉斯分布，其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}\right\} (-\infty < x < +\infty, \lambda > 0).$$

求 E(X)，D(X).

解：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + x - \mu) f(x) dx$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) \frac{1}{2\lambda} exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}\right\} dx$$

$$= \mu + \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{1}{2\lambda} exp\left\{-\frac{|t|}{\lambda}\right\} dt = \mu + 0 = \mu.$$

$$D(X) = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{2\lambda} exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}\right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{2\lambda} exp\left\{-\frac{|t|}{\lambda}\right\} dt = \int_{0}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\lambda} exp\left\{-\frac{t}{\lambda}\right\} dt = 2\lambda^2.$$

7.（15 分）考虑 m 次独立重复试验，每个试验具有 r 个可能的试验结果，相应出现的概率分别为$p_1,\ldots,p_r$，$\sum_{i=1}^{r}p_i=1$. 令$N_i(i=1,\ldots,r)$表示 m 次试验中结果 i 出现的次数，求

(a)$(N_1,\ldots,N_r)$的联合分布；

(b)对于任意$i,j(i,j\ \in 1,\ldots,r,i\neq j)$，$N_i$和$N_j$的协方差.

解：

(a)$(N_1,\ldots,N_r)$具有多项分布

$$P\{N_1=n_1,\ldots,N_r=n_r\}=\frac{m!}{n_1!\ldots n_r!}{p_1}^{n_1}\ldots{p_r}^{n_r},\sum_{i=1}^{r}n_i=m\,.$$

(b)对于$i\neq j$，当N_i增大时，N_j应趋向于变小，因此直观上N_i和N_j应为负相关，

N_i和N_j具有下列表达式

$$N_i=\sum_{k=1}^{m}I_i(k),\ \ N_j=\sum_{k=1}^{m}I_j(k),$$

其中

$$I_i(k)=\begin{cases}1, & 若第k次试验的结果为i\\ 0, & 其他\end{cases},$$

$$I_j(k)=\begin{cases}1, & 若第k次试验的结果为j\\ 0, & 其他\end{cases},$$

利用命题 4.2(iv)，得到

$$Cov(N_i,N_j)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}Cov(I_i(k),I_j(l))\ ,$$

一方面当$k\neq l$时，第k次和第l次试验相互独立，有

$$Cov\left(I_i(k),I_j(l)\right)=0\,,$$

另一方面$k=l$时，第l次试验的结果不可能既是i又是j，所以$I_i(l)I_j(l)=0$，则可以得到

$$Cov\left(I_i(k),I_j(l)\right)=Cov\left(I_i(l),I_j(l)\right)=E\left[I_i(l)I_j(l)\right]-E[I_i(l)]E\left[I_j(l)\right]=-p_ip_j\,.$$

综合上述两个方面，得到

$$Cov(N_i, N_j) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Cov(I_i(k), I_j(l)) = -mp_ip_j\,.$$

8.（15 分）设$X_1, \dots, X_{2n+1}$为独立同分布的随机变量（统计上称$X_1, \dots, X_{2n+1}$为一组容量为 2n+1 的样本）. 次序统计量$X_{(n+1)}$称为样本中位数. 如果X_1, X_2, X_3是(0,1)上服从均匀分布的一组样本. 求样本中位数落入区间$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$的概率.

解：

$X_{(j)} = x$意味着$X_1, \dots, X_n$中有 j-1 个值小于 x，有一个值等于 x，有 n-j 个值大于 x，对于给定的一个随机变量等于 x，给定的 j-1 个随机变量的值小于 x，给定的其余 n-j 个随机变量的值大于 x，概率密度为：

$$[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)\,,$$

因为把 n 个随机变量分成三个组的方法共有

$$\binom{n}{j-1, n-j, 1} = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!}$$

种，所以$X_{(j)}$的密度函数为

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)\,,$$

利用上式可得$X_{(2)}$的密度函数为

$$f_{X_{(2)}}(x) = \frac{3!}{1!\,1!}x(1-x), 0 < x < 1\,,$$

因此有

$$P\left\{\frac{1}{2} < X_{(2)} < \frac{3}{4}\right\} = 6\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x(1-x)dx = \frac{11}{32}.$$