第3章 多维随机变量及其分布

Chpt. 3 Multi-Dimensional Random Variables and Their Distributions

3.1.1 多维随机变量的定义

(1)很多随机现象中涉及多个变量，试验结果要用多个随机变量来表示。

- 发射一枚炮弹，需要同时研究弹着点的几个坐标
- 考察一个人的健康时，需要检测身高、体重、血压、血糖等多种因素，且这些因素本身还存在着关联

(2)另外，当我们研究统计问题时也涉及到多个变量，比如，类似均值 $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$，均方 $\dfrac{1}{n}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)$

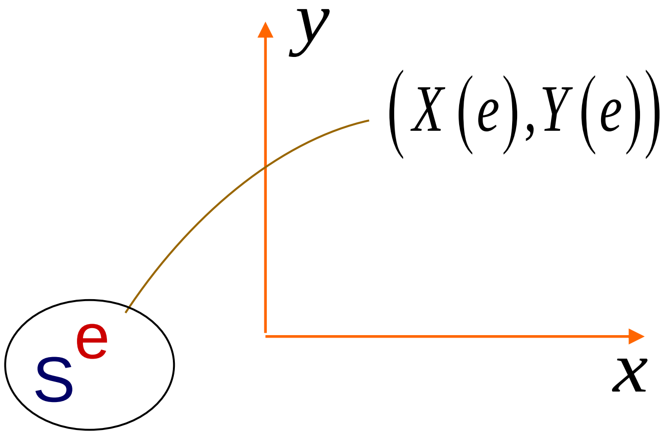
3.1 多维随机变量

[定义] 若随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$定义在同一样本空间S上，就称这n个随机变量的整体$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为n维随机向量或n维随机变量(n-dimensional random variable).

对n维随机向量的研究从两个方面着手：

- 研究整体特性；（联合分布）
- 研究个体之间、个体与整体之间的关联与相互关系。
  (边缘分布与条件分布)

着重研究二维情形



3.1.2 多维随机变量的联合分布

多维随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$，对于任意n个实数 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 或实向量$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$，称n元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

为随机向量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的(联合)分布函数.

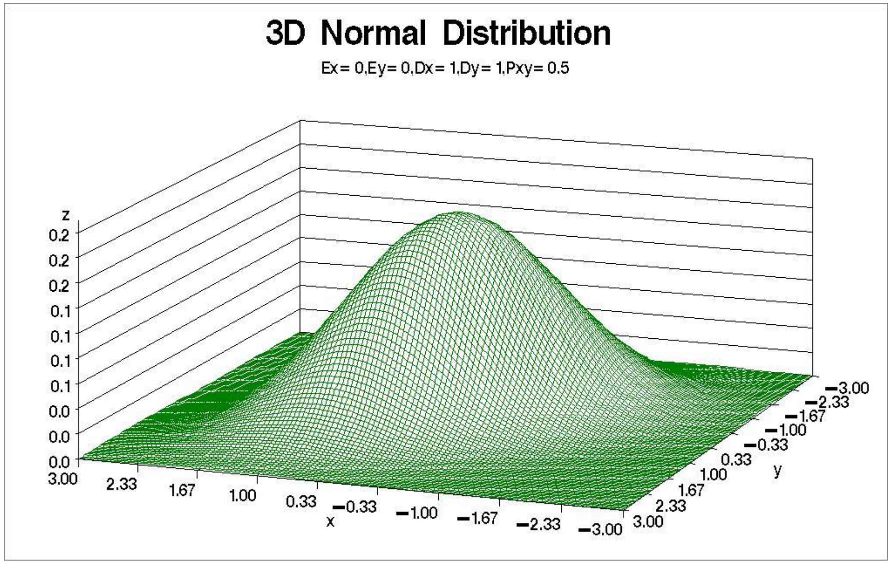
注意：记

$$P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

$$\overset{\Delta}{=} P\{(X_1\le x_1)\bigcap(X_2\le x_2)\bigcap\cdots\bigcap(X_n\le x_n)\}$$

Remark：注意到多维随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$是针对同一试验而言的，是在同一个样本空间S上定义的随机变量。

3.1.2 多维随机变量的联合分布



联合分布的性质

- $0 \le F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le 1$
- $F(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, -\infty, x_{i+1}, \cdots x_n) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$
- $F(\infty, \infty, \cdots, \infty) = 1$
- $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的不减函数，即对任意的两个向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$，只要 $x_i' \ge x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$，总有
  $$F(x_1', x_2', \cdots, x_n') \ge F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

3.1.2 多维随机变量的联合分布

注意到联合分布的定义，以及

$$\left\{ (X_1 \le x_1) \bigcap (X_2 \le x_2) \bigcap \cdots \bigcap (X_n \le x_n) \right\}$$

$$\subseteq \left\{ (X_1 \le x_1^{'}) \bigcap (X_2 \le x_2^{'}) \bigcap \cdots \bigcap (X_n \le x_n^{'}) \right\}$$

$$P\{(X_1 \le x_1) \bigcap (X_2 \le x_2) \bigcap \cdots \bigcap (X_n \le x_n)\}$$

$$\le P\{(X_1 \le x_1^{'}) \bigcap (X_2 \le x_2^{'}) \bigcap \cdots \bigcap (X_n \le x_n^{'})\}$$

即

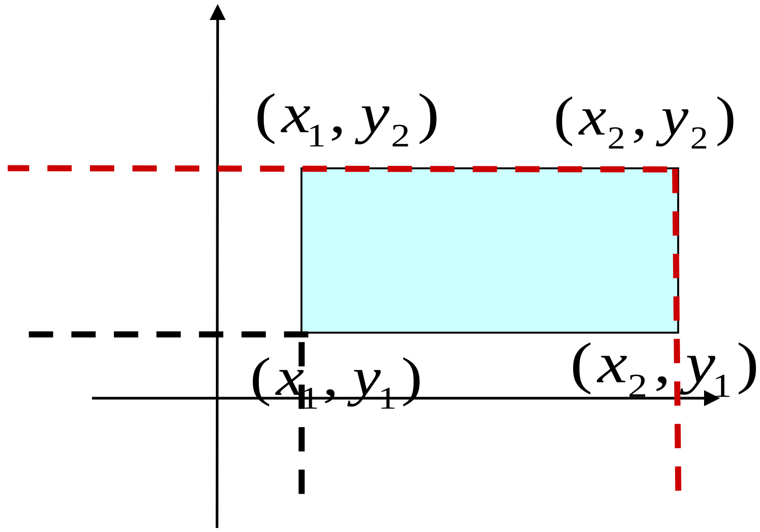
$$F(x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}) \ge F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

3.1.2 多维随机变量的联合分布

对二维随机向量(X, Y)，分布函数 $F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}$，其中$(x, y)\in \mathbf{R}$ 表示随机向量 (X, Y)落在 (x, y) 为顶点的位于该点左下方的无穷矩形内的概率.

依照上述解释，(X, Y)落在$[x_1<x\le x_2,\ y_1<y\le y_2]$ 的概率为

$$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)$$
$$+F(x_1,y_1)$$



3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

随机向量只取有限组或可列组值，就称为离散型随机向量.

列出所有各组可能值及取这些值的概率，就可得其概率分布.

Example 3.1 口袋中有2白球3黑球, 连取两次，每次任取一球. 设X为第一次取白球的个数，Y为第二次取白球的个数. 对

(1)有放回

(2)无放回

求：两种情况 (X,Y)的联合分布.

解 (1) X与Y可能取的值都是0 (黑球)与1 (白球)，各种情况搭配及相应概率如下（注意直观看待独立与否）：

{X=0, Y=0} 表示第一次取黑球且第二次也取黑球，因为有放回，两次取球相互独立的，其概率都是3/5，故

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$$

同理 $P(X=0,Y=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\qquad P(X=1,Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$$

表1：有放回时的(X,Y)联合分布

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$
1	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$

南開大學 Nankai University

(2) X与Y可能取的值与(1)相同，但因为无放回，两次结果是不独立的, 利用第一章乘积事件概率公式，得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

同理 $P\{X=0,Y=1\}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4} \qquad P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$$

表2：无放回时的(X,Y)联合分布

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$
1	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

一般，离散型的二维联合分布列为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \qquad (i,j=1,2,\cdots)$$

或写成表格的形式如下表

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

3.1.3 离散多维随机变量的联合分布

他们必须满足

$$p_{ij} \geq 0$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \qquad (i, j=1,2,\cdots)$$

n维离散型随机向量的联合分布是

$$P\{X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, \cdots, X_n = x_{i_n}\} = p_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

$$i_1, i_2, \cdots, i_n = 1,2,\cdots$$

Example 3.2 从数1，2，3，4中任取一个数，记为X，再从1，…，X中任取一个数，记为Y，计算P (Y=2) 。

$P(Y=2)$

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

(X,Y) 所在的样本空间是什么？

Example 3.3 一批产品共有100件，其中一等品60件、二等品30件，三等品10件。从这批产品中有放回地任取3件，以X和Y分别表示取出的3件产品中一等品和二等品的件数，求二维分布（X, Y）的联合概率分布列。

解： X和Y可能的取值都是0,1,2,3

记p_{ij}表示一等品为i件，二等品为j件

1）当$i+j\ >\ 3$时，$p_{ij}=0$

2）当$i+j\ \le\ 3$时，{X=i, Y=j}表示取出的3件产品中，一等品有i件，二等品有j件，三等品有3-i-j件，所以有放回抽取时，

$$p_{ij}=C_3^iC_{3-i}^jC_{3-i-j}^{3-i-j}(0.6)^i(0.3)^j(0.1)^{3-i-j}$$

$$p_{ij}=\frac{3!}{i!\,j!\,k!}(0.6)^i(0.3)^j(0.1)^k, i+j+k=3$$

南開大學 Nankai University

多项分布（Multinomial Distribution）

进行n次独立重复试验，如果

1）每次试验有r个互不相容的结果（$A_1, A_2, \cdots$，A_r）之一发生

2）每次试验中A_i发生的概率为$p_i = P(A_i), i = 1,2,\cdots,r,$ 且 $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$。

记X_i为n次独立重复试验中A_i出现的次数，$i = 1,2,\cdots,r$。则$(X_1, X_2, \cdots, X_r)$取值为$(n_1, n_2, \cdots, n_r)$的概率为：

$$P(X_1 = n_1, \cdots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!} {p_1}^{n_1} {p_2}^{n_2} \cdots {p_r}^{n_r}$$

其中$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$。

这个联合分布称为**多项分布**（r项分布），记为$M(n; p_1, \cdots, p_r)$

这个概率是多项式$(p_1 + \cdots + p_r)^n$展开式中的一项，故其和为1。

当r=2时，即为二项分布。

3.1.4 N维连续型随机变量的分布函数

[定义] 对n维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 若存在n元可积的非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ，对于任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(y_1,y_2,\cdots,y_n)dy_1dy_2\cdots dy_n$$

则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是n维的连续随机变量，F 称为它的连续型分布，称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为(联合)密度函数.

3.1.4 N维连续型随机变量的分布函数

[1] 显然，密度函数满足如下条件：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, \cdots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n = 1$$

[2] 对连续型随机向量，分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对每一变量都是连续的，且在密度函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的连续点，有偏导数

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

[3] G是 R^n 中的任意一个区域，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 落入区域G内的概率为

$$P\{X \in G\} = \int \cdots \int_G f(y_1, y_2, \cdots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n$$

Example 3.4 设二维随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-2(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

1) 确定常数A；

2) 求分布函数

3) 计算 $P\{X<1, Y<2\}$；

4) 计算概率$P\{X+Y<1\}$

解 1) 由联合密度的性质，应有

$$1=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} Ae^{-2(x+y)}dxdy = A/4 \qquad \Rightarrow \quad A=4$$

2) 分布函数 $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y Ae^{-2(u+v)}dudv$，我们来分块计算它.

当$x\le 0$或$y\le 0$时，$f(x,y)=0$，故$F(x,y)=0$

当$x>0$且$y>0$时

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4e^{-2(u+v)}dudv+\iint\limits_{elsewhere}0dudv$$

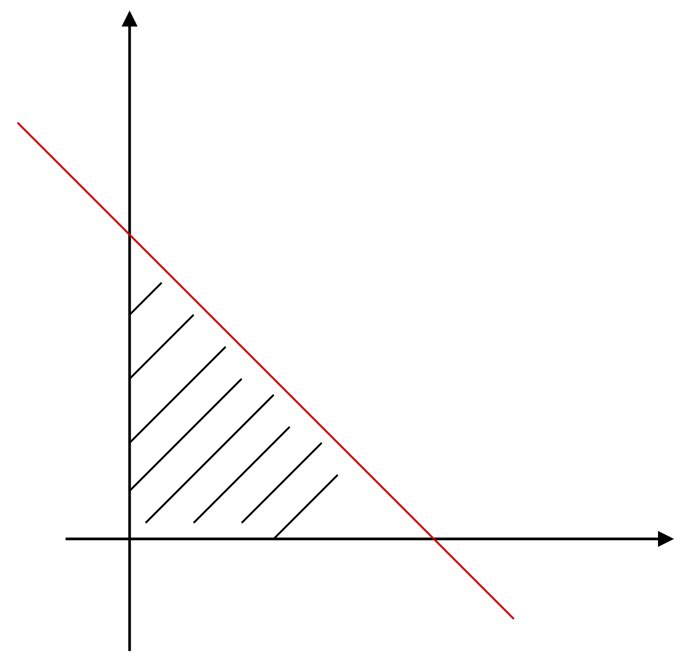
$$=(1-e^{-2x})(1-e^{-2y})$$

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}) & x>0,y>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

3) $P\{X<1,Y<2\}=F(1,2)=(1-e^{-2})(1-e^{-4})$

4) $P\{X+Y<1\}=\iint\limits_{x+y<1} Ae^{-2(x+y)}dxdy$

$$=\iint\limits_{\substack{x+y<1\\ x>0,\ y>0}} 4e^{-2(x+y)}dxdy$$



$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy\right]dx$$

$$=1-3e^{-2}$$

3.2 边缘（边缘）分布

3.2.1 边缘分布的定义

n维随机变量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，具有联合分布 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，每一个随机变量 X_i 又有其自身的分布函数$F_{X_i}(x_i)$，称之为边缘分布函数。

边缘分布与联合分布的关系

$$F_{X_i}(x_i)=P\{X_i\le x_i\}$$

$$=P\{\{X_1\le\infty\}\bigcap\{X_2\le\infty\}\bigcap\cdots\bigcap\{X_{i-1}\le\infty\}\bigcap\{X_i\le x_i\}\bigcap\{X_{i+1}\le\infty\}\cdots\{X_n\le\infty\}\}$$

$$=P\{X_1\le\infty,X_2\le\infty,\cdots,X_{i-1}\le\infty,X_i\le x_i,X_{i+1}\le\infty,\cdots X_n\le\infty\}$$

$$=F(\infty,\cdots,\infty,x_i,\infty,\cdots,\infty)$$

因此，$F_{X_i}(x_i)$的求取方法按随机变量类型分为两种。

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

以二维随机变量(X,Y)为例

$$F_x(x) = F(x,\infty) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ y_j < \infty}} p_{ij} = \sum_{x_i \le x}\left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\right)$$

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \overset{\Delta}{=} p_{i\bullet}$$ --称为(X,Y)关于X的边缘分布

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \overset{\Delta}{=} p_{\bullet j}$$ --称为(X,Y)关于Y的边缘分布

Remark 1：这里$p_{i\bullet}$表示对第二个下标j求和，$p_{\bullet j}$表示对第一个下标 i求和.

Remark 2：上两式分别表示X与Y的分布列，它们恰好为二维随机变量分布表按行相加与按列相加的结果，把它们分别写在表1中两表的右边和下边，称为边缘分布(marginal distribution).

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

Example 3.5 求**Example 3.1**的边缘分布.

$$P\{X=0\}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$$ 类似得其它各概率，如下面两表.

(1)

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

(2)

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

Remark (1)与(2)的联合分布不同，但边缘分布相同，这说明如果边缘分布给定，联合分布却不能惟一确定，还要考虑随机变量间的相互关系.

3.2.2 离散随机变量的边缘分布

Example 3.6 求三项分布的边缘分布.

解：设二维随机变量 $(X,Y)\sim M(n,p_1,p_2,p_3)$，其联合分布为

$$p_{ij}=\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}{p_1}^{i}{p_2}^{j}(1-p_1-p_2)^{n-i-j}$$

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=0}^{n-i}p_{ij}$$

$$=\frac{n!}{i!\ (n-i)!}{p_1}^{i}(1-p_1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(n-i)!}{j!\ (n-i-j)!}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{j}\left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-i-j}$$

$$=\frac{n!}{i!\ (n-i)!}{p_1}^{i}(1-p_1)^{n-i}$$

故$X\sim B(n,p_1)$，同理可证$Y\sim B(n,p_2)$

用类似的方法可以证明，多项分布的边缘分布为二项分布

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

以二维连续型随机变量(X,Y)为例，设其密度函数为f(x,y), 分布函数为F(x,y), 则X的边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

$$F_X(x) = F(x,+\infty)$$

同理，Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right]dy = F(+\infty, y)$$

记 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

根据连续型随机变量的定义，由式可见，X是连续型随机变量，它的密度函数就是$f_X(x)$。同理Y是连续型随机变量，其密度函数为$f_Y(y)$。$f_X(x)$和$f_Y(y)$称为(X, Y) (或$f(x, y)$)的边缘密度。

由此，也可以看出边缘密度的两种求法：

[1] 由联合分布函数$F(x, y)$

计算$F(x,+\infty)$得$F_X(x)$， 计算$F(+\infty, y)$得$F_Y(y)$，而后微分得到

$$f_X(x)=F_X^{'}(x), \quad f_Y(y)=F_Y^{'}(y)$$

[2] 由联合分布密度$f(x, y)$

对y积分得到 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

对x积分得到 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

Example 3.7 设二维随机向量(X,Y)的密度函数如下，求边缘密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

[解] 由前知道

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}) & x>0,y>0\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

可先求得边缘分布函数，再计算边缘密度。X的边缘分布和密度函数为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_X(x)=F_X^{'}(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

同理Y的边缘分布函数和边缘密度函数分别为

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

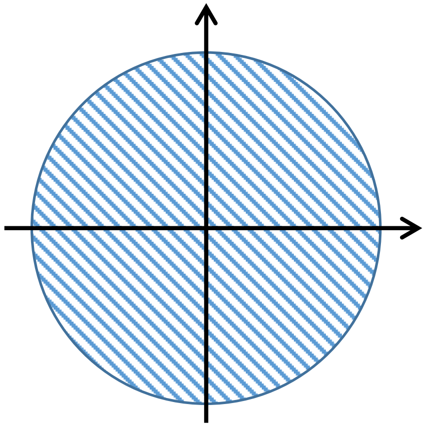
练习：已知如下2个概率密度函数，求边缘概率密度函数

a. $f_1(x,y) = x + y, 0 < x, y < 1$

b. $f_2(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right), 0 < x, y < 1$

3.2.3 连续型随机变量的边缘分布

Example 3.8 (二维均匀分布) (X,Y)在圆形区域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布，求边缘密度。



解 联合密度为
$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi & x^2+y^2\le 1\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

因为 $|x|>1$时，$f(x,y)=0$, 此时 $f_X(x)=0$;

$|x|\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\pi}dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & |y|\le 1\\ 0 & |y|>1\end{cases}$$

注意，这里虽然(X,Y)的联合分布是均匀分布，但边缘分布却不是均匀分布.

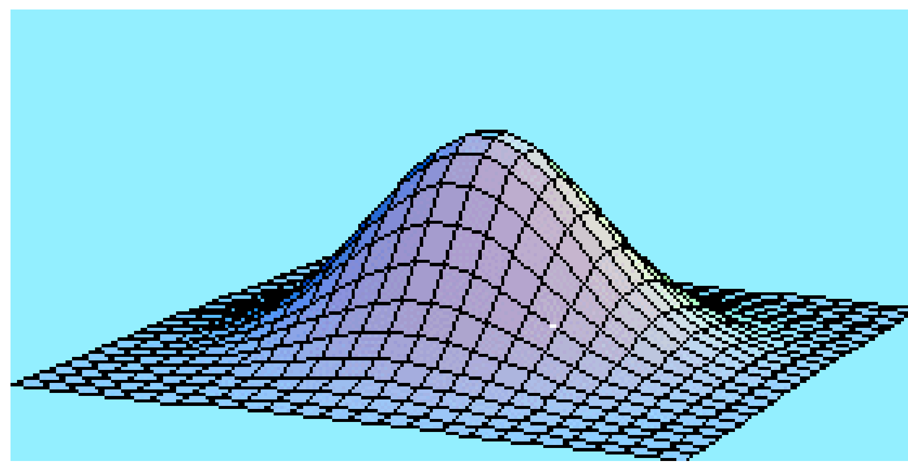
Example 3.9 (二维正态分布) 二维随机变量（X,Y）的分布概率密度是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

称(X,Y)为服从参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布，记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 。

求其边缘概率密度。



解：在上式的指数上对y配方，

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$=\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$=\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$=(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]dy$$

$$\Downarrow \qquad t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right), \text{则} dy=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

$$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

上述结论是说，二元正态分布的边缘分布仍是正态分布，并且与ρ无关.

但反过来不正确，即若(X,Y)的边缘分布都是正态分布，其联合分布却未必是二元正态分布.

Example 3.10 (X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)$

$-\infty<x,y<+\infty$ 求边缘分布.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin y e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$$

因此X,Y都服从标准正态分布

$N(0,1)$，但联合分布不是正态的.

3.3 相互独立的随机变量

边缘分布不能反映联合分布，也就是说边缘分布少了点什么。那么，什么可以与边缘分布共同来描述联合分布呢?

（以下可以仅仅从事件的角度而非随机变量的角度看）

$$F(x_1,x_2)=P\{\{X_1\le x_1\}\cap\{X_2\le x_2\}\}$$

$$=P\{X_2\le x_2\mid X_1\le x_1\}P\{X_1\le x_1\}$$

$$=P\{X_2\le x_2\mid X_1\le x_1\}F_{x_1}(x_1)$$

当 $\{X_1\le x_1\}$独立于$\{X_2\le x_2\}$

$$F(x_1,x_1)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

此时，边缘分布函数完全界定了联合分布函数。

3.3 相互独立的随机变量

[定义] 随机变量X_2, X_2， $F_{X_1X_2}(x_1, x_2)$, $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$分别是分布函数和边缘分布函数，如果对于任意的 (x_1, x_2) 满足

$$F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

则称随机变量 X_1, X_2 是相互独立的。

当 (X_1, X_2) 是连续型随机向量时，X_1, X_2 联合概率密度为 $f(x_1, x_2)$ ，边缘概率密度分别是 $f_{X_1}(x_1), f_{X_2}(x_2)$，则 X_1, X_2 独立的条件等价于

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

3.3 相互独立的随机变量

Proof： $F(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$

$$\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(u)du\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2}(v)dv=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)dudv$$

由 x_1, x_2 的任意性知道，必须有 $f(u,v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$

反之，很容易证明成立。

例如二维正态随机分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$ 的边缘分布概率密度是 $f_X(x), f_Y(y)$，如果要使得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，必有 $\rho=0$

即二维正态随机变量 (X,Y) 中 X,Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

Example 3.11 一负责人到办公室的时间是8~12点，服从均匀分布X~U(8,12), 其秘书到达办公室的时间是7~9点，服从均匀分布Y~U(7,9)，二人到达的时间X,Y独立。

求：他们达到办公室时间相差不超过5分钟的概率。

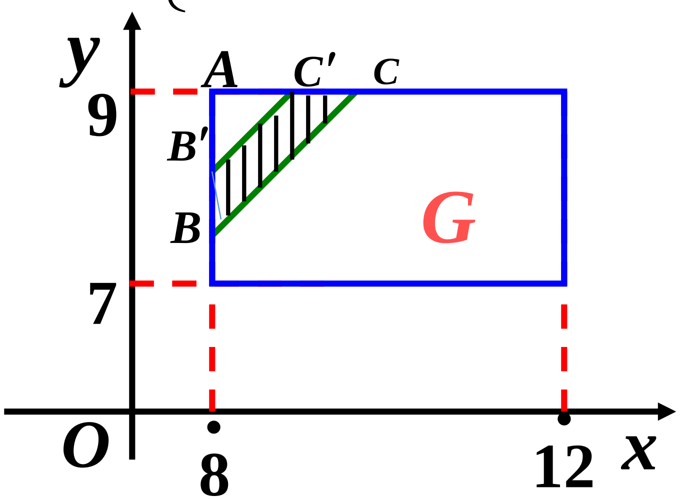
$$G=\{(x,y)\mid 8<x<12, 7<y<9\}$$

$$f_x(x)=\begin{cases}1/4 & 8<x<12\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

$$f_y(y)=\begin{cases}1/2 & 7<y<9\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$

$$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$

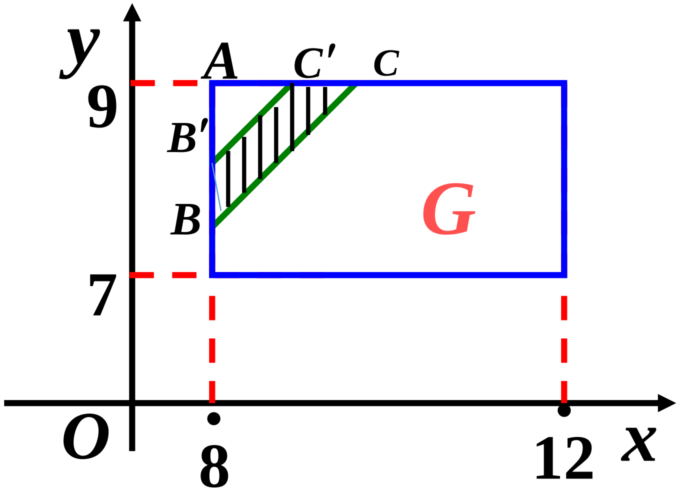
$$=\begin{cases}1/8 & (x,y)\in G\\ 0 & elsewhere\end{cases}$$



$$P\{|X-Y|<\frac{1}{12}\}=\iint\limits_{\substack{|x-y|<\frac{1}{12}\\(x,y)\in G}} f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{8}\{|x-y|\leq\frac{1}{12}\text{的面积},(x,y)\in G\}$$

$$=1/48$$



3.3 相互独立的随机变量

定理3.1：

如果随机变量$X_1,\cdots,X_n$相互独立，则对任何$a_i < b_i(i = 1,\cdots,n)$，记事件$A_i = \{a_i \le X_i \le b_i\}$，则$A_1,\cdots,A_n$也相互独立。

反之，如果对任何$a_i < b_i(i = 1,\cdots,n)$，$A_1,\cdots,A_n$相互独立，则$X_1,\cdots,X_n$相互独立。

这说明**如果$X_1,\cdots,X_n$相互独立，则各个变量取值的概率不受其他变量的影响**，这与随机变量相互独立的定义是等价的。

定理3.2:

若多维连续型随机变量$(X_1,\cdots,X_n)$的概率密度函数$f(x_1,\cdots,x_n)$可以表示为n个函数$g_1,\cdots,g_n$的积，其中g_i只依赖于x_i，即

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1)\cdots g_n(x_n)$$

则$X_1,\cdots,X_n$相互独立，且X_i的边缘密度函数$f_i(x_i)$和$g_i(x_i)$只相差一个常数因子。

证明： X_1的密度函数为

$$f_1(x_1)=\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

3.3 相互独立的随机变量

定理3.2:

$$= g_1(x_1)\int g_2(x_2)\mathrm{d}x_2 \cdots \int g_n(x_n)\mathrm{d}x_n$$

$$= C_1 g_1(x_1)$$ C_1为常数

同理可证$f_i(x_i) = C_i g_i(x_i)$, $i = 1, \cdots, n$

故 $f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) = C_1 C_2 \cdots C_n g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)$

$$= C_1 C_2 \cdots C_n \, f(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= f(x_1, \cdots, x_n)$$ 因为$C_1 C_2 \cdots C_n = 1$

3.3 相互独立的随机变量

关于**多维随机变量** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 其联合分布$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$，边缘分布为 $F_{X_i}(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$ ，如果对所有的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 成立

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是**相互独立的**。

假设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 有联合分布$F_X(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 有联合分布$F_Y(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

$X_1, X_2, \ldots, X_m$， $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 的联合分布为$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$

如果 $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \equiv F_X(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)\, F_Y(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是**独立的**。

3.3 相互独立的随机变量

[定理] 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$相互独立，则：

（1）$X_i\,(i=1,2,\cdots,m)$与$Y_j\,(j=1,2,\cdots,n)$相互独立；

（2）如果h, g是连续函数，则$H=h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$G=g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$独立。

(1) $$F_{ij}(x_i, y_j) = F(\infty,\cdots,\infty, x_i, \infty,\cdots,\infty, \infty,\cdots\infty, y_j, \infty,\cdots\infty)$$
$$= F_x(\infty,\cdots,\infty, x_i, \infty,\cdots,\infty) F_y(\infty,\cdots\infty, y_j, \infty,\cdots\infty)$$
$$= F_{x_i}(x_i) F_{y_j}(y_j)$$

(2) $$F(h,g) = P\{H \le h, G \le g\}$$
$$= P\{h(X_1, X_2, \cdots, X_m) \le h, g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \le g\}$$
$$= P\{h(X_1, X_2, \cdots, X_m) \le h\} P\{g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \le g\}$$
$$= F_H(h) F_G(g)$$

3.4 条件分布(Conditional Distribution)

当多个随机变量不满足独立性，他们之间存在着关联性，一个变量的存在影响到另一个变量的存在。可类似条件概率定义条件分布。

3.4.1 离散随机变量的条件分布

设二维离散随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\ldots$$

设

$$p_{i\bullet} > 0, \qquad p_{\bullet j} > 0$$

考虑在事件 $\{Y = y_j\}$ 发生的条件下 $\{X = x_i\}$ 发生的概率，即事件 $\{X = x_i \mid Y = y_j\}$ 的概率。

3.4.1 离散随机变量的条件分布

$$P\left(X=x_i \mid Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \qquad (i=1,2,\cdots)$$

$$P\left(Y=y_j \mid X=x_i\right)=\frac{P\left(X=x_i, Y=y_j\right)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \qquad (j=1,2,\cdots)$$

容易知道上述满足:

$$P(X=x_i \mid Y=y_j) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i \mid Y=y_j)=1$$

3.4.1 离散随机变量的条件分布

[定义] 对于固定的j，$P(Y=y_j)>0$，则称

$$P\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量 X 的条件分布律。

$P\left(X=x_i \middle| Y=y_j\right)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 与前面Chpt.1中的条件概率是一致的;

把所有的这样的条件概率写出就得到了条件分布律。

Example 3.12 一射击手单发击中目标的概率为p (p>0), 假设击中两次目标为止，设 X 为首次射中目标所进行的射击次数，Y 为总的射击次数，求（X,Y）的联合分布与条件分布。

解：
$$P(X=m,\ Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$$

$$n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1$$

$$P(X=m)=\sum_{n>m}P(X=m,Y=n)$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2(1-p)^{m-1}\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$=p(1-p)^{m-1}$$

注意：

我们事实上可以很简单地计算得到P{X＝m}

$$P(Y=n)=\sum_{m<n}P(X=m,Y=n)$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2} \qquad (\mathrm{n}\geq 2)$$

$$P(X=m\,|\,Y=n)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(Y=n)}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

$$P(Y=n\,|\,X=m)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(X=m)}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}=p(1-p)^{n-m-1}$$

3.4.1 离散随机变量的条件分布

以上二式都可以进行直接的解释:

- 第一式 $P(X=m|Y=n)=\dfrac{1}{n-1}$

  在知道第n次为射中的话，前n－1次里射中一次，每次射中的概率是相等的，第m次射中的概率为 1/(n-1);

- 第二式 $P(Y=n|X=m)=p(1-p)^{n-m-1}$

  在第m次射击时为第一次中，随后到第n次射击才射中的概率为 $p(1-p)^{n-m-1}$ (m+1,m+2, …,n-1为不中，n为中)

3.4 条件分布(Conditional Distribution)

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

在连续型的情况，因为对任何y, P(Y=y)=0，故只能借助于密度函数定义条件密度。Y=y时X的条件分布函数, 可采取极限方式定义:

$$P(X \le x \mid Y = y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P\left(X \le x \mid y - \varepsilon \le Y \le y + \varepsilon\right)$$

记为 $F_{X|Y}(x \mid y)$

假设（X,Y）的联合分布函数为F(x,y)，概率密度为f(x,y)，那么

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P\left(X \le x \mid y - \varepsilon \le Y \le y + \varepsilon\right)$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0+}P\left(X\le x \mid y-\varepsilon\le Y\le y+\varepsilon\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{P(X\le x, y-\varepsilon\le Y\le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon\le Y\le y+\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{2\varepsilon}}{\dfrac{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}{2\varepsilon}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dx}{f_Y(y)}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Example 3.13 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ，求条件密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解 $F_X(x)$ 为正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2(1-\rho^2)(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\\ \mu &= \mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\end{aligned}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

前面求得条件密度

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left[y-\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}$$

它表明:

已知X= x条件下，二维正态分布的对于Y的条件分布是正态分布

$$N\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad \left(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\right)^2\right)$$

其中第一参数 $\mu_2+\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1)$ 是x的线性函数，第二参数与x无关.

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

已知X= x条件下，二维正态分布的对于Y的条件分布是正态分布

$$N\left(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad\left(\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\right)^2\right)$$

- 当$\rho > 0$时，随着x增加，Y的条件分布的中心点也增加，这意味着x增加时，y取更大的值的可能性增加（如体重和身高的关系），此时称X和Y“正相关”。
- 当$\rho < 0$时，随着x增加，Y的条件分布的中心点减少，即Y随着X的增长而下降，此时称X和Y“负相关”。

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

练习： 随机向量 (X,Y) 在圆形区域 $x^2+y^2\leq 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$。

Example 3.14 从[0,1]中随机选取一个数X，然后再[0,X]中随机选择一个数Y，求Y的分布。

解: 根据题意可以得到X的分布为$X\sim U(0,1)$

$$f_X(x)=I_{x\in(0,1)}$$

X确定的条件下，Y的分布为$Y|X=x\sim U(0,x)$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x}I_{y\in(0,x)}$$

因此，(X,Y)的联合分布密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=I_{x\in(0,1)}\cdot\frac{1}{x}I_{y\in(0,x)}$$

Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 f_X(x)f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}x$$

$$=-\ln y, y\in[0,1]$$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

练习：

1. 设X,Y,Z服从$U(0,1)$，且相互独立，求$P(X\geq YZ)$

2. 随机向量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$P\{X>1|Y=y\}$

3.4.2 连续型随机变量的条件分布

练习：

3. 考虑$n+m$次重复实验，每次成功的概率相同。然后，假定此概率不是固定的值，而是一个随机变量，服从$U(0,1)$。已知$n+m$次试验有n次成功的条件下每次成功的概率的条件分布是什么？

条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}\,y = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \mathrm{d}\,y$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下

3.5 多维随机变量的函数的分布

3.5.1 基本概念

n维随机变量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

定义随机变量$Y_i=g_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)(i=1,2,\cdots m)$。

记随机向量$Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$的分布函数$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)$

$$C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le y_i,i=1,2,\cdots m\}$$

则

$$\begin{aligned}F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)&=P\left(Y\le y_1,\cdots,Y\le y_m\right)\\&=P\left(g_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y_1,\cdots,g_m(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le y_m\right)\\&=P\left((X_1,\cdots,X_n)\in C\right)\end{aligned}$$

3.5.2 多维离散型随机变量函数的分布

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为n维离散随机变量，则某一函数$Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，当$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的取值较少时，可将Y的取值一一列出，然后再合并整理得到Y的分布。

Example 3.15 设二维随机变量(X,Y)的分布列如下所示：

X \ Y	-1	1	2
-1	5/20	2/20	6/20
2	3/20	3/10	1/20

求：1）$Z_1=X+Y$；2）$Z_2=X-Y$；3）$Z_3=\max\{X,Y\}$

解： 将(X,Y) 和 Z_1,Z_2,Z_3的取值对应列在同一个表中

P	5/20	2/20	6/20	3/20	3/20	1/20
(X,Y)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,2)	(2,-1)	(2,1)	(2,2)

解： 经过合并整理后可得最后结果

Z_1	-2	0	1	3	4
P	5/20	2/20	9/20	3/20	1/20

Z_2	0	-2	-3	3	1
P	6/20	2/20	6/20	3/20	3/20

Z_3	-1	1	2
P	5/20	2/20	13/20

2.5.1 离散型随机变量的函数

Example 2.23 设 $X\sim B(n_1,p)$, $Y\sim B(n_2,p)$，X、Y相互独立，

求： $Z=X+Y$ 的分布。

解： X, Y 各可取值 $0, 1, \ldots, n_1$ 和 $0, 1, \ldots, n_2$, 则 Z 可取值$0, 1, \ldots, n_1+n_2$, 得

$$P\{Z=s\}=\sum_{k=0}^{s}P\{X=k,Y=s-k\}$$

离散场合下的卷积公式

$$\boxed{=\sum_{k=0}^{s}P\{X=k\}P\{Y=s-k\}}$$

$$=\sum_{k=0}^{s}C_{n_1}^{k}p^{k}(1-p)^{n_1-k}C_{n_2}^{s-k}p^{s-k}(1-p)^{n_2-(s-k)}$$

$$=p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}\sum_{k=0}^{s}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{s-k}$$

$$=C_{n_1+n_2}^{s}p^{s}(1-p)^{n_1+n_2-s}$$

$$\boxed{X+Y\sim B(n_1+n_2,p)}$$

2.5.1 离散型随机变量的函数

Remark1： 上面公式的推导用到了组合数的性质。

$$\sum_{k=0}^{s} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{s-k} = C_{n_1+n_2}^{s}$$

Remark2： $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$ 这个事实显示了二项分布一个很重要的性质：**两个独立的二项分布，当它们的第二参数相同时，其和也服从二项分布，它的第一参数恰为这两个二项分布第一参数的和。**

- 这性质称为二项分布的再生性(或可加性(additive property))
- 从X, Y的概率意义来看，这结果是非常明显的：X 和Y 分别是 n_1和 n_2重贝努里试验中成功的次数，两组试验合起来，$Z=X+Y$应该就是n_1+n_2重贝努里试验中成功的次数。

Example 3.16 （**泊松分布的可加性**）设随机变量$X \sim \pi(\lambda_1)$, $Y \sim \pi(\lambda_2)$, 且X与Y独立，试证明$Z = X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$

解: 由题意知泊松分布的分布列为

$$P(X = i) = \frac{{\lambda_1}^i}{i!} e^{-\lambda_1}, \qquad P(Y = j) = \frac{{\lambda_2}^j}{j!} e^{-\lambda_2}$$

$Z = X + Y$可取0，1，2……所有非负整数，事件$\{Z = k\}$是如下互不相容事件的并集：

$$\{X = i, Y = k - i\}, i = 0,1, \cdots, k$$

由于X和Y独立，故$P\{Z = k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X = i\} P\{Y = k - i\}$

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{{\lambda_1}^{i}}{i!}e^{-\lambda_1}\right)\left(\frac{{\lambda_2}^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}\right)$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{i}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},k=0,1,\cdots$$

这表明$Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$，结论得证。

Remark 1: 泊松分布具有**可加性**（服从同一类分布的独立随机变量的和的分布仍属于此类分布）

泊松分布的这个性质可以描述为：泊松分布的卷积仍是泊松分布，记为$\pi(\lambda_1)*\pi(\lambda_2)=\pi(\lambda_1+\lambda_2)$。这里的**卷积$*$是指"寻求两个独立随机变量和的分布的运算"**

Remark 2: 这个性质可以推广到有限个独立泊松变量之和的分布计算，即$\pi(\lambda_1)*\pi(\lambda_2)*\cdots*\pi(\lambda_n)=\pi(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$。特别地，当$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$时，有$\pi(\lambda_1)*\pi(\lambda_2)*\cdots*\pi(\lambda_n)=\pi(n\lambda)$

Remark 3: $X-Y$不服从泊松分布

3.5 多维随机变量的函数的分布

练习：设$(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim M(N; p_1, p_2, \dots, p_n), n \geq 3$。试求$Y = X_1 + X_2$的分布

3.5 多维随机变量函数的分布

3.5.3 多维连续型随机变量函数的分布

如果$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$有联合概率密度 $f_X(x_1,\cdots,x_n)$，则

$$F_Y(y_1,y_2,\cdots,y_m)=\underset{C}{\int\cdots\int} f_X(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

这就归结为一个求解n重积分的问题。

下面就一些具体的函数形式求解。

[一]　Z＝X＋Y

[二]　Z＝X/Y

[三]　$Z=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

　　　$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

[一]　Z=X+Y

设（X,Y）的联合分布概率密度为f(x,y)，Z的分布函数为$F_z(z)$，概率密度为$f_z(z)$

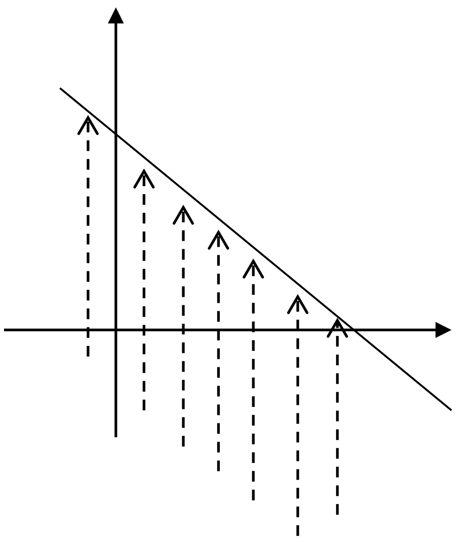
$$F_z(z) = P(Z \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{z-x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$t = y + x$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x)dx \right] dt$$



[一] Z=X+Y的分布函数

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \ =\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

当(X,Y)相互独立时， $f(x,y)= f_X(x)f_Y(y)$

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

这两个公式称为卷积公式(convolution)

$$Z=X+Y \qquad f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

$$Z=X-Y \qquad f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y,y)dy$$

Example 3.17 X,Y独立同分布，都服从N (0,1)，求 Z = X+Y 的分布密度.

解：用卷积公式， 对任意 $z \in \mathbf{R}$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot f_y(z-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2+2x^2-2xz}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2/2+2(x-z/2)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-z/2)^2} dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$t=x-\frac{z}{2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}\sqrt{\pi}\quad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot(\sqrt{2})^2}}$$

这说明 Z=X+Y ~ N (0, 2).

1）更一般地，若X,Y 相互独立，且都服从正态分布 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则 $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ 。本例是其特殊情况，可知正态分布对两个参数都有可加性。

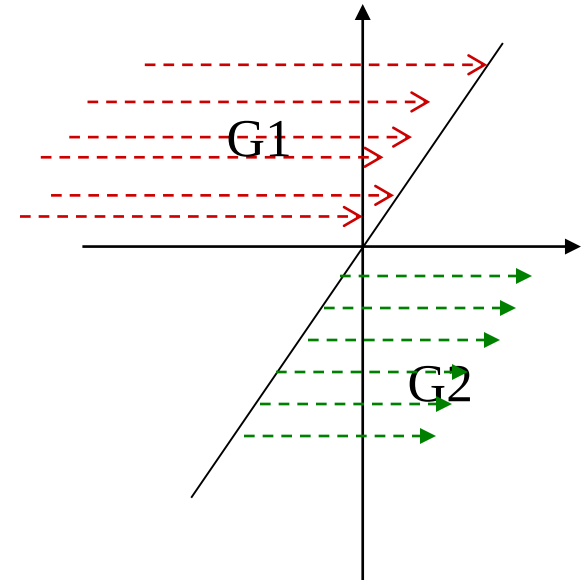
2）反之，若Z服从正态分布，且可以表示成两个独立随机变量之和，如Z=X+Y，则X和Y必然都服从正态分布，这是正态分布的再生性。

3）即使X和Y不独立，若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则Z=X+Y依然服从正态分布，$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$。

4）可加性可以推广到n个独立的正态随机变量上。即：若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，则

$$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N\left(\sum\mu_i,\sum\sigma_i^2\right)。$$

[二] Z=X/Y



$$F_z(z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right)$$

$$= \iint_{\frac{x}{y} \le z} f(x, y)dxdy$$

$$= \iint_{G_1} f(x, y)dxdy + \iint_{G_2} f(x, y)dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x, y)dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x, y)dx$$

$$\boxed{x = yu}$$

[二] Z=X/Y

$$\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$\Big\downarrow \quad x = yu$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)dy + \int_{Z}^{-\infty} du \int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)dy$$

第二部分y＜0

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{0}^{+\infty} yf(yu,y)dy - \int_{-\infty}^{Z} du \int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yu,y)dy$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)dy$$

注意：密度函数不为负

[二] Z=X/Y

对于随机变量 $Z=\frac{X}{Y}$，

$$f_Z(\mathrm{z})=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy$$

类似地，我们可以推导出，对于随机变量 $Z=XY$，

$$f_Z(\mathrm{z})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)dy$$

$$f_Z(\mathrm{z})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

变量换元法

设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$，如果函数

$$u = g_1(x,y), v = g_2(x,y)$$

有连续偏导数，且存在唯一的反函数 $x = h_1(u,v), y = h_2(u,v)$

其变换的雅各比行列式不为0，即

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

则$U = g_1(X,Y), V = g_2(U,V)$的联合密度函数为

$$f_{UV}(u,v) = f\left(h_1(u,v), h_2(u,v)\right)|J|$$

$Z = X/Y$和$Z = XY$

1）记$U = X/Y, V = Y$，则$u = x/y, v = y$

求反函数$x = uv, y = v$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

故 $f_{UV}(u,v) = f(uv,v)|v|$

再对上式关于v积分即可得到Z=X/Y的分布密度函数

2）记$U = XY, V = Y$，则$u = xy, v = y$

求反函数$x = u/v, y = v$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/v & {-u}/{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/v$$

故 $f_{UV}(u,v) = f(u/v,v)\frac{1}{|v|}$

再对上式关于v积分即可得到Z=X/Y的分布密度函数

Example 3.18 X,Y独立同分布，都服从$N(\mu,\sigma^2)$，记U=X+Y, V=X-Y，1）试求U,V的联合概率密度，2）U和V是否独立？

解: 根据题意，随机变量的函数为 $u=x+y, v=x-y$

故其反函数为$x=\frac{1}{2}(u+v), y=\frac{1}{2}(u-v)$

则

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

所以得到U,V的联合概率密度为

$$f_{UV}(u,v)=f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{u+v}{2}\right)f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$f_{UV}(u,v)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{u+v}{2}\right)f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\frac{u+v}{2}-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(\frac{u-v}{2}-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{(u-2\mu)^2+v^2}{4\sigma^2}\}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

这是二维正态分布$N(2\mu,0,2\sigma^2,2\sigma^2,0)$的密度函数，可知$\rho=0$，说明U, V相互独立。

练习：设(X,Y)表示平面上一个点，并假设其直角坐标X和Y是相互独立的标准正态变量，即$X,Y \sim N(0,1)$，求(X,Y)的极坐标表示(R,Θ)的联合分布

[三] 次序量的分布（极值分布）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，联合分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$.
把 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 每取一组值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都按大小次序排列，所得随机变量 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$ 称为次序统计量 (order statistic), 它们满足

$$X_1^* \le X_2^* \le \cdots \le X_n^*$$

因此

$$X_1^* = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$X_n^* = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$Z = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

$$F_z(z) = P\left(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\right)$$

$$= P\left(X_1 \le z, X_2 \le z, \cdots, X_n \le z\right)$$

$$= F(z, z, \cdots, z)$$

如 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立，则有

$$F_z(z) = F_{x_1}(z) \cdots F_{x_n}(z)$$

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，分布函数为$F_x(x)$

$$F_z(z) = \left[F_x(z)\right]^n$$

南開大學 Nankai University

$$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$$

$$F_z(z)=P\left(\min(X_1,\cdots,X_n)\le z\right)$$
$$=1-P\left(\min(X_1,\cdots,X_n)\ge z\right)$$
$$=1-P\left(X_1\ge z,\cdots,X_n\ge z\right)$$

如果 $X_1,\cdots,X_n$ 独立，则有

$$F_z(z)=1-P\left(X_1\ge z\right)P\left(X_2\ge z\right)\cdots P\left(X_n\ge z\right)$$
$$=1-[1-P\left(X_1\le z\right)]\cdots[1-P\left(X_n\le z\right)]$$
$$=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

对于多个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 如有独立同分布 $F_X(x)$，则

$$F_z(z)=1-[1-F_X(z)]^n$$

Nankai University

Example 3.19

设系统 L 由两个相互独立的子系统L_1，L_2连接而成，连接的方式分别为（1）串联；（2）并联；（3）备用（当系统之一损坏时，另一个开始工作）。设L_1，L_2的寿命分别为X,Y，已知他们的概率密度分别服从指数分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

其中$\alpha>0$，$\beta>0$。

求: 三种情况下，系统*L*寿命Z的概率分布。

解:

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

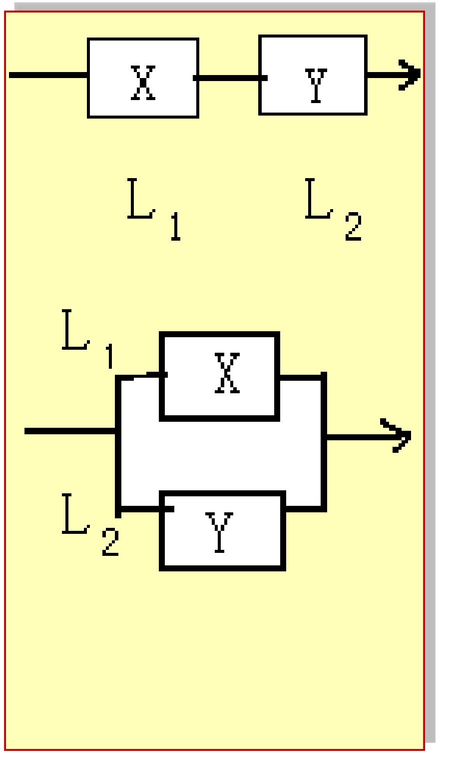
[1] 串联情况

$$Z = \min(X, Y)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_x(z)][1 - F_y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$



[2] 并联情况

$$Z = \max(X, Y)$$

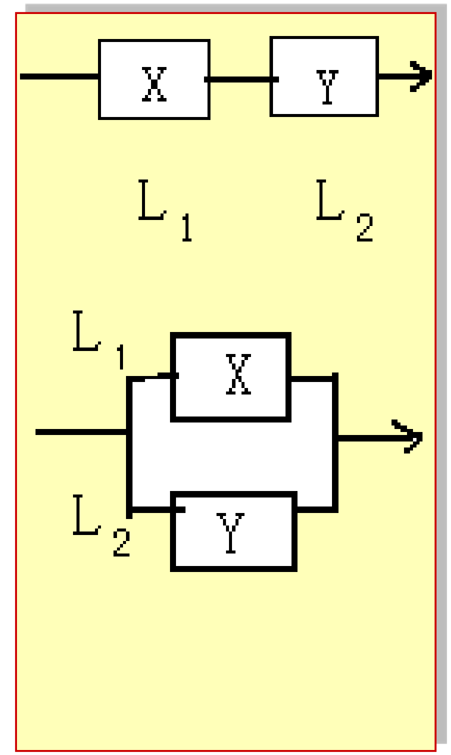
$$F_{\max}(z) = P(Z \le z) = P(\max(X,Y) \le z)$$

$$= P(X \le z, Y \le z)$$

$$= F_x(z) F_y(z)$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta) e^{-(\alpha+\beta) z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$



[3] 备用情况 $Z = X + Y$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y) f_y(y) dy$$

$$= \int_0^z f_x(z-y) f_y(y) dy$$

$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy$$

$$= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy = \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right]$$

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right] & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$

3.5.4 数理统计中几个重要分布

1．Γ分布

对于(α>0, β>0)，如果随机变量X的概率密度满足下式，则称X服从参数为α,β的伽玛分布，记作X~Γ(α, β)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中 $$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du$$

[定理] （Γ分布的可加性）Γ 分布 Γ(α, β) 对第一个参数具有可加性：若X_1, X_2相互独立，$X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\beta)$，$X_2\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$, 则 $X_1+X_2\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$

证 由卷积公式求$Z=X+Y$的密度：当z<0时，f_z(z)=0； 当 z>0 时，

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)dx$$

$$=\int_0^z \frac{1}{\beta^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x/\beta} \frac{1}{\beta^{\alpha_2}\Gamma(a_2)} (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-(z-x)/\beta} dx$$

$$=\frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1} dx$$

$$\Big\downarrow \quad \boxed{x=zt}$$

$$=\frac{e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 z^{\alpha_1-1} t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} z^{\alpha_2-1} z dt$$

$$=\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$$

$$\frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$$

记成为

$$\equiv\!\equiv\!\equiv Az^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}$$

其中 $A=\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt$

现在求A，或者证明 $A=\dfrac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$

注意到

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_z(z)dz=A\int_{-\infty}^{+\infty}z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}dz$$

$$1 = A\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(z/\beta\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta} d\left(z/\beta\right)$$

$$\Big\downarrow \; u = z/\beta$$

$$= A\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-u} du$$

$$= A\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$A = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$f_z(z) = \frac{z^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-z/\beta}}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(a_1+a_2)}$$

所以$X_1+X_2 \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$

Remark 1：此处，我们事实上应该说X_1+X_2还是连续随机变量，而后才能利用$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z)dz = A\int_{-\infty}^{+\infty} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-z/\beta}dz$去推导$A$。

Remark 2：我们说 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$ 是密度函数，需要证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Nankai University

几种特殊情况

[1] 当 α=1时，$\Gamma(1, \beta)$为指数分布.

此时 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} u^{1-1}e^{-u}du=1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}=\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

[2] 另一特殊情况是 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}, 2\right)$

称 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}, 2\right)$ 为参数为n的χ^2分布，记为$X\sim\chi^2(n)$

2. χ^2分布

称 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ 为$\chi^2(n)$分布，其中称n为它的自由度(DOF, degree of freedom). 它的密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

[定理] χ^2分布具有可加性，也就是说，设$X_1\sim\chi^2(n_1)$, $X_2\sim\chi^2(n_2)$，且X_1和X_2独立，则$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$；

χ^2分布是特殊的 Γ 分布，第二个参数相同（都为2），由Γ分布对第一参数的可加性即得χ^2分布的可加性.

[定理] 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，都服从$N(0,1)$，则

$$Y = X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

证 记 $Y_i = X_i^2(i=1,2,\cdots,n)$，由 $\{X_i\}$ 相互独立，可知 $\{Y_i\}$ 相互独立. 直接算得Y_i的密度，

$$f_{Y_i}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}u^{-1/2}e^{-u}du \xlongequal{t=\sqrt{2u}} \sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\pi}$$

$$f_{Y_i}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

故 $Y_i \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2) \sim \chi^2(1)$

再由χ^2分布的可加性质，知道 $X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$

上述定理显示了χ^2分布的本质属性，χ^2分布中的自由度 n 即是 $X_1^2+\cdots+X_n^2$ 中独立正态变量X_i的个数.

谢谢！