第1题答案

(1) 由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

可得

$$\int_{2}^{4} dy \int_{0}^{2} k(6-x-y) = 8k$$

所以$k=\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}(2)\ P\{X<1,Y<3\} &= \int_2^3 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int_2^3\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{8}\int_2^3\left(\frac{11}{2}-y\right)\mathrm{d}y = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

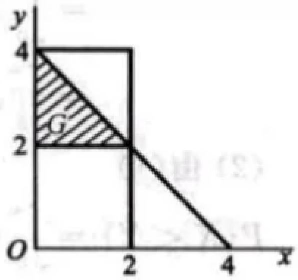
$$\begin{aligned}(3)\ P\{X<1.5\} &= \int_2^4 \mathrm{d}y \int_0^{1.5} \frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=1.5}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{8}\int_2^4\left(\frac{63}{8}-\frac{3}{2}y\right)\mathrm{d}y = \frac{27}{32}.\end{aligned}$$

4 上作直线 $x+y=4$（如题 3.3 图），并记

$$G:\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ 2\leqslant y\leqslant 4-x\},$$

则

$$\begin{aligned}
P\{X+Y\leqslant 4\} &= P\{(X,Y)\in G\}\\
&=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_2^4\mathrm{d}y\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=4-y}\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)(4-y)-\frac{1}{2}(4-y)^2\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{8}\int_2^4\left[2(4-y)+\frac{1}{2}(4-y)^2\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{8}\left[-(4-y)^2-\frac{1}{6}(4-y)^3\right]\Big|_2^4=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$



题 3.3 图

第2题答案

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy=A$，由概率密度积分为1可知，$A=1$。

（2）由于X与Y相互独立，故（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},0\le x\le 1,y>0\\ 0,\qquad \text{其他}\end{cases}$$

于是当 $z<0$ 时，有

$$F(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=0\text{；}$$

当 $0\le z\le 2$ 时，有

$$F(z)=P(2X+Y\le z)=\int_0^{\frac{z}{2}}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})dx\text{；}$$

当 $z>2$ 时，有

$$F(z)=P(2X+Y\le z)=\int_0^{1}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\int_0^{1}(1-e^{2x-z})dx\text{；}$$

利用分布函数法求得 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\le z<2;\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$

第3题答案

(1)

$$P\{X+Y\geq 1\}=1-P\{X+Y<1\}$$

$$=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+\frac{xy}{3}dy)=1-\frac{7}{72}=\frac{65}{72}$$

(2)

(X, Y)关于X的边缘密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=2x^2+\frac{2}{3}x$$

所以，边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(X, Y)关于Y 的边缘密度函数为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$$

所以，边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y, & 0 \le y \le 2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

所以条件密度函数为：

当 $0 \le y \le 2$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{6x^2+2xy}{y+2} & 0 \le x \le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

同理，当 $0 \le x \le 1$ 时，

$$f_{Y|X} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{3x+y}{6x+2}, 0 \le y \le 2 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$$

由上述可以看出，$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$，所以不独立

第4题

解 （1）当 $x \geq 0$ 时，有

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \lim_{y \to +\infty}(1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}) = 1 - e^{-0.5x};$$

当 $x < 0$ 时，有 $F(x,y) = 0$.

所以 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

类似地 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(2) 当 $x > 0, y > 0$ 时，有

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((0.5e^{-0.5y} - 0.5e^{-0.5(x+y)})\right)$$
$$= 0.25e^{-0.5(x+y)}$$

所以 (X,Y) 联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.25e^{-0.5(x+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

相应地其边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5y}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(3) 因为

$$f(x,y) = f(X) \cdot f(Y)$$

所以 X 与 Y 相互独立。

第5题答案

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}(x+y)(-\mathrm{e}^{-(x+y)})\Big|_{y=0}^{y=\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+y)}\Big|_{y=0}^{y=\infty}=\frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x},\quad x>0,$$

故 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理,Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y+1}{2}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$,所以 X,Y 不相互独立.

(2) 由教材第三章公式(5.1)可得 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y,$$

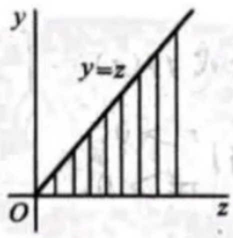
上述被积函数仅当

$$\begin{cases}z-y>0,\\ y>0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}y<z,\\ y>0\end{cases}$$

时才不会等于0,由题 3.24 图得

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f(z-y,y)\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^z \frac{1}{2}(z-y+y)\mathrm{e}^{-(z-y+y)}\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 3.24 图

即有

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^z z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}z^2\mathrm{e}^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

第6题答案

因为X与Y相互独立，所以$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

当 $z<0$ 时， $F_Z(z)=0$

当 $z \geq 0$时，

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{\sqrt{x^2+y^2}\leq z\}=\int\int_{x^2+y^2\leq z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=1-e^{-\frac{z^2}{2}}$$

所以，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2}},z\geq 0\\0,z<0\end{cases}$$

所以其密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}},z\geq 0\\0,z<0\end{cases}$$

第7题答案

解 （1）由

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^1 be^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=b\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right]\left[\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]=b(1-\mathrm{e}^{-1}),$$

得

$$b=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}.$$

$$(2)\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-1}}, & 0<x<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由（2）可知 X和Y相互独立，所以$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)$

其中

$$F_X(u)=\int_{-\infty}^{u}F_X(x)dx=\begin{cases}0,u<0\\ \frac{1-e^{-u}}{1-e^{-1}},0\le u<1\\ 1,u\ge 1\end{cases}$$

$$F_Y(u)=\int_{-\infty}^{u}f_Y(y)dy=\begin{cases}0, & u<0\\ 1-e^{-u}, & u\ge 0\end{cases}$$

所以， U=max{X, Y}的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0,u<0,\\ \frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}},0\le u\le 1,\\ 1-e^{-u},u\ge 1.\end{cases}$$

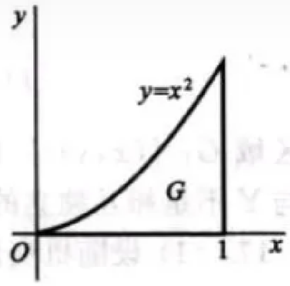
第8题答案

解 (1) 因 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 X 和 Y 相互独立，故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 3.18 图

(2) a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的充要条件为判别式 $\Delta=4X^2-4Y\geqslant 0$，亦即

$$X^2\geqslant Y.$$

而
$$P\{X^2\geqslant Y\}=P\{(X,Y)\in G\},$$

其中 G 由曲线 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成(如题 3.18 图)，即有

$$P\{X^2\geqslant Y\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-y/2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1[-e^{-y/2}]_0^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1[1-e^{-x^2/2}]\mathrm{d}x$$

$$=1-\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]$$

$$=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445.$$

第9题答案

9. 设 X 与 Y 相互独立，且 X 服从 $\lambda=3$ 的指数分布，Y 服从 $\lambda=4$ 的指数分布，试求：

（1）(X,Y) 联合概率密度与边缘概率密度；

（2）$P(X<1,Y<1)$；

（3）(X,Y) 在 $D=\{(x,y)|x>0,y>0,3x+4y<3\}$ 取值的概率。

解（1）依题知

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以 (X,Y) 联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}12e^{-3x-4y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $x>0,y>0$ 时，有

$$F(x,y)=\int_0^x dt\int_0^y 12e^{-3t-4s}ds=(1-e^{-3x})(1-e^{-4y})$$

所以 (X,Y) 联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）$P(X<1,Y<1)=F(1,1)=(1-e^{-3})(1-e^{-4})$；

（3）$P((X,Y)\in D)=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{3-3x}{4}}12e^{-3x-4y}dy=1-4e^{-3}$.

第10题答案

(1) 由题意，平面区域面积为4，所以(X, Y)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, 1\le x\le 3, 1\le y\le 3;\\ 0, \text{其它}\end{cases}$

当 $1\le x\le 3, 1\le y\le 3$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_1^x\int_1^y\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}(1-x)(1-y);$$

当 $1\le x\le 3, y>3$ 时

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_1^x\int_1^3\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{2}(x-1);$$

当$x > 3, 1 \le y \le 3$时，

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = \int_{1}^{3}\int_{1}^{y} \frac{1}{4}dxdy = \frac{1}{2}(y-1);$$

所以（X，Y）的分布函数为

$$F(X,Y) = \begin{cases} 0, & x < 1或y < 1; \\ \frac{1}{4}(1-x)(1-y), & 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3; \\ \frac{1}{2}(x-1), & 1 \le x \le 3, y > 3; \\ \frac{1}{2}(y-1), & y > 3, 1 \le x \le 3; \\ 1, & x > 3, y > 3. \end{cases}$$

(2) 当 $u < 0$ 时，$F_U(u) = P\{U \le u\} = 0$；

当$0 \le u \le 2$时，

$$F_U(u) = P\{U \le u\} = P\{|X-Y| \le u\}$$

$$= \int\int_{|X-Y|\le u} f(x,y)dxdy = \int\int_{D} \frac{1}{4}dxdy = u - \frac{u^2}{4}$$

当 $u \ge 2$ 时，$F_U(u) = P\{U \le u\} = 1$.

所以，随机变量U的分布函数为

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0; \\ u - \frac{u^2}{4}, & 0 \le u \le 2; \\ 1, & u \ge 2 \end{cases}$$

所以变量U的密度函数为

$$f_U(u) = F_U^{'}(u) = \begin{cases} 1 - \frac{u}{2}, & 0 \le u \le 2; \\ 0, & 其他 \end{cases}$$