第二章 插值法

- 在实际问题中，一个函数关系 $y=f(x)$ 常常以数表的形式给出，而不知道它的解析表达式。
- 在数表中，只给出在若干离散点的函数值，但不需要寻找函数关系的一个近似表达式用以计算任一点处的近似值。有可能的话，还要计算导数值、积分值等。
- 寻找这个近似表达式的问题，就是插值问题。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

第一节 引言

- 定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义，且已知在点 $a\le x_0< x_1< \ldots < x_n\le b$ 上的值 y_0，$y_1, \ldots, y_n$，若存在一个简单函数 $p(x)$，使 $p(x_i) = y_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ 成立，则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，点 x_0，$x_1, \ldots, x_n$ 称为插值节点，区间 $[a, b]$ 称为插值区间，求插值函数 $p(x)$ 的方法称为插值方法。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 根据插值函数的性质，有：
- 若 p(x) 是次数不超过 n 的代数多项式，即

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

其中a_i为实数，则 p(x) 称为插值多项式，相应的插值法称为多项式插值（代数插值）

- 若 p(x) 是分段的多项式，则为分段插值
- 若 p(x) 是三角多项式，则称为三角插值

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 要讨论的内容：

如何求出插值多项式、分段插值函数等，讨论插值多项式 $p(x)$ 的存在唯一性、收敛性、误差估计等

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

第二节 拉格朗日插值

- 1 多项式插值问题，就是要确定一个不高于n次的代数多项式：

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

使其在给定的n+1个互异的插值节点上，有：

$$p_n(x_i) = y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)$$

- 问题：这样的多项式是否存在并且唯一呢？

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

定理

- 定理1：设给定n+1个互异的点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 和n+1个函数值 $y_0, y_1, \ldots, y_n$，则在次数不高于n的代数多项式集合中，唯一地存在一个多项式p(x)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (1)$$

它满足条件

$$p(x_i) = y_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

（能描述上述定理的几何含义吗？）

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

定理证明

- 证明：根据插值原则，应让多项式p(x)满足条件（式(2)），得到

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots \\ p(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{3}$$

- 换一种表示形式：

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + x_0 a_1 + \cdots + x_0^n a_n = y_0 \\ p(x_1) = a_0 + x_1 a_1 + \cdots + x_1^n a_n = y_1 \\ \cdots \\ p(x_n) = a_0 + x_n a_1 + \cdots + x_n^n a_n = y_n \end{cases}$$

- 这是一个以$a_0, a_1, \ldots, a_n$为未知数的n+1阶线性方程组，其系数行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & \cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \qquad (4)$$

这是Vandermonde（范德蒙）行列式。

- 利用行列式性质可知：

$$D = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)$$

因为 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 互异，即 $i \neq j$ 时，$x_i \neq x_j$，故有$D \neq 0$，从而线性方程组(3)有唯一的解$a_0, a_1, \ldots, a_n$，即p(x)存在且唯一。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

最简单的情形

- 2 线性插值与抛物插值

由定理1的证明可知，求 $p(x)$ 的过程实际上就是求解线性方程组的过程。但当插值节点很多时，这个方程组非常大，解题计算也会很复杂。

另外，即使求得解，也是一个很长的没有规律的多项式。

问题：有没有可能通过其他的途径方便地得到 $p(x)$？

先从低阶开始讨论，找出规律，再讨论一般情形。

最简单的情形

- n=1的情形

不妨讨论区间$[x_k, x_{k+1}]$，端点处的函数值是

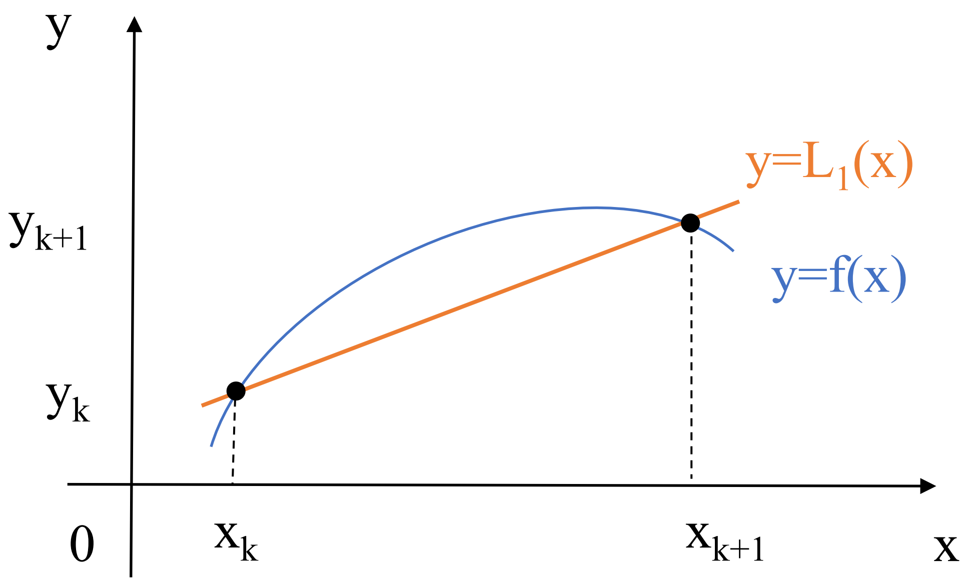
$$y_k = f(x_k),\quad y_{k+1} = f(x_{k+1})$$

按照定义，要求满足插值条件的插值多项式$L_1(x)$，插值条件是：

$$L_1(x_k) = y_k\ ,\quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

（思考：它的几何意义是什么？）

- 使用右图来表示
- n=1时，插值节点数为2，也就是要求一个函数，经过点(x_k, y_k)和(x_{k+1}, y_{k+1})。过两个点的曲线，实际上就是一条**直线**，也就是使用一条直线来近似$f(x)$。$L_1(x)$也就是过(x_k, y_k)和(x_{k+1}, y_{k+1})的直线。



春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- $L_1(x)$的直线方程为：

$$\frac{y-y_k}{y_{k+1}-y_k}=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

（两点式方程）

- 整理得：

$$y=\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}y_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}$$

$$=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}y_k+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}$$

✓虽然形式上复杂了，但其实是有规律的。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

方程式

- L_1(x)=y，设

$$l_k(\mathrm{x}) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}，\quad l_{k+1}(\mathrm{x}) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

则有：

$$L_1(\mathrm{x}) = y_k l_k(\mathrm{x}) + y_{k+1} l_{k+1}(\mathrm{x})$$

如果我们能指出l_k(x) 和l_{k+1}(x)的特点，则上述方程式就找到规律了。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

$l_k(x)$和$l_{k+1}(x)$

- 由表达式：$l_k(x) = \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}$，可知，这是一个关于x的一次方程，也就是一条直线
- 找到直线上的两个互异点，就可以确定这条直线，那么找哪两个点呢？看看$l_k(x)$在讨论区间的两个端点处的值：

$$l_k(x_k) = \frac{x_k-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}=1 \qquad l_k(x_{k+1}) = \frac{x_{k+1}-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}=0$$

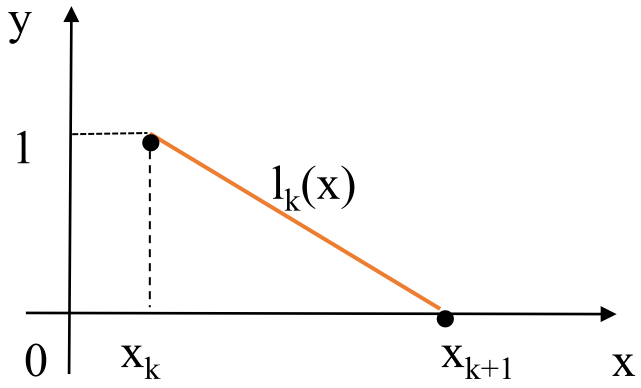
- 类似的，对于$l_{k+1}(x) = \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$，有

$$l_{k+1}(x_k) = \frac{x_k-x_k}{x_{k+1}-x_k}=0 \qquad l_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-x_k}=1$$

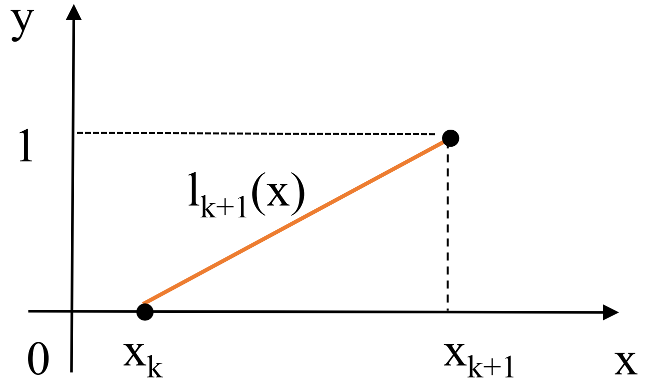
春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

$l_k(x)$和$l_{k+1}(x)$曲线示意

- $l_k(x)$过$(x_k, 1)$和$(x_{k+1}, 0)$这两个点：



- $l_{k+1}(x)$过$(x_k, 0)$和$(x_{k+1}, 1)$这两个点：



春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

基函数

- 称函数l_k(x) 和l_{k+1}(x)为线性插值基函数
- 猜测一下可能的特点：
  - 基函数的个数与插值节点个数相同
  - 插值节点个数为 n 时，基函数的次数是n-1
  - 基函数在特殊的点有特殊的值，具体来说，对于下标一致的节点，函数值为1，下标不一致的节点，函数值为0
  - 插值函数可以表示为插值基函数与函数值的线性组合
- 这是从n=1推导得出的，看看对于其他的次数，是否仍满足

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

通过更高阶的情形进行验证

- n = 2时，则有三个插值节点，分别是 x_{k-1}, x_k, x_{k+1}， 二次插值多项式 $L_2(x)$应满足：

$$L_2(x_j) = y_j \quad j = k-1, k, k+1$$

$y = L_2(x)$ 就是过三点 $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$的抛物线。

采用基函数的方法，设基函数$l_{k-1}(x)$、$l_k(x)$ 和$l_{k+1}(x)$都是二次函数，且满足条件：

$$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1}) = 1 \\ l_k(x_k) = 1 \\ l_{k+1}(x_{k+1}) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_{k-1}(x_j) = 0 \quad j = k, k+1 \\ l_k(x_j) = 0 \quad j = k-1, k+1 \\ l_{k+1}(x_j) = 0 \quad j = k-1, k \end{cases}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

基函数应满足的条件

	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}
$l_{k-1}(x)$	1	0	0
$l_k(x)$	0	1	0
$l_{k+1}(x)$	0	0	1

- 思考：
  - 这样的基函数存在吗？
  - 如果有这样的基函数存在，则二次插值多项式应是什么样子的？

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

存在性

- 判定基函数是否存在，直接找出一个就可以了，以求$l_{k-1}(x)$为例：

$l_{k-1}(x)$在 x_k和x_{k+1}处的值均为0， x_k和x_{k+1}是曲线的两个零点，即曲线过点 $(x_k, 0)$和 $(x_{k+1}, 0)$，所以$l_{k-1}(x)$中含有式子$(x-x_k)(x-x_{k+1})$。另一方面， $l_{k-1}(x)$是二次曲线，所以有：

$$l_{k-1}(x)=A(x-x_k)(x-x_{k+1})$$ A是待定常数

现在使用另一个条件求出常数A。 $l_{k-1}(x)$过 $(x_{k-1}, 1)$点，将x_{k-1}值带入$l_{k-1}(x)$，有： $l_{k-1}(x_{k-1})= A(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})=1$，则

$$A = 1/[(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})]$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 得到： $l_{k-1}(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$
- 用同样的方法，可以求出$l_k(\mathrm{x})$和 $l_{k+1}(\mathrm{x})$

$$l_k(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

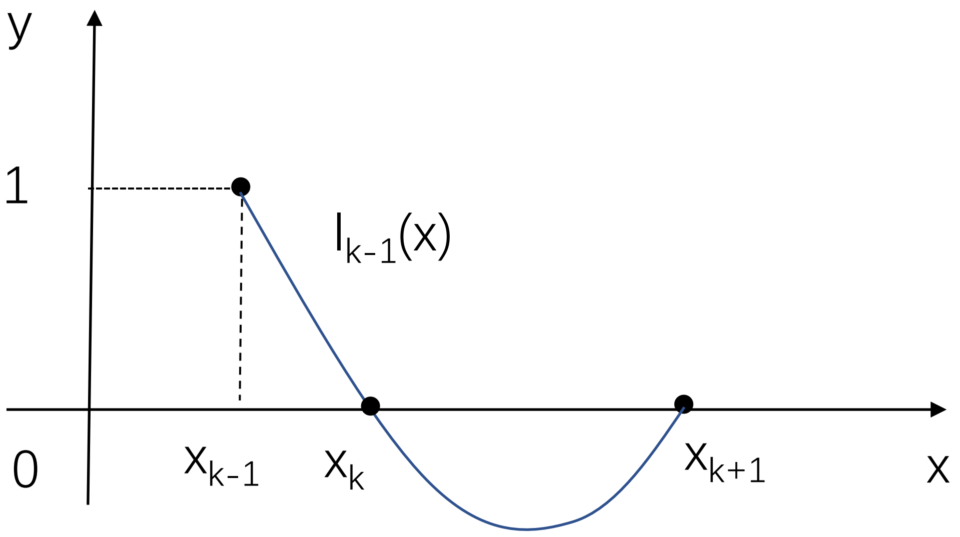
$$l_{k+1}(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

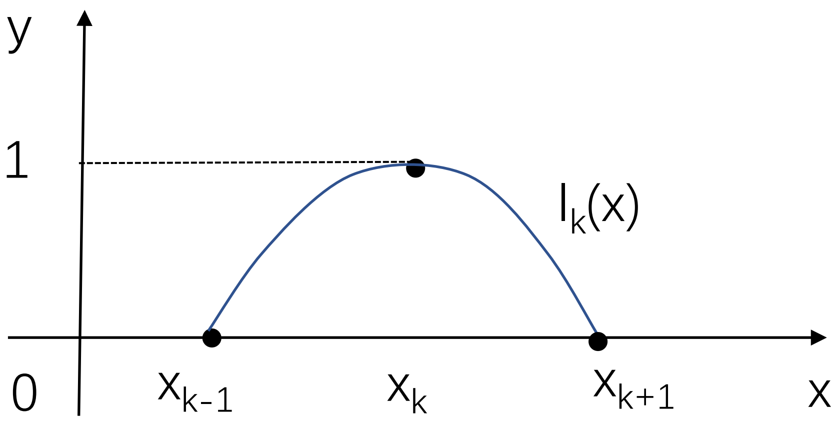
- 由此说明，三个基函数都是存在的。
- n=2时，有三个插值基函数。

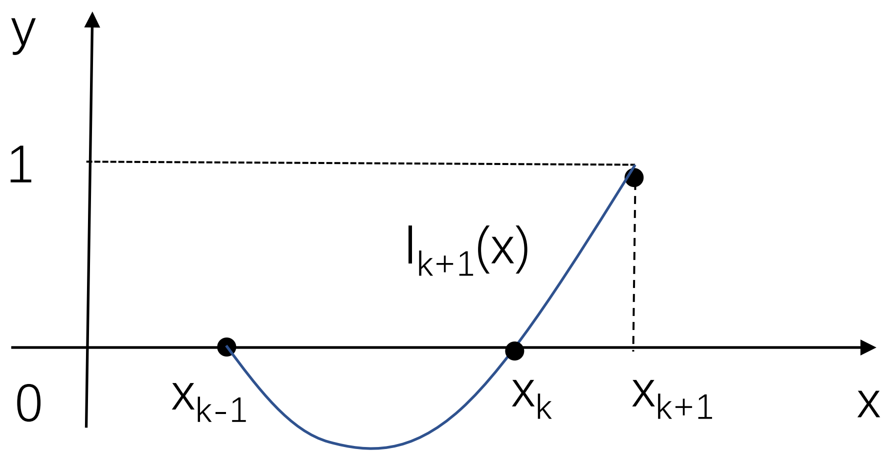
春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

基函数曲线

- 三个基函数的曲线示意如下：







春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

二次插值曲线

- 利用二次插值基函数$l_{k-1}(x)$、$l_k(x)$和$l_{k+1}(x)$，可得：

$$L_2(\mathrm{x}) = y_{k-1}l_{k-1}(\mathrm{x}) + y_k l_k(\mathrm{x}) + y_{k+1}l_{k+1}(\mathrm{x})$$

具体来看：

$$L_2(\mathrm{x}) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})} +$$

$$y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} +$$

$$y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

可以（自行）验证，$L_2(x)$满足插值条件，所以是二次插值多项式。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

推广到一般情形

- 3 拉格朗日插值多项式

拉格朗日插值多项式是对线性插值和抛物插值的推广

定义：若n次多项式 $l_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ 在n+1个节点 $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ 上满足条件：

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k = j \ (j, k = 0,1, \ldots, n) \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

则称这n+1个n次多项式 $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的n次插值基函数。

基函数是否符合之前猜测的若干特点呢？

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 用推导n=1、n=2时插值基函数的类似方法，可求出n次基函数。

令 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k$

l_k(x)（k=0, 1, …, n）为n次代数多项式，且满足条件：

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

由于$l_k(x_i) = 0$ (i≠k)，故可设

$$l_k(\mathrm{x}) = \mathrm{A} \prod_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^{n} (x - x_i)$$

春
已
至

花
已
开

大
地
斑
斓

生
机
盎
然

- 又因 $l_k(x_k) = 1$，可知

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\prod_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^{n}(x_k - x_i)}$$

于是有：

$$l_k(\mathrm{x}) = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad k = 0,1,\dots,n$$

- 代入得：

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right) y_k$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 由此得到

$$l_k(\mathrm{x})=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\quad k=0,1,\ldots n$$

相应地有：

$$L_n(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

- 验证，$L_n(x)$在插值节点的值：

$$L_n(x_j)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j)=y_j$$

可见， $L_n(x)$满足插值条件。

由插值函数的存在唯一性，知，得到的$L_n(x)$即是满足条件的插值函数，称$L_n(x)$为拉格朗日插值多项式。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

形式改写

- 引入记号 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$，求其导数

$$\omega'_{n+1}(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n) + (x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$+\cdots+(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

- 代入x_k，得

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

则有

$$L_n(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}$$

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

误差估计

• 4 插值余项

定义：若在 [a, b] 上用 $L_n(x)$ 近似 f(x)，则其截断误差为

$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$，称为插值多项式的余项

定理：设 $f^{(n)}(x)$ 在 [a, b] 上连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在，节点 $a\le x_0< x_1< \ldots < x_n\le b$。$L_n(x)$是满足条件 $L_n(x_j)=y_j$ $(j=0,1,\ldots,n)$ 的插值多项式，则对任何 $x\in[a, b]$，插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

这里，$\xi\in(a, b)$且依赖于x，$\omega_{n+1}(x)$如前定义。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

证明

- 证明：我们知道，在节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$上，有 $L_n(x_k)=y_k$，也就是有 $R_n(x_k)=0$， $(k=0,1,\ldots,n)$

换句话说， $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是 $R_n(x)$的零点，$R_n(x)$可以表示为：

$$R_n(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = K(x)\omega_{n+1}(x)$$

$K(x)$是与x有关的待定函数。

现在构造一个函数：

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_n)$$

将 t 做为函数的自变量，x认为是常量，是 [a, b] 上一个固定点。

- 由插值条件知，对插值节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$，有

$$f(x_i)= L_n(x_i) \quad (i=0,1,\ldots,n)$$

$\varphi(t)$后面的项 $K(x)(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_n)$，在上述节点的值亦为零，可知，对于$t=x_0, x_1, \ldots, x_n$，有$\varphi(t)=0$

而对于点x，有

$$\varphi(x)= f(x)-L_n(x)- K(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

由余项的定义$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$，又因为$R_n(x) =K(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x)$

所以，　$\varphi(x)= 0$　　　　完美！！！！！！！

因此，对函数$\varphi(t)$，它在[a, b]上有n+2个零点（ $x_0, x_1, \ldots, x_n , x$）。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 根据罗尔(Rolle)定理， $\varphi'(t)$ 在$\varphi(t)$的两个零点之间至少有一个零点，故$\varphi'(t)$ 在区间[a, b]上至少有n+1个零点， $\varphi''(t)$ 在区间[a, b]上至少有n个零点，依此类推， $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在区间[a, b]上至少有1个零点，设 $\xi \in (a, b)$，使$\varphi^{(n+1)}(\xi) =0$

则有

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(x) - K(x)(n+1)!$$ （求$\varphi(t)$的n+1阶导数）

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi) - K(x)(n+1)!=0$$

$$K(x)= f^{(n+1)}(\xi) / (n+1)!$$ $\xi\in(a, b)$且依赖于x

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 将上述式子代入，得：

$$R_n(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = f^{(n+1)}(\xi) / (n+1)!\ \omega_{n+1}(x)$$

- 说明：
  - 证明中，实际上用到了$f^{(n+1)}(x)$，即只有当f(x)的高阶导数存在时，才能应用余项表达式。
  - 对于一个给定的x，有相应的ξ值，而ξ值并不能具体给出。换一个x，可能不有同的ξ值，即ξ值依赖于x。 因为推导过程中把x看作常数！！！
  - 若设 $\max\limits_{a<x<b}|f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$，则有插值多项式$L_n(x)$逼近f(x)的截断误差限是$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

误差

- n=1时，线性插值余项为：

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\,\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\,(x-x_0)(x-x_1)\quad \xi\in[x_0, x_1]$$

- n=2时，抛物插值余项为：

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)\,\omega_3(x)=\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\quad \xi\in[x_0, x_2]$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

示例

- 例1 已知函数y=sin(x)的函数表

x	0.32	0.34	0.36
y	0.314567	0.333487	0.352274

- 用线性插值和抛物插值计算sin 0.3367的值并估计截断误差。
- 解：线性插值，应取两个插值节点，例如，$x_0=0.32$，$x_1=0.34$

由线性插值公式 $L_1(\mathrm{x}) = y_k + \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x - x_k)$

有 $L_1(\mathrm{x}) = y_k + \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x - x_k)$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 代入相关的值，得到

$$sin0.3367 \approx 0.314567 + \frac{0.333487 - 0.314567}{0.34 - 0.32}(0.3367 - 0.32)$$

$$= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02}(0.0167) = 0.330365$$

- 相应地，由截断误差公式：

$$|R_n(\mathrm{x})| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

有 $|R_1(\mathrm{x})| \le \frac{M_2}{2}|\omega_2(x)| = \frac{M_2}{2}|(x - x_0)(x - x_1)|$

$M_2 = \max\limits_{x_0<x<x_1} |f''(x)|$ f(x)=sinx 故f’’(x)=-sinx

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

$$M_2 = \max_{x_0<x<x_1} |sinx| = sinx_1 \le 0.3335$$ (sinx在这个区间是增函数)

$$|R_1(0.3367)| \le \frac{0.3335}{2}|(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)|$$

$$\le 0.92\times 10^{-5}$$

- 线性插值的两个插值节点，也可以取 x_1=0.34 和 x_2=0.36，

甚至取 x_0=0.32 和 x_2=0.36

请自行计算这两种情况下，得到的近似值是多少？误差多大？

与示例中节点的取法相比，误差增大还是减小？能分析原因吗？

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 抛物插值：显然取的点越多，拟合越准确！！！

取三个插值节点：x_0=0.32，x_1=0.34和x_2=0.36

由抛物插值公式有：

$$sin0.3367 \approx y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=0.330374$$

截断误差为：

$$|R_2(\mathrm{x})| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

$$M_3 = \max_{x_0<x<x2} |f'''(x)| = cosx_0 < 0.828$$

$$|R_2(0.3367)| \le \frac{1}{6}0.828 \times 0.0167 \times 0.032 \times 0.0233 < 0.178 \times 10^{-8}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 例： 已知函数 $y=2^x$ 的函数表

x	-2	-1	0	1	2
2^x	0.25	0.5	1	2	4

(1) 试以$x_2=0$, $x_3=1$为插值节点， 建立线性插值多项式$P_1(x)$，用以计算$2^{0.3}$的近似值， 并估计截断误差

(2) 试以$x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$为插值节点， 建立二次插值多项式$P_2(x)$，用以计算$2^{0.3}$的近似值， 并估计截断误差

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 解：(1) 线性插值多项式

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\frac{x-1}{0-1}1+\frac{x-0}{1-0}2=x+1$$

$2^{0.3}\approx P_1(0.3)=0.3+1=1.3$

$f(x)=2^x$ $f'(x)=2^x\ln 2$ $f''(x)=2^x(\ln 2)^2$

$$\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|=2(ln2)^2\le 0.9609$$

截断误差估计

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|=\frac{0.9609}{2}|0.3(0.3-1)|$$
$$=0.09522$$

用$P_1(0.3)=1.3$作为$2^{0.3}$的近似值，只能保证有一位有效数字。？？？？？？？？？怎么看！！

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- (2)抛物插值多项式为：

$$P_2(\mathrm{x}) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}0.5 + \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}1 + \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-1)}2$$

$$=0.25x^2 + 0.75x + 1$$

$2^{0.3} \approx P_2(0.3)=1.248$

$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3$

$$\max_{-1\le x\le 1} |f'''(x)| = 2(ln2)^3 = 0.6660$$

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

- 截断误差为：

$$|R_2(\mathrm{x})| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=0.03030$$

- 用$P_2(0.3)=1.248$作为$2^{0.3}$的近似值，可保证有两位有效数字。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

余项分析

- 使用插值多项式 $P_n(x)$ 近似代替被插值函数 f(x)，总希望余项 $R_n(x)$ 的绝对值小一些：

$$|R_n(\mathrm{x})| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right|$$

- 首先，是$f^{(n+1)}(\xi)$对$R_n(x)$的影响：许多函数的高阶导数绝对值随着阶数的增加而迅速增加，因而，$|R_n(x)|$随着n的增加而迅速增加。

例如：$f(x)=10^x$，有

$$|f^{(n)}(x)| = 10^x(\ln 10)^n=10^x 2.3^n$$

对固定的x，当n增加时，$|f^{(n)}(x)|$ 呈指数增长。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 可见，使用高阶插值是不可取的，在实际应用中，常见的是一、二、三次插值。 为什么？？？

- 再看$\omega_{n+1}(x)$对$R_n(x)$的影响：

$|\omega_{n+1}(x)|$也是$|R_n(x)|$的一个因子，因而越小越好。当插值多项式的次数 n 确定，从而插值节点的个数 n+1 也确定之后，对于给定的 x，$|\omega_{n+1}(x)|$的大小就取决于插值节点的选取。为了使得$|\omega_{n+1}(x)|$尽区间 I_x 的中部可能小一些，插值节点的选取原则是：使 x 尽可能位于I_x 的中部，这里的 I_x 是包含x以及所用节点的最小闭区间。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

第三节 逐次线性插值法

- 用拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$ 计算函数近似值，如果想提高结果精度，一般的方法是增加插值节点。
- 增加节点后，原来计算的结果均不能利用，要重新计算。
- 这种方法也不便于在计算机上实现。
- 因此，对拉格朗日插值方法进行改进，提出逐次分段线性插值方法，其基本思想是：利用低次插值多项式求得高次插值多项式。

- 设插值节点为$x_{i1}, x_{i2},\ldots, x_{in}$，对应这些节点的插值多项式为：(n-1)次$I_{i1\ldots in}(x)$。

记$I_{ik}(x) = f(x_{ik})$，则$I_{ik}(x)$ 是常数值，即零次多项式。构造：

$$I_{01\ldots kl}(x) = I_{01\ldots k}(x) + \frac{I_{01\ldots k-1l}(x)-I_{01\ldots k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k)$$

当i=0,1,…,k-1时，有：

$$I_{01\ldots kl}(x_i) = I_{01\ldots k}(x_i) + \frac{I_{01\ldots k-1l}(x_i)-I_{01\ldots k}(x_i)}{x_l-x_k}(x_i-x_k)$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- $I_{01\ldots k-1l}(x)$是关于节点$x_0, \ldots, x_{k-1}, x_l$的插值多项式，在这些节点上

$$I_{01\ldots k-1l}(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,\ldots,k-1$$

同理， $I_{01\ldots k}(x)$是关于节点$x_0, \ldots, x_k$的插值多项式，同样有

$$I_{01\ldots k}(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,\ldots,k-1$$

所以有：

$$I_{01\ldots kl}(x_i) = I_{01\ldots k}(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,\ldots,k-1$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 当i=k时，（$x=x_k$）

$$I_{01\ldots kl}(x_i)=I_{01\ldots kl}(x_k)=I_{01\ldots k}(x_k)+\frac{I_{01\ldots k-1l}(x_k)-I_{01\ldots k}(x_k)}{x_l-x_k}(x_k-x_k)$$

$$=I_{01\ldots k}(x_k)=f(x_k)$$

- 当$x=x_l$时

$$I_{01\ldots kl}(x_l)=I_{01\ldots k}(x_l)+\frac{I_{01\ldots k-1l}(x_l)-I_{01\ldots k}(x_l)}{x_l-x_k}(x_l-x_k)$$

$$=I_{01\ldots k}(x_l)+I_{01\ldots k-1l}(x_l)-I_{01\ldots k}(x_l)=I_{01\ldots k-1l}(x_l)=f(x_l)$$

- 总之，对节点$x_0, \ldots, x_k, x_l$，均有 $I_{01\ldots kl}(x_i)=f(x_i)\ i=0,1,\ldots,k,l$，即 $I_{01\ldots kl}(x)$满足插值条件。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

$$\mathrm{I}_{01\ldots kl}(\mathrm{x}) = \mathrm{I}_{01\ldots k}(\mathrm{x}) + \frac{\mathrm{I}_{01\ldots k-1l}(\mathrm{x})-\mathrm{I}_{01\ldots k}(\mathrm{x})}{x_l-x_k}(x-x_k)$$

- 式子右侧是k+1个节点的k次插值多项式，左侧构造出k+2个节点的k+1次插值多项式，每次均为线性插值。
- 这个式子称为埃特金（Aitken）逐次线性插值公式。
  - 当k=0时，为线性插值
  - 当k=1时，节点：x_0,x_1,x_l

$$\mathrm{I}_{01l}(\mathrm{x}) = \mathrm{I}_{01}(\mathrm{x}) + \frac{\mathrm{I}_{0l}(\mathrm{x})-\mathrm{I}_{01}(\mathrm{x})}{x_l-x_1}(x-x_1)$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 逐次算出 k=0,1,…,n-1 的插值多项式，计算过程如下：

x_0	$f(x_0)=I_0$					$x-x_0$
x_1	$f(x_1)=I_1$	I_{01}				$x-x_1$
x_2	$f(x_2)=I_2$	I_{02}	I_{012}			$x-x_2$
x_3	$f(x_3)=I_3$	I_{03}	I_{013}	I_{0123}		$x-x_3$
x_4	$f(x_4)=I_4$	I_{04}	I_{014}	I_{0124}	I_{01234}	$x-x_4$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 埃特金插值公式还可以改写为下述形式：

由 $\mathrm{I}_{01\ldots kl}(\mathrm{x})=\mathrm{I}_{01\ldots k}(\mathrm{x})+\frac{\mathrm{I}_{01\ldots k-1l}(\mathrm{x})-\mathrm{I}_{01\ldots k}(\mathrm{x})}{x_l-x_k}(x-x_k)$

l=k+1，结点顺序倒排，有k, …, 0, k+1，则

$$\mathrm{I}_{01\ldots kk+1}(\mathrm{x})=\mathrm{I}_{01\ldots k}(\mathrm{x})+\frac{\mathrm{I}_{1\ldots k+1}(\mathrm{x})-\mathrm{I}_{01\ldots k}(\mathrm{x})}{x_{k+1}-x_0}(x-x_0)$$

这个公式称为列维尔（Neville）算法。计算过程如下：

x_0	$f(x_0)=I_0$					$x-x_0$
x_1	$f(x_1)=I_1$	I_{01}				x_1-x_0
x_2	$f(x_2)=I_2$	I_{12}	I_{012}			x_2-x_0
x_3	$f(x_3)=I_3$	I_{23}	I_{123}	I_{0123}		x_3-x_0
x_4	$f(x_4)=I_4$	I_{34}	I_{234}	I_{1234}	I_{01234}	x_4-x_0

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

第四节 均差与牛顿插值公式

- 在插值计算中，当增加一个节点时，只需在原来的插值多项式中增加一项，原有的项不需要变
- 由此，既可以根据需要增加节点，也可以提高了效率

定义

- 1 均差及其性质

定义：称 $f[x_0,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$ 为函数f(x) 关于点x_0, x_k的一阶均差；

$f[x_0,x_1,x_k]=\frac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$ 称为函数f(x) 的二阶均差；一般地，称

$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_0,\dots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$ 为 f(x) 的k阶均差。

- 均差也称为差商

（通过哪两个k-1阶均差定义一个k阶均差的？规律是什么？）

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 特殊地， $f(x_i)$ 称为 $f(x)$ 关于节点x_i的零阶均差

看几个具体的， $f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$

$$f[x_0, x_1, x_3] = \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2}$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

递推公式

- 在线性插值中，利用点斜式：

$$p_1(x) = f_0 + \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

- 将其推广，有如下形式：

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其中，$a_0, a_1, \ldots, a_n$为待定系数，可由具体插值条件确定。得到如下的递推公式：

$$\begin{cases} p_0(x) \equiv a_0 \\ p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

公式

由：$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

再根据插值条件（即依次将插值节点代入），有

$$y_0=a_0$$

$$y_1=a_0+a_1(x_1-x_0)$$

$$y_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

……

$$y_n=a_0+a_1(x_n-x_0)+a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\cdots+a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

还可以改写为下列形式：(*)

$$\begin{cases} y_0 = p_0\ (x) \equiv a_0 \\ y_k = p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + a_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})\ k = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

根据均差定义，知：

$$a_0 = y_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - p_0(x_2) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{y_2 - y_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f[x_0, x_2]}{(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 现设 $a_{k-1} = f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]$ 成立
- 由前面的递推式 (*)，有

$$y_{k-1} - p_{k-2}(x_{k-1}) = a_{k-1}(x_{k-1}-x_0)(x_{k-1}-x_1)\cdots(x_{k-1}-x_{k-2})$$

$$\frac{y_{k-1}-p_{k-2}(x_{k-1})}{(x_{k-1}-x_0)(x_{k-1}-x_1)\cdots(x_{k-1}-x_{k-2})} = f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]$$

在上式中，以x_k替代 x_{k-1}，有：

$$\frac{y_k-p_{k-2}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-2})} = f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_k]$$

- 由前面的递推式 (*)，有

$$\frac{y_k-p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}=a_k$$

$$a_k=\frac{y_k-p_{k-2}(x_k)+p_{k-2}(x_k)-p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

$$=\frac{y_k-p_{k-2}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}+\frac{p_{k-2}(x_k)-p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

$$=\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_{k-2},x_k]}{(x_k-x_{k-1})}+\frac{p_{k-2}(x_k)-p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

而由$p_k(x)=p_{k-1}(x)+a_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$，有

$$p_{k-1}(x_k)-p_{k-2}(x_k)=a_{k-1}(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-2})$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

$$a_k=\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-2},x_k]}{(x_k-x_{k-1})}-\frac{a_{k-1}(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-2})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

$$=\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-2},x_k]}{(x_k-x_{k-1})}-\frac{a_{k-1}}{(x_k-x_{k-1})}$$

$$=\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-2},x_k]}{(x_k-x_{k-1})}-\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{(x_k-x_{k-1})}=f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$$

由归纳法原理，可知上式对于k=1,2,…,n均成立。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 将a_i代入$p_n(x)$，有n次插值多项式：

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- 称为Newton（均差）插值多项式

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

均差性质

- 性质1：均差与它所含节点的排列次序无关
- 证明：设由n+1个互异节点 x_0，$x_1, \ldots, x_n$ 和函数值$y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$，建立Newton插值多项式$p_n(x)$。现对上述节点任意调换排序次序，设为x_{k0}，$x_{k1}, \ldots, x_{kn}$，相应的函数值为$y_{ki}=f(x_{ki})$ $(i=0, 1, \ldots, n)$。

据此建立 Newton插值多项式，得

$$\widetilde{p_n(x)} = f(x_{k0}) + f[x_{k0}, x_{k1}](x - x_{k0}) + f[x_{k0}, x_{k1}, x_{k2}](x - x_{k0})(x - x_{k1}) + f[x_{k0}, x_{k1}, \ldots, x_{kn}](x - x_{k0})(x - x_{k1}) \cdots (x - x_{kn-1})$$

（思考：$p_n(x)$ 和 $\widetilde{p_n(x)}$各对应项相等吗？）

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

由插值多项式的唯一性，有 $p_n(x) = \widetilde{p_n(x)}$

因而，两个多项式的x^n项的系数应相等，即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{kn}]$$

- 这个性质称为均差的对称性

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_1, x_0, \dots, x_k] = \cdots = f[x_1, x_2, \dots, x_k, x_0]$$

将$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$展开，有

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}$$

均差性质

- 性质2：下列等式成立：

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]) - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

证明：由性质1及均差定义，可知

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}, x_i]$$

$$= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_i] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$

$$= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

• 性质3：若f(x)在[a, b]上存在n阶导数，且节点x_0，x_1, …, $x_n \in$[a, b]，则n阶均差与导数关系如下：

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad \xi \in [a, b]$$

证明：设t是[a, b]上的异于x_0，x_1, …, x_{n-1}的任一点，

以 x_0，x_1, …, x_{n-1}, t 为节点的n次Newton插值多项式为：

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, t](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

由于$p_n(t) = f(t)$ （t是插值节点），所以有:

$$f(t) = p_{n-1}(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, t](t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_{n-1})$$

其中，$p_{n-1}(t)$是满足插值条件$p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ (i=0,1,…,n-1)的关于t的n-1次插值多项式。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 由插值余项公式有：

$$f(t)-p_{n-1}(t)=\frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_{n-1})\quad \tilde{\xi}\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$$

比较得到的两个式子：

$$f(t)=p_{n-1}(t)+f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1},t](t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_{n-1})$$

$$f(t)-p_{n-1}(t)=\frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_{n-1})\quad \tilde{\xi}\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$$

有 $f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1},t]=\frac{f^{(n)}(\tilde{\xi})}{n!}\quad \tilde{\xi}\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$

令$t=x_n$，有$f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\quad \xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 依t而变

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 计算均差可依下表进行：

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- 根据均差表，可计算Newton插值多项式，对角线上的各项，为Newton多项式中的各a_i值。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 2 讨论Newton插值余项

线性插值：

由 $f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，有 $\boldsymbol{f(x)}=\boldsymbol{f(x_0)}+\boldsymbol{f[x,x_0](x-x_0)}$

由一般式 $\mathrm{f}[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]=\frac{\mathrm{f}[x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{i+k}]-\mathrm{f}[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$

有 $\mathrm{f}[x,x_0,x_1]=\frac{\mathrm{f}[x_0,x_1]-\mathrm{f}[x,x_0]}{x_1-x}$

所以有： $\mathrm{f}[x,x_0]=\mathrm{f}[x_0,x_1]+\mathrm{f}[x,x_0,x_1](x-x_1)$

将$\mathrm{f}[x,x_0]$代入$f(x)$的右式中，得到：

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$=\boldsymbol{f(x_0)}+\mathbf{f}[\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{x_1}]\boldsymbol{(x-x_0)}+\mathrm{f}[x,x_0,x_1](x-x_1)(x-x_0)$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 一般情形：

$$f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_n)$$

后一式代入前一式中，有：

$$\begin{aligned}f(x)=\;&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\\&f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\\&f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+\\&f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\\=\;&p_n(x)+R_n(x)\end{aligned}$$

其中$p_n(x)$即是均差插值多项式，余项为

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=f[x,x_0,\ldots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

这个余项公式，对于导数不存在的函数也适用，所以更具一般性。实际上，它和拉格朗日插值余项是等价的。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

示例

春已至

花

- 例：给出f(x)的函数表，求4次Newton插值多项式，并计算f(0.596)的近似值

构造均差表：

x_k(已知)	$f(x_k)$ (已知)	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	五阶均差
X_0 0.4	$f(x_0)$ 0.41075					
X_1 0.55	$f(x_1)$ 0.57815	$f[x_0, x_1]$ 1.11600				
X_2 0.65	$f(x_2)$ 0.69675	$f[x_1, x_2]$ 1.18600	$f[x_0, x_1, x_2]$ 0.28000			
X_3 0.80	$f(x_3)$ 0.88811	$f[x_2, x_3]$ 1.27573	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ 0.19733		
X_4 0.90	$f(x_4)$ 1.02652	$f[x_3, x_4]$ 1.38410	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ 0.03134	
X_5 1.05	$f(x_5)$ 1.25382	$f[x_4, x_5]$ 1.51533	$f[x_3, x_4, x_5]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ -0.00012

$$p_4(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) +$$

$$f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= \cdots = 0.63192$$

$$f(0.596) \approx 0.63192$$

截断误差：

$$|R_4(x)| \approx |f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]\omega_5(0.596)| \leq 3.63 * 10^{-9}$$

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

课堂练习

- 例：给定数表如下：

x	1	2	4	5	6	8
f(x)	0	2	8	12	18	28

试用二次Newton插值多项式计算f(1.5)、f(3.5) 、f(5.8)的近似值，用四次Newton插值多项式计算f(4.8)的近似值。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

第五节 差分与等距节点插值公式

- 当节点有规律分布时，比如等距分布时，插值公式可以简化，计算量也更少
- 1 差分及其性质

设有等距节点，$x_k=x_0+kh$ $k=0,1,\ldots,n$，其中，$h>0$，称为步长。

并已知 $f_k=f(x_k)$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 定义：记号

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

$$\delta f_k = f(x_k + h/2) - f(x_k - h/2) = f_{k+1/2} - f_{k-1/2}$$

分别称为f(x)在x_k处以h为步长的向前差分、向后差分及中心差分，符号Δ、∇、δ分别称为向前差分算子、向后差分算子及中心差分算子。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

m阶差分

- 推广一阶差分的概念，定义二阶差分：

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

- 一般地，m阶差分：

$$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$$

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

算子

- 定义：不变算子I，表示为 $If_k = f_k$

  移位算子E，表示为 $Ef_k = f_{k+1}$

  $$E^{-1}f_k = f_{k-1}$$

- 由向前差分定义及上述定义，可知：

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = Ef_k - If_k = (E - I)f_k$$

$$\Delta = E - I$$

同样地，有$\nabla = I - E^{-1}$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

差分的性质

- 性质1：各阶差分均可用函数值表示

$$\Delta^n f_k = (E - I)^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f_{n+k-j}$$

$$\nabla^n f_k = (I - E^{-1})^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} C_n^j f_{k+j-n}$$

证明：只证$\Delta^n f_k$，对n做归纳法

当n=1时，有 $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$

右式= $C_1^0 f_{1+k-0} - C_1^1 f_{1+k-1} = f_{k+1} - f_k$　式子成立

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

- 假设，n=r时式子成立

则当 n=r+1 时，有

$$\Delta^{r+1} f_k = \Delta^r f_{k+1} - \Delta^r f_k$$

而：
$$\Delta^r f_{k+1} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_r^j f_{r+k-j+1}$$

$$= (-1)^0 C_r^0 f_{r+k-0+1} + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j C_r^j f_{r+k-j+1}$$

$$= f_{r+k+1} + \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} C_r^{j+1} f_{r+k-j}$$

$$\Delta^r f_k = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_r^j f_{r+k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j C_r^j f_{r+k-j} + (-1)^r C_r^r f_{r+k-r}$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j C_r^j f_{r+k-j} + (-1)^r f_k$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 因此，有：

$$\Delta^{r+1}f_k = \Delta^r f_{k+1} - \Delta^r f_k$$

$$= f_{r+k+1} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j+1}C_r^{j+1}f_{r+k-j} - \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j C_r^j f_{r+k-j} + (-1)^r f_k$$

$$= f_{r+k+1} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j+1}(C_r^{j+1}+C_r^j)f_{r+k-j} + (-1)^r f_k$$

$$= f_{r+k+1} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^{j+1}C_{r+1}^{j+1}f_{r+k-j} + (-1)^r f_k$$

$$= \underset{j=0}{f_{r+k+1}} + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j C_{r+1}^j f_{r+k-j+1} + \underset{j=r+1}{(-1)^r f_k} = \sum_{j=0}^{r+1}(-1)^j C_{r+1}^j f_{r+k+1-j}$$

春已至
花已开
大地斑斓
生机盎然

- 性质2：可用各阶差分表示函数值

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \Delta^j f_k$$

- 可用归纳法证明

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 性质3：均差与差分的关系

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k$$

$$f[x_k, \cdots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \qquad (m = 1,2,\cdots,n)$$

- 同理，

$$f[x_k, x_{k-1} \cdots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\nabla^m f_k$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 由$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$，有

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi)$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

• 2 等距节点插值公式

等距节点插值公式分为向前插值公式和向后插值公式。

利用差分与均差的关系（性质3），在Newton均差插值多项式中，将均差替换为差分，并令$x=x_0+th$，可得向前插值公式：

$$N_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

截断误差为：

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\quad \xi\in(x_0,x_n)$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 向前插值公式用于求 x_0 点附近点x的函数f(x)的近似值，如果要求 x_n点附近x的函数值，则有向后插值公式：

$$N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

余项为：

$$R_n(x_0+th)=\frac{t(t+1)\cdots(t+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\qquad \xi\in(x_0,x_n)$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 为计算x的函数近似值，用Newton差分插值公式时，需要构造向前差分表和向后差分表
- 向前差分表

$$\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i)$$

f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
f_3	Δf_3			
f_4				

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 向后差分表

$$\nabla^n f(x_i) = \nabla^{n-1} f(x_i) - \nabla^{n-1} f(x_{i-1})$$

f	∇	∇^2	∇^3	∇^4
f_0	∇f_1	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$	$\nabla^4 f_4$
f_1	∇f_2	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_4$	
f_2	∇f_3	$\nabla^2 f_4$		
f_3	∇f_4			
f_4				

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

示例

- 例：给定数表

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
f(x)	21	25	23	20	21	24

(1)用三次插值多项式计算f(0.7)的近似值

(2)用二次插值多项式计算f(0.95)的近似值

解：由于是等距节点，故可用差分插值公式。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 差分表如下：

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
21	4	-6	5	0	-7
25	-2	-1	5	-7	
23	-3	4	-2		
20	1	2			
21	3				
24					

- (1)三次插值多项式，选四个节点：

$$x_1=0.4,\ x_2=0.6,\ x_3=0.8,\ x_4=1.0$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

$$N_3(x_1+th)=y_1+t\Delta y_1+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1$$

$$=25-2t-\frac{1}{2!}t(t-1)+\frac{5}{3!}t(t-1)(t-2)$$

$$x_1+th=0.4+0.2\mathrm{t}=0.7 \qquad t=1.5$$

$$N_3(0.7)=21.3125 \qquad f(0.7)\approx 21.3125$$

- (2)二次插值多项式，选三个节点：

x_3=0.8, x_4=1.0, x_5=1.2

$$N_2(x_3+th)=y_3+t\Delta y_3+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_3$$

$$x_3+th=0.95 \qquad t=0.75 \qquad f(0.95)\approx 20.5625$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

第六节 埃尔米特插值

- 带导数条件的代数插值
- 前面所讨论的代数插值问题，要求插值多项式 $P_n(x)$ 满足插值条件，这些插值条件仅对节点处的函数值做了约束，因而所得的插值多项式不能全面反映被插值函数f(x)的情形。
- 如果插值条件再增加对节点处导数的限制，则所构造的多项式一定能更好地逼近函数f(x)。
- 假定，函数值与导数值个数相等。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 定义：设在节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$上，

$$y_j = f(x_j) \qquad m_j = f'(x_j) \qquad (j = 0,1,\cdots,n)$$

现要求插值多项式H(x)，满足条件

$$\begin{cases} H(x_j) = y_j \\ H'(x_j) = m_j \end{cases} \quad (j = 0,1,\cdots,n)$$

满足这种条件的插值多项式称为埃尔米特（Hermite）插值多项式。

- 分析：这里给出了2n+2个条件，可唯一确定一个次数不超过2n+1的多项式$H_{2n+1}(x)=H(x)$，其形式为：

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 定理：设n+1个节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 互异，则在次数不高于2n+1的代数多项式集合中，唯一地存在多项式

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1}$$

它满足条件：

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x) = y_j \\ H'_{2n+1}(x) = m_j = y'_j \end{cases} \quad (j = 0,1,\cdots,n) \quad (*)$$

- 证明：存在性，求出具体的H(x)即可

设插值基函数$\alpha_j(x)$和$\beta_j(x)$，$(j=0,1,\cdots,n)$，每个基函数均是不高于2n+1次的多项式，且有

$$\begin{cases}\alpha_j(x_k)=\delta_{jk}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases} & \alpha_j{}'(x_k)=0\\ \beta_j(x_k)=0 & \beta_j{}'(x_k)=\delta_{jk}\end{cases}\quad j,k=0,1,\cdots,n \quad (**)$$

则要求的插值多项式H(x)=H_{2n+1}(x)，可写成

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}[y_j\alpha_j(x)+m_j\beta_j(x)]$$

可以验证，H_{2n+1}(x)满足插值条件(*)。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

猜测并推导

- 以$\alpha_j(x)$为例，想想它应是什么形式的？

因为有： $\alpha_j(x_k)=\delta_{jk}$ 且$\alpha_j'(x_k)=0$，即在 $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ 处，函数值和导数值都为零，说明这些节点是$\alpha_j(x)$的二次零点，所以$\alpha_j(x)$包含$(x-x_i)^2$，$(i\neq j)$，这些因式组合起来的次数是2n次，而$\alpha_j(x)$是2n+1次，所以， $\alpha_j(x)$可以写为：

$$\alpha_j(x)=(a'x+b')(x-x_0)^2\cdots(x-x_{j-1})^2(x-x_{j+1})^2\cdots(x-x_n)^2$$

$$\alpha_j(x)=(a'x+b')[(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)]^2$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

回忆，拉格朗日基函数

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

分母部分是常数，故

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{K}$$

有：$(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)=Kl_j(x)$

代入$\alpha_j(x)$，有

$$\alpha_j(x)=(a'x+b')K^2{l_j}^2(x)=(ax+b)\,l_j^2(x)\quad \text{a, b待定}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 设$\alpha_j(x) = (ax + b)\, l_j^2(x)$，其中$l_j(x)$是拉格朗日插值基函数。

由 $\alpha_j(x)$ 的条件(**)，其在x_j点的函数值为1，代入有

$$\alpha_j(x_j) = (ax_j + b) l_j^2(x_j) = ax_j + b = 1$$

$\alpha_j(x)$在x_j点的导数值为0，求导：

$$\alpha_j'(x) = a\, l_j^2(x) + (ax + b)\, 2l_j(x) l_j'(x)$$

代入x_j点，有$\alpha_j'(x_j) = a\, l_j^2(x_j) + (ax_j + b)\, 2l_j(x_j) l_j'(x_j)$

$$= a + 2l_j'(x_j) = 0$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

得到如下的方程组：

$$\begin{cases} ax_j + b = 1 \\ a + 2l_j'(x_j) = 0 \end{cases}$$

先来看$l_j'(x_j)$的值：

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

等式两边同取对数，

$$\ln l_j(x) = \ln(x-x_0) + \ln(x-x_1) + \cdots + \ln(x-x_{j-1}) +$$
$$\ln(x-x_{j+1}) + \cdots + \ln(x-x_n) -$$
$$\ln[(x_j-x_0)(x_j-x_{j-1}) + \cdots + (x_j-x_{j+1})(x_j-x_n)]$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 两边求导：

$$\frac{l_j'(x)}{l_j(x)}=\frac{1}{x-x_0}+\cdots+\frac{1}{x-x_{j-1}}+\frac{1}{x-x_{j+1}}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}$$

- 代入x_j：

$$l_j'(x_j)=\frac{1}{x_j-x_0}+\cdots+\frac{1}{x_j-x_{j-1}}+\frac{1}{x_j-x_{j+1}}+\cdots+\frac{1}{x_j-x_n}=\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_k}$$

求解：$\begin{cases}ax_j+b=1\\a+2l_j'(x_j)=0\end{cases}$ 得到：$\begin{cases}a=-2l_j'(x_j)\\b=1-ax_j=1+2l_j'(x_j)x_j\end{cases}$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 将a, b代入基函数有：

$$\alpha_j(x) = (ax+b)\, l_j^2(x) = (1-2(x-x_j)l_j'(x_j))l_j^2(x)$$

$$\alpha_j(x) = (1-2(x-x_j)\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{x_j-x_k})\, l_j^2(x)$$

同理可得：

$$\beta_j(x) = (x-x_j)l_j^2(x)$$

存在性得证。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 唯一性：

设有两个多项式$H_{2n+1}(x)$和$\widetilde{H_{2n+1}}(x)$均满足插值条件，设

$$\varphi(x) = H_{2n+1}(x) - \widetilde{H_{2n+1}}(x)$$

则$\varphi(x)$是不高于2n+1次的多项式，对插值节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$，有

$$\varphi(x_i) = 0 \text{ 及 } \varphi'(x_i) = 0 \quad i = 0,1,\ldots,n$$

插值节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$均是$\varphi(x)$的二重根，$\varphi(x)$有2n+2个根，与“$\varphi(x)$是不高于2n+1次的多项式”矛盾，故$\varphi(x) \equiv 0$，

即 $H_{2n+1}(x) = \widetilde{H_{2n+1}}(x)$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

余项

- Hermite插值余项为：

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \quad \xi \in (a, b)\text{且依赖于}x$$

证明提示：构造辅助函数：

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{f(x) - H_{2n+1}(x)}{\omega_{n+1}^2(x)}\omega_{n+1}^2(t)$$

然后利用罗尔定理，即可得证。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 实际应用中，较多使用n=1的情形，即三次Hermite插值。

插值基函数为$\alpha_k(x)$、$\alpha_{k+1}(x)$、$\beta_k(x)$、$\beta_{k+1}(x)$

$$\alpha_k(x) = (1 + 2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2$$

$$\alpha_{k+1}(x) = (1 + 2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2$$

$$\beta_k(x) = (x - x_k)(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2 \qquad \beta_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2$$

相应多项式为：

$$H_3(\mathrm{x}) = y_k\alpha_k(x) + y_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + m_k\beta_k(x) + m_{k+1}\beta_{k+1}(x)$$

余项为：

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2\,(x - x_{k+1})^2$$

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

示例

- 例，求满足$p(x_j)=f(x_j)$ $(j=0,1,2)$ 及$p'(x_1)=f'(x_1)$ 的插值多项式及其余项表达式。

解：给定条件，过$(x_0,f(x_0))$、$(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(2))$点，及满足$p'(x_1)=f'(x_1)$

次数 n=2，m=0，m+n+1=3，H(x)次数不超过3。

$$p(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+$$

$$f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\mathrm{A}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

$$p'(x_1) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0) + A(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$$
$$= f'(x_1)$$

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

余项： $R(x) = f(x) - p(x)$

$$R(x) = k(x)(x - x_0)(x - x_1)^2 (x - x_2)$$ （为什么？）

构造辅助函数：

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - k(x)(t - x_0)(t - x_1)^2 (t - x_2)$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 显然，$\varphi(x_j)=0\ \ (j=0,1,2)\quad \varphi'(x_1)=0\quad \varphi(x)=0$

$\varphi(t)$在(a, b)内有4个零点，$\varphi'(t)$在(a, b)内有3+1个零点，

$\varphi^{(4)}(t)$在(a, b)内有1个零点ξ,

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-4!\,k(x)=0\qquad k(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

余项表达式为：

$$R(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)^2\,(x-x_2)$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 例，给定数表

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
	-1	0	1	2
$f(x_i)$	10	14	16	15
$f'(x_i)$	1		0.1	

求次数不高于5的代数多项式$p_5(x)$，使其满足条件

$$\begin{cases} p_5(x_j) = f(x_j) & (j = 0,1,2,3) \\ p_5'(x_i) = f'(x_i) & (i = 0,2) \end{cases}$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

解：先建立满足条件 $p_3(x_j)=f(x_j)$ $(j=0,1,2,3)$的三次插值多项式 $p_3(x)$，采用Newton均差插值：

$$p_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=10+4(x+1)-(x+1)(x-0)-\frac{1}{6}(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$=14+\frac{19}{6}x-x^2-\frac{1}{6}x^3$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 再设 $p_5(x) = p_3(x) + (ax+b)(x+1)x(x-1)(x-2)$

由$\begin{cases} p_5'(-1) = p_3'(-1) + (-a+b)(-6) = 1 \\ p_5'(1) = p_3'(1) + (a+b)(-2) = 0.1 \end{cases}$

得: $\begin{cases} (-a+b) = \dfrac{11}{18} \\ (a+b) = \dfrac{17}{60} \end{cases}$ $\begin{cases} a = -\dfrac{59}{360} \\ b = \dfrac{161}{360} \end{cases}$

$$p_5(x) = 14 + \frac{19}{6}x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{360}(161-59x)x(x^2-1)(x-2)$$

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

第七节 分段低次插值

- 提出的背景：并非多项式次数越高，近似f(x)的精度就越高。对任意的插值节点，当$n\to\infty$时，$L_n(x)$不一定收敛于f(x)。
- 没有必要追求插值区间上的统一多项式。

1 分段线性插值

分段线性插值，从几何意义上看，就是用折线逼近曲线。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 定义：设f(x)是区间[a, b]上的函数，在节点$a=x_0< x_1< \ldots < x_n=b$上的函数值为：$f_0, f_1, \ldots, f_n$，记$h_k = x_{k+1} - x_k$，$h = \max\limits_{k} h_k$

如果函数I_h满足

(1) $I_h \in C[a,b]$ （连续函数的集合）

(2) $I_h(x_k) = f_k \quad (k = 0,1,\ldots,n)$

(3) 在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上，I_h是线性函数，

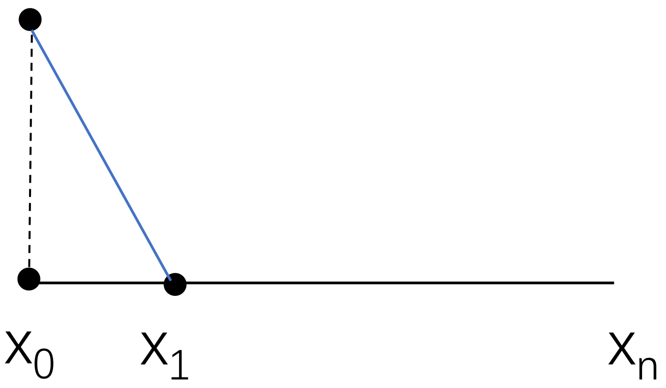
则称I_h为分段线性插值函数。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 先看最简单的情形：$f_j = \delta_{ij} \quad j = 0, 1, \dots, n$
- 记相应的分段线性插值函数为$l_{h,i}$，
- 当i=0时，

$$l_{h,0}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \in (x_1, x_n] \end{cases}$$

- 画出它的示意图：

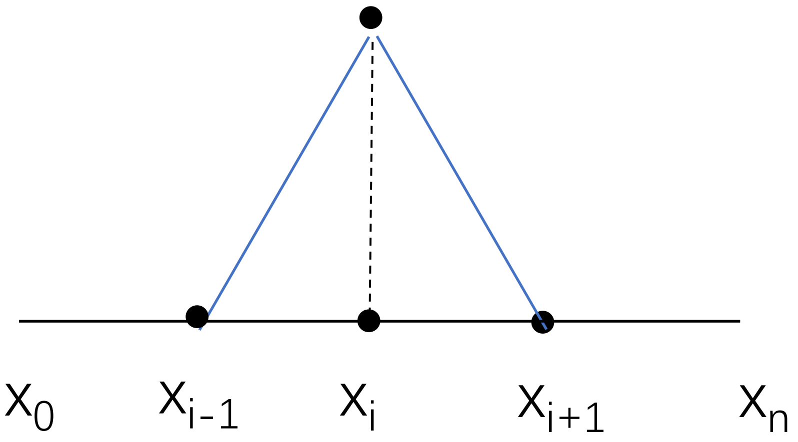


春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 当i=1,2,…,n-1时，

$$l_{h,i}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in(x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

- 画出它的示意图：

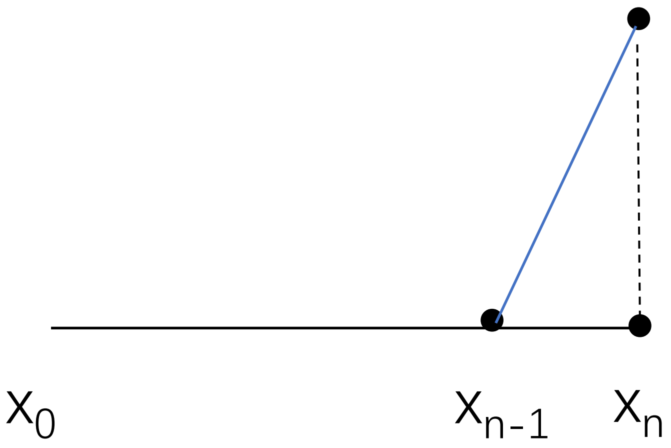


春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 当i=n时，

$$l_{h,n}(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_{n-1}) \\ \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

- 画出它的示意图：



春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 定义：上面三式中定义的分段线性函数$l_{h,0}(x), l_{h,1}(x), \dots, l_{h,n}(x)$，称为以$x_0, x_1, \dots, x_n$ 为节点的分段线性插值基函数。

  则分段线性插值函数I_h是基函数的线性组合：

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_{h,i}(x)$$

简记：$l_{h,i}(x)$ 为$l_i(x)$

- $I_h(x)$在区间$[x_k, x_{k+1}]$的值为：（两点式方程）

$$I_h(x) = \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} f_k + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} f_{k+1} \quad (x_k \le x \le x_{k+1})$$

可以证明，当$h\rightarrow 0$时，$I_h(x)$在区间[a, b]上一致收敛到f(x)（略）。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

2 分段三次埃尔米特插值

分段线性插值函数在节点处的导数不存在，即导数不连续。如果需要插值函数在节点处也可导，并且在节点处除了给出函数值外，还提供了导数值，则可进行分段埃尔米特插值。

三次Hermite插值多项式

- 定义：设函数f(x)在节点$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$上的函数值为：$f_0$, f_1, …, f_n，导数值 $f_k' = m_k$ (k=0, 1, …, n)，如果函数I_h满足

(1) $I_h \in C'[a, b]$ （一阶导数连续的函数集合）

(2) $I_h(x_k) = f_k \quad I_h'(x_k) = f_k' \quad (k = 0,1, \ldots, n)$

(3) 在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上，I_h是次数不高于3的多项式，

则称I_h是f的分段三次埃尔米特插值函数。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

考虑两种简单的情形

- 情形1：

设 $f_j = \delta_{jk}\ f_j' = 0 \quad j = 0,1, \dots, n$

此时，分段三次Hermite插值函数为α_i，

当i=0时

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} \left(1 + 2\,\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \in (x_1, x_n] \end{cases}$$

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

当i=1,2,…,n-1时

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 & x\in(x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

当i=n时

$$\alpha_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_{n-1})\\ \left(1+2\frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}\right)\left(\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\right)^2 & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

春已至

花已开

大地斑斓

生机盎然

- 情形2：

设 $f_j = 0 \;\; f_j' = \delta_{jk} \quad j = 0,1,\dots,n$

此时，分段三次Hermite插值函数为β_i，

当i=0时

$$\beta_0(x) = \begin{cases} (x - x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & x \in (x_1, x_n] \end{cases}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

当i=1,2,…,n-1时

$$\beta_i(x)=\begin{cases}(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 & x\in[x_{i-1},x_i]\\ (x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 & x\in(x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

当i=n时

$$\beta_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,x_{n-1})\\ (x-x_n)\left(\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\right)^2 & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

- 定义：如上定义的分段三次函数 $\alpha_i(x)$ 和$\beta_i(x)$ $(0 \le i \le n)$ 称为以x_0, x_1, …, x_n为节点的分段三次Hermite插值基函数，则分段三次Hermite插值函数I_h为基函数的线性组合：

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^{n}[f_i\alpha_i(x) + f_i{}'\beta_i(x)]$$

在区间$[x_k, x_{k+1}]$上，

$$I_h(x) = f_k\alpha_k(x) + f_k{}'\beta_k(x) + f_{k+1}\alpha_{k+1}(x) + f_{k+1}{}'\beta_{k+1}(x)$$

- 若f(x) $\in C^4[a,b]$，则其余项R_n为：

$$|R_h(x)| = |f(x) - I_h(x)|$$

$$\le \frac{1}{4!}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)| \max_{x_k\le x\le x_{k+1}}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

定理：设f(x) $\in C'[a,b]$，则当h→0时， $I_h(x)$一致收敛到f(x)（略）。

春
已
至

花
已
开

大
地
斑
斓

生
机
盎
然

第八节 三次样条插值

- 样条插值也是用分段低次多项式去逼近函数，在分段多项式插值中，分段线性插值函数在节点处不可导，分段三次Hermite插值函数有连续一阶导数。但如此光滑程度常不能满足物理问题的需要，还要求提供各个节点处的导数值，而通常给出的数据是函数值。
- 样条插值则能较好地适应对光滑性的不同要求（这并不意味着插值函数与被插函数在包括节点的许多点有相同的导数），并且只需在插值区间端点提供某些导数信息。
- 样条插值是用样条函数去逼近函数，实际应用中，三次样条函数最常用。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 1 三次样条函数

定义：若函数$S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，其中， $a=x_0< x_1< \ldots < x_n=b$ 是给定节点，则称S(x)是节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的三次样条函数。

若在节点x_j上给定函数值$y_j=f(x_j)$ $(j=0,1,\ldots,n)$，并成立

$$S(x_j)= y_j \quad (j=0,1,\ldots,n) \qquad (*)$$

则称S(x)为三次样条插值函数。

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 分析：由定义，关于S的可供利用的条件有4n-2个：
  - 其中插值条件有n+1个（$S(x_i)= f(x_i)$　(i=0,1,…,n)）
  - 由$S(x) \in C^2[a,b]$，节点处的连续性条件有3n-3个：$S(x_j-0)=S(x_j+0)$，$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$，$S''(x_j-0)=S''(x_j+0)$　(i=1,2,…,n-1)
- 而S是由n段次数≤3的多项式组成，共有4n个待定参数。因此，为了确定S，还需要2个条件，通常是在区间[a, b]的端点$a=x_0$，$x_n=b$上各附加一个条件。
- 在区间端点上的条件称为边界条件。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然

春已至 花已开 大地斑斓 生机盎然

- 常见的附加边界条件有三种，并由此提出相应的三个类型的插值问题。
- 问题I：求满足(*)的三次样条插值函数S(x)，同时适合附加边界条件：

$$S'(x_0)=f_0' \quad (f_0'=f'(x_0))$$

$$S'(x_n)=f_n' \quad (f_n'=f'(x_n))$$

如此边界条件称为固定边界条件。

- 问题II：求满足(*)的三次样条插值函数S(x)，同时适合附加边界条件：

$$S''(x_0)=f_0'' \quad (f_0''=f''(x_0))$$

$$S''(x_n)=f_n'' \quad (f_n''=f''(x_n))$$

其特殊情况$S''(x_0)= S''(x_n)=0$

称为自然边界条件，适合自然边界的样条称为自然样条。

• 问题III：求三次样条插值函数S(x)，使之满足节点条件：

$$S(x_i)= f_i \quad (f_i =f(x_i)) \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

及边界条件$S(x_0)= S(x_n)= f_0 \quad (f_0 =f(x_0))$

$$S^{(k)}(x_0+0)= S^{(k)}(x_n-0) \quad k=1,2$$

这是周期型问题，所寻求的样条S(x)称为周期样条。

春已至　花已开　大地斑斓　生机盎然