第五章 函数逼近

风月同天 风雨同舟

- 给定条件，求满足这些条件的方程，通常有插值法（第三章介绍），及本章要介绍的函数逼近。
- 用简单函数p(x)去近似一个给定在区间[a, b]上的连续函数f(x)，是函数逼近要研究的问题。
- 函数逼近分两类，一是求解连续函数情况下，二是求解离散点情况下。

第二节 函数的最佳平方逼近

风月同天

风雨同舟

- 设函数组$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 都是[a, b]上的连续函数，并在[a, b]上线性无关，以此函数组为基底，生成空间C[a, b]的一个子空间

$$H_n=\mathrm{Span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$$

则H_n中的任一个元素为：

$$p(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)$$

- 对空间C[a, b]中的任意两个函数 f 和 g，定义内积

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

其中，ρ(x)是[a, b]上的一个权函数。

风月同天

风雨同舟

- 定义：对于给定的函数f(x)∈C[a, b]，若$p^*(x) \in H_n$，满足

$$(f-p^*, f-p^*) = \min_{p\in H_n}(f-p, f-p)$$

则称$p^*(x)$为子空间H_n中对于f(x)的最佳平方逼近元素。

- 特别地，如果$\varphi_j(x)=x^j$，j=0,1,…,n，则满足上述条件的$p^*(x) \in H_n$，可称为函数f(x)在区间[a, b]上带权ρ(x)的n次最佳平方逼近多项式。

- 注：定义中是对于所有的元素求其中最小的一个，无穷集之中如何验证是最小值？穷举法是不可行的。

风月同天

风雨同舟

- 定理：设$f(x) \in C[a, b]$，$p^*(x) \in H_n$是子空间H_n中对于$f(x)$的最佳平方逼近元素的充分必要条件是

$$\left(f - p^*, \varphi_j\right) = 0 \quad j=0,1,\ldots,n$$

或对任一个$p(x) \in H_n$，总有$(f - p^*, p) = 0$

证明：必要性，用反证法

设存在一个函数$\varphi_k(x) \in H_n$，使得 $(f - p^*, \varphi_k) = \tau_k \neq 0$

令$q(x) = p^*(x) + \frac{\sigma_k}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k$

风月同天

风雨同舟

- 首先，可知$q(x)\in Hn$，（ $p^*(x)\in H_n$且$\varphi_k(x)\in H_n$ ）

（将q的值代入）利用内积性质，得到：

$$(f-q, f-q) = (f-p^*, f-p^*) - \frac{2\tau_k}{(\varphi_k,\varphi_k)}(f-p^*,\varphi_k) + \frac{\tau_k^2}{(\varphi_k,\varphi_k)^2}(\varphi_k,\varphi_k)$$

$$= (f-p^*, f-p^*) - \frac{\tau_k^2}{(\varphi_k,\varphi_k)} < (f-p^*, f-p^*)$$

这表明，$p^*(x)$ 不是最佳平方逼近元素，矛盾。

风月同天

风雨同舟

风月同天

风雨同舟

- 充分性，设$\left(f-p^{*},\varphi_{j}\right)=0$ (j=0,1,…,n) 成立，

  对任意的 p(x) ∈H_n，有

$$(f-p,f-p)=(f-p^{*}+p^{*}-p,f-p^{*}+p^{*}-p)$$

$$=(f-p^{*},f-p^{*})+2(f-p^{*},p^{*}-p)+(p^{*}-p,p^{*}-p)$$

由于$(f-p^{*},p^{*}-p)=\left(f-p^{*},\sum_{j=0}^{n}(c_j^{*}-c_j)\varphi_j\right)$

$$=\sum_{j=0}^{n}(c_j^{*}-c_j)\left(f-p^{*},\varphi_j\right)=0$$

$$(p^{*}-p,p^{*}-p)\geqslant 0$$

所以，$(f-p,f-p)\geqslant(f-p^{*},f-p^{*})$，因而$p^{*}(x)$是$H_n$中对于f(x)的最佳平逼近元素。

风月同天 风雨同舟

- 定理：设$f(x)\in C[a, b]$，则在子空间H_n中对于$f(x)$的最佳平方逼近元素是唯一的。
- 证明：假设 $p(x)$、$q(x)$都是H_n中对于$f(x)$的最佳平方逼近元素，则根据前一定理（第二个表示），有

$$(f-p,p-q)=(f-q,p-q)=0$$

因而 $$(p-q,p-q)=(p-f+f-q,p-q)$$

$$=(p-f,p-q)+(f-q,p-q)=0$$

可知，在区间[a, b]上有 $p(x)\equiv q(x)$

求最佳平方逼近元素的方法

风月同天 风雨同舟

- 求最佳平方逼近元素 $p^*(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k^*\varphi_k(x)$，就是求它所含的系数$c_k^*$ $(\mathrm{k}=0,1,\ldots,\mathrm{n})$

因为 $\left(f-p^*,\varphi_j\right)=\left(f,\varphi_j\right)-\sum_{k=0}^{n}c_k^*(\varphi_k,\varphi_j)$

由充要条件： $\left(f-p^*,\varphi_j\right)=0$

故有 $\sum_{k=0}^{n}c_k^*(\varphi_k,\varphi_j)=\left(f,\varphi_j\right)$ $j=0,1,\ldots,\mathrm{n}$

这是一个以c_0^*、c_1^*、 …、 c_n^*为未知数的n+1阶线性方程组，称为法方程组，或正规方程组。

- 法方程组的系数矩阵是：

$$G=\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}$$

风月同天

风雨同舟

示例

- 例，定义内积 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，

试在H_1=Span{1, x}中寻求对于$f(x)=\sqrt{x}$的最佳平方逼近元素

- 解：$\varphi_0(x)=1$， $\varphi_1(x)=x$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1dx=1$ $(\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

$(\varphi_0,f)=\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$ $(\varphi_1,f)=\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{2}{5}$

- 法方程组为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

解得：$c_0=4/15$　$c_1=12/15$

所求的最佳平方逼近元素为

$p(x)=4/15+12/15x \quad 0\leq x \leq 1$

第三节 曲线拟合的最小二乘法

- 已知有一组数据(x_i, y_i) $(i=0,1,\ldots,m)$，欲建立关系 $y=F(x)$
- 使用离散点建立函数关系还有插值法，它有特定的要求，区别于这里介绍的方法。
- 这里并不要求 $y=F(x)$ 经过所有的点(x_i, y_i)，而要求在给定值x_i，其误差 $\delta_i=F(x_i)-y_i$ $(i=0,1,\ldots,m)$ 满足某种条件，例如按某种标准最小。

- 定义：对给定的一组数据（x_i, y_i）（i=0,1,…,m），要求在函数类 $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$中找一个函数y=S*(x)，使误差平方和

$$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} [S^*(x_i) - y_i]^2$$

$$= \min_{S(x)\in\varphi} \sum_{i=0}^{m} [S(x_i) - y_i]^2$$

这里， $S(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) \quad (n < m)$

此即是曲线拟合的最小二乘法。

风月同天

风雨同舟

- 一般地，S(x)的形式要依所研究的问题的运动规律及所得到的观测数据而确定。
- 若$\varphi_k(x)$ 是k次多项式，则S(x)就是n次多项式。
- 推广最小二乘法：

$$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \omega(x_i)[S^*(x_i) - f(x_i)]^2$$

这里，$\omega(x) \geq 0$ 是[a, b]上的权函数。

风月同天

风雨同舟

- 记 $(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)$

$$(f,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}\omega(x_i)f(x_i)\varphi_k(x_i)\equiv d_k \quad k=0,1,\ldots,n$$

则可得到

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j\equiv d_k \quad k=0,1,\ldots,n$$

称为法方程组，可写成矩阵形式： Ga=d

其中，$a=(a_0,a_1,\ldots,a_n)^T$，$d=(d_0,d_1,\ldots,d_n)^T$，

$$G=\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}$$

风月同天

风雨同舟

- 由于$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$线性无关，故上述方程组存在唯一解

$$a_k = a_k^* \quad (k=0,1,\ldots,n)$$

- 从而得到函数f(x)的最小二乘解为：

$$S^*(x) = a_0^*\varphi_0(x) + a_1^*\varphi_1(x) + \cdots + a_n^*\varphi_n(x)$$

风月同天

风雨同舟

示例

风月同天

风雨同舟

- 例：已知数据

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	4.5	6	8	8.5
ω_i	2	1	3	1	1

- 解：由对初始数据的分析得知，这些点位于一条直线附近，故以一次方程作拟合曲线。

$$S_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$\varphi_0(x)=1$，　$\varphi_1(x)=x$

风月同天　风雨同舟

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_0\varphi_0=\sum_{i=0}^{4}\omega_i=8$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_0\varphi_1=\sum_{i=0}^{4}\omega_i\varphi_1=22$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i\varphi_1\varphi_1=\sum_{i=0}^{4}\omega_i x_i^2=74$$

$$(\varphi_0,f)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i y_i=47$$

$$(\varphi_1,f)=\sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i y_i=145.5$$

得到法方程组为： $\begin{pmatrix}8 & 22\\ 22 & 74\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47\\ 145.5\end{pmatrix}$

解为： $\begin{cases}a_0=2.5648\\ a_1=1.2037\end{cases}$

课堂习题1

- 定义内积 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

在 H=Span$\{1, x^2, x^4\}$ 中，求对于$f(x)=|x|$ 的最佳平方逼近元素。

风月同天

风雨同舟

课堂习题2

- 已知数据表如下：

x_i	1	7	13	20	26
y_i	1.0	14.3	31.0	55.3	79.8

使用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的近似公式。

风月同天

风雨同舟