

第四章 数值积分方法

- 在科学与工程计算中，常常会遇到积分值的计算。
- 本章主要讨论一元函数的积分：

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

- 在大多数情况下， f 的原函数不易求出，而且在一些计算问题中， $f(x)$ 的值是通过列表给出的。在这些情况下，积分的近似数值计算有很重要的意义。

- 容易想到，利用一个函数序列 $\{f_1, f_2, \dots\}$ 逼近 f ，再把

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx$$

作为 $I(f)$ 的一个近似值。误差为：

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx$$

可以作出一般的估计：

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty$$

f_n 常常取为 f 的插值多项式或分段插值函数。

- 现设 $[a, b]$ 上节点 x_0, x_1, \dots, x_n , f_n 是这些节点上 f 的某种形式的插值多项式, 则通过积分可以得到

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

称 x_j 为求积节点, A_j 为求积系数。

- 计算积分近似值的公式, 都有共同的形式, 就是用 $f(x_0)$ 、
 $f(x_1)$ 、...、 $f(x_n)$ 的某种线性组合作为积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值。

几个简单的公式

- 设 $[a, b]$ 上有节点 $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$, 节点把 $[a, b]$ 分成 n 个子区间 $[x_{j-1}, x_j]$ ($j=1, 2, \dots, n$)。每个子区间上积分用 $f(x_{j-1})(x_j-x_{j-1})$ 近似, 有:

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1})$$

这称为复合的**左矩形公式**。

当每个子区间长度趋于零时, 有 $I_n(f) \rightarrow I(f)$

类似地, 也可以构造复合的**中矩形公式**:

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)$$

也可以有复合的**右矩形公式**。

第一节 梯形公式与Simpson公式

1 梯形公式

要计算积分 $I(f)$ ，一个简单的方法是用 $[a, b]$ 上线性插值函数近似 f 。设插值节点为 a 和 b ，可得到 f 的线性插值函数：

$$f_1(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

对 $f_1(x)$ 积分，得：

$$I_1(f) = \int_a^b f_1(x)dx = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$

—————梯形公式

用 $I_1(f)$ 近似 $I(f)$ 的几何意义：用梯形面积近似曲面梯形面积。

误差

- 线性插值的误差为：

$$f(x) - f_1(x) = f[x, a, b](x - a)(x - b)$$

现设 $f \in C^2[a, b]$ ，则积分误差

$$\begin{aligned} E_1(f) &= I(f) - I_1(f) = \int_a^b [f(x) - f_1(x)] dx \\ &= \int_a^b f[x, a, b](x - a)(x - b) dx \end{aligned}$$

积分的预备知识:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad g(x) \text{ 不变号且可积}$$

再看: $\int_a^b f[x, a, b](x-a)(x-b)dx$, $(x-a)(x-b)$ 在 $[a, b]$ 上总是非正的 (不变号), 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使

$$E_1(f) = f[\xi, a, b] \int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

由均差的性质3, $f[\xi, a, b] = \frac{f''(\eta)}{2}$ 其中 $\eta \in [a, b]$

则得到: $E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{f''(\eta)}{2}$ 其中 $\eta \in [a, b]$

2 Simpson公式

用二次插值多项式逼近 f ，插值节点为： $x = a, b$ 和 $c = (a + b)/2$ ，
得

$$f_2(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b)$$

对 $f_2(x)$ 积分，得

$$I_2(f) = \int_a^b f_2(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

————Simpson积分公式/抛物线公式

- 讨论抛物线公式的误差：

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = \int_a^b f[x, a, c, b](x-a)(x-c)(x-b)dx$$

现设 $f \in C^4[a, b]$ ，则可得出Simpson公式的误差表达式为：

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \frac{f^{(4)}(\eta)}{2} \quad \text{其中 } \eta \in [a, b]$$

- 例，设 $[a, b] = [0, 2]$ ，则梯形公式和Simpson公式分别为

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(0) + f(2)$$

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

选择几个初等函数进行计算，见下表：

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
积分准确值	2	2	2.67	4	6.4	6.389
梯形公式	2	2	4	8	16	8.389
Simpson公式	2	2	2.67	4	6.67	6.421

- 梯形公式对 $f(x) = 1$ 和 $f(x) = x$ 都是精确的，由此可得到梯形公式对所有不超过一次的多项式 $p_1(x) = a_1x + a_0$ 都是精确成立的。
- 也可以从误差公式： $E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \frac{f''(\eta)}{2}$ 得到，一次多项式的二阶导数为零。
- Simpson公式对所有不超过三次多项式 $p_3(x)$ 都是精确的，其中：

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$E_2(p_3) = 0$$

- 使近似求积公式准确成立的多项式的次数，可在一定意义下成为求积公式精确程度的一种衡量标准。
- **定义**：如果 $() = \sigma_j^n = A_j f(x_j)$ 式对所有 **不超过m次** 的多项式 $p_m(x)$ 准确成立，即 $E(p_m) = 0$ ，而对 **某一次数为m+1次** 的多项式 $p_{m+1}(x)$ 有 $E(p_{m+1}) \neq 0$ ，则称近似求积公式 I_n **具有m次代数精度**。
- 要验证某一求积公式代数精度为m，只要验证 **$E(x^k) = 0$** ，
 $k=0,1,\dots,m$ ，且 **$E(x^{m+1}) \neq 0$** 。

- 例，有近似公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

试确定系数A、B、C，使该公式具有最高的代数精度。

解：分别令 $f(x) = 1, x, x^2$ ，使求积公式准确成立，得

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -A + C = 0 \\ A + C = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- 求积公式为： $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 1/3f(-1) + 4/3f(0) + 1/3f(1)$
- 再验证 $f(x) = x^3$ ，它也是准确成立的，而对 $f(x) = x^4$ ，不准确成立，故公式具有三次代数精度。

第二节 插值型求积公式及其截断误差

- 在区间 $[a, b]$ 内给定求积节点 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$, 并且 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, 以所给求积节点为插值节点, 构造函数 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$$

其中, $l_k(x)$ 是拉格朗日插值基函数,

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

用 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$, 在区间 $[a, b]$ 上作定积分, 得到近似等式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) \quad \text{其中} \quad \lambda_k = \int_a^b l_k(x) dx \quad k = 0, 1, \dots, n$$

由此得到的求积公式称为**插值型求积公式**。

- 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上足够光滑，则有

$$f(x) = \sigma_{k=0}^n l_k(x) f(x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad \xi \in (a, b) \text{ 且依赖于 } x$$

其截断误差为：

$$R(x) = \int_a^b f(x) dx - \sigma_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) dx$$

- 例，验证求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

是插值型求积公式。

解：从求积公式看出，求积节点为 $x_0 = -1/\sqrt{3}$, $x_1 = 1/\sqrt{3}$,

求积系数是 $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ ，而

$$\int_{-1}^1 l_0(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx = 1 = \lambda_0$$

$$\int_{-1}^1 l_1(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx = 1 = \lambda_1$$

故，所给求积公式是插值型求积公式。

- 例，给定求积节点 $x_0 = 1/4$, $x_1 = 3/4$ ，试推出计算积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的插值型求积公式，并写出它的截断误差
- 解：由已知公式，有

$$\lambda_0 = \int_0^1 l_0(x)dx = \int_0^1 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (4x-3)dx = 1/2$$

$$\lambda_1 = \int_0^1 l_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (4x-1)dx = 1/2$$

故求积公式为： $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}))$

截断误差为： $R_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} f''(\xi) \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{3}{4}\right) dx \quad \xi \in (0, 1)$

- 定理1: $n+1$ 个节点的插值型求积公式至少具有 n 次代数精度。
- 证明: 当 $f(x)$ 为任何次数不高于 n 的多项式时, $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$,
由截断误差公式 $R_n(x) = 0$, 因而等式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k)$$

成立, 其中 $\lambda_k = \int_a^b l_k(x)dx \quad k = 0, 1, \dots, n$

根据代数精度的定义, 定理得证。

- 推论：对于 $n+1$ 个节点的插值型求积公式的求积系数 $\lambda_k (k = 0, 1, \dots, n)$ ，必满足：

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k = b - a, \text{ 其中 } a \text{ 和 } b \text{ 分别是积分下限和上限。}$$

(提示：对 $f(x)=1$ 恒成立)

- 定理2： $n+1$ 个节点的求积公式，如果具有 n 次或大于 n 次的代数精度，则它是插值型求积公式。

第三节 等距节点积分公式

- 设，将 $[a, b]$ n 等分， $h = (b - a)/n$ ，取等距节点为 $x_i = a + ih$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ ，其中 n 为大于0的整数，利用这些节点作 f 的拉格朗日插值多项式，得到

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

对 $L_n(x)$ 积分，得到

$$\int_a^b f(x) dx \approx I(f) = \int_a^b L(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

其中， $A_i = \int_a^b l_i(x) dx$

- 进一步，令 $t = (x - a)/h$ ，可得

$$I_n = (b - a) \sum_{i=0}^n C_i f(x_i)$$

其中， $C_i = \frac{A_i}{b-a} = \frac{h}{b-a} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t-j}{i-j} dt$

- 闭型Newton-Cotes积分公式， C_i 称为N-C系数， 给定n， 可计算 C_i 。

n	C_i				
1	1/2	1/2			梯形公式
2	1/6	2/3	1/6		Simpson公式
3	1/8	3/8	3/8	1/8	

- 很少使用 $n \geq 8$ 的情形。

第四节 复合的数值积分公式

- 当基于插值公式计算数值积分时，一般来说， n 增大，可能提高公式的代数精度，但提高插值公式次数来逼近 f 的效果并不佳。所以可以预料到当 $n \rightarrow \infty$ 时， $I_n f$ 不一定收敛到 $I f$ 。(。)
- 即使对收敛的情形， n 很大时，Newton-Cotes系数也不容易求出。因此一般不使用 $n \geq 8$ 的公式。为了提高近似积分值的准确度，可以将 $[a, b]$ 划分为若干个子区间，在每个子区间上使用低阶的Newton-Cotes公式，即复合公式。

1 复合梯形公式

设 $f \in C^2[a, b]$, 将 $[a, b]$ 等分为 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其长度为 $h = (b - a)/n$, 节点为 $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ 。

在每个子区间上, 用梯形公式及误差公式, 得:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \sigma_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &= \sigma_{i=1}^n \left\{ \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \right\} \quad \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ &= I_n(f) + E_n(f) \end{aligned}$$

$$I_n(f) = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]$$

—————复合梯形公式

其误差为：

$$E_n(f) = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i)$$

由 f'' 的连续性，可知存在 $\eta \in [a, b]$ ，使

$$f''(\eta) = \sum_{i=1}^n f''(\eta_i)/n$$

$$\text{故： } E(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

—————误差公式

2 复合Simpson公式

设 $f \in C^4[a, b]$ ，对整数 $n \geq 1$ ，设 $h = (b - a)/(2n)$ ， $x_i = a + ih$ ， $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ，将 $[a, b]$ 等分为 n 个子区间 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

子区间长度为 $2h$ ，其中有三个节点 $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$ 。

在每个子区间上，用Simpson公式及误差公式，得

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sigma \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx$$

$$= \sigma_{i=1}^n \left\{ \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] - \frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\eta_i) \right\}$$

$$= I_n(f) + E_n(f)$$

$$I_n(f) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})]$$

—————复合Simpson公式

误差为:

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\eta_i) = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

—————误差公式

第五节 外推技术与Romberg积分法

1 外推技术

设有一个常数 F^* ，由一个依赖于 h 的算法 $F(h)(h > 0)$ 去逼近，其中 F^* 与 h 无关，并已知 $F(h)$ 逼近 F^* 的截断误差为：

$$F^* - F(h) = a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_k h^{p_k} + \cdots \quad (*)$$

其中 $a_k(k = 1, 2, \dots)$ 是与 h 无关的常数，且

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{k-1} < p_k < \cdots$$

也就是说， $F(h)$ 逼近 F^* 的误差阶是 h^{p_1} 。

- 现在提出问题：能否利用 $F(h)$ 构造出一个新的算法 $F_1(h)$ ，使 $F_1(h)$ 逼近 F^* 的误差阶比 h^{p1} 更高，例如 h^{p2}

？ 取一正数 q ， $q \neq 1$ ， 据(*)式， 有

$$F^* - F(qh) = a_1(qh)^{p1} + a_2(qh)^{p2} + \dots + a_k(qh)^{pk} + \dots$$

用 q^{p1} 同乘(*)式两边， 得到

$$q^{p1}[F^* - F(qh)] = q^{p1}(a_1h^{p1} + a_2h^{p2} + \dots + a_kh^{pk} + \dots)$$

将红色两式相减， 得

$$(1 - q^{p1})F^* - [F(qh) - q^{p1}F(h)] =$$

$$a_2(q^{p2} - q^{p1})h^{p2} + a_3(q^{p3} - q^{p1})h^{p3} + \dots + a_k(q^{pk} - q^{p1})h^{pk} + \dots$$

• 整理得:

$$\begin{aligned}
 F^* - \frac{F(qh) - q^{p1}F(h)}{1 - q^{p1}} &= \\
 a_2 \frac{q^{p2} - q^{p1}}{1 - q^{p1}} h^{p2} + a_3 \frac{q^{p3} - q^{p1}}{1 - q^{p1}} h^{p3} + \dots + a_k \frac{q^{pk} - q^{p1}}{1 - q^{p1}} h^{pk} + \dots \\
 &= a_2^{(1)} h^{p2} + a_3^{(1)} h^{p3} + \dots + a_k^{(1)} h^{pk} + \dots \quad (**)
 \end{aligned}$$

其中, $a_2^{(1)} = a_2 \frac{q^{p2} - q^{p1}}{1 - q^{p1}}$... $a_k^{(1)} = a_k \frac{q^{pk} - q^{p1}}{1 - q^{p1}}$ 都是与 h 无关的常数。

令：

$$F_1(h) = \frac{F(qh) - q^{p1} F(h)}{1 - q^{p1}}$$

则， $F_1(h)$ 逼近 F^* 的误差阶已提高到 h^{p2} 。

类似地，令

$$F_2(h) = \frac{F_1(qh) - q^{p2} F_1(h)}{1 - q^{p2}}$$

则， $F_2(h)$ 逼近 F^* 的误差阶提高到 h^{p3} 。

- **定义：** $F_j(h)$ 为

$$F_0(h) = F(h)$$

$$\forall F_j(h) = \frac{F_{j-1}(qh) - q^{pj}F_{j-1}(h)}{1 - q^{pj}} \quad j = 1, 2, \dots \quad (***)$$

则， $F_j(h)$ 逼近 F^* 的截断误差由下面的定理指明。

- **定理：** 若 $F(h)$ 逼近 F^* 的截断误差由式(*)给出，那么，由式(***)定义的 $F_j(h)$ 逼近 F^* 的截断误差为

$$F^* - F_j(h) = a_{j+1}^{(j)} h^{pj+1} + a_{j+2}^{(j)} h^{pj+2} + \dots + a_k^{(j)} h^{pk} + \dots$$

其中 $a_k^{(j)} (k \geq j+1)$ 都是与 h 无关的常数。

证明：使用归纳法。略

- 上述技术称为Richardson外推技术，也称为外推算法。

由已知的序列：

$$F(h)、F(qh)、F(q^2h)、F(q^3h)\dots\dots$$

通过(***)式，得到第二个序列

$$F_1(h)、F_1(qh)、F_1(q^2h)、F_1(q^3h)\dots\dots$$

再通过(***)式，得到第三个序列

$$F_2(h)、F_2(qh)、F_2(q^2h)、F_2(q^3h)\dots\dots$$

- **定义**：设复化求积公式为 $\int_a^b f(x)dx \approx I$ ，其中 n 是区间 $[a, b]$ 的等分数，如果

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \frac{\int_a^b f(x)dx - I_n}{h^p} = c$$

其中 c 是一个非零常数， p 是一个正实数，则称 I_n 是 **p阶收敛** 的。

针对利用外推技术得到的各个序列，若序列 $\{F(q^m h)\}$ 收敛于 F^* ，并且是 p_1 阶收敛的，则序列 $\{F_1(q^m h)\}$ 也收敛于 F^* ，并且是 p_2 阶收敛的，序列 $\{F_2(q^m h)\}$ 是 p_3 阶收敛的，....。

- Richardson外推技术的计算步骤可按下表执行：

$F_0(h)$ ①				
$F_0(qh)$ ②	$F_1(h)$ ③			
$F_0(q^2h)$ ④	$F_1(qh)$ ⑤	$F_2(h)$ ⑥		
$F_0(q^3h)$ ⑦	$F_1(q^2h)$ ⑧	$F_2(qh)$ ⑨	$F_3(h)$ ⑩	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Romberg积分法

- 使用复化求积公式计算积分近似值，节点数目越多，截断误差越小。但是，节点多，计算量就大。而事先定下节点数显然又是不现实的。有效的方法是让节点数目从少到多地变化，即步长可变。
- 逐次将积分区间分半，用 T_m 表示积分区间 $[a, b]$ 被分为 $n = 2^m$ 等分后所形成的梯形值，此时步长 $h_m = (b - a)/2^m$

$$T_0 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$T_1 = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b) + 2f(a + h_1)]$$

$$= \frac{1}{2} T_0 + h_1 f(a + h_1)$$

$$T_2 = \frac{h_2}{2} [f(a) + f(b) + 2 \sigma_{k=1}^3 f(a + kh_2)]$$

$$= \frac{1}{2} T_1 + h_2 \sigma_{i=1}^2 f(a + (2i - 1)h_2)$$

$$T_3 = \frac{h_3}{2} [f(a) + f(b) + 2 \sigma_{k=1}^7 f(a + kh_3)]$$

$$= \frac{1}{2} T_2 + h_3 \sigma_{i=1}^4 f(a + (2i - 1)h_3)$$

一般地，若 T_{m-1} 已算出，则

$$T_m = \frac{1}{2} T_{m-1} + h_m \sigma_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i - 1)h_m)$$

- $\{T_m\}$ 称为梯形值序列。

T_{m-1} 是把区间 $[a, b]$ 分为 2^{m-1} 个子区间所得的复化梯形值，在此基础上，再取各个子区间的中点作为新的节点，就可计算 T_m 。这种方法称为区间逐次分半法。

梯形值序列 $\{T_m\}$ 收敛于积分值 $\int_a^b f(x)dx$ ，设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上足够光滑，把 T_m 记为 $T_m^{(0)}$ ，它是步长为 $h_m = (b - a)/2^m$ 的复化梯形值，取 $q = \frac{1}{2}, h = b - a, F_0(q^m h) = T_m^{(0)} m = 0, 1, \dots$

- 由复化梯形公式的截断误差表达式，有

$\int_a^b f(x)dx - T_0^{(0)} = a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_k h^{2k} + \cdots$ 其中 $a_k (k = 1, 2, \dots)$ 是与 h 无关的常数。

利用Richardson外推算法，得到如下的求积方法：

$$T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

对于 $m = 0, 1, \dots$ ，依次计算

$$(1) h_m = (b-a)/2^m$$

$$(2) T_m^{(0)} = \frac{1}{2} T_{m-1}^{(0)} + h_m \sum_{i=1}^{2^{m-1}} f(a + (2i-1)h_m)$$

$$(3) T_{m-j}^{(j)} = \frac{T_{m-j+1}^{(j-1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} T_{m-j}^{(j-1)}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}} = \frac{4^j T_{m-j+1}^{(j-1)} - T_{m-j}^{(j-1)}}{4^j - 1} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

————Romber积分

- Romberg积分顺序表:

$T_0^{(0)}$ ①			
$T_1^{(0)}$ ②	$T_0^{(1)}$ ③		
$T_2^{(0)}$ ④	$T_1^{(1)}$ ⑤	$T_0^{(2)}$ ⑥	
$T_3^{(0)}$ ⑦	$T_2^{(1)}$ ⑧	$T_1^{(2)}$ ⑨	$T_0^{(3)}$ ⑩
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

梯形值序列
二阶收敛

Simpson值序列
四阶收敛

Cotes值序列
六阶收敛

Romberg值序列
八阶收敛

- 一般地，第j列 $\{T_m^{(j-1)}\}$ 是 $2j$ 阶收敛的。

- Romberg积分法是一个迭代过程，控制迭代结束的条件是：

$$|T_0^{(m)} - T_0^{(m-1)}| < \varepsilon$$

或是：

$$\frac{|T_0^{(m)} - T_0^{(m-1)}|}{|T_0^{(m)}|} < \varepsilon$$

ε 是预先给定的正数。

当满足结束条件时，结束迭代， $T_0^{(m)}$ 就是所求的积分近似值。

第六节 Gauss求积方法

- 考虑带权的积分式：

$$I(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

其中， $\rho(x)$ 为权函数，希望找到一个 $I(f)$ 的近似式：

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

使 $I(f) \approx I_n(f)$ ，并且使其代数精确度尽量高，其中求积节点

$$x_j \in [a, b] \quad j = 0, 1, \dots, n$$

- 如果希望上式有更高的代数精确度，显然不能再采用等距节点。

- 在 $[a, b]$ 内取 n 个互异的节点 x_1, x_2, \dots, x_n , 对 $f(x)$ 进行拉格朗日插值, 得

$$f(x) = \sum_{i=1}^n l_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x)$$

当 $x \in [a, b]$ 时, $\xi \in (a, b)$, 其中

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \omega'_n(x_i)} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- 由此得到求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \quad (1)$$

$$\text{其中 } A_i = \int_a^b \frac{\rho(x) \omega_n(x)}{(x-x_i) \omega_n'(x_i)} dx \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

截断误差为

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \rho(x) \omega_n(x) dx \quad (3) \end{aligned}$$

- 分析：由截断误差公式(3)可知，无论求积节点 x_i 在 $[a, b]$ 内如何选择， A_i 由公式(2)确定的求积公式(1)对任何次数不高于 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 必成为精确等式，即它的代数精确度至少是 $n-1$ 。
- 现在提出问题：能否选取适当的节点 x_1, x_2, \dots, x_n ，使 A_i 由公式(2)确定的求积公式(1)对 $f(x)$ 分别为 x^n 、 x^n 、 x^{n+1} 、...、 x^{2n-1} 也成为精确等式，即它的代数精确度能否提高到 $2n-1$ ？
- 由于从 $n-1$ 到 $2n-1$ 提高了 n 次，而节点的选择又有 n 个自由度，所以求积公式(1)的代数精确度有可能达到 $2n-1$ 。

- 另一方面，不存在这样的节点 $x_i \in [a, b] (i = 1, 2, \dots, n)$ 和求积系数 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，使求积公式(1)的代数精确度达到 $2n$ 。

事实上，只要令

$$\varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2$$

其中，互异的 x_1, x_2, \dots, x_n 在 $[a, b]$ 内任取，有

$$\int_a^b \rho(x) \varphi(x) dx > 0$$

但对任意的求积系数 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，恒有

$$\sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i) = 0$$

可见，**求积公式(1)对 $2n$ 次多项式 $\varphi(x)$ 不能成为精确等式。**

- 定义：对于求积公式(1)，其中 A_i 由(2)确定，如果对于任何次数不高于 $2n-1$ 的多项式 $f(x)$ ，式(1)成为精确等式，则称式(1)为Gauss型求积公式。
- 根据前面的讨论，Gauss型求积公式是具有最高代数精确度的求积公式， n 个节点的Gauss型求积公式的代数精确度是 $2n-1$ 。

- Gauss-Legendre求积公式
- 给定权函数 $\rho(x) \equiv 1$ ，积分区间 $[-1, 1]$ ，求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

$$A_i = \int_{-1}^1 \frac{L_n(x)}{(x-x_i)L'_n(x_i)} dx = \frac{2}{(1-x_i^2)[L'_n(x_i)]^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$$

截断误差为：

$$R(x) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \frac{2^{2n} (n!)^4}{[(2n)]^2} \frac{2}{2n+1} \quad \eta \in [-1, 1]$$

- 节点和系数列表:

n	x_i	A_i
0	0	2
1	± 0.5773503	1
2	± 0.7745967 0	0.5555556 0.8888889
3	± 0.8611363 ± 0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	± 0.9061798 ± 0.5384693 0	0.2369269 0.4786287 0.5688889

- 两点式Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- 三点式Gauss-Legendre公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

- 如果积分区间是 $[a, b]$ ，则变量置换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt$$

- 例，用四点G-L求积公式计算积分 $\int_1^2 e^x dx$

解：令 $x = \frac{1}{2}(t + 3)$

$$\int_1^2 e^x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{t+3} dt$$

记 $\varphi(t) = e^{\frac{t+3}{2}}$ ，则有

$$\varphi(t_1) = \varphi(-0.8611363) = 2.547406932$$

$$\varphi(t_2) = \varphi(-0.3399810) = 2.120971718$$

$$\varphi(t_3) = \varphi(0.3399810) = 1.819944113$$

$$\varphi(t_4) = \varphi(0.8611363) = 1.678637128$$

$$\int_1^2 e^x dx \approx \frac{1}{2} [0.3478548(\varphi(t_1) + \varphi(t_4)) + 0.6521452(\varphi(t_2) + \varphi(t_3))] = 2.020049534$$

- Gauss-Laguerre求积公式
- 给定权函数 $\rho(x) = e^{-x}$, 积分区间 $[0, \infty)$, 求积公式

$$A_i = \frac{(n!)^2}{x_i [U'(x_i)]^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$U(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

截断误差为:

$$R(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta)$$

- Gauss型求积公式特点：
- 使用的求积节点少，而结果的精度高
- 可计算广义积分
- 计算需查表，前面的结果（节点少）对后面的计算（节点多）无帮助
- 收敛快