[07.02.22]

В таблице n, λ_{max} (с λ_{min} аналог.)

$\mathbb{B} = \lambda^n_{max} E - \mathbb{A}$ находим $X^n_{[i;j]}$

$X^n_{[i;j]} = \mathbb{B} X^{n-1}_{[i;j]}$ $\quad \lambda^n_{max}(\mathbb{B}) = \left(\mathbb{B}\frac{X^n}{\|X^n\|}, \frac{X^n}{\|X^n\|}\right)$

N.B: Нормир. на каждом шаге.

$$\boxed{\lambda^n_{min}(\mathbb{A}) = \lambda^n_{max}(\mathbb{A}) - \lambda^n_{max}(\mathbb{B})}$$

A · матрица $N^2 \times N^2$

Из пунктов для 1-ого дедлайна:

2, 4

3-не надо, 1-ое потом.

там, где индексы выходят за область.

$Y^0[i,j]$ - не определять.

($Y^0[i,j]$ определяем внутри области)

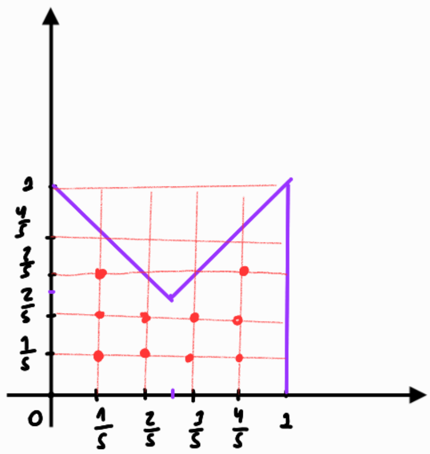
$\frac{8}{h^2}$ - теор.

Deadline: По задачам:

1) 14.03.22
2) 4.04.22
3) 25.04.22.

N.B: i по x шагает

j по y шагает.



Пусть $h = 0.2$. Найдём матрицу A:

Для λ_max

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
1e-4	724.759 ^{44}	2996.798 ^{90}	12034.366 ^{89}
1e-6	725.171 ^{75}	3005.119 ^{217}	12124.013 ^{563}
1e-7	725.174 ^{91}	3005.187 ^{278}	12125.172 ^{809}

красным - число итераций

Для λ_min

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
1e-4	35.139 ^{19}	39.295 ^{28}	65.380 ^{22}
1e-6	34.828 ^{46}	34.873 ^{115}	35.658 ^{229}
1e-7	34.825 ^{60}	34.812 ^{173}	34.814 ^{416}

2 задание:

Метод мин. невязок.

$X^0[i,j] = 1$ на границе задано значение

$X^{n+1} = X^n - \tau_n (A X^n - F)$ $\quad$ A - оператор.

$F = \{f(ih, jh)\}_{i \in I d_x}$.

$X^{n+1}[i,j] = X^n[i,j] - \tau_n \underline{(A X^n[i,j] - F)} = \rho^n[i,j]$

Построить итерац. посл-ть. Таблицу построить.

- обрывать итерац. процесс по невязке. $\|\rho^{n+1} - \rho^n\| < \delta$

+ в таблице записать погрешность $\|X^{n+1} - \varphi\| = \varepsilon$

$$\|Y[i,j]\|^2 = \left(\sum_{i,j} Y^2[i,j]\right) h^2$$

Таблица:

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
10^{-4}	ε^n		
10^{-6}			
10^{-7}			

#Самарский - Николаев - методы выч.
(метод Зейделя, метод релаксации)

- Мин. невязок (метод решения системы)

τ_n - это коэффициент

$$\tau_n = \frac{(A\rho^n, \rho^n)}{(A\rho^n, A\rho^n)} = \left(\frac{A\rho^n}{\|A\rho^n\|}, \frac{\rho^n}{\|A\rho^n\|}\right)$$

1) Все X^n удовл. гранич. условиям? [N.B: не влияет] +

2) Невязка на границе равна нулю?

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
1e-4	3.86e-5 159	6.55e-6 426	2.42e-5 1595
1e-6	4.33e-5 159	1.10e-5 623	2.58e-5 2394
1e-7	4.33e-5 182	1.11e-5 722	2.79e-6 2794
1e-8	4.33e-5 206	1.11e-5 821	2.81e-6 3193

= ?

#table for error of solving system

$\delta = O(f(h))$

find in the leterature

- method of upper relaxation with optimal parameter

(метод верхней релаксации с оптим. пар.

$$\|A\|^{n-1} \|A\rho^0 - F - \rho^0\| h = \delta \Rightarrow \delta = O(h) ?$$

#нет.

n - число итераций до условия остановки

$X[j]$

$$\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{bmatrix} = f$$

$$a_{11} x_1^{(k)} + \ldots + a_{1n} x_n^{(k)} = f_1$$

$$x_1^{(k)} =$$

$$\begin{cases} a_{11} x_{1j} + \ldots + a_{1n} x_{nj} = f_{1j} \\ \vdots \\ a_{n1} x_{1j} + \ldots + a_{nn} x_{nj} = f_{nj} \end{cases}$$

исх. система

$$A x^n[i,j] = x^{n+1}[i,j]$$

$$x^{n+1}[i,j] =$$

$$p_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \qquad c_i = \frac{f_i}{a_{ii}}$$

$$\boxed{w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{(2-\lambda_1)}} \quad \lambda_1 \text{ - max по модулю с. з.}}$$

В нашем случае:

$$u^{n+1} = Hu^n + G$$

$$x_{i,k} = x_{i,k}^{(0)} + \sum_j s x_{i,k}^{(j)}$$

$$x^{i+1} = x^i + w\left(-(D+L)^{-1} R x^i + (D+L)^{-1} B - x^i\right)$$

D - диаг. $\quad$ R - верхнетреуг

L - нижн. треуг. $\quad$ $A = L + D + R$

B - пр. часть.

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{2(1+\delta^2)}\left[u_{1,j-1}\right.$$

$$\tilde{x}_{i,j} = A x_{1,j} = -\frac{a}{h^2}\left(x_{0,j} - 2x_{1,j} + x_{2,j}\right) - \frac{b}{h^2}\left(x_{1,j-1} - 2x_{1,j} + x_{1,j+1}\right) = f_{1,j}$$

w_0

нужно найти

λ ур-ния $Ax - \lambda Dx = 0$

Самарский Николаев.

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{\lambda_{min}(2-\lambda_{min})}}$$

$a, b = 1 \qquad \varphi(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) \equiv 4 \qquad$ сх-сь

$$\rho\left(E - w(D+wL)^{-1} A\right)$$

можно найти с. з. оператора $(Ax - \lambda Dx)$?

$Ax = \lambda x$

$Ax = \lambda D x$

$$DU = \begin{bmatrix} -2a\,u[i,j] - 2b\,u[1,2] & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} X = \lambda X \qquad \mathbb{A}(\mathbb{D}X) = \lambda \mathbb{D}(\mathbb{D}X)$$

$$\mathbb{A} X = \lambda D X$$

Если X - с.в. для A, то

$$Ax = Dx \qquad \mathbb{A}X = \mu X \qquad \frac{1}{2x[i,j]}$$

$$\mu X = \lambda D x$$

$$\lambda = \mu X[i,j]\,(Dx^{-1}[i,j]) \qquad \lambda E = \mu X (Dx)^{-1}$$

$$W_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - p^2(D^{-1}(R+L))}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - p^2(D^{-1}(A-D))}} =$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - p^2(D^{-1}A - E)}}$$

$$D^{-1}(\mathbb{R}+L)X$$

$$D^{-1}(R+L)X =$$

$$W_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (p(D^{-1}(R+L)))^2}}$$

ТАБЛИЦА ОШИБКИ МЕТОДА ВЕРХНЕЙ РЕЛАКСАЦИИ

! При $W = W_{opt}$

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
1e-4	4.17e-5 [20]	1.09e-5 [39]	8.62e-6 [77]
1e-6	4.32e-5 [24]	1.10e-5 [47]	2.65e-6 [92]
1e-7	4.33e-5 [27]	1.11e-5 [52]	2.78e-6 [101]
1e-8	4.33e-5 [30]	1.11e-5 [59]	2.81e-6 [116]

число итераций

! При $w = 1$ (метод Зейделя)

$\delta \backslash h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
1e-4	1.26e-4 [47]	8.0e-4 [154]	3.3e-3 [492]
1e-6	4.22e-5 [72]	6.55e-6 [253]	3.15e-6 [897]
1e-7	4.32e-5 [83]	1.05e-5 [303]	1.85e-6 [1095]
1e-8	4.33e-5 [94]	1.11e-5 [353]	2.53e-6 [1296]

$h = \frac{1}{10}$, $W_{opt} = 1.4102$

$h = \frac{1}{20}$, $W_{opt} = 1.6491$

$h = \frac{1}{40}$, $W_{opt} = 1.8072$

$$\boxed{k \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon}{|\varepsilon_0|}}{\ln(q)}}$$, где $q \leq \|S\| < 1$

S- матрица оператора

т.е. $u^{k+1} = Su^k + F$

$$n \geq \frac{1}{2\rho} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

ρ- числ. област.