$$\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Схема Лакса: $$\frac{u_k^{j+1}}{\tau} = \frac{u_{k+1}^j + u_{k-1}^j}{2\tau} - \frac{C}{2h}\left(u_{k+1}^j - u_{k-1}^j\right)$$

- Порядок аппроксимации

$$u(t_{j+1}, x_k) = u(t_j, x_k) - \tau\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^4)$$

$$u(t_j, x_{k+1}) = u(t_j, x_k) - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4)$$

$$u(t_j, x_{k-1}) = u(t_j, x_k) + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4)$$

Подставив соответствующие разложения в схему для непр. решения:

$$\cancel{u(t_j, x_k)} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - O(\tau^2) - \cancel{u(t_j, x_k)} - \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - O\left(\frac{h^4}{2\tau}\right) +$$

$$+ \frac{C}{2h}\left(-2h\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^3}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - O(h^5)\right) = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4) - C\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{C}{6}h^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} =$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + C\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{=0} + O\left(\tau + \frac{h^2}{\tau}\right) = O\left(\tau + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

• def: Негибкая схема – это схема, которая аппроксимирует решение только при соблюдении какого-то условия. Например, схема Лакса негибкая т.к. требует выполнение условия Куранта.

- Таблица значений при точном решении на правой границе.

$h \backslash \tau$	0.1	0.01	0.001
0.1	0.23228	0.219667	0.21166
0.01	0.07597	0.04687	0.1867
0.001	21.6838	0.02534	0.00538

$h \backslash \tau$	0.1	0.01	0.001
0.1	0.129581	0.110016	0.11332
0.01	0.060308	0.03413	0.08504
0.001	0.05655	0.006439	0.005322

- Таблица ошибок на правой границе

- Найдем условие сходимости в норме $\| \|_\infty$

Положим: $u^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_x}^n \end{bmatrix} \Rightarrow u^{n+1} = Au^n + f^n$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{c\tau}{h}\right) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{c\tau}{h}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(1-\frac{c\tau}{h}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & \frac{1}{2}\left(1+\frac{c\tau}{h}\right) & 0 & \end{bmatrix}$$

схема Лакса

$$u_k^{j+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{c\tau}{h}\right)u_{k+1}^j + \frac{1}{2}\left(1+\frac{c\tau}{h}\right)u_{k-1}^j$$

$$f^n = \begin{bmatrix} \varphi_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_0^n \end{bmatrix}$$

$\frac{c\tau}{h} \leq 1$

$$\|u^{n+1}\| \leq \|A\| \cdot \|u^n\| + \|f^n\| \leq$$

$$\leq \|u^0\| + \|f\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty = \frac{1}{2}\left|1+\frac{c\tau}{h}\right| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{c\tau}{h}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{c\tau}{h}\right) + \frac{1}{2}\left|1-\frac{c\tau}{h}\right| =$$

$$= \begin{cases} \frac{c\tau}{h}, & \text{при } \frac{c\tau}{h} > 1 \\ 1, & \text{при } \frac{c\tau}{h} \leq 1 \end{cases}$$

т.е. имеет место условная сходимость разностной схемы по теор. о сходимости, если выполнено условие Куранта

т.е. $\frac{c\tau}{h} < 1$ (для нормы $\| \|_\infty$)