Labwork 1

Лабораточная работа выполнена на языке **Python** с помощью интерактивной оболочки **Jupyter Notebook** Исходный код работы - lab1.py. Файл jupyter notebook - lab1.ipynb

Входные данные

Набор данных ex1data1.txt представляет собой текстовый файл, содержащий информацию о населении городов (первое число в строке) и прибыли ресторана, достигнутой в этом городе (второе число в строке). Отрицательное значение прибыли означает, что в данном городе ресторан терпит убытки. Набор данных ex1data2.txt представляет собой текстовый файл, содержащий информацию о площади дома в квадратных футах (первое число в строке), количестве комнат в доме (второе число в строке) и стоимости дома (третье число).

Ход выполнения работы

1. Загрузите набор данных ex1data1.txt из текстового файла.

In [1]:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [16]:

```
data_row1 = np.genfromtxt('ex1data1.txt', delimiter=',')
data1 = pd.DataFrame(data_row1, columns=list(['Population', 'Profit']))
data1.describe()
```

Out[16]:

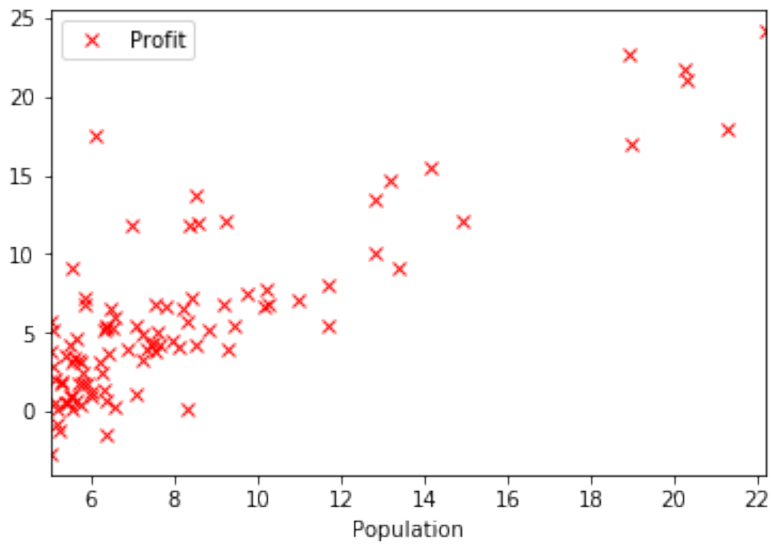
	Population	Profit
count	97.000000	97.000000
mean	8.159800	5.839135
std	3.869884	5.510262
min	5.026900	-2.680700
25%	5.707700	1.986900
50%	6.589400	4.562300
75%	8.578100	7.046700
max	22.203000	24.147000

2. Постройте график зависимости прибыли ресторана от населения города, в котором он расположен.

In [3]:

```
plt.figure()
data1.plot(x='Population', y='Profit',  style=['rx'])
plt.show()
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



3. Реализуйте функцию потерь J(θ) для набора данных ex1data1.txt.

In [4]:

```
def computeCost(X, y, theta):
    h = [np.matmul(x, theta.T).sum() for x in X]
    return np.power(h - y, 2).sum() / (2 * m)
```

In [17]:

```
m = data_row1.shape[0] # Size of training set
n = data_row1.shape[1] # Size of feature vector
X1 = data1[['Population']]
X1.insert(0, 'theta_0', 1)
y1 = data1['Profit']
theta = np.zeros((1, n)) # theta coeficents for hypothesis func
X1.head()
```

Out[17]:

	theta_0	Population
0	1	6.1101
1	1	5.5277
2	1	8.5186
3	1	7.0032
4	1	5.8598

In [7]:

```
cost = computeCost(X1.to_numpy(), y1.to_numpy(), theta)
print('With theta = [0 ; 0]\nCost computed = %f' % (cost))
```

```
With theta = [0 ; 0]
Cost computed = 32.072734
```

4. Реализуйте функцию градиентного спуска для выбора параметров модели. Постройте полученную модель (функцию) совместно с графиком из пункта 2.

In [8]:

```
#function [theta, J_history] = gradientDescent(X, y, theta, alpha, num_iters)
# GRADIENTDESCENT Performs gradient descent to learn theta
#   theta = GRADIENTDESCENT(X, y, theta, alpha, num_iters) updates theta by
#   taking num_iters gradient steps with learning rate alpha

def gradientDescent(X, y, theta, alpha, num_iters):
    m = y.shape[0]  # Size of training set
    n = X.shape[1]  # Size of feature vector
    j_history = []
    for i in range(0, num_iters):
        deltas = np.zeros(n)
        for j in range(0, n):
            xj = X[:, j]
            h = [np.matmul(x, theta.T)[0] for x in X]
            deltas[j] = ((h - y) * xj).sum() * alpha / m
        theta[0] -= deltas
        j_history.append(computeCost(X, y, theta))

    return theta, j_history
```

In [18]:

```
iterations = 1500
alpha = 0.01
(theta, j_history) = gradientDescent(X1.to_numpy(), y1.to_numpy(), theta, alph
a, iterations)
```

In [10]:

```
print('Theta found by gradient descent: %s' % (theta))
```

```
Theta found by gradient descent: [[-3.63029144  1.16636235]]
```

In [11]:

```
print('For population = 35,000, we predict a profit of %f' %(np.matmul([1, 3.5
], theta.T).sum() * 10000)) #predict1
```

```
For population = 35,000, we predict a profit of 4519.767868
```

In [12]:

```
print('For population = 70,000, we predict a profit of %f' % (np.matmul([1, 7]
, theta.T).sum() * 10000)) #predict2
```

```
For population = 70,000, we predict a profit of 45342.450129
```

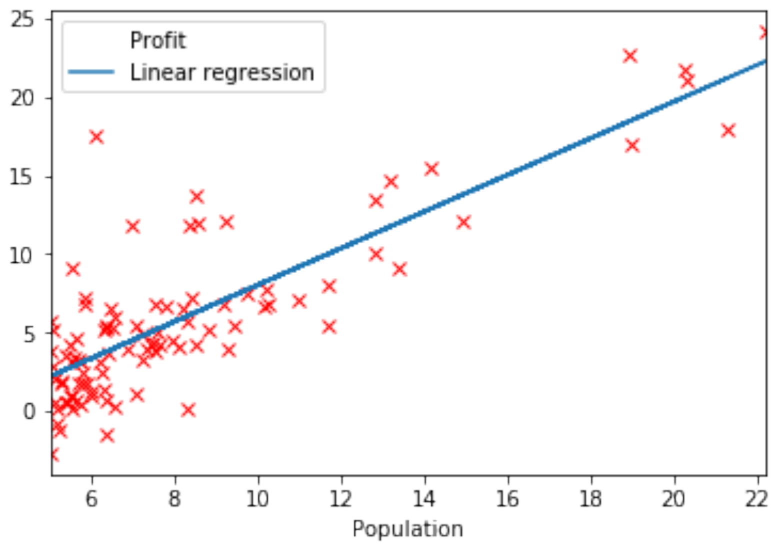
In [19]:

```
h = [np.matmul(x, theta.T).sum() for x in X1.to_numpy()]
data1_plot = data1.join(pd.DataFrame({'Linear regression': h}))
```

In [20]:

```
plt.figure()
ax = data1_plot.plot(x='Population', y='Profit',  style=['rx'])
data1_plot.plot(x='Population', y='Linear regression', ax=ax)
plt.show()
```

<Figure size 432x288 with 0 Axes>



5. Постройте трехмерный график зависимости функции потерь от параметров модели (θ0 и θ1) как в виде поверхности, так и в виде изолиний (contour plot).

In [21]:

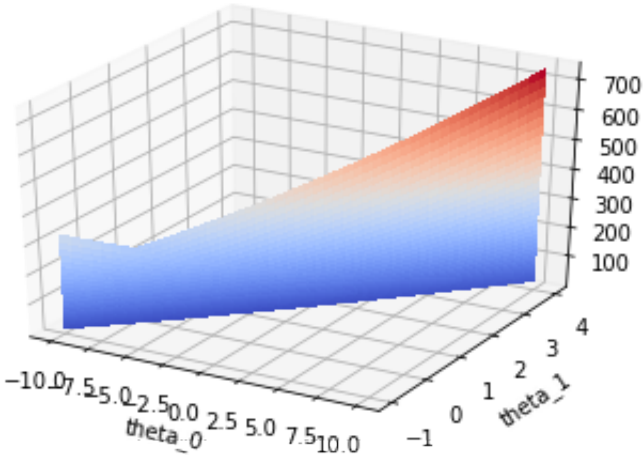
```
theta0_vals = np.linspace(-10, 10, num=100)
theta1_vals = np.linspace(-1, 4, num=100)
#theta0_vals, theta1_vals = np.meshgrid(theta0_vals, theta1_vals)
# initialize J_vals to a matrix of 0's
J_vals = np.zeros((theta0_vals.size, theta1_vals.size))
```

In [22]:

```
# Fill out J_vals
for i in range(0, theta0_vals.size):
    for j in range(0, theta1_vals.size):
        t = np.array([[theta0_vals[i], theta1_vals[j]]])
        J_vals[i, j] = computeCost(X1.to_numpy(), y1.to_numpy(), t)

J_vals = J_vals.T
```

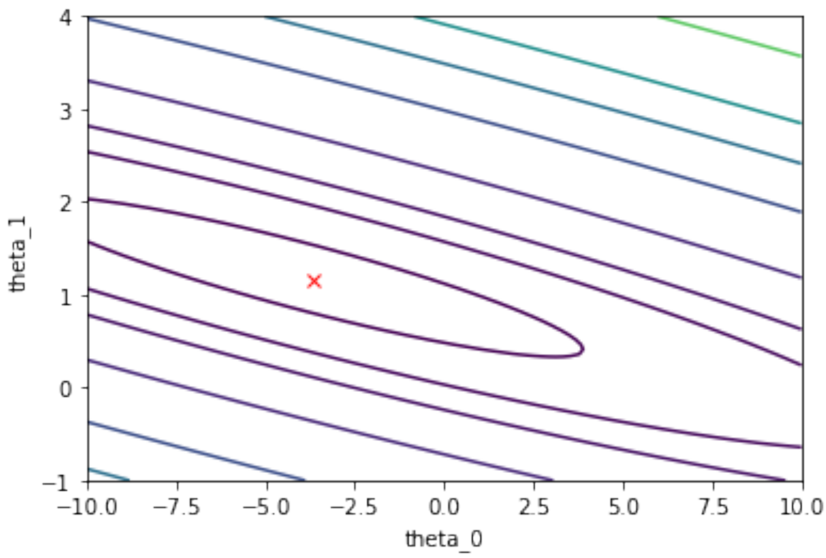
In [23]:

```
# This import registers the 3D projection, but is otherwise unused.
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D  # noqa: F401 unused import
from matplotlib import cm

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

surf = ax.plot_surface(theta0_vals, theta1_vals, J_vals, cmap=cm.coolwarm, lin
ewidth=0, antialiased=False)
plt.xlabel('theta_0')
plt.ylabel('theta_1');
```



In [24]:

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.contour(theta0_vals, theta1_vals, J_vals, levels=[10, 30, 50, 100, 200, 300
, 400, 600, 800])
ax.plot([theta[0, 0]], [theta[0, 1]], 'rx')
plt.xlabel('theta_0')
plt.ylabel('theta_1');
```



6. Загрузите набор данных ex1data2.txt из текстового файла.

In [25]:

```
data_row2 = np.genfromtxt('ex1data2.txt', delimiter=',')
data2 = pd.DataFrame(data_row2, columns=list(['size of the house', 'number of
bedrooms', 'price']))
data2.describe()
```

Out[25]:

	size of the house	number of bedrooms	price
count	47.000000	47.000000	47.000000
mean	2000.680851	3.170213	340412.659574
std	794.702354	0.760982	125039.899586
min	852.000000	1.000000	169900.000000
25%	1432.000000	3.000000	249900.000000
50%	1888.000000	3.000000	299900.000000
75%	2269.000000	4.000000	384450.000000
max	4478.000000	5.000000	699900.000000

7. Произведите нормализацию признаков. Повлияло ли это на скорость сходимости градиентного спуска? Ответ дайте в виде графика.

In [26]:

```
#FEATURENORMALIZE Normalizes the features in X
#   FEATURENORMALIZE(X) returns a normalized version of X where
#   the mean value of each feature is 0 and the standard deviation
#   is 1. This is often a good preprocessing step to do when
#   working with learning algorithms.

def featureNormalization(X):
    norm = (X - X.mean(axis=0)) / X.std(axis=0)
    mu = X.mean(axis=0)
    sigma = X.std(axis=0)
    return norm, mu, sigma
```

In [34]:

```
X = data2[['size of the house', 'number of bedrooms']]
X_norm, mu, sigma = featureNormalization(X)
X_norm.describe()
```

Out[34]:

	size of the house	number of bedrooms
count	4.700000e+01	4.700000e+01
mean	1.889741e-17	2.279500e-16
std	1.000000e+00	1.000000e+00
min	-1.445423e+00	-2.851859e+00
25%	-7.155897e-01	-2.236752e-01
50%	-1.417900e-01	-2.236752e-01
75%	3.376348e-01	1.090417e+00
max	3.117292e+00	2.404508e+00

In [35]:

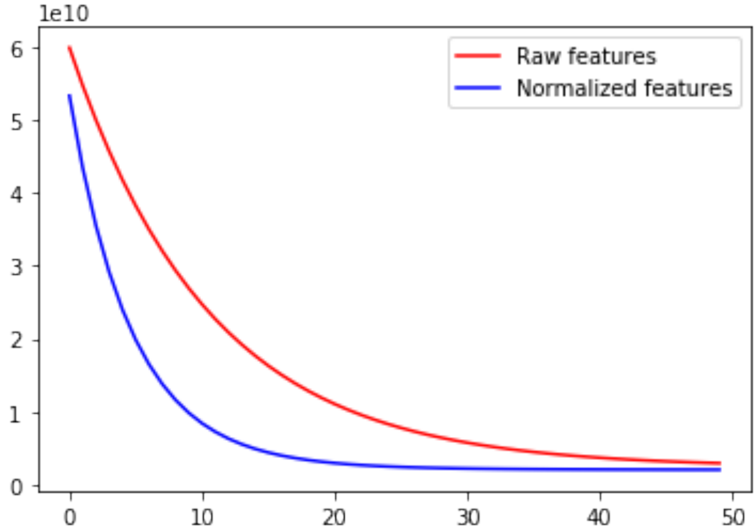
```
y = data2['price']
m = y.size
n = data_row2.shape[1] # Size of feature vector
X.insert(0, 'theta_0', 1)
X_norm.insert(0, 'theta_0', 1)

theta1 = np.zeros((1, n)) # theta coeficents for hypothesis func
theta2 = np.zeros((1, n)) # theta coeficents for hypothesis func
```

In [36]:

```
(theta1, j_history) = gradientDescent(X.to_numpy(), y.to_numpy(), theta1, 0.00
000001, 50)
(theta2, j_norm_history) = gradientDescent(X_norm.to_numpy(), y.to_numpy(), th
eta2, 0.1, 50)
```

In [37]:

```
p1 = plt.plot(range(0, len(j_history)), j_history, color='red')
plt.legend('Raw features')
p2 = plt.plot(range(0, len(j_norm_history)), j_norm_history, color='blue')
plt.legend((p1[0], p2[0]), ('Raw features', 'Normalized features'))
plt.show()
```



8. Реализуйте функции потерь J(θ) и градиентного спуска для случая многомерной линейной регрессии с использованием векторизации.

In [38]:

```
def gradientDescentV(X, y, theta, alpha, num_iters):
    m = y.shape[0]  # Size of training set
    j_history = []
    XT = X.T
    for i in range(0, num_iters):
        h = [np.matmul(x, theta.T)[0] for x in X]
        loss = h - y
        cost = np.sum(loss ** 2) / (2 * m)
        gradient = np.matmul(XT, loss) / m
        theta[0] -= alpha * gradient
        j_history.append(cost)

    return theta, j_history
```

In [40]:

```
iterations = 400
alpha = 0.01
theta_GD = np.zeros((1, n)) # theta coeficents for hypothesis func

(theta_GD, j_history) = gradientDescentV(X_norm.to_numpy(), y.to_numpy(), thet
a_GD, alpha, iterations)
print('Theta found by gradient descent: %s' % (theta_GD))
```

```
Theta found by gradient descent: [[334302.06399328 100087.11600585
3673.54845093]]
```

In [41]:

```
price = np.array([1, (1650 - mu[0]) / sigma[0], (3 - mu[1]) / sigma[1]]) @ the
ta_GD.T
print('Predicted price of a 1650 sq-ft, 3 br house (using gradient descent): %
f' % price)
```

```
Predicted price of a 1650 sq-ft, 3 br house (using gradient descen
t): 289314.620338
```

9. Покажите, что векторизация дает прирост производительности.

In [44]:

```
from timeit import default_timer as timer

iterations = 1000
alpha = 0.02
theta = np.zeros((1, n))

start = timer()
(theta, j_history) = gradientDescent(X_norm.to_numpy(), y.to_numpy(), theta, a
lpha, iterations)
end = timer()
gd_exec_time = end-start
print("Theta %s | Execution time: %f" % (theta, gd_exec_time))
```

```
Theta [[340412.65900156 110620.78816241  -6639.21215439]] | Execut
ion time: 0.633034
```

In [45]:

```
theta = np.zeros((1, n))

start = timer()
(theta, j_history) = gradientDescentV(X_norm.to_numpy(), y.to_numpy(), theta,
alpha, iterations)
end = timer()
gdv_exec_time = end-start
print("Theta %s | Execution time: %f" % (theta, gdv_exec_time))
```

```
Theta [[340412.65900156 110620.78816241  -6639.21215439]] | Execut
ion time: 0.148308
```

In [48]:

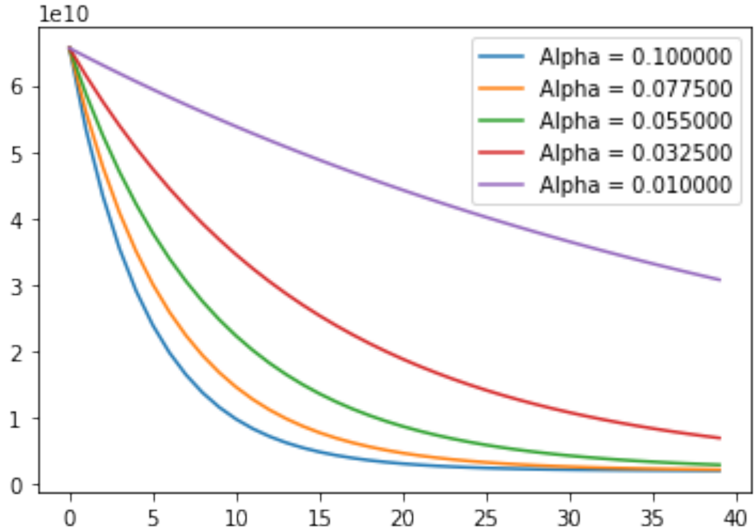
```
print('Vectorized gradient descent is %0.1fX faster' % (gd_exec_time / gdv_exe
c_time))
```

```
Vectorized gradient descent is 4.3X faster
```

10. Попробуйте изменить параметр α (коэффициент обучения). Как при этом изменяется график функции потерь в зависимости от числа итераций градиентного спуск? Результат изобразите в качестве графика.

In [49]:

```
alphas = np.linspace(0.1, 0.01, num=5)
plots = []
for alpha in alphas:
    theta = np.zeros((1, n))
    (theta, j_history) = gradientDescentV(X_norm.to_numpy(), y.to_numpy(), the
ta, alpha, 40)
    p = plt.plot(range(0, len(j_history)), j_history)
    plots.append(p[0])

plt.legend(plots, ["Alpha = %f" % (x) for x in alphas])
plt.show()
```



11. Постройте модель, используя аналитическое решение, которое может быть получено методом наименьших квадратов. Сравните результаты данной модели с моделью, полученной с помощью градиентного спуска.

In [50]:

```
# computes the closed-form solution to linear regression using the normal equa
tions
def normalEqn(X, y):
    XX = np.asmatrix(X)
    XT = XX.T
    return ((XT @ XX).I @ XT) @ y
```

In [51]:

```
theta_A = normalEqn(X.to_numpy(), y.to_numpy())
print('Theta computed from the normal equations: %s' % (theta_A))
```

```
Theta computed from the normal equations: [[89597.9095428    139.2
1067402 -8738.01911233]]
```

In [52]:

```
print('Theta computed from the normal normalized gradient descent: %s' % (thet
a_GD))
```

```
Theta computed from the normal normalized gradient descent: [[3343
02.06399328 100087.11600585   3673.54845093]]
```

In [53]:

```
price = np.array([1, 1650, 3]) @ theta_A.T
print('Predicted price of a 1650 sq-ft, 3 br house (using normal equations): %
f' % price)
```

```
Predicted price of a 1650 sq-ft, 3 br house (using normal equation
s): 293081.464335
```

In [54]:

```
price = np.array([1, (1650 - mu[0]) / sigma[0], (3 - mu[1]) / sigma[1]]) @ the
ta_GD.T
print('Predicted price of a 1650 sq-ft, 3 br house (using gradient descent): %
f' % price)
```

```
Predicted price of a 1650 sq-ft, 3 br house (using gradient descen
t): 289314.620338
```

Вывод

В данной работе было показано как работает модель **Линейной регресии**, для нахождения решения задачи линеной регрессии были использованы вычислительный метод градиентного спуска и аналитический метод наименьших квадратов. Для градиентного спуска показана зависимость скорости сходимости в зависимости от параметров и количества итераций и в пункте 11 приведены програзируемые значения для обоих методов. Также в пункте 7 было показано что такое нормализация признаков и как она влияет на работу алгоритма градиентного спуска.