



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 5

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

| Integrante | LU | Correo electrónico |
|---------------|--------|---------------------|
| Yago Pajariño | 546/21 | ypajarino@dc.uba.ar |



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

| | |
|------------------------------|----------|
| 5. Práctica 5 | 2 |
| 5.1. Ejercicio 1 | 2 |
| 5.2. Ejercicio 2 | 3 |
| 5.3. Ejercicio 3 | 4 |
| 5.4. Ejercicio 4 | 4 |
| 5.5. Ejercicio 5 | 5 |
| 5.6. Ejercicio 6 | 5 |
| 5.7. Ejercicio 7 | 5 |
| 5.8. Ejercicio 8 | 6 |
| 5.9. Ejercicio 9 | 7 |
| 5.10. Ejercicio 10 | 7 |
| 5.11. Ejercicio 11 | 8 |
| 5.12. Ejercicio 12 | 10 |
| 5.13. Ejercicio 13 | 11 |
| 5.14. Ejercicio 14 | 11 |
| 5.15. Ejercicio 15 | 12 |
| 5.16. Ejercicio 16 | 13 |
| 5.17. Ejercicio 17 | 13 |
| 5.18. Ejercicio 18 | 13 |
| 5.19. Ejercicio 19 | 14 |
| 5.20. Ejercicio 20 | 14 |
| 5.21. Ejercicio 21 | 15 |
| 5.22. Ejercicio 22 | 16 |

5. Práctica 5

5.1. Ejercicio 1

5.1.A. Pregunta i

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $7a + 11b = 10$

Verifico que existe solución

Dado que $(7 : 11) = 1 \implies 1|10 \implies$ existe solución.

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{aligned}7s + 11t &= 1 \\7(-3) + 11 \cdot 2 &= 1 \\7(-3) \cdot 10 + 11 \cdot 2 \cdot 10 &= 1 \cdot 10 \\7(-30) + 11 \cdot 20 &= 10 \\-210 + 220 &= 10\end{aligned}$$

Luego $(-30, 20)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$$7a + 11b = 0 \iff 7a = -11b \iff -11|7a \iff -11|a \iff a = -11k$$

$$7a + 11b = 0 \iff 7a = -11b \iff 7(-11k) = 11b \iff b = 7k$$

Luego $(-11k, 7k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-11k, 7k) + (-30, 20) = (-11k - 30, 7k + 20); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Verifico

Sea $(a, b) = (-11k - 30, 7k + 20)$ luego,

$$\begin{aligned}7a + 11b = 10 &\iff 7(-11k - 30) + 11(7k + 20) = 10 \\&\iff 7(-11k - 30) + 11(7k + 20) = 10 \\&\iff 7 \cdot -11k - 210 + 11 \cdot 7k + 220 = 10 \\&\iff -210 + 220 = 10\end{aligned}$$

Verificado.

5.1.B. Pregunta ii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $20a + 16b = 30$

Verifico que existe solución

$$(20 : 16) = 4 \wedge 4 \nmid 30$$

Por lo tanto no hay solución en \mathbb{Z}^2 para la ecuación.

5.1.C. Pregunta iii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $39a - 24b = 6$

Verifico que existe solución

$(39 : 24) = 3 \wedge 3|6$ luego existe solución en F^2

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$20a + 16b = 30 \rightsquigarrow 13a - 8b = 2$$

Busco una solución particular

$$13.(2) - 8.(3) = 26 - 24 = 2$$

Luego $(2, 3)$ es solución particular.

Solución del homogéneo asociado

$$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \implies 13|8b \iff 13|b \iff b = 13k$$

$$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \iff 13a = 8(13k) \iff a = 8k$$

Luego $(8k, 13k)$ es solución del homogéneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (8k, 13k) + (2, 3) = (8k + 2, 13k + 3); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Verifico

Sea $(a, b) = (8k + 2, 13k + 3)$ luego,

$$\begin{aligned} 39a - 24b = 6 &\iff 39(8k + 2) - 24(13k + 3) = 6 \\ &\iff 39.8k + 78 - 24.13k - 72 = 6 \\ &\iff 78 - 72 = 6 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.D. Pregunta iv

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $1555a - 300b = 11$

Verifico que existe solución

$$(1555 : 300) = 5 \wedge 4 \nmid 5$$

Por lo tanto no hay solución en \mathbb{Z}^2 para la ecuación.

5.2. Ejercicio 2

Primero busco soluciones $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ para la ecuación $33a + 9b = 120$

Verifico que existe solución

$$(33 : 9) = 3 \wedge 3|120 \implies \text{existe solución.}$$

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$33a + 9b = 120 \rightsquigarrow 11a + 3b = 40$$

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{aligned} 11.s + 3.t &= 1 \\ 11.(2) + 3.(-7) &= 1 \\ 11.2.(40) + 3.(-7).(40) &= 1.(40) \\ 11.80 + 3.(-280) &= 40 \end{aligned}$$

Luego $(80, -280)$ es solución particular.

Solución del homogéneo asociado

$$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11 \mid -3b \implies 11 \mid b \implies b = 11k$$

$$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11a = -3(11k) \implies a = -3k$$

Luego $(-3k, 11k)$ es solución del homogéneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-3k, 11k) + (80, -280) = (-3k + 80, 11k - 280); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego tengo definidas las restricciones para a y b de tal forma que cumplan con la diofántica, ahora uso los datos de divisibilidad.

$$a = -3k + 80 \implies -3k + 80 \equiv 0(4) \implies k \equiv 0(4)$$

$$b = 11k - 280 \implies 11k - 280 \equiv 0(8) \implies k \equiv 0(8)$$

$$\text{Pero } k \equiv 0(8) \iff k \equiv 0(4)$$

$$\text{Luego } k = 8n \implies a = 3(8n) + 80 \wedge b = 11(8n) - 280; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Rta.: } (a, b) = (24n + 80, 88n - 280); \forall n \in \mathbb{Z}$$

5.3. Ejercicio 3

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen $39a + 48b = 135$

Verifico que existe solución

$$(39 : 135) = 3 \wedge 3 \mid 135 \implies \text{existe solución.}$$

Coprimizar

Dado que el MCD es distinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$39a + 48b = 135 \rightsquigarrow 13a + 16b = 45$$

Busco una solución particular

$(225, -180)$ es solución particular.

Solución del homogéneo asociado

$$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13 \mid -16b \implies 13 \mid b \implies b = 13k$$

$$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13a = -16(13k) \implies a = -16k$$

Luego $(-16k, 13k)$ es solución del homogéneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-16k, 13k) + (225, -180) = (-16k + 225, 13k - 180); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego,

$$a \geq 0 \implies -16k + 225 \geq 0 \implies 16k \leq 225 \implies k \leq \frac{225}{16} \implies k \leq 14$$

$$b \geq 0 \implies 13k - 180 \geq 0 \implies 13k \geq 180 \implies k \geq \frac{180}{13} \implies k \geq 14$$

Luego $14 \leq k \leq 14 \implies k = 14 \implies$ se compran 1 unidad de a y 2 de b , gastando 135 pesos.

5.4. Ejercicio 4

$$1. \quad 17x \equiv 3(11) \iff 6x \equiv 3(11) \iff 2.6 \equiv 2.3(11) \iff x \equiv 6(11)$$

$$2. \quad 56x \equiv 28(35) \iff 21x \equiv 28(35) \iff 3x \equiv 4(5) \iff 6x \equiv 8(5) \iff x \equiv 3(5)$$

$$3. \quad 56x \equiv 2(884) \text{ No tiene solución pues } (56 : 884) = 4 \nmid 2$$

$$4. \quad 78x \equiv 30(12126) \iff 13x \equiv 5(2021) \iff 311.13x \equiv 311.5(2021) \iff x \equiv 1551(2021)$$

5.5. Ejercicio 5

Primero resuelvo la diofántica: busco $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 28a + 10b = 26$

Verifico que existe solución

$(28 : 10) = 2 \wedge 2|26 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$28a + 10b = 26 \iff 14a + 5b = 13$$

Busco una solución particular

$(-13, 39)$ es solución particular.

Solución del homogéneo asociado

$$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14|-5b \implies 14|b \implies b = 14k$$

$$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14a = -5(14k) \implies a = -5k$$

Luego $(-5k, 14k)$ es solución del homogéneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-5k, 14k) + (-13, 39) = (-5k - 13, 14k + 39); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego $a = -5 - 13 \wedge b = 14k + 39$. Usando el dato de la congruencia,

$$\begin{aligned} b \equiv 2a(5) &\iff 14k + 39 \equiv 2(-5k - 13)(5) \\ &\iff 4k + 4 \equiv 4(5) \\ &\iff 4(k + 1) \equiv 4(5) \\ &\iff k + 1 \equiv 1(5) \\ &\iff k \equiv 0(5) \end{aligned}$$

Luego se que $k = 5n; n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, las soluciones serán $(a, b) = (-25n - 13, 70n + 39); n \in \mathbb{Z}$

5.6. Ejercicio 6

$$\begin{aligned} 7a \equiv 5(18) &\iff (-5).7.a \equiv (-5).5(18) \\ &\iff -35a \equiv -25(18) \\ &\iff a \equiv 11(18) \end{aligned}$$

Luego el resto de dividir a a por 18 es 11.

5.7. Ejercicio 7

Primero busco los $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 110x + 250y = 100$

Verifico que existe solución

$(110 : 250) = 10 \wedge 10|100 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$110x + 250y = 100 \iff 11x + 25y = 10$$

Busco una solución particular

$(-90, 40)$ es solución particular.

Solución del homogéneo asociado

$$11x + 25y = 0 \iff 11x = -25y \implies 11 \mid -25y \implies 11 \mid y \implies y = 11k$$

$$11x + 25y = 0 \iff 11x = -25y \implies 11x = -25(11k) \implies x = -25k$$

Luego $(-25k, 11k)$ es solución del homogéneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-25k, 11k) + (-90, 40) = (-25k - 90, 11k + 40); \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Luego } x = -25k - 90 \wedge y = 11k + 40,$$

$$\begin{aligned} 37^2 \mid (x - y)^{4321} &\iff 37^2 \mid (-25k - 90 - 11k - 40)^{4321} \\ &\iff 37^2 \mid (-36k - 130)^{4321} \end{aligned}$$

Pero por propiedades de la divisibilidad,

$$\begin{aligned} 37^2 \mid (-36k - 130)^{4321} &\iff 37 \mid (-36k - 130) \\ &\iff -36k \equiv 130(37) \\ &\iff k \equiv 4(37) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x, y) = (-25n - 90, 11n + 40)$ para todo $n \equiv 4(37)$

5.8. Ejercicio 8

Sea $d = (2a - 3 : 4a^2 + 10a - 10)$

Busco llegar a una expresión del tipo $d \mid n$ con $n \in \mathbb{Z}$

Luego,

$$\begin{aligned} d \mid 2a - 3 \wedge d \mid 4a^2 + 10a - 10 &\iff d \mid 2a(2a - 3) - 4a^2 - 10a + 10 \\ &\iff d \mid 4a^2 - 6a - 4a^2 - 10a + 10 \\ &\iff d \mid -16a + 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iff d \mid -16a + 10 \wedge d \mid 2a - 3 &\iff d \mid -16a + 10 + 8(2a - 3) \\ &\iff d \mid -16a + 10 + 10a - 24 \\ &\iff d \mid -14 \\ &\iff d \in \text{Div}_+(-14) = \{1, 2, 7, 14\} \end{aligned}$$

$$\blacksquare d = 2 \implies 2 \mid 2a - 3 \implies 2a - 3 \equiv 0(2) \implies 0 \equiv 3(2) \text{ ABS}$$

$$\blacksquare d = 7 \implies 7 \mid 2a - 3 \implies 2a - 3 \equiv 0(7) \implies 2a \equiv 3(7) \implies a \equiv 5(7)$$

Luego con $a \equiv 5(7)$ se tiene,

$$\begin{aligned} 4a^2 + 10a - 10 &\equiv 4 \cdot 25 + 10 \cdot 5 - 10(7) \\ &\equiv 2 + 1 + 4(7) \\ &\equiv 7(7) \\ &\equiv 0(7) \end{aligned}$$

Así, para $a \equiv 5(7)$ el MCD es igual a 7. No pruebo con 14 ya que $14 = 2 \cdot 7$ y si $2 \nmid 2a - 3$ tampoco lo hará 14.

Rta.: Con $a \equiv 5(7)$ el MCD $\neq 1$

5.9. Ejercicio 9

Sea $d = (5a + 8 : 7a + 3)$

Busco una expresión del tipo $d|n$ con $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} d|5a + 8 \wedge d|7a + 3 &\iff d|7(5a + 8) - 5(7a + 3) \\ &\iff d|35a + 56 - 35a - 15 \\ &\iff d|41 \end{aligned}$$

Luego $d \in \text{Div}_+(41) \iff d \in \{1, 41\}$

Con $d = 41$,

$$\begin{aligned} d = 41 &\implies 41|5a + 8 \\ &\iff 5a + 8 \equiv 0(41) \\ &\iff 5a \equiv 33(41) \\ &\iff 8.5a \equiv 8.33(41) \\ &\iff -a \equiv 18(41) \\ &\iff a \equiv 23(41) \end{aligned}$$

Con $a \equiv 23(41)$

$7a + 3 \equiv 7.23 + 3 \equiv 0(41)$

Rta.: $\begin{cases} (5a + 8 : 7a + 3) = 41 & a \equiv 23(41) \\ (5a + 8 : 7a + 3) = 1 & a \not\equiv 23(41) \end{cases}$

5.10. Ejercicio 10

5.10.A. Pregunta i

$$\begin{cases} a \equiv 3(10) \\ a \equiv 2(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$$

El TCR me asegura que existe una solución $x \equiv n(630)$ con $0 \leq n \leq 630$ pues 10,7,9 son primos dos a dos.

Quiebro el sistema de ecuaciones en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 3(10) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(10) \\ a \equiv 2(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} a \equiv 0(10) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$$

Busco soluciones a cada sistema por separado.

$$\text{S1, } \begin{cases} 0 \equiv 3(10) \\ 0 \equiv 0(63) \end{cases} \implies a = 63k \implies 63k \equiv 3(10) \implies 3k \equiv 3(10) \implies k \equiv 1(10)$$

Luego $a = 63 \cdot k = 63 \cdot 1 = 63$

$$\text{S2, } \begin{cases} a \equiv 2(7) \\ a \equiv 0(90) \end{cases} \implies a = 90k \implies 90k \equiv 2(7) \implies 6k \equiv 2(7) \implies k \equiv 5(7)$$

Luego $a = 90k = 90 \cdot 5 = 450$

$$S3, \begin{cases} a \equiv 5(9) \\ a \equiv 0(70) \end{cases} \implies a = 70k \implies 70k \equiv 5(9) \implies 7k \equiv 5(9) \implies k \equiv 2(9)$$

Luego $a = 70 \cdot k = 70 \cdot 2 = 140$

Por lo tanto se que $x \equiv 63 + 450 + 140 = 653(630)$ es solución al sistema.

Rta.: $x \equiv 653 \equiv 23(630)$ es solución al sistema.

5.10.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} a \equiv 1(6) \\ a \equiv 2(20) \\ a \equiv 3(9) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 1(2) \\ a \equiv 2(4) \implies a \equiv 0(2) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 3(9) \implies a \equiv 0(3) \end{cases} \quad \text{Luego el sistema es incompatible.}$$

5.10.C. Pregunta iii

$$\begin{cases} a \equiv 1(12) \\ a \equiv 7(10) \\ a \equiv 4(9) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 1(4) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 7(5) \\ a \equiv 7(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 4(9) \implies a \equiv 1(3) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 4(9) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

$$S1: \begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(9) \end{cases} \quad S2: \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 0(9) \end{cases} \quad S3: \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 4(9) \end{cases}$$

Busco soluciones a cada sistema,

$$S1, \begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 0(45) \end{cases} \implies a = 45k \implies 45k \equiv 1(4) \implies k \equiv 1(4)$$

Luego $x_1 = 45$

$$S2, \begin{cases} a \equiv 2(5) \\ a \equiv 0(36) \end{cases} \implies a = 36k \implies 36k \equiv 2(5) \implies k \equiv 2(5)$$

Luego $x_2 = 36 \cdot 2 = 72$

$$S3, \begin{cases} a \equiv 4(9) \\ a \equiv 0(20) \end{cases} \implies a = 20k \implies 20k \equiv 4(9) \implies k \equiv 2(9)$$

Luego $x_3 = 20 \cdot 2 = 40$

Entonces sea $x = x_1 + x_2 + x_3 = 45 + 72 + 40 = 157$

El TCR me asegura que hay una única solución del sistema MOD 180

Rta.: $x \equiv 157(180)$ es solución al sistema.

5.11. Ejercicio 11

5.11.A. Pregunta i

$$\begin{cases} 3a \equiv 4(5) \\ 5a \equiv 4(6) \\ 6a \equiv 2(7) \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \cdot 3a \equiv 3 \cdot 4(5) \\ 5 \cdot 5a \equiv 5 \cdot 4(6) \\ 6 \cdot 6a \equiv 6 \cdot 2(7) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 2(6) \\ a \equiv 5(7) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(6) \\ a \equiv 0(7) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 2(6) \\ a \equiv 0(7) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(6) \\ a \equiv 5(7) \end{cases}$$

Busco soluciones de cada sistema.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(42) \end{cases} \implies a = 42k \implies 42k \equiv 3(5) \implies 2k \equiv 3(5) \implies k \equiv 4(5)$$

$$\text{Luego } x_1 = 42 \cdot 4 = 168$$

$$\text{S2: } \begin{cases} a \equiv 2(6) \\ a \equiv 0(35) \end{cases} \implies a = 35k \implies 35k \equiv 2(6) \implies -k \equiv 2(6) \implies k \equiv 4(6)$$

$$\text{Luego } x_2 = 35 \cdot 4 = 140$$

$$\text{S3: } \begin{cases} a \equiv 5(7) \\ a \equiv 0(30) \end{cases} \implies a = 30k \implies 30k \equiv 5(7) \implies 2k \equiv 5(7) \implies k \equiv 6(7)$$

$$\text{Luego } x_3 = 30 \cdot 6 = 180$$

$$\text{Así, defino } x = x_1 + x_2 + x_3 = 168 + 140 + 180 = 488$$

Rta.: $a \equiv 488 \equiv 68(210)$ es solución al sistema.

5.11.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} 3a \equiv 1(10) \\ 5a \equiv 3(6) \\ 9a \equiv 1(14) \end{cases} \iff \begin{cases} -a \equiv 3(10) \implies a \equiv 7(10) \\ a \equiv 3(6) \\ -a \equiv 3(14) \implies a \equiv 11(14) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(10) \\ a \equiv 3(6) \\ a \equiv 11(14) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 7(2) \\ a \equiv 3(3) \\ a \equiv 3(2) \\ a \equiv 11(7) \\ a \equiv 11(2) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 11(14) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 11(14) \end{cases}$$

Busco soluciones de cada sistema.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(42) \end{cases} \implies a = 42k \implies 42k \equiv 7(5) \implies 2k \equiv 2(5) \implies k \equiv 1(5)$$

$$\text{Luego } x_1 = 42k = 42 \cdot 1 = 42$$

$$\text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(210) \end{cases}$$

$$\text{Luego } x_2 = 0$$

$$\text{S3: } \begin{cases} a \equiv 11(14) \\ a \equiv 0(15) \end{cases} \implies a = 15k \implies 15k \equiv 11(14) \implies k \equiv 11(14)$$

$$\text{Luego } x_3 = 15k = 15 \cdot 11 = 165$$

$$\text{Por lo tanto, } x = x_1 + x_2 + x_3 = 42 + 0 + 165 = 207$$

Rta.: $a \equiv 207(210)$

5.11.C. Pregunta iii

$$\begin{cases} 15a \equiv 10(35) \\ 21a \equiv 15(8) \\ 18a \equiv 24(30) \end{cases} \iff \begin{cases} 3a \equiv 2(7) \\ 21a \equiv 15(8) \\ 3a \equiv 4(5) \end{cases} \iff \begin{cases} -a \equiv 4(7) \implies a \equiv 3(7) \\ a \equiv 3(8) \\ -a \equiv 12(5) \implies a \equiv 3(5) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3(7) \\ a \equiv 3(8) \\ a \equiv 3(5) \end{cases}$$

Rta.: $a \equiv 3(280)$

5.12. Ejercicio 12

5.12.A. Pregunta i

$$\begin{cases} a \equiv 5(6) \\ a \equiv 3(10) \\ a \equiv 5(8) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 5(3) \implies a \equiv 2(3) \\ a \equiv 5(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 3(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 5(8) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 5(8) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(8) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(3) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(8) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 5(8) \end{cases}$$

Busco soluciones a cada sistema.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 0(40) \end{cases} \implies a = 40k \implies 40k \equiv 2(3) \implies k \equiv 2(3)$$

Luego $x_1 = 40 \cdot 2 = 80$

$$\text{S2: } \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(24) \end{cases} \implies a = 24k \implies 24k \equiv 3(5) \implies -k \equiv 3(5) \implies k \equiv 2(5)$$

Luego $x_2 = 24 \cdot 2 = 48$

$$\text{S3: } \begin{cases} a \equiv 5(8) \\ a \equiv 0(15) \end{cases} \implies a = 15k \implies 15k \equiv 5(8) \implies k \equiv 3(8)$$

Luego $x_3 = 15 \cdot 3 = 45$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 80 + 48 + 45 = 173$

Rta.: $r_{480}(a) = 173$

5.12.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ 6a \equiv 9(15) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ 2a \equiv 3(5) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 4(5) \end{cases}$$

Divido el sistema en dos.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 0(5) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(21) \\ a \equiv 5(5) \end{cases}$$

Busco soluciones a los sistemas.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 0(5) \end{cases} \implies a = 5k \implies 5k \equiv 13(21) \implies k \equiv 11(21)$$

Luego $x_1 = 5k = 5 \cdot 11 = 55$

$$\text{S2: } \begin{cases} a \equiv 4(5) \\ a \equiv 0(21) \end{cases} \implies a = 21k \implies 21k \equiv 4(5) \implies k \equiv 4(5)$$

Luego $x_2 = 21k = 21 \cdot 4 = 84$

Por lo tanto $x = x_1 + x_2 = 55 + 84 = 139 \implies a \equiv 35(105)$

Rta.: 34 es el entero positivo más chico que cumple lo pedido.

5.13. Ejercicio 13

$$\begin{cases} a \equiv 4(12) \\ a \equiv 43(63) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 4(3) \\ a \equiv 4(4) \\ a \equiv 43(9) \\ a \equiv 43(7) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases} \implies a \equiv 1(3) \iff \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(9) \\ a \equiv 0(7) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 0(7) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases}$$

Busco soluciones a los sistemas.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 0(252) \end{cases}$$

Luego $x_1 = 0$

$$\text{S2: } \begin{cases} a \equiv 7(9) \\ a \equiv 0(28) \end{cases} \implies a = 28k \implies 28k \equiv 7(9) \implies k \equiv 7(9)$$

Luego $x_2 = 28k = 28 \cdot 7 = 196$

$$\text{S3: } \begin{cases} a \equiv 1(7) \\ a \equiv 0(36) \end{cases} \implies a = 36k \implies 36k \equiv 1(7) \implies k \equiv 1(7)$$

Luego $x_3 = 36k = 36 \cdot 1 = 36$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 196 + 36 = 232 \implies a \equiv 232(252)$

Luego $a \equiv 232(252) \iff a = 252k + 232$

Ahora uso que $12600 \leq a \leq 13300$,

$$\begin{aligned} 12600 &\leq a \leq 13300 \\ 12600 &\leq 252k + 232 \leq 13300 \\ \frac{12600 - 232}{252} &\leq k \leq \frac{13300 - 232}{252} \\ 49,07 &\leq k \leq 51,85 \end{aligned}$$

Luego $k \in \{50, 51\}$

$$\blacksquare k = 50 \implies a = 12832$$

$$\blacksquare k = 51 \implies a = 13084$$

Rta.: Había 12832 o 13084 latas.

5.14. Ejercicio 14

$$a^2 \equiv 21(238) \iff \begin{cases} a^2 \equiv 21(2) \\ a^2 \equiv 21(7) \\ a^2 \equiv 21(17) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 \equiv 1(2) \\ a^2 \equiv 0(7) \\ a^2 \equiv 4(17) \end{cases}$$

Usando tabla de restos llego a

$$\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(17) \vee a \equiv 15(17) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

$$\begin{array}{lll} \text{S1: } \begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(17) \vee a \equiv 0(17) \end{cases} & \text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(17) \vee a \equiv 0(17) \end{cases} & \text{S3: } \begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(17) \vee a \equiv 15(17) \end{cases} \end{array}$$

Busco soluciones de cada sistema.

$$\text{S1: } \begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(119) \end{cases} \implies a = 119k \implies 119k \equiv 1(2) \implies k \equiv 1(2)$$

$$\text{Luego } x_1 = 119$$

$$\text{S2: } \begin{cases} a \equiv 0(238) \end{cases}$$

$$\text{Luego } x_2 = 0$$

$$\text{S3a: } \begin{cases} a \equiv 2(17) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \implies a = 14k \implies 14k \equiv 2(17) \implies k \equiv 5(17)$$

$$\text{Luego } x_{3a} = 14 \cdot 5 = 70$$

$$\text{S3b: } \begin{cases} a \equiv 15(17) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \implies a = 14k \implies 14k \equiv 15(17) \implies k \equiv 12(17)$$

$$\text{Luego } x_{3b} = 14 \cdot 12 = 168$$

Así, obtengo dos soluciones:

- $x_a = x_1 + x_2 + x_{3a} = 119 + 0 + 70 = 189$
- $x_b = x_1 + x_2 + x_{3b} = 119 + 0 + 168 = 287 \equiv 49(238)$

Rta.: Los posibles restos son 49 y 189.

5.15. Ejercicio 15

Rdo. PTF: $a^{p-1} \equiv 1(p) \iff p \text{ es primo} \wedge (a : p) = 1$

5.15.A. Pregunta i

Como 11 es primo por PTF $a^{10} \equiv 1(11)$ si $(a : 11) = 1$

$$\begin{aligned} 71^{22283} &\equiv 5^{22283}(11) \\ &\equiv 5^{10q+3}(11) \\ &\equiv 5^{10^q} \cdot 5^3(11) \\ &\equiv 1^q \cdot 125(11) \\ &\equiv 4(11) \end{aligned}$$

$$\text{Luego } r_{11}(71^{22283}) = 4$$

5.15.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned} 5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138} &\equiv 5.7^{2451} + 3.0^{2345} - 10.8^{138} (13) \\ &\equiv 5.7^{12 \cdot q + 3} - 10.8^{12q+6} (13) \\ &\equiv 5.7^{12^q} \cdot 7^3 - 10.8^{12^q} \cdot 8^6 (13) \\ &\equiv 25 - 120 (13) \\ &\equiv 9 (13) \end{aligned}$$

Luego $r_{13}(5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138}) = 9$

5.16. Ejercicio 16

5.16.A. Pregunta i

$$2^{194}X \equiv 7(97)$$

Como $(2 : 97) = 1$ y 97 es primo $\implies 2^{96} \equiv 1(97)$

$$\begin{aligned} 2^{194}X \equiv 7(97) &\iff (2^{96})^2 \cdot 4X \equiv 7(97) \\ &\iff (1)^2 \cdot 4X \equiv 7(97) \\ &\iff 4X \equiv 7(97) \\ &\iff -24 \cdot 4X \equiv -24 \cdot 7(97) \\ &\iff X \equiv 26(97) \end{aligned}$$

5.16.B. Pregunta ii

$$5^{86}X \equiv 3(89)$$

Como $(5 : 89) = 1$ y 89 es primo $\implies 5^{88} \equiv 1(89)$

Luego,

$$\begin{aligned} 5^{86}X \equiv 3(89) &\iff 5^{88}X \equiv 5^2 \cdot 3(89) \\ &\iff X \equiv 375(89) \\ &\iff X \equiv 19(89) \end{aligned}$$

5.17. Ejercicio 17

TODO

5.18. Ejercicio 18

Se que $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ y que $a \perp 561$ luego,

$$a^{560} \equiv 1(561) \iff \begin{cases} a^{560} \equiv 1(3) \iff (a^2)^{280} \equiv 1(3) \\ a^{560} \equiv 1(11) \iff (a^{10})^{56} \equiv 1(11) \\ a^{560} \equiv 1(17) \iff (a^{16})^{35} \equiv 1(17) \end{cases}$$

Los tres verdaderos por el PTF.

5.19. Ejercicio 19

5.19.A. Pregunta i

$$\begin{cases} 2^{2013}X \equiv 6(13) \\ 5^{2013}X \equiv 4(7) \\ 7^{2013}X \equiv 2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} 2^9X \equiv 6(13) \\ 5^3X \equiv 4(7) \\ 7^1X \equiv 2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} 5X \equiv 6(13) \\ 6X \equiv 4(7) \\ 7X \equiv 2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} -5.5.X \equiv -5.6(13) \\ X \equiv 3(7) \\ -2.7.X \equiv -2.2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} X \equiv 9(13) \\ X \equiv 3(7) \\ X \equiv 1(5) \end{cases}$$

Ahora puedo usar el Teorema Chino del Resto. Divido el sistema en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} X \equiv 9(13) \\ X \equiv 0(7) \\ X \equiv 0(5) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} X \equiv 0(13) \\ X \equiv 3(7) \\ X \equiv 0(5) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} X \equiv 0(13) \\ X \equiv 0(7) \\ X \equiv 1(5) \end{cases}$$

Busco soluciones a cada sistema.

$$\text{S1: } \begin{cases} X \equiv 9(13) \\ X \equiv 0(35) \end{cases} \implies X \equiv 35k \implies 35k \equiv 9(13) \implies 9k \equiv 9(13) \implies k \equiv 1(13)$$

$$\text{Luego } x_1 = 35.k = 35.1 = 35$$

$$\text{S2: } \begin{cases} X \equiv 3(7) \\ X \equiv 0(65) \end{cases} \implies X \equiv 65k \implies 65k \equiv 3(7) \implies 2k \equiv 3(7) \implies k \equiv 5(7)$$

$$\text{Luego } x_2 = 65.k = 65.5 = 325$$

$$\text{S3: } \begin{cases} X \equiv 1(5) \\ X \equiv 0(91) \end{cases} \implies X \equiv 91k \implies 91k \equiv 1(5) \implies k \equiv 1(5)$$

$$\text{Luego } x_3 = 91.k = 91.1 = 91$$

$$\text{Así, } X \equiv x_1 + x_2 + x_3 \equiv 35 + 325 + 91 \equiv 451(455)$$

5.19.B. Pregunta ii

TODO

5.20. Ejercicio 20

5.20.A. Pregunta i

Se que $70 = 2.5.7$

$$\text{Luego sea } x = 3.7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 + 1(2) \\ x \equiv 3.2^{135} + 4^{78} + 1(5) \\ x \equiv 3^{78} + 4^{222}(7) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 3.2^3 + 4^2 + 1(5) \\ x \equiv 3^0 + 4^0(7) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 1(5) \\ x \equiv 2(7) \end{cases}$$

Ahora puedo usar el TCR. Divido el sistema en tres.

$$\text{S1: } \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 0(5) \\ x \equiv 0(7) \end{cases} \quad \text{S2: } \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 1(5) \\ x \equiv 0(7) \end{cases} \quad \text{S3: } \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 0(5) \\ x \equiv 2(7) \end{cases}$$

Busco soluciones a cada sistema.

$$\text{S1: } \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 0(35) \end{cases}$$

$$\text{Luego } x_1 = 0$$

$$\text{S2: } \begin{cases} x \equiv 1(5) \\ x \equiv 0(14) \end{cases} \implies x = 14k \implies 14k \equiv 1(5) \implies k \equiv 4(5)$$

Luego $x_2 = 14k = 14 \cdot 4 = 56$

$$\text{S3: } \begin{cases} x \equiv 2(7) \\ x \equiv 0(10) \end{cases} \implies x = 10k \implies 10k \equiv 2(7) \implies 3k \equiv 2(7) \implies k \equiv 3(7)$$

Luego $x_3 = 10k = 10 \cdot 3 = 30$

Así, $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 56 + 30 = 86 \equiv 16(70)$

Rta.: $r_{70}(3 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}) = 16$

5.20.B. Pregunta ii

Se que $56 = 8 \cdot 7$ luego voy a buscar congruencias de la sumatoria mod 7 y mod 8.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv n_1(7) \\ \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv n_2(8) \end{cases}$$

Módulo 7

- $(i : 7) = 1 \implies i^6 \equiv 1(7) \implies (i^6)^7 \equiv 1(7) \implies i^{42} \equiv 1(7)$
- $(i : 7) \neq 1 \implies 7|i \implies i^{42} \equiv 0(7)$

$$\text{Luego } \sum_{i=1}^{1759} i^{42} = \sum_{i=1 \wedge 7|i}^{1759} i^{42} + \sum_{i=1 \wedge 7 \nmid i}^{1759} i^{42}$$

Por lo tanto, necesito saber la cantidad de números x entre 1 y 1759 tales que $x \not\equiv 0(7)$. Se que $1759 = 251 \cdot 7 + 2$ luego hay $1759 - 251 = 1508$ que cumplen lo pedido.

Entonces, $\sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv 1508 \equiv 3(7)$

Módulo 8

- $2|i \implies i = 2k \implies i^{42} = (2k)^{42} = (2^3)^{14} \cdot k^{42} \implies i^{42} \equiv 0(8)$
- $2 \nmid i \implies (i \equiv 1(8)) \vee (i \equiv 3(8)) \vee (i \equiv 5(8)) \vee (i \equiv 7(8)) \implies i^{42} \equiv 1(8)$

El segundo ítem se puede probar con tabla de restos.

$$\text{Luego, } \sum_{i=1}^{1759} i^{42} = \sum_{i=1 \wedge 2|i}^{1759} i^{42} + \sum_{i=1 \wedge 2 \nmid i}^{1759} i^{42} \equiv 0 + 880 \equiv 0(8)$$

$$\text{Entonces } \begin{cases} x \equiv 3(7) \\ x \equiv 0(8) \end{cases} \implies x \equiv 24(56)$$

Por TCR es la única solución al sistema. Luego $r_{56}(\sum_{i=1}^{1759} i^{42}) = 24$

5.21. Ejercicio 21

$$2^{2^n} \equiv r(13) \text{ y se que } (2 : 13) = 1 \text{ y } 13 \text{ es primo} \implies 2^{12} \equiv 1(13)$$

$$\text{Si escribo } 2^n = 12k + r_{12}(2^n) \text{ luego } 2^{12k+r} \equiv (2^{12})^k \cdot 2^r(13) \equiv 2^{r_{12}(2^n)}(13)$$

Ahora estudio congruencia de 2^n mod 12

$$2^n \equiv k(12) \iff \begin{cases} 2^n \equiv k(3) \\ 2^n \equiv k(4) \end{cases}$$

Caso mod 4

- $n = 1 \implies 2^n \equiv 2(4)$
- $n \geq 2 \implies 2^n \equiv 0(4)$

Caso mod 3

Por PTF $2^2 \equiv 1(3)$ pues $(2 : 3) = 1$ y 3 es primo.

Luego $n = 2j + r_2(n) \implies 2^n \equiv k(3) \iff 2^{2j+r_2(n)} \equiv (2^2)^j \cdot 2^{r_2(n)} \equiv 2^{r_2(n)}$

Así llego a que,

$$2^n \equiv 0(4) \text{ o } 2^n \equiv 2(4)$$

$$2^n \equiv 1(3) \text{ o } 2^n \equiv 2(3)$$

$$\blacksquare n = 1 \implies \begin{cases} 2^1 \equiv 2(4) \\ 2^1 \equiv 2(3) \end{cases} \implies 2 \equiv 2(12)$$

$$\blacksquare n \geq 2 \wedge n \bmod 2 = 0 \implies \begin{cases} 2^n \equiv 0(4) \\ 2^n \equiv 1(3) \end{cases} \implies 2^n \equiv 4(12)$$

$$\blacksquare n \geq 2 \wedge n \bmod 2 = 1 \implies \begin{cases} 2^n \equiv 0(4) \\ 2^n \equiv 2(3) \end{cases} \implies 2^n \equiv 8(12)$$

Luego con estas 3 estudio $2^{r_{12}(2^n)} \equiv h(13)$

$$\blacksquare n = 1 \implies 2^2 \equiv 4(13) \implies r_{13}(2^{2^n}) = 4$$

$$\blacksquare n \geq 2 \wedge n \bmod 2 = 0 \implies 2^4 \equiv 3(13) \implies r_{13}(2^{2^n}) = 3$$

$$\blacksquare n \geq 2 \wedge n \bmod 2 = 1 \implies 2^8 \equiv 9(13) \implies r_{13}(2^{2^n}) = 9$$

5.22. Ejercicio 22

$$7x^{45} \equiv 1(46) \iff \begin{cases} 7x^{45} \equiv 1(23) \\ 7x^{45} \equiv 1(2) \end{cases} \iff \begin{cases} 7x^{45} \equiv 1(23) \\ x^{45} \equiv 1(2) \end{cases}$$

Es facil ver que $23 \nmid x$ y $2 \nmid x$

Por lo tanto por PTF $x^{22} \equiv 1(23)$ y $x \equiv 1(2)$

$$\begin{cases} 7x \equiv 1(23) \\ x \equiv 1(2) \end{cases} \iff \begin{cases} 10.7x \equiv 10.1(23) \\ x \equiv 1(2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 10(23) \\ x \equiv 1(2) \end{cases}$$

Luego por TCR, la unica solución es $x \equiv 33(46)$