DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 2

2do cuatrimestre 2021 — Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

2. Práctica 2

2.1. Ejercicio 1

1. (a) $\sum_{i=1}^{100} i$
   (b) $\sum_{i=1}^{10} i^2$
   (c) $\sum_{i=1}^{12} (-1)^i.i^2$
   (d) $\sum_{i=1 \wedge \text{i impar}}^{21} i^2$
   (e) $\sum_{i=0}^{n} 2i+1$
   (f) $\sum_{i=1}^{n} i.n$
2. (a) $\frac{100!}{4!}$
   (b) $\prod_{i=1}^{10} 2^i$
   (c) $\prod_{i=1}^{n} i.n$

2.2. Ejercicio 2

(a) $2+4$; $2(n-6)+2(n-5)$

(b) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$; $\frac{1}{(2n-1).2n} + \frac{1}{2n.(2n+1)}$

(c) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4}$; $\frac{n+n-1}{2.(n-1)} + \frac{2n}{2n}$

(d) $n + \frac{n}{2}$; $\frac{n}{n^2-1} + \frac{n}{n^2}$

(e) $-(n+1).(n+2)$; $\frac{n+n-1}{2(n-1)-3} \cdot \frac{2n}{2n-3}$

2.3. Ejercicio 3

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(4i+1) &= \sum_{i=1}^{n} 4i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 4.\sum_{i=1}^{n} i + n \\
&= 4.\frac{n.(n+1)}{2} + n \\
&= 2.n(n+1) + n \\
&= 2n^2 + 3n
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=6}^{n} 2(i-5) &= 2\sum_{i=6}^{n}(i-5) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n}(i-5) - \sum_{i=1}^{5}(i-5)\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 5 + 10\right) \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 5n + 10\right) \\
&= n^2 - 9n + 20
\end{aligned}$$

2.4. Ejercicio 4

(a) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

(b) $\sum_{i=1}^{n} q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-2}{q-1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$

(c) $\sum_{i=1}^{n} q^{2i} = \sum_{i=1}^{n} (q^2)^i = \begin{cases} \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

(d) $\sum_{i=n}^{2n} q^i = \sum_{i=0}^{2n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^{2n+1}-q^n}{q-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

2.5. Ejercicio 5

Usando la suma aritmética:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 2.\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Usando el principio de inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 - 1 = 1$

$n^2 = 1^2 = 1$

Luego el caso base es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que para $k \geq 1$, $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Luego el paso inductivo es verdadero. Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

2.6. Ejercicio 6

2.6.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2\end{aligned}$$

Entonces necesito probar que,

$$\begin{aligned}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff k(2k+1) + 6(k+1) &= (k+2)(2k+3) \\ \iff 2k^2 + k + 6k + 6 &= 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\ \iff 2k^2 + 7k + 6 &= 2k^2 + 7k + 6\end{aligned}$$

Luego $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ como se quería probar, el paso inductivo el verdadero.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.6.B. Pregunta ii

Defino el predicado $p(n): \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1$

$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}\end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \iff k^2 + 4(k+1) &= k^2 + 4k + 4 \\ \iff k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7. Ejercicio 7

2.7.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}.i^2 = \frac{(-1)^{n+1}.n(n+1)}{2}$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} (-1)^{i+1}.i^2 = (-1)^2.1^2 = 1$

$\frac{(-1)^{1+1}.1(1+1)}{2} = \frac{(-1)^2.1(2)}{2} = 1$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}.i^2 = \frac{(-1)^{k+1}.k(k+1)}{2}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1}.i^2 = \frac{(-1)^{k+2}.(k+1)(k+2)}{2}$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1}.i^2 &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}.i^2 + (-1)^{k+2}.(k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1}.k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}.(k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1}.k(k+1) + 2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2}{2}\end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{k+1}.k(k+1)+2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2}{2} &= \frac{(-1)^{k+2}.(k+1)(k+2)}{2} \\
(-1)^{k+1}.k(k+1)+2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2 &= (-1)^{k+2}.(k+1)(k+2) \\
(-1)^{k+1}.k+2.(-1)^{k+2}.(k+1) &= (-1)^{k+2}.(k+2) \\
-k+2.(k+1) &= k+2 \\
k+2 &= k+2
\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.B. Pregunta ii

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n}(2i+1).3^{i-1} = n.3^n$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1}(2i+1).3^{i-1} = 3$

$n.3^n = 3$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k}(2i+1).3^{i-1} = k.3^k$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1).3^{i-1} = (k+1).3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1).3^{i-1} &= \sum_{i=1}^{k}(2i+1).3^{i-1} + (2(k+1)+1)\,.3^k \\
&= k.3^k + (2k+2+1).3^k \\
&= 3^k.(k+2k+3) \\
&= 3^k.(3k+3) \\
&= 3^k.3(k+1) \\
&= (k+1)3^{k+1}
\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.C. Pregunta iii

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^1}{2.3} = \frac{1}{3}$

$\frac{2^{1+1}}{1+2} - 1 = \frac{2^2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(k+1).2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1).2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}\end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}\frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1).2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} &= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1 \\ \frac{(k+3)2^{k+1}}{k+2} + \frac{(k+1).2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ \frac{(k+3)2^{k+1} + (k+1).2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ 2^{k+1}(k+3+k+1) &= 2^{k+2}.(k+2) \\ 2k+4 &= 2k+4\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.D. Pregunta iv

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \prod_{i=1}^{n} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

Caso base n = 1

$\prod_{i=1}^{1} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = 1 + a$

$\frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\prod_{i=1}^{k} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a}$

QpQ: $\prod_{i=1}^{k+1} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$

Pero,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}\left(1+a^{2^{i-1}}\right) &= \prod_{i=1}^{k}\left(1+a^{2^{i-1}}\right).(1+a^{2^k}) \\ &= \frac{1-a^{2^k}}{1-a}.(1+a^{2^k}) \\ &= \frac{\left(1-a^{2^k}\right).\left(1+a^{2^k}\right)}{1-a} \\ &= \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.E. Pregunta v

Por inducción:

$p(n) : \prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

Caso base: ¿p(1)V?

$\prod_{i=1}^{1} \frac{1+i}{2i-3} = -2$

$-2 = -2$ V

Paso inductivo: ¿p(h) V $\implies$ p(h+1) V ?

HI: $\prod_{i=1}^{h} \frac{h+i}{2i-3} = 2^h(1-2h) = \frac{(h+1).(h+2)...(2h)}{(-1).1.3...2h-3}$

qpq: $\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-3} = 2^{h+1}(1-2.(h+1)) = 2^{h+1}(-2h-1)$

Pero $\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-3} = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)...2h(2h+1)(2h+2)}{(h+1).-1.1.3...(2h-3)(2h-1)} \stackrel{\text{HI}}{=} 2^h(1-2h)\frac{(2h+1)(2h+2)}{(h+1)(2h-1)} = 2^{2h+1}(-2h-1)$ como queríamos probar

Como p(1) V y [p(h) V $\implies$ p(h+1) V] por el principio de inducción p(n) V $\forall n \in \mathbb{N}$

2.8. Ejercicio 8

Prueba por inducción.

Defino el predicado $p(n) : a^n - b^n = (a-b).\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}.b^{n-i}$

Caso base n = 1

$a^1 - b^1 = a - b$

$(a-b).\sum_{i=1}^{1} a^{i-1}.b^{1-i} = (a-b).1 = a-b$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a^k - b^k = (a-b).\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}.b^{k-i}$

QpQ: $a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b).\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}.b^{k+1-i}$

Pero, $(a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}.b^{k+1-i} = (a-b).[\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}.b^{k+1-i} + a^k.b^0]$

$(a-b).[\sum_{i=1}^{k}(a^{i-1}.b^{k-i}.b) + a^k]$

$b.(a-b).\sum_{i=1}^{k}(a^{i-1}.b^{k-i}) + (a-b).a^h \stackrel{\text{HI}}{=} b.(a^k - b^k) + (a-b).a^k$

Entonces tengo que probar:

$b.(a^k - b^k) + (a-b).a^k = a^{k+1} - b^{k+1}$

$ba^k - b^{k+1} + a^{k+1} - ba^k = a^{k+1} - b^{k+1}$

$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1}$ como quería probar

Como p(1)V y [p(h)V $\implies$ p(h+1)V] por el principio de inducción p(n) V $\forall n \in \mathbb{N}$

2.9. Ejercicio 9

2.9.A. Pregunta i

Defino $p(n) : \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i &= \sum_{i=1}^{k} a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= -a_1 + a_{k+2} \\ &= a_{k+2} - a_1\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.9.B. Pregunta ii

Luego de probar con los casos $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Prueba por inducción:

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que:

$$\begin{aligned}\frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{k+1}{k+2} &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.9.C. Pregunta iii

Luego de probar con los casos $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Prueba por inducción:

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2.1+1} = \frac{1}{3}$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)-1)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \\
\frac{(2k+3).k+1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2k+3} \\
(2k+3).k+1 &= (k+1)(2k+1) \\
2k^2+3k+1 &= 2k^2+k+2k+1 \\
2k^2+3k+1 &= 2k^2+3k+1
\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10. Ejercicio 10

2.10.A. Pregunta i

Defino $p(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

Caso base n = 1

$3^1 + 5^1 = 3 + 5 = 8$

$2^{1+2} = 2^3 = 8$

Como $8 \geq 8$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$

QpQ: $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+3}$

Pero,

$$\begin{aligned}
3^{k+1} + 5^{k+1} &= 3.3^k + 5.5^k \\
&= 3.3^k + 3.5^k + 2.5^k \\
&= 3.(3^k + 5^k) + 2.5^k
\end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva:

$$3.(3^k + 5^k) + 2.5^k \geq 3.2^{k+2} + 2.5^k$$

Luego alcanza con probar que,

$$\begin{aligned}
3.2^{k+2} + 2.5^k &\geq 2^{k+3} \\
3.2^{k+2} + 2.5^k - 2.2^{k+2} &\geq 0 \\
2^{k+2} + 2.5^k &\geq 0
\end{aligned}$$

Pero $k \geq 1 \implies (2^{k+2} \geq 8 \wedge 2.5^k \geq 10)$ y en particular $2^{k+2} + 2.5^k \geq 0$ como se quería probar.

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : 3^n \geq n^3$

Caso base n = 1

$3^1 = 3$

$1^3 = 1$

Como $3 \geq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $3^k \geq k^3$

QpQ: $3^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3^k.3 \\ \iff 3^{k+1} &> 3k^3 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 3k^3 &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 3k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(2k^2 - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Pero esto se cumple unicamente para los $k \geq 3$ por lo tanto $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 3$

Hay que ver aparte los casos $k \in \{2, 3\}$

$p(2) : 3^2 \geq 2^3 \iff 9 \geq 8$ es verdadero.

$p(3) : 3^3 \geq 3^3 \iff 27 \geq 27$ es verdadero.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.C. Pregunta iii

Defino $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} \frac{1+i}{i+1} = \frac{2}{2} = 1$

$1 + 1(1-1) = 1$

Como $1 \leq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} \frac{k+i}{i+1} \leq 1 + k(k-1)$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + (k+1)k = 1 + k^2 + k$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}\frac{k+1+i}{i+1} &= \sum_{i=1}^{k+1}\frac{k+i}{i+1}+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i+1}\\
&= \sum_{i=1}^{k}\frac{k+i}{i+1}+\frac{2k+1}{k+2}+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i+1}\\
&\leq 1+k(k-1)+\frac{2k+1}{k+2}+\frac{k+1}{2}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
1+k(k-1)+\frac{2k+1}{k+2}+\frac{k+1}{2} &\leq 1+k^2+k\\
-k+\frac{2k+1}{k+2}+\frac{k+1}{2} &\leq k\\
\frac{2k+1}{k+2}+\frac{k+1}{2} &\leq 2k\\
\frac{2(2k+1)+(k+2)(k+1)}{2(k+2)} &\leq 2k\\
\frac{4k+2+k^2+2k+k+2}{2k+4} &\leq 2k\\
k^2+7k+4 &\leq (2k+4)2k\\
k^2+7k+4 &\leq 4k^2+8k\\
4 &\leq 3k^2+k
\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.D. Pregunta iv

Defino $p(n) : \sum_{i=n}^{2n}\frac{i}{2^i} \leq n$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{2}\frac{i}{2^i} = \frac{1}{2}+\frac{2}{4} = 1$

Como $1 \leq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=k}^{2k}\frac{i}{2^i} \leq k$

QpQ: $\sum_{i=k+1}^{2(k+1)}\frac{i}{2^i} \leq k+1$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+1}^{2k+2}\frac{i}{2^i} &= \sum_{i=k}^{2k}\frac{i}{2^i}+\frac{2k+1}{2^{2k+1}}+\frac{2k+2}{2^{2k+2}}-\frac{k}{2^k}\\
&\leq k+\frac{2k+1}{2^{2k+1}}+\frac{2k+2}{2^{2k+2}}-\frac{k}{2^k}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
k+\frac{2k+1}{2^{2k+1}}+\frac{2k+2}{2^{2k+2}}-\frac{k}{2^k} &\leq k+1\\
\frac{2k+1}{2^{2k+1}}+\frac{2(k+1)}{2.2^{2k+1}}-\frac{k}{2^k} &\leq 1\\
\frac{3k+2}{2^{2k+1}}-\frac{k.2^{k+1}}{2^k.2^{k+1}} &\leq 1\\
\frac{3k+2}{2^{2k+1}}-\frac{k.2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1\\
\frac{3k+2-k.2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1\\
3k+2-k.2^{k+1} &\leq 2^{2k+1}\\
3k+2 &\leq 2^{2k+1}+k.2^{k+1}\\
3k+2 &\leq 2^k.2^k.2+k.2^k.2\\
3k+2 &\leq 2^k.2^k.2+k.2^k.2^k.2\\
3k+2 &\leq 2^{2k+2}(1+k)\\
3k+2 &\leq 2^{2k+2}(3k+2)\\
1 &\leq 2^{2k+2}
\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.E. Pregunta v

$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

Caso base: ¿p(1)V?

$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2i-1} > \frac{4}{4}$

$1+\frac{1}{3} > 1$ V

Paso inductivo: ¿p(h)V $\implies$ p(h+1)V?

HI: $\sum_{i=1}^{2^h} \frac{1}{2i-1} > \frac{h+3}{4}$

qpq: $\sum_{i=1}^{2^{h+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{h+4}{4}$

Pero

$\sum_{i=1}^{2^{h+1}} \frac{1}{2i-1} = \sum_{i=1}^{2^h} \frac{1}{2i-1} + \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{h+3}{4} + \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{h+3}{4} + \sum_{i=2^h+1}^{2^{h+1}} \frac{1}{2(2^{h+1})-1}$

$\frac{h+3}{4} + \frac{1}{2^{h+2}-1}.2^h > \frac{h+4}{4}$

$\frac{2^h}{2^{h+2}-1} > \frac{h+4}{4} + \frac{h+3}{4} = \frac{1}{4}$

El minimo valor que puede tomar esta expresión es con h=1, con dicho h:

$\frac{2}{7} = 0,2857... > \frac{1}{4}$ V $\implies \sum_{i=1}^{2^{h+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{h+4}{4}$ como quería probar

Como p(1) V y [p(h) V $\implies$ p(h+1) V] por el principio de inducción p(n) V $\forall n \in \mathbb{N}$

2.10.F. Pregunta vi

p(n): $\sum_1^n \frac{1}{i!} \leqslant 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Caso base: ¿p(1)V?

$\sum_1^1 \frac{1}{i!} \leqslant 2 - \frac{1}{2^0}$

Paso inductivo: ¿p(h)V $\implies$ p(h+1)V?

HI: $\sum_1^h \frac{1}{i!} \leqslant 2 - \frac{1}{2^{h-1}}$

qpq: $\sum_1^{h+1} \frac{1}{i!} \leqslant 2 - \frac{1}{2^h}$

Pero $\sum_1^{h+1} \frac{1}{i!} = \sum_1^h \frac{1}{i!} + \frac{1}{(h+1)!} \leqslant 2 - \frac{1}{2^{h-1}} + \frac{1}{(h+1)!}$

Me alcanza con probar que:

$2 - \frac{1}{2^{h-1}} + \frac{1}{(h+1)!} \leqslant 2 - \frac{1}{2^h}$

$\frac{1}{(h+1)!} \leqslant -\frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^{h-1}}$

$\frac{1}{(h+1)!} \leqslant -\frac{1}{2^h} + \frac{2}{2^h}$

$\frac{1}{(h+1)!} \leqslant \frac{1}{2^h}$

$2^h \leqslant (h+1)!$

Uso inducción:

Q(n): $2^n \leqslant (n+1)!$

Caso base: $2 \leqslant 2!$ V

Paso inductivo:

HI: $2^h \leqslant (h+1)!$, qpq: $2^{h+1} \leqslant (h+2)!$

Pero $2^{h+1} = 2^h.2 \leqslant (h+1)!.2$

Me alcanza con probar que:

$(h+1)!.2 \leqslant (h+2)!$

$2 \leqslant (h+2)$ V $\forall h \in \mathbb{N}$

$\implies$ Q(n) V $\forall n \in \mathbb{N}$. Como p(1) V y [p(h) V $\implies$ p(h+1) V] por el principio de inducción p(n) V $\forall n \in \mathbb{N}$

2.11. Ejercicio 11

Defino $p(n) : \prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$

Caso base n = 1

$\prod_{i=1}^1 (1+a_i) = 1 + a_i$

$1 + \sum_{i=1}^1 a_i = 1 + a_i$

Como $1 + a_i \geq 1 + a_i$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\prod_{i=1}^k (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i$

QpQ: $\prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$

Pero,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) &= \prod_{i=1}^{k} (1+a_i) + 1 + a_{k+1} \\
&\geq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i + 1 + a_{k+1} \\
&\geq 2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$
$$2 \geq 1$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.12. Ejercicio 12

2.12.A. Pregunta i

Defino $p(n) : n! \geq 3^{n-1}; \forall n \geq 5$

Caso base n = 5

$5! = 120$

$3^{5-1} = 3^4 = 81$

Como $120 \geq 81$ el caso base $p(5)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $k! \geq 3^{k-1}$

QpQ: $(k+1)! \geq 3^k$

Pero,

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\geq (k+1) \cdot 3^{k-1} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$(k+1) \cdot 3^{k-1} \geq 3^k$$
$$\frac{(k+1) \cdot 3^k}{3} \geq 3^k$$
$$k+1 \geq 3$$

Que es verdadero $\forall k \geq 5$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

2.12.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : 3^n - 2^n \geq n^3; \forall n \geq 4$

Caso base n = 4

$3^4 - 2^4 = 65$

$4^3 = 64$

Como $65 \geq 64$ el caso base $p(4)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $3^k - 2^k \geq k^3$

QpQ: $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2^{k+1} &= 3.3^k - 2.2^k \\ &= 2.3^k + 3^k - 2.2^k \\ &= 2.(3^k - 2^k) + 3^k \\ &\geq 2.k^3 + 3^k \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2k^3 + 3^k &\geq (k+1)^3 \\ 2k^3 + 3^k &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 2k^3 + 3^k - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k^3 + 3^k - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Ahora pruebo que,

$$\begin{aligned} k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3 &\geq 1 \\ k(k + 3^{k-2} - 3) &\geq 4 \end{aligned}$$

Que es verdadero, $\forall k \geq 4$.

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.

2.13. Ejercicio 13

Defino $p(n) : n^2 + 1 < 2^n$

$n = 1 \implies p(1) : 1^2 + 1 < 2^1 \iff 2 < 2 \implies p(1)$ es falso.

$n = 2 \implies p(2) : 2^2 + 1 < 2^2 \iff 5 < 4 \implies p(2)$ es falso.

$n = 3 \implies p(3) : 3^2 + 1 < 2^3 \iff 10 < 8 \implies p(3)$ es falso.

$n = 4 \implies p(4) : 4^2 + 1 < 2^4 \iff 17 < 16 \implies p(4)$ es falso.

$n = 5 \implies p(5) : 5^2 + 1 < 2^5 \iff 26 < 32 \implies p(5)$ es verdadero.

Luego tomo el caso base en $n = 5$ y ya se que $p(5)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $k^2 + 1 < 2^k$

QpQ: $(k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$

Pero,

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 + 1 &= k^2 + 2k + 1 + 1 \\
&< 2^k + 2k + 1
\end{aligned}
$$

Queda probar que,

$$
\begin{aligned}
2^k + 2k + 1 &\leq 2^{k+1} \\
2^k + 2k + 1 &\leq 2.2^k \\
2k + 1 &\leq 2^k \\
0 &\leq 2^k - 2k - 1
\end{aligned}
$$

Que es verdadero $\forall k \geq 5$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

2.14. Ejercicio 14

TODO

2.15. Ejercicio 15

2.15.A. Pregunta i

Defino $p(n) : a_n = 2^n.n!$

Caso base n = 1

$a_1 = 2$ por definición.

$a_1 = 2^1.1! = 2$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = 2^k.k!$

QpQ: $a_{k+1} = 2^{k+1}.(k+1)!$

Pero,

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2k.a_k + 2^{k+1}.k! \\
&= 2k.2^k.k! + 2^{k+1}.k! \\
&= 2^{k+1}.k!.k + 2^{k+1}.k!
\end{aligned}
$$

Luego alcanza probar que,

$$
\begin{aligned}
2^{k+1}.k!.k + 2^{k+1}.k! &= 2^{k+1}.(k+1)! \\
2^{k+1} \cdot k!(k+1) &= 2^{k+1}.(k+1)! \\
2^{k+1} \cdot k! \cdot (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1) \cdot k!
\end{aligned}
$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.15.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : a_n = n^2 \cdot (n-1)$

Caso base n = 1

Por definición $a_1 = 0$

$1^2 \cdot (1-1) = 0$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k^2 \cdot (k-1)$

QpQ: $a_{k+1} = (k+1)^2 \cdot k$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k(3k+1) \\ &= k^2 \cdot (k-1) + k(3k+1) \\ &= k^3 - k^2 + 3k^2 + k \\ &= k^3 + 2k^2 + k \\ &= k(k^2 + 2k + 1) \\ &= k \cdot (k+1)^2 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16. Ejercicio 16

2.16.A. Pregunta i

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n^2$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 1$

$1^2 = 1$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k^2$

QpQ: $a_{k+1} = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (1 + \sqrt{a_k})^2 \\ &= (1 + \sqrt{k^2})^2 \\ &= (1 + k)^2 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16.B. Pregunta ii

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = 3^n$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 3$

$3^1 = 3$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = 3^k$

QpQ: $a_{k+1} = 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 \cdot a_k + 3^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k \\ &= 3^k \cdot (2+1) \\ &= 3^{k+1} \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16.C. Pregunta iii

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = (n-1)!$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 1$

$(1-1)! = 0! = 1$ (Por definición de 0!)

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = (k-1)!$

QpQ: $a_{k+1} = k!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= k \cdot a_k \\ &= k \cdot (k-1)! \\ &= k! \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16.D. Pregunta iv

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = \frac{n+1}{n}$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 2$

$\frac{1+1}{1} = 2$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = \frac{k+1}{k}$

QpQ: $a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 - \frac{1}{a_k} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \\ &= 2 - \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{2(k+1)-k}{k+1} \\ &= \frac{2k+2-k}{k+1} \\ &= \frac{k+2}{k+1} \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.17. Ejercicio 17

2.17.A. Pregunta i

Defino $p(n) : a_n = n!$

Caso base n = 1

Por definición, $a_1 = 1$

$1! = 1$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k!$

QpQ: $a_{k+1} = (k+1)!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k \cdot k! \\ &= k! + k \cdot k! \\ &= k! \cdot (k+1) \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.17.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : a_n = n^3$

Caso base n = 1

Por definición, $a_1 = 1$

$1^3 = 1$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k^3$

QpQ: $a_{k+1} = (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.18. Ejercicio 18

2.18.A. Pregunta i

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n!$

Casos base n = 1 y n = 2

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$

$1! = 1$

$2! = 2$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k!$ y $a_{k+1} = (k+1)!$

QpQ: $a_{k+2} = (k+2)!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= k \cdot a_{k+1} + 2 \cdot (h+1) \cdot a_k \\ &= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1) \cdot k! \\ &= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1)! \\ &= (k+1)! \cdot (k+2) \\ &= (k+2)! \end{aligned}$$

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.18.B. Pregunta ii

Luego de probar con $n \in \{1,2,3,4\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n^2$

Casos base n = 1 y n = 2

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 4$

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k^2$ y $a_{k+1} = (k+1)^2$

QpQ: $a_{k+2} = (k+2)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 4 \cdot \sqrt{a_{k+1}} + a_k \\ &= 4 \cdot \sqrt{(k+1)^2} + k^2 \\ &= 4 \cdot (k+1) + k^2 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.18.C. Pregunta iii

Luego de probar con $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Casos base n = 1 y n = 2

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$

$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$ y $a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

QpQ: $a_{k+2} = \frac{(k+2)(k+3)}{2} \iff 2 \cdot a_{k+2} = (k+2)(k+3)$

Pero,

$$\begin{aligned}
2 \cdot a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k + 3k + 5 \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + 3k + 5 \\
&= \frac{(k+1)(k+2) + k(k+1) + 6k + 10}{2} \\
&= \frac{k^2 + k + 2k + 2 + k^2 + k + 6k + 10}{2} \\
&= \frac{2k^2 + 10k + 12}{2} \\
&= 2k^2 + 5k + 6 \\
&= (k+2)(k+3)
\end{aligned}$$

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.19. Ejercicio 19

2.19.A. Pregunta i

Defino $p(n) : a_n < 1 + 3^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1 y n = 2

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$

$1 + 3^{1-1} = 1 + 3^0 = 2$

$1 + 3^{2-1} = 1 + 3^1 = 4$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k < 1 + 3^{k-1}$ y $a_{k+1} < 1 + 3^k$

QpQ: $a_{k+2} < 1 + 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= a_{k+1} + 5 \cdot a_k \\
&< 1 + 3^k + 5 \cdot (1 + 3^{k-1}) \\
&< 1 + 3^k + 5 + 5 \cdot 3^{k-1} \\
a_{k+2} &< 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 1 + 3^{k+1} \\
5 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 3^{k+1} \\
5 &\leq 3^{k+1} - 3^k - 5 \cdot 3^{k-1} \\
5 &\leq 3^k \cdot (3 - 1 - \frac{5}{3}) \\
5 &\leq 3^k \cdot \frac{17}{3}
\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$.

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora busco una fórmula para el término general de la sucesión. Se ve que es una sucesión de Lucas, por lo tanto.

El polinomio asociado a la sucesión es: $x^2 - x - 5 = 0$

Con raíces: $\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\}$

Luego busco α y β tales que: $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta = 3 \end{cases}$

De la primer ecuación sale que: $\beta = 1 - \alpha$

Reemplazando el la segunda,

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta = 3 \\
(1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot \beta = 6 \\
(1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot (1-\alpha) = 6 \\
\alpha + \sqrt{21} \cdot \alpha + 1 - \alpha - \sqrt{21} + \sqrt{21} \cdot \alpha = 6 \\
2 \cdot \sqrt{21} \cdot \alpha = 6 - 1 + \sqrt{21} \\
\alpha = \frac{5 + \sqrt{21}}{2 \cdot \sqrt{21}}
\end{aligned}$$

Así, $\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{5+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}$

2.20. Ejercicio 20

TODO

2.21. Ejercicio 21

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n!, \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1

Por definición, $a_1 = 1$

$1! = 1$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que $(p(k) \wedge 1 \leq k \leq h) \implies p(h+1)$

HI: $a_k = k!$

QpQ: $a_{h+1} = (h+1)!$

TODO

2.22. Ejercicio 22

Defino $p(n) : f^{3k}(x) = x; \forall k \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1

$f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = f \circ f(\frac{1}{1-x}) = f(\frac{x-1}{x}) = x$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 1$ quiero probar que $p(h) \implies p(h+1)$

HI: $f^{3h}(x) = x$

QpQ: $f^{3h+3}(x) = x$

Pero,

$$\begin{aligned} f^{3h+3}(x) &= f \circ f \circ f ... f(x) \\ &= f \circ f \circ f(f^{3h}(x)) \\ &= f \circ f \circ f(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Luego $p(h) \implies p(h+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.23. Ejercicio 23

Por inducción global

HI: Si k $\leqslant n$. K se puede escribir como suma de potencias distintas de 2

Veamos que n+1 también se puede.

n+1

si n es par: $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{a_i}, a_i \neq 0 \forall i$ luego $n+1 = \sum_{i=1}^{r} 2^{a_i} + 2^0$

si n es impar, n+1 es par $\implies \exists \alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n+1}{2^\alpha}$ es impar.
$\frac{n+1}{2^\alpha} \leq n$
$n+1 \leq 2^\alpha n$
$1 \leq (2^\alpha - 1)n$ como $2^\alpha - 1 \geq 1$ esto vale siempre
$\implies$ por HI $\frac{n+1}{2^\alpha} = \sum_{i=1}^{r} 2^{a_i}$ con a_i todos $\neq$
$\implies n+1 = \sum_{i=1}^{r} 2^{a_i + \alpha}$

2.24. Ejercicio 24

$p(n) : \sum_{n=1}^{r} 2^{a_i} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por inducción global

Caso base: $2^0 = 1$ V

HI: Si $k \leqslant n$. "k"se puede escribir como suma de potencias $\neq$ de 2

Veamos que n+1 también se puede

Si n es par $n = \sum_{n=1}^{r} 2^{a_i} \quad a_i \neq 0 \quad \forall i$

Por lo tanto: n par $\implies m = n+1$ impar

$m = n+1 = \sum_{n=1}^{r} 2^{a_i} + 2^0$

Si n es impar n+1 es par $\implies \exists \alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n+1}{2^\alpha}$ es impar.

$$\begin{aligned}
&\frac{n+1}{2^\alpha} \leqslant n \\
&n+1 \leqslant 2^\alpha n \\
&1 \leqslant (2^\alpha - 1)n \quad \text{como} \quad (2^\alpha - 1) \geqslant 1 \quad \text{esto es verdadero siempre} \\
&\quad \implies \frac{n+1}{2^\alpha} = \sum_{n=1}^{r} 2^{a_i} \quad \text{con} \quad a_i \quad \text{todos} \neq \\
&\quad \implies n+1 = \sum_{n=1}^{r} 2^{a_i+\alpha}
\end{aligned}$$

Por lo tanto como p(1) V y $[p(k)V \quad \text{con} \quad k \leqslant n \implies n+1 \quad \text{V}]$ entonces por el principio de inducción $p(n)V \quad \forall n \in \mathbb{N}$