



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Práctica 2

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>



## 2. Práctica 2

### 2.1. Ejercicio 1

1. (a)  $\sum_{i=1}^{100} i$   
(b)  $\sum_{i=1}^{10} i^2$   
(c)  $\sum_{i=1}^{12} (-1)^i \cdot i^2$   
(d)  $\sum_{i=1 \wedge i \text{ impar}}^{21} i^2$   
(e)  $\sum_{i=0}^n 2i + 1$   
(f)  $\sum_{i=1}^n i \cdot n$
2. (a)  $\frac{100!}{4!}$   
(b)  $\prod_{i=1}^{10} 2^i$   
(c)  $\prod_{i=1}^n i \cdot n$

### 2.2. Ejercicio 2

- (a)  $2 + 4 ; 2(n - 6) + 2(n - 5)$
- (b)  $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} ; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}$
- (c)  $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} ; \frac{n+n-1}{2 \cdot (n-1)} + \frac{2n}{2n}$
- (d)  $n + \frac{n}{2} ; \frac{n}{n^2-1} + \frac{n}{n^2}$
- (e)  $-(n+1) \cdot (n+2) ; \frac{n+n-1}{2(n-1)-3} \cdot \frac{2n}{2n-3}$

### 2.3. Ejercicio 3

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (4i + 1) &= \sum_{i=1}^n 4i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n i + n \\ &= 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \\ &= 2 \cdot n(n+1) + n \\ &= 2n^2 + 3n\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=6}^n 2(i-5) &= 2 \sum_{i=6}^n (i-5) \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^n (i-5) - \sum_{i=1}^5 (i-5) \right) \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 5 + 10 \right) \\ &= 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} - 5n + 10 \right) \\ &= n^2 - 9n + 20\end{aligned}$$

## 2.4. Ejercicio 4

(a)  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

(b)  $\sum_{i=1}^n q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-2}{q-1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$

(c)  $\sum_{i=1}^n q^{2i} = \sum_{i=1}^n (q^2)^i = \begin{cases} \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

(d)  $\sum_{i=n}^{2n} q^i = \sum_{i=0}^{2n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^{2n+1}-q^n}{q-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

## 2.5. Ejercicio 5

Usando la suma aritmética:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2i-1) &= \sum_{i=1}^n 2i - \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Usando el principio de inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2-1 = 1$$

$$n^2 = 1^2 = 1$$

Luego el caso base es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que para  $k \geq 1$ ,  $p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$

QpQ:  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) &= \sum_{i=1}^k (2i-1) + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Luego el paso inductivo es verdadero. Por lo tanto  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$

## 2.6. Ejercicio 6

### 2.6.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

Entonces necesito probar que,

$$\begin{aligned} &\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\ \iff &2k^2 + k + 6k + 6 = 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\ \iff &2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6 \end{aligned}$$

Luego  $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$  como se quería probar, el paso inductivo el verdadero.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.6.B. Pregunta ii

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2}{4} = 1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\
 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
 &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}
 \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}
 \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
 \iff k^2 + 4(k+1) &= k^2 + 4k + 4 \\
 \iff k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4
 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.7. Ejercicio 7

### 2.7.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2}$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 (-1)^{i+1} \cdot i^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1$$

$$\frac{(-1)^{1+1} \cdot 1(1+1)}{2} = \frac{(-1)^2 \cdot 1(2)}{2} = 1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\
 &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\
 &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2}
 \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{k+1}.k(k+1) + 2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2}{2} &= \frac{(-1)^{k+2}.(k+1)(k+2)}{2} \\ (-1)^{k+1}.k(k+1) + 2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2 &= (-1)^{k+2}.(k+1)(k+2) \\ (-1)^{k+1}.k + 2.(-1)^{k+2}.(k+1) &= (-1)^{k+2}.(k+2) \\ -k + 2.(k+1) &= k+2 \\ k+2 &= k+2\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.7.B. Pregunta ii

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i+1).3^{i-1} = n.3^n$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 (2i+1).3^{i-1} = 3$$

$$n.3^n = 3$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (2i+1).3^{i-1} = k.3^k$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} (2i+1).3^{i-1} = (k+1).3^{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i+1).3^{i-1} &= \sum_{i=1}^k (2i+1).3^{i-1} + (2(k+1)+1).3^k \\ &= k.3^k + (2k+2+1).3^k \\ &= 3^k.(k+2k+3) \\ &= 3^k.(3k+3) \\ &= 3^k.3(k+1) \\ &= (k+1)3^{k+1}\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.7.C. Pregunta iii

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^1}{2.3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2^{1+1}}{1+2} - 1 = \frac{2^2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} &= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1 \\ \frac{(k+3)2^{k+1}}{k+2} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ \frac{(k+3)2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ 2^{k+1}(k+3+k+1) &= 2^{k+2} \cdot (k+2) \\ 2k+4 &= 2k+4 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.7.D. Pregunta iv

Prueba por inducción:

$$\text{Defino el predicado } p(n) : \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$$

**Caso base n = 1**

$$\prod_{i=1}^1 (1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a$$

$$\frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a}$$

$$\text{QpQ: } \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$$



Pero,

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) &= \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) \cdot (1 + a^{2^k}) \\
 &= \frac{1 - a^{2^k}}{1 - a} \cdot (1 + a^{2^k}) \\
 &= \frac{(1 - a^{2^k}) \cdot (1 + a^{2^k})}{1 - a} \\
 &= \frac{1 - a^{2^{k+1}}}{1 - a}
 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.7.E. Pregunta v

Por inducción:

$$p(n) : \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

Caso base:  $\downarrow p(1) V?$

$$\prod_{i=1}^1 \frac{1+i}{2i-3} = -2$$

$$-2 = -2 \quad V$$

Paso inductivo:  $\downarrow p(h) V \implies p(h+1) V ?$

$$HI: \prod_{i=1}^h \frac{h+i}{2i-3} = 2^h(1-2h) = \frac{(h+1) \cdot (h+2) \dots (2h)}{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2h-3)}$$

$$qpq: \prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-3} = 2^{h+1}(1-2(h+1)) = 2^{h+1}(-2h-1)$$

$$\text{Pero } \prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-3} = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)(h+4) \dots 2h(2h+1)(2h+2)}{(h+1) \cdot -1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2h-3)(2h-1)} \stackrel{HI}{=} 2^h(1-2h) \frac{(2h+1)(2h+2)}{(h+1)(2h-1)} = 2^{h+1}(-2h-1) \text{ como queríamos probar}$$

Como  $p(1) V$  y  $[p(h) V \implies p(h+1) V]$  por el principio de inducción  $p(n) V \forall n \in \mathbb{N}$

### 2.8. Ejercicio 8

Prueba por inducción.

$$\text{Defino el predicado } p(n) : a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^n a^{i-1} \cdot b^{n-i}$$

**Caso base n = 1**

$$a^1 - b^1 = a - b$$

$$(a-b) \cdot \sum_{i=1}^1 a^{i-1} \cdot b^{1-i} = (a-b) \cdot 1 = a - b$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

$$\text{Para todo } k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$$

$$HI: a^k - b^k = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i}$$

$$QpQ: a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i}$$

$$\text{Pero, } (a-b) \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} = (a-b) \cdot [\sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k+1-i} + a^k \cdot b^0]$$

$$(a-b) \cdot [\sum_{i=1}^k (a^{i-1} \cdot b^{k-i} \cdot b) + a^k]$$

$$b \cdot (a-b) \cdot \sum_{i=1}^k (a^{i-1} \cdot b^{k-i}) + (a-b) \cdot a^k \stackrel{HI}{=} b \cdot (a^k - b^k) + (a-b) \cdot a^k$$

Entonces tengo que probar:

$$\begin{aligned}
b.(a^k - b^k) + (a - b).a^k &= a^{k+1} - b^{k+1} \\
ba^k - b^{k+1} + a^{k+1} - ba^k &= a^{k+1} - b^{k+1} \\
a^{k+1} - b^{k+1} &= a^{k+1} - b^{k+1}
\end{aligned}$$

Como  $p(1)V$  y  $[p(h)V \implies p(h+1)V]$  por el principio de inducción  $p(n) \vee \forall n \in \mathbb{N}$

## 2.9. Ejercicio 9

### 2.9.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : \sum_{i=1}^n a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i &= \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\
&= a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\
&= -a_1 + a_{k+2} \\
&= a_{k+2} - a_1
\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.9.B. Pregunta ii

Luego de probar con los casos  $n \in \{1, 2, 3\}$  conjeturo y defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Prueba por inducción:

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{k+1}{k+2} &= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.9.C. Pregunta iii

Luego de probar con los casos  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Prueba por inducción:

**Caso base n = 1**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \\
\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

$$\text{QPQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\
&= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \\ \frac{(2k+3).k+1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2k+3} \\ (2k+3).k+1 &= (k+1)(2k+1) \\ 2k^2+3k+1 &= 2k^2+k+2k+1 \\ 2k^2+3k+1 &= 2k^2+3k+1\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.10. Ejercicio 10

### 2.10.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

**Caso base n = 1**

$$3^1 + 5^1 = 3 + 5 = 8$$

$$2^{1+2} = 2^3 = 8$$

Como  $8 \geq 8$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$

QpQ:  $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+3}$

Pero,

$$\begin{aligned}3^{k+1} + 5^{k+1} &= 3.3^k + 5.5^k \\ &= 3.3^k + 3.5^k + 2.5^k \\ &= 3.(3^k + 5^k) + 2.5^k\end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva:

$$3.(3^k + 5^k) + 2.5^k \geq 3.2^{k+2} + 2.5^k$$

Luego alcanza con probar que,

$$\begin{aligned}3.2^{k+2} + 2.5^k &\geq 2^{k+3} \\ 3.2^{k+2} + 2.5^k - 2.2^{k+2} &\geq 0 \\ 2^{k+2} + 2.5^k &\geq 0\end{aligned}$$

Pero  $k \geq 1 \implies (2^{k+2} \geq 8 \wedge 2.5^k \geq 10)$  y en particular  $2^{k+2} + 2.5^k \geq 0$  como se quería probar.

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.10.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : 3^n \geq n^3$

**Caso base n = 1**

$$3^1 = 3$$

$$1^3 = 1$$

Como  $3 \geq 1$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $3^k \geq k^3$

QpQ:  $3^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3^k \cdot 3 \\ \iff 3^{k+1} &> 3k^3 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 3k^3 &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 3k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(2k^2 - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Pero esto se cumple unicamente para los  $k \geq 3$  por lo tanto  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 3$

Hay que ver aparte los casos  $k \in \{2, 3\}$

$p(2) : 3^2 \geq 2^3 \iff 9 \geq 8$  es verdadero.

$p(3) : 3^3 \geq 3^3 \iff 27 \geq 27$  es verdadero.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.10.C. Pregunta iii

Defino  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1+i}{i+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 + 1(1-1) = 1$$

Como  $1 \leq 1$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $\sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} \leq 1 + k(k-1)$

QpQ:  $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + (k+1)k = 1 + k^2 + k$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+i}{i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} + \frac{2k+1}{k+2} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\
&\leq 1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 1 + k^2 + k \\
-k + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq k \\
\frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 2k \\
\frac{2(2k+1) + (k+2)(k+1)}{2(k+2)} &\leq 2k \\
\frac{4k+2 + k^2 + 2k + k + 2}{2k+4} &\leq 2k \\
k^2 + 7k + 4 &\leq (2k+4)2k \\
k^2 + 7k + 4 &\leq 4k^2 + 8k \\
4 &\leq 3k^2 + k
\end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

#### 2.10.D. Pregunta iv

Defino  $p(n) : \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^2 \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

Como  $1 \leq 1$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} \leq k$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=k+1}^{2(k+1)} \frac{i}{2^i} \leq k+1$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+1}^{2k+2} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} \\
&\leq k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} &\leq k+1 \\
\frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2(k+1)}{2 \cdot 2^{2k+1}} - \frac{k}{2^k} &\leq 1 \\
\frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^k \cdot 2^{k+1}} &\leq 1 \\
\frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\
\frac{3k+2 - k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\
3k+2 - k \cdot 2^{k+1} &\leq 2^{2k+1} \\
3k+2 &\leq 2^{2k+1} + k \cdot 2^{k+1} \\
3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2 \\
3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2^k \cdot 2 \\
3k+2 &\leq 2^{2k+2}(1+k) \\
3k+2 &\leq 2^{2k+2}(3k+2) \\
1 &\leq 2^{2k+2}
\end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.11. Ejercicio 11

Defino  $p(n) : \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$

**Caso base n = 1**

$$\prod_{i=1}^1 (1 + a_i) = 1 + a_i$$

$$1 + \sum_{i=1}^1 a_i = 1 + a_i$$

Como  $1 + a_i \geq 1 + a_i$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $\prod_{i=1}^k (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i$

QpQ:  $\prod_{i=1}^{k+1} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$

Pero,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1} (1 + a_i) &= \prod_{i=1}^k (1 + a_i) + 1 + a_{k+1} \\
&\geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + 1 + a_{k+1} \\
&\geq 2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$
$$2 \geq 1$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.12. Ejercicio 12

### 2.12.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : n! \geq 3^{n-1}; \forall n \geq 5$

**Caso base n = 5**

$$5! = 120$$

$$3^{5-1} = 3^4 = 81$$

Como  $120 \geq 81$  el caso base  $p(5)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $k! \geq 3^{k-1}$

QpQ:  $(k+1)! \geq 3^k$

Pero,

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$$
$$\geq (k+1) \cdot 3^{k-1}$$

Luego alcanza probar que,

$$(k+1) \cdot 3^{k-1} \geq 3^k$$
$$\frac{(k+1) \cdot 3^{k-1}}{3} \geq 3^{k-1}$$
$$k+1 \geq 3$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 5$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 5$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ .

### 2.12.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : 3^n - 2^n \geq n^3; \forall n \geq 4$

**Caso base n = 4**

$$3^4 - 2^4 = 65$$

$$4^3 = 64$$

Como  $65 \geq 64$  el caso base  $p(4)$  es verdadero.



### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $3^k - 2^k \geq k^3$

QpQ:  $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2^{k+1} &= 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot (3^k - 2^k) + 3^k \\ &\geq 2 \cdot k^3 + 3^k \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2k^3 + 3^k &\geq (k+1)^3 \\ 2k^3 + 3^k &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 2k^3 + 3^k - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k^3 + 3^k - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Ahora pruebo que,

$$\begin{aligned} k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3 &\geq 1 \\ k(k + 3^{k-2} - 3) &\geq 4 \end{aligned}$$

Que es verdadero,  $\forall k \geq 4$ .

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ .

### 2.13. Ejercicio 13

Defino  $p(n) : n^2 + 1 < 2^n$

$$n = 1 \implies p(1) : 1^2 + 1 < 2^1 \iff 2 < 2 \implies p(1) \text{ es falso.}$$

$$n = 2 \implies p(2) : 2^2 + 1 < 2^2 \iff 5 < 4 \implies p(2) \text{ es falso.}$$

$$n = 3 \implies p(3) : 3^2 + 1 < 2^3 \iff 10 < 8 \implies p(3) \text{ es falso.}$$

$$n = 4 \implies p(4) : 4^2 + 1 < 2^4 \iff 17 < 16 \implies p(4) \text{ es falso.}$$

$$n = 5 \implies p(5) : 5^2 + 1 < 2^5 \iff 26 < 32 \implies p(5) \text{ es verdadero.}$$

Luego tomo el caso base en  $n = 5$  y ya se que  $p(5)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $k^2 + 1 < 2^k$

QpQ:  $(k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + 1 &= k^2 + 2k + 1 + 1 \\ &< 2^k + 2k + 1\end{aligned}$$

Queda probar que,

$$\begin{aligned}2^k + 2k + 1 &\leq 2^{k+1} \\ 2^k + 2k + 1 &\leq 2 \cdot 2^k \\ 2k + 1 &\leq 2^k \\ 0 &\leq 2^k - 2k - 1\end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 5$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ .

## 2.14. Ejercicio 14

TODO

## 2.15. Ejercicio 15

### 2.15.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : a_n = 2^n \cdot n!$

**Caso base n = 1**

$a_1 = 2$  por definición.

$$a_1 = 2^1 \cdot 1! = 2$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = 2^k \cdot k!$

QpQ:  $a_{k+1} = 2^{k+1} \cdot (k+1)!$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2k \cdot a_k + 2^{k+1} \cdot k! \\ &= 2k \cdot 2^k \cdot k! + 2^{k+1} \cdot k! \\ &= 2^{k+1} \cdot k! \cdot k + 2^{k+1} \cdot k!\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}2^{k+1} \cdot k! \cdot k + 2^{k+1} \cdot k! &= 2^{k+1} \cdot (k+1)! \\ 2^{k+1} \cdot k! \cdot (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1)! \\ 2^{k+1} \cdot k! \cdot (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1) \cdot k!\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.15.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : a_n = n^2 \cdot (n - 1)$

**Caso base n = 1**

Por definición  $a_1 = 0$

$$1^2 \cdot (1 - 1) = 0$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k + 1)$

HI:  $a_k = k^2 \cdot (k - 1)$

QpQ:  $a_{k+1} = (k + 1)^2 \cdot k$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k(3k + 1) \\ &= k^2 \cdot (k - 1) + k(3k + 1) \\ &= k^3 - k^2 + 3k^2 + k \\ &= k^3 + 2k^2 + k \\ &= k(k^2 + 2k + 1) \\ &= k \cdot (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k + 1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.16. Ejercicio 16

#### 2.16.A. Pregunta i

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n^2$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 1$

$$1^2 = 1$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k + 1)$

HI:  $a_k = k^2$

QpQ:  $a_{k+1} = (k + 1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (1 + \sqrt{a_k})^2 \\ &= (1 + \sqrt{k^2})^2 \\ &= (1 + k)^2 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k + 1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.16.B. Pregunta ii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = 3^n$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 3$

$$3^1 = 3$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = 3^k$

QpQ:  $a_{k+1} = 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 \cdot a_k + 3^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k \\ &= 3^k \cdot (2 + 1) \\ &= 3^{k+1} \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.16.C. Pregunta iii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = (n-1)!$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 1$

$$(1-1)! = 0! = 1 \text{ (Por definición de } 0!)$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = (k-1)!$

QpQ:  $a_{k+1} = k!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= k \cdot a_k \\ &= k \cdot (k-1)! \\ &= k! \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.16.D. Pregunta iv

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = \frac{n+1}{n}$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 2$

$$\frac{1+1}{1} = 2$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a_k = \frac{k+1}{k}$$

$$\text{QpQ: } a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 - \frac{1}{a_k} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \\ &= 2 - \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{2(k+1) - k}{k+1} \\ &= \frac{2k + 2 - k}{k+1} \\ &= \frac{k+2}{k+1} \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.17. Ejercicio 17

### 2.17.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : a_n = n!$

#### Caso base $n = 1$

Por definición,  $a_1 = 1$

$$1! = 1$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a_k = k!$$

$$\text{QpQ: } a_{k+1} = (k+1)!$$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k \cdot k! \\ &= k! + k \cdot k! \\ &= k! \cdot (k+1) \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.17.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : a_n = n^3$

**Caso base n = 1**

Por definición,  $a_1 = 1$

$$1^3 = 1$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k^3$

QpQ:  $a_{k+1} = (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.18. Ejercicio 18

#### 2.18.A. Pregunta i

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n!$

**Casos base n = 1 y n = 2**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 2$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k!$  y  $a_{k+1} = (k+1)!$

QpQ:  $a_{k+2} = (k+2)!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= k \cdot a_{k+1} + 2 \cdot (k+1) \cdot a_k \\ &= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1) \cdot k! \\ &= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1)! \\ &= (k+1)! \cdot (k+2) \\ &= (k+2)! \end{aligned}$$

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.18.B. Pregunta ii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n^2$

**Casos base  $n = 1$  y  $n = 2$**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 4$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k^2$  y  $a_{k+1} = (k+1)^2$

QpQ:  $a_{k+2} = (k+2)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 4 \cdot \sqrt{a_{k+1}} + a_k \\ &= 4 \cdot \sqrt{(k+1)^2} + k^2 \\ &= 4 \cdot (k+1) + k^2 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.18.C. Pregunta iii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Casos base  $n = 1$  y  $n = 2$**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 3$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$  y  $a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

QpQ:  $a_{k+2} = \frac{(k+2)(k+3)}{2} \iff 2 \cdot a_{k+2} = (k+2)(k+3)$

Pero,

$$\begin{aligned}
 2 \cdot a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k + 3k + 5 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + 3k + 5 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2) + k(k+1) + 6k + 10}{2} \\
 &= \frac{k^2 + k + 2k + 2 + k^2 + k + 6k + 10}{2} \\
 &= \frac{2k^2 + 10k + 12}{2} \\
 &= 2k^2 + 5k + 6 \\
 &= (k+2)(k+3)
 \end{aligned}$$

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.19. Ejercicio 19

### 2.19.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : a_n < 1 + 3^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}$

**Casos base n = 1 y n = 2**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 3$

$$1 + 3^{1-1} = 1 + 3^0 = 2$$

$$1 + 3^{2-1} = 1 + 3^1 = 4$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k < 1 + 3^{k-1}$  y  $a_{k+1} < 1 + 3^k$

QpQ:  $a_{k+2} < 1 + 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
 a_{k+2} &= a_{k+1} + 5 \cdot a_k \\
 &< 1 + 3^k + 5 \cdot (1 + 3^{k-1}) \\
 &< 1 + 3^k + 5 + 5 \cdot 3^{k-1} \\
 a_{k+2} &< 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1}
 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 1 + 3^{k+1} \\
 5 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 3^{k+1} \\
 5 &\leq 3^{k+1} - 3^k - 5 \cdot 3^{k-1} \\
 5 &\leq 3^k \cdot (3 - 1 - \frac{5}{3}) \\
 5 &\leq 3^k \cdot \frac{17}{3}
 \end{aligned}$$



Que es verdadero  $\forall k \geq 1$ .

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Ahora busco una fórmula para el término general de la sucesión. Se ve que es una sucesión de Lucas, por lo tanto.

El polinomio asociado a la sucesión es:  $x^2 - x - 5 = 0$

Con raíces:  $\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\}$

Luego busco  $\alpha$  y  $\beta$  tales que: 
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta = 3 \end{cases}$$

De la primer ecuación sale que:  $\beta = 1 - \alpha$

Reemplazando en la segunda,

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta &= 3 \\ (1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot \beta &= 6 \\ (1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot (1-\alpha) &= 6 \\ \alpha + \sqrt{21} \cdot \alpha + 1 - \alpha - \sqrt{21} + \sqrt{21} \cdot \alpha &= 6 \\ 2 \cdot \sqrt{21} \cdot \alpha &= 6 - 1 + \sqrt{21} \\ \alpha &= \frac{5+\sqrt{21}}{2 \cdot \sqrt{21}} \end{aligned}$$

Así,  $\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{5+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}$

## 2.20. Ejercicio 20

TODO

## 2.21. Ejercicio 21

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n!, \forall n \in \mathbb{N}$

**Casos base n = 1**

Por definición,  $a_1 = 1$

$1! = 1$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Quiero probar que  $(p(k) \wedge 1 \leq k \leq h) \implies p(h+1)$

HI:  $a_k = k!$

QpQ:  $a_{h+1} = (h+1)!$

TODO

## 2.22. Ejercicio 22

Defino  $p(n) : f^{3k}(x) = x; \forall k \in \mathbb{N}$

**Casos base n = 1**

$f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = f \circ f(\frac{1}{1-x}) = f(\frac{x-1}{x}) = x$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Dado  $h \geq 1$  quiero probar que  $p(h) \implies p(h+1)$

HI:  $f^{3h}(x) = x$

QpQ:  $f^{3h+3}(x) = x$

Pero,

$$\begin{aligned} f^{3h+3}(x) &= f \circ f \circ f \dots f(x) \\ &= f \circ f \circ f(f^{3h}(x)) \\ &= f \circ f \circ f(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Luego  $p(h) \implies p(h+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.23. Ejercicio 23

TODO

## 2.24. Ejercicio 24

$p(n) : \sum_{i=1}^r 2^{a_i} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por inducción global

Caso base:  $2^0 = 1 \vee$

HI: Si  $k \leq n$ . "k" se puede escribir como suma de potencias  $\neq$  de 2

Veamos que  $n+1$  también se puede

Si  $n$  es par  $n = \sum_{i=1}^r 2^{a_i} \quad a_i \neq 0 \quad \forall i$

Por lo tanto:  $n$  par  $\implies m = n+1$  impar

$$m = n+1 = \sum_{i=1}^r 2^{a_i} + 2^0$$

Si  $n$  es impar  $n+1$  es par  $\implies \exists \alpha \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{n+1}{2^\alpha}$  es impar.

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2^\alpha} &\leq n \\ n+1 &\leq 2^\alpha n \\ 1 &\leq (2^\alpha - 1)n \quad \text{como } (2^\alpha - 1) \geq 1 \quad \text{esto es verdadero siempre} \\ \implies \frac{n+1}{2^\alpha} &= \sum_{i=1}^r 2^{a_i} \quad \text{con } a_i \text{ todos } \neq \\ \implies n+1 &= \sum_{i=1}^r 2^{a_i + \alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto como  $p(1) \vee$  y  $[p(k) \vee \text{ con } k \leq n \implies n+1 \vee]$  entonces por el principio de inducción  $p(n) \vee \quad \forall n \in \mathbb{N}$