DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 5

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

5. Práctica 5

5.1. Ejercicio 1

5.1.A. Pregunta i

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $7a + 11b = 10$

Verifico que existe solución

Dado que $(7 : 11) = 1 \implies 1|10 \implies$ existe solución.

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{aligned} 7.s + 11.t &= 1 \\ 7.(-3) + 11.2 &= 1 \\ 7.(-3).10 + 11.2.10 &= 1.10 \\ 7.(-30) + 11.20 &= 10 \\ -210 + 220 &= 10 \end{aligned}$$

Luego $(-30, 20)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff -11|7.a \iff -11|a \iff a = -11.k$

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff 7(-11.k) = 11.b \iff b = 7.k$

Luego $(-11.k, 7.k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-11.k, 7.k) + (-30, 20) = (-11.k - 30, 7.k + 20); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a, b) = (-11.k - 30, 7.k + 20)$ luego,

$$\begin{aligned} 7a + 11b = 10 &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7. - 11.k - 210 + 11.7.k + 220 = 10 \\ &\iff -210 + 220 = 10 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.B. Pregunta ii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $20a + 16b = 30$

Verifico que existe solución

$(20 : 16) = 4 \wedge 4 \not| 30$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.1.C. Pregunta iii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $39a - 24b = 6$

Verifico que existe solución

$(39:24) = 3 \wedge 3|6$ luego existe solución en F^2

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$20a + 16b = 30 \leftrightsquigarrow 13a - 8b = 2$

Busco una solución particular

$13.(2) - 8.(3) = 26 - 24 = 2$

Luego $(2, 3)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \implies 13|8b \iff 13|b \iff b = 13k$

$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \iff 13a = 8(13k) \iff a = 8k$

Luego $(8k, 13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (8k, 13k) + (2, 3) = (8k + 2, 13k + 3); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a, b) = (8k + 2, 13k + 3)$ luego,

$$\begin{aligned} 39a - 24b = 6 &\iff 39(8k + 2) - 24(13k + 3) = 6 \\ &\iff 39.8k + 78 - 24.13k - 72 = 6 \\ &\iff 78 - 72 = 6 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.D. Pregunta iv

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $1555a - 300b = 11$

Verifico que existe solución

$(1555 : 300) = 5 \wedge 4 \nmid 5$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.2. Ejercicio 2

Primero busco soluciones $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ para la ecuación $33a + 9b = 120$

Verifico que existe solución

$(33 : 9) = 3 \wedge 3|120 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$33a + 9b = 120 \leftrightsquigarrow 11a + 3b = 40$

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{gathered} 11.s + 3.t = 1 \\ 11.(2) + 3.(-7) = 1 \\ 11.2.(40) + 3.(-7).(40) = 1.(40) \\ 11.80 + 3.(-280) = 40 \end{gathered}$$

Luego $(80, -280)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11| - 3b \implies 11|b \implies b = 11k$

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11a = -3(11k) \implies a = -3k$

Luego $(-3k, 11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-3k, 11k) + (80, -280) = (-3k + 80, 11k - 280); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego tengo definidas las restricciones para a y b de tal forma que cumplan con la diofántica, ahora uso los datos de divisibilidad.

$a = -3k + 80 \implies -3k + 80 \equiv 0(4) \implies k \equiv 0(4)$

$b = 11k - 280 \implies 11k - 280 \equiv 0(8) \implies k \equiv 0(8)$

Pero $k \equiv 0(8) \iff k \equiv 0(4)$

Luego $k = 8n \implies a = 3(8n) + 80 \wedge b = 11(8n) - 280; n \in \mathbb{Z}$

Rta.: $(a, b) = (24n + 80, 88n - 280); \forall n \in \mathbb{Z}$

5.3. Ejercicio 3

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen $39a + 48b = 135$

Verifico que existe solución

$(39 : 135) = 3 \wedge 3|135 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$39a + 48b = 135 \leftrightsquigarrow 13a + 16b = 45$

Busco una solución particular

$(225, -180)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13| - 16b \implies 13|b \implies b = 13k$

$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13a = -16(13k) \implies a = -16k$

Luego $(-16k, 13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-16k, 13k) + (225, -180) = (-16k + 225, 13k - 180); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego,
$a \geq 0 \implies -16k + 225 \geq 0 \implies 16k \leq 225 \implies k \leq \frac{225}{16} \implies k \leq 14$
$b \geq 0 \implies 13k - 180 \geq 0 \implies 13k \geq 180 \implies k \geq \frac{180}{13} \implies k \geq 14$

Luego $14 \leq k \leq 14 \implies k = 14 \implies$ se compran 1 unidad de a y 2 de b, gastando 135 pesos.

5.4. Ejercicio 4

1. $17x \equiv 3(11) \iff 6x \equiv 3(11) \iff 2.6 \equiv 2.3(11) \iff x \equiv 6(11)$
2. $56x \equiv 28(35) \iff 21x \equiv 28(35) \iff 3x \equiv 4(5) \iff 6x \equiv 8(5) \iff x \equiv 3(5)$
3. $56x \equiv 2(884)$ No tiene solución pues $(56 : 884) = 4 \not| 2$
4. $78x \equiv 30(12126) \iff 13x \equiv 5(2021) \iff 311.13x \equiv 311.5(2021) \iff x \equiv 1551(2021)$

5.5. Ejercicio 5

Primero resuelvo la diofántica: busco $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : 28a + 10b = 26$

Verifico que existe solución

$(28 : 10) = 2 \wedge 2|26 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$28a + 10b = 26 \leftrightsquigarrow 14a + 5b = 13$

Busco una solución particular

$(-13, 39)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14| - 5b \implies 14|b \implies b = 14k$

$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14a = -5(14k) \implies a = -5k$

Luego $(-5k, 14k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-5k, 14k) + (-13, 39) = (-5k - 13, 14k + 39); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego $a = -5 - 13 \wedge b = 14k + 39$. Usando el dato de la congruencia,

$$\begin{aligned} b \equiv 2a(5) &\iff 14k + 39 \equiv 2(-5k - 13)(5) \\ &\iff 4k + 4 \equiv 4(5) \\ &\iff 4(k+1) \equiv 4(5) \\ &\iff k + 1 \equiv 1(5) \\ &\iff k \equiv 0(5) \end{aligned}$$

Luego se que $k = 5n; n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, las soluciones serán $(a,b) = (-25n - 13, 70n + 39); n \in \mathbb{Z}$

5.6. Ejercicio 6

$$\begin{aligned} 7a \equiv 5(18) &\iff (-5).7.a \equiv (-5).5(18) \\ &\iff -35a \equiv -25(18) \\ &\iff a \equiv 11(18) \end{aligned}$$

Luego el resto de dividir a a por 18 es 11.

5.7. Ejercicio 7

Primero busco los $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 110x + 250y = 100$

Verifico que existe solución

$(110 : 250) = 10 \wedge 10|100 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$110x + 250y = 100 \leftrightsquigarrow 11x + 25y = 10$

Busco una solución particular

$(-90, 40)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11x + 25y = 0 \iff 11x = -25y \implies 11| -25y \implies 11|y \implies y = 11k$

$11x + 25y = 0 \iff 11x = -25y \implies 11x = -25(11k) \implies x = -25k$

Luego $(-25k, 11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-25k, 11k) + (-90, 40) = (-25k - 90, 11k + 40); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego $x = -25k - 90 \wedge y = 11k + 40$,

$$\begin{aligned} 37^2|(x-y)^{4321} &\iff 37^2|(-25k - 90 - 11k - 40)^{4321} \\ &\iff 37^2|(-36k - 130)^{4321} \end{aligned}$$

Pero por propiedades de la divisibilidad,

$$\begin{aligned} 37^2|(-36k - 130)^{4321} &\iff 37|(-36k - 130) \\ &\iff -36k \equiv 130(37) \\ &\iff k \equiv 4(37) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x, y) = (-25n - 90, 11n + 40)$ para todo $n \equiv 4(37)$