DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 5

2do cuatrimestre 2021 — Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

5. Práctica 5

5.1. Ejercicio 1

5.1.A. Pregunta i

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $7a + 11b = 10$

Verifico que existe solución

Dado que $(7 : 11) = 1 \implies 1|10 \implies$ existe solución.

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{aligned} 7.s + 11.t &= 1 \\ 7.(-3) + 11.2 &= 1 \\ 7.(-3).10 + 11.2.10 &= 1.10 \\ 7.(-30) + 11.20 &= 10 \\ -210 + 220 &= 10 \end{aligned}$$

Luego $(-30, 20)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff -11|7.a \iff -11|a \iff a = -11.k$

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff 7(-11.k) = 11.b \iff b = 7.k$

Luego $(-11.k, 7.k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-11.k, 7.k) + (-30, 20) = (-11.k - 30, 7.k + 20); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a, b) = (-11.k - 30, 7.k + 20)$ luego,

$$\begin{aligned} 7a + 11b = 10 &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7. - 11.k - 210 + 11.7.k + 220 = 10 \\ &\iff -210 + 220 = 10 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.B. Pregunta ii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $20a + 16b = 30$

Verifico que existe solución

$(20 : 16) = 4 \wedge 4 \not| 30$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.1.C. Pregunta iii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $39a - 24b = 6$

Verifico que existe solución

$(39:24)=3 \wedge 3|6$ luego existe solución en F^2

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$20a+16b=30 \leftrightsquigarrow 13a-8b=2$

Busco una solución particular

$13.(2)-8.(3)=26-24=2$

Luego $(2,3)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a-8b=0 \iff 13a=8b \implies 13|8b \iff 13|b \iff b=13k$

$13a-8b=0 \iff 13a=8b \iff 13a=8(13k) \iff a=8k$

Luego $(8k,13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S=(8k,13k)+(2,3)=(8k+2,13k+3); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a,b)=(8k+2,13k+3)$ luego,

$$\begin{aligned}39a-24b=6 &\iff 39(8k+2)-24(13k+3)=6\\ &\iff 39.8k+78-24.13k-72=6\\ &\iff 78-72=6\end{aligned}$$

Verificado.

5.1.D. Pregunta iv

Busco los $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $1555a-300b=11$

Verifico que existe solución

$(1555:300)=5 \wedge 4 \not| 5$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.2. Ejercicio 2

Primero busco soluciones $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ para la ecuación $33a+9b=120$

Verifico que existe solución

$(33:9)=3 \wedge 3|120 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$33a+9b=120 \leftrightsquigarrow 11a+3b=40$

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{gathered}11.s+3.t=1\\ 11.(2)+3.(-7)=1\\ 11.2.(40)+3.(-7).(40)=1.(40)\\ 11.80+3.(-280)=40\end{gathered}$$

Luego $(80, -280)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11| - 3b \implies 11|b \implies b = 11k$

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11a = -3(11k) \implies a = -3k$

Luego $(-3k, 11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-3k, 11k) + (80, -280) = (-3k + 80, 11k - 280); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego tengo definidas las restricciones para a y b de tal forma que cumplan con la diofántica, ahora uso los datos de divisibilidad.

$a = -3k + 80 \implies -3k + 80 \equiv 0(4) \implies k \equiv 0(4)$

$b = 11k - 280 \implies 11k - 280 \equiv 0(8) \implies k \equiv 0(8)$

Pero $k \equiv 0(8) \iff k \equiv 0(4)$

Luego $k = 8n \implies a = 3(8n) + 80 \wedge b = 11(8n) - 280; n \in \mathbb{Z}$

Rta.: $(a, b) = (24n + 80, 88n - 280); \forall n \in \mathbb{Z}$

5.3. Ejercicio 3

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen $39a + 48b = 135$

Verifico que existe solución

$(39 : 135) = 3 \wedge 3|135 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$39a + 48b = 135 \leftrightsquigarrow 13a + 16b = 45$

Busco una solución particular

$(225, -180)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13| - 16b \implies 13|b \implies b = 13k$

$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13a = -16(13k) \implies a = -16k$

Luego $(-16k, 13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-16k, 13k) + (225, -180) = (-16k + 225, 13k - 180); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego,
$a \geq 0 \implies -16k + 225 \geq 0 \implies 16k \leq 225 \implies k \leq \frac{225}{16} \implies k \leq 14$
$b \geq 0 \implies 13k - 180 \geq 0 \implies 13k \geq 180 \implies k \geq \frac{180}{13} \implies k \geq 14$

Luego $14 \leq k \leq 14 \implies k = 14 \implies$ se compran 1 unidad de a y 2 de b, gastando 135 pesos.

5.4. Ejercicio 4

1. $17x \equiv 3(11) \iff 6x \equiv 3(11) \iff 2.6 \equiv 2.3(11) \iff x \equiv 6(11)$
2. $56x \equiv 28(35) \iff 21x \equiv 28(35) \iff 3x \equiv 4(5) \iff 6x \equiv 8(5) \iff x \equiv 3(5)$
3. $56x \equiv 2(884)$ No tiene solución pues $(56 : 884) = 4 \nmid 2$
4. $78x \equiv 30(12126) \iff 13x \equiv 5(2021) \iff 311.13x \equiv 311.5(2021) \iff x \equiv 1551(2021)$

5.5. Ejercicio 5

Primero resuelvo la diofántica: busco $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : 28a + 10b = 26$

Verifico que existe solución

$(28:10) = 2 \wedge 2|26 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$28a + 10b = 26 \leftrightsquigarrow 14a + 5b = 13$

Busco una solución particular

$(-13, 39)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14| -5b \implies 14|b \implies b = 14k$

$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14a = -5(14k) \implies a = -5k$

Luego $(-5k, 14k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-5k, 14k) + (-13, 39) = (-5k - 13, 14k + 39); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego $a = -5 - 13 \wedge b = 14k + 39$. Usando el dato de la congruencia,

$$\begin{aligned} b \equiv 2a(5) &\iff 14k + 39 \equiv 2(-5k - 13)(5) \\ &\iff 4k + 4 \equiv 4(5) \\ &\iff 4(k+1) \equiv 4(5) \\ &\iff k + 1 \equiv 1(5) \\ &\iff k \equiv 0(5) \end{aligned}$$

Luego se que $k = 5n; n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, las soluciones serán $(a,b) = (-25n - 13, 70n + 39); n \in \mathbb{Z}$

5.6. Ejercicio 6

$$\begin{aligned} 7a \equiv 5(18) &\iff (-5).7.a \equiv (-5).5(18) \\ &\iff -35a \equiv -25(18) \\ &\iff a \equiv 11(18) \end{aligned}$$

Luego el resto de dividir a a por 18 es 11.

5.7. Ejercicio 7

Primero busco los $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 110x + 250y = 100$

Verifico que existe solución

$(110:250) = 10 \wedge 10|100 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$110x + 250y = 100 \leftrightsquigarrow 11x + 25y = 10$

Busco una solución particular

$(-90,40)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11x+25y=0 \iff 11x=-25y \implies 11|-25y \implies 11|y \implies y=11k$

$11x+25y=0 \iff 11x=-25y \implies 11x=-25(11k) \implies x=-25k$

Luego $(-25k,11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S=(-25k,11k)+(-90,40)=(-25k-90,11k+40); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego $x=-25k-90 \wedge y=11k+40$,

$$\begin{aligned} 37^2|(x-y)^{4321} &\iff 37^2|(-25k-90-11k-40)^{4321} \\ &\iff 37^2|(-36k-130)^{4321} \end{aligned}$$

Pero por propiedades de la divisibilidad,

$$\begin{aligned} 37^2|(-36k-130)^{4321} &\iff 37|(-36k-130) \\ &\iff -36k \equiv 130(37) \\ &\iff k \equiv 4(37) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x,y)=(-25n-90,11n+40)$ para todo $n \equiv 4(37)$

5.8. Ejercicio 8

Sea $d=(2a-3:4a^2+10a-10)$

Busco llegar a una expresión del tipo $d|n$ con $n \in \mathbb{Z}$

Luego,

$$\begin{aligned} d|2a-3 \wedge d|4a^2+10a-10 &\iff d|2a(2a-3)-4a^2-10a+10 \\ &\iff d|4a^2-6a-4a^2-10a+10 \\ &\iff d|-16a+10 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iff d|-16a+10 \wedge d|2a-3 &\iff d|-16a+10+8(2a-3) \\ &\iff d|-16a+10+10a-24 \\ &\iff d|-14 \\ &\iff d \in Div_+(-14)=\{1,2,7,14\} \end{aligned}$$

- $d=2 \implies 2|2a-3 \implies 2a-3 \equiv 0(2) \implies 0 \equiv 3(2)$ ABS
- $d=7 \implies 7|2a-3 \implies 2a-3 \equiv 0(7) \implies 2a \equiv 3(7) \implies a \equiv 5(7)$

Luego con $a \equiv 5(7)$ se tiene,

$$\begin{aligned} 4a^2+10a-10 &\equiv 4.25+10.5-10(7) \\ &\equiv 2+1+4(7) \\ &\equiv 7(7) \\ &\equiv 0(7) \end{aligned}$$

Así, para $a \equiv 5(7)$ el MCD es igual a 7. No pruebo con 14 ya que $14 = 2.7$ y si $2 \not| 2a - 3$ tampoco lo hará 14.

Rta.: Con $a \equiv 5(7)$ el MCD $\neq 1$

5.9. Ejercicio 9

Sea $d = (5a + 8 : 7a + 3)$

Busco una expresión del tipo $d|n$ con $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} d|5a+8 \wedge d|7a+3 &\iff d|7(5a+8) - 5(7a+3) \\ &\iff d|35a + 56 - 35a - 15 \\ &\iff d|41 \end{aligned}$$

Luego $d \in Div_+(41) \iff d \in \{1, 41\}$

Con $d = 41$,

$$\begin{aligned} d = 41 &\implies 41|5a+8 \\ &\iff 5a + 8 \equiv 0(41) \\ &\iff 5a \equiv 33(41) \\ &\iff 8.5a \equiv 8.33(41) \\ &\iff -a \equiv 18(41) \\ &\iff a \equiv 23(41) \end{aligned}$$

Con $a \equiv 23(41)$
$7a + 3 \equiv 7.23 + 3 \equiv 0(41)$

Rta.: $\begin{cases} (5a+8 : 7a+3) = 41 & a \equiv 23(41) \\ (5a+8 : 7a+3) = 1 & a \not\equiv 23(41) \end{cases}$

5.10. Ejercicio 10

5.10.A. Pregunta i

$\begin{cases} a \equiv 3(10) \\ a \equiv 2(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$

El TCR me asegura que existe una solución $x \equiv n(630)$ con $0 \leq n \leq 630$ pues 10,7,9 son primos dos a dos.

Quiebro el sistema de ecuaciones en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 3(10) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(10) \\ a \equiv 2(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(10) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema por separado.

S1, $\begin{cases} 0 \equiv 3(10) \\ 0 \equiv 0(63) \end{cases} \implies a = 63k \implies 63k \equiv 3(10) \implies 3k \equiv 3(10) \implies k \equiv 1(10)$

Luego $a = 63.k = 63.1 = 63$

S2, $\begin{cases} a \equiv 2(7) \\ a \equiv 0(90) \end{cases} \implies a = 90k \implies 90k \equiv 2(7) \implies 6k \equiv 2(7) \implies k \equiv 5(7)$

Luego $a = 90k = 90.5 = 450$

S3, $\begin{cases} a \equiv 5(9) \\ a \equiv 0(70) \end{cases} \implies a = 70k \implies 70k \equiv 5(9) \implies 7k \equiv 5(9) \implies k \equiv 2(9)$

Luego $a = 70.k = 70.2 = 140$

Por lo tanto se que $x \equiv 63 + 450 + 140 = 653(630)$ es solución al sistema.

Rta.: $x \equiv 653 \equiv 23(630)$ es solución al sistema.

5.10.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} a \equiv 1(6) \\ a \equiv 2(20) \\ a \equiv 3(9) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 1(2) \\ a \equiv 2(4) \implies a \equiv 0(2) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 3(9) \implies a \equiv 0(3) \end{cases}$$ Luego el sistema es imcompatible.

5.10.C. Pregunta iii

$$\begin{cases} a \equiv 1(12) \\ a \equiv 7(10) \\ a \equiv 4(9) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 1(4) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 7(5) \\ a \equiv 7(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 4(9) \implies a \equiv 1(3) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 4(9) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 4(9) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema,

S1, $\begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 0(45) \end{cases} \implies a = 45k \implies 45k \equiv 1(4) \implies k \equiv 1(4)$

Luego $x_1 = 45$

S2, $\begin{cases} a \equiv 2(5) \\ a \equiv 0(36) \end{cases} \implies a = 36k \implies 36k \equiv 2(5) \implies k \equiv 2(5)$

Luego $x_2 = 36.2 = 72$

S3, $\begin{cases} a \equiv 4(9) \\ a \equiv 0(20) \end{cases} \implies a = 20k \implies 20k \equiv 4(9) \implies k \equiv 2(9)$

Luego $x_3 = 20.2 = 40$

Entonces sea $x = x_1 + x_2 + x_3 = 45 + 72 + 40 = 157$

El TCR me asegura que hay una únnica solución del sistema MOD 180

Rta.: $x \equiv 157(180)$ es solución al sistema.

5.11. Ejercicio 11

5.11.A. Pregunta i

$$\begin{cases} 3a \equiv 4(5) \\ 5a \equiv 4(6) \\ 6a \equiv 2(7) \end{cases} \iff \begin{cases} 3.3a \equiv 3.4(5) \\ 5.5a \equiv 5.4(6) \\ 6.6a \equiv 6.2(7) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 2(6) \\ a \equiv 5(7) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(6) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 2(6) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(6) \\ a \equiv 5(7) \end{cases}$

Busco soluciones de cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(42) \end{cases} \implies a = 42k \implies 42k \equiv 3(5) \implies 2k \equiv 3(5) \implies k \equiv 4(5)$

Luego $x_1 = 42.4 = 168$

S2: $\begin{cases} a \equiv 2(6) \\ a \equiv 0(35) \end{cases} \implies a = 35k \implies 35k \equiv 2(6) \implies -k \equiv 2(6) \implies k \equiv 4(6)$

Luego $x_2 = 35.4 = 140$

S3: $\begin{cases} a \equiv 5(7) \\ a \equiv 0(30) \end{cases} \implies a = 30k \implies 30k \equiv 5(7) \implies 2k \equiv 5(7) \implies k \equiv 6(7)$

Luego $x_3 = 30.6 = 180$

Así, defino $x = x_1 + x_2 + x_3 = 168 + 140 + 180 = 488$

Rta.: $a \equiv 488 \equiv 68(210)$ es solución al sistema.

5.11.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} 3a \equiv 1(10) \\ 5a \equiv 3(6) \\ 9a \equiv 1(14) \end{cases} \iff \begin{cases} -a \equiv 3(10) \implies a \equiv 7(10) \\ a \equiv 3(6) \\ -a \equiv 3(14) \implies a \equiv 11(14) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(10) \\ a \equiv 3(6) \\ a \equiv 11(14) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 7(2) \\ a \equiv 3(3) \\ a \equiv 3(2) \\ a \equiv 11(7) \\ a \equiv 11(2) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 11(14) \end{cases}$$

Quiebro el sostema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(14) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(14) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 11(14) \end{cases}$

Busco soluciones de cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(42) \end{cases} \implies a = 42k \implies 42k \equiv 7(5) \implies 2k \equiv 2(5) \implies k \equiv 1(5)$

Luego $x_1 = 42k = 42.1 = 42$

S2: $\begin{cases} a \equiv 0(210) \end{cases}$

Luego $x_2 = 0$

S3: $\begin{cases} a \equiv 11(14) \\ a \equiv 0(15) \end{cases} \implies a = 15k \implies 15k \equiv 11(14) \implies k \equiv 11(14)$

Luego $x_3 = 15k = 15.11 = 165$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 42 + 0 + 165 = 207$

Rta.: $a \equiv 207(210)$

5.11.C. Pregunta iii

$$\begin{cases} 15a \equiv 10(35) \\ 21a \equiv 15(8) \\ 18a \equiv 24(30) \end{cases} \iff \begin{cases} 3a \equiv 2(7) \\ 21a \equiv 15(8) \\ 3a \equiv 4(5) \end{cases} \iff \begin{cases} -a \equiv 4(7) \implies a \equiv 3(7) \\ a \equiv 3(8) \\ -a \equiv 12(5) \implies a \equiv 3(5) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3(7) \\ a \equiv 3(8) \\ a \equiv 3(5) \end{cases}$$

Rta.: $a \equiv 3(280)$

5.12. Ejercicio 12

5.12.A. Pregunta i

$$\begin{cases} a \equiv 5(6) \\ a \equiv 3(10) \\ a \equiv 5(8) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 5(3) \implies a \equiv 2(3) \\ a \equiv 5(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 3(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 5(8) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 5(8) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(8) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(3) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(8) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 5(8) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 0(40) \end{cases} \implies a = 40k \implies 40k \equiv 2(3) \implies k \equiv 2(3)$

Luego $x_1 = 40.2 = 80$

S2: $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(24) \end{cases} \implies a = 24k \implies 24k \equiv 3(5) \implies -k \equiv 3(5) \implies k \equiv 2(5)$

Luego $x_2 = 24.2 = 48$

S3: $\begin{cases} a \equiv 5(8) \\ a \equiv 0(15) \end{cases} \implies a = 15k \implies 15k \equiv 5(8) \implies k \equiv 3(8)$

Luego $x_3 = 15.3 = 45$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 80 + 48 + 45 = 173$

Rta.: $r_{480}(a) = 173$

5.12.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ 6a \equiv 9(15) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ 2a \equiv 3(5) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 4(5) \end{cases}$$

Divido el sistema en dos.

S1: $\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 0(5) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(21) \\ a \equiv 5(5) \end{cases}$

Busco soluciones a los sistemas.

S1: $\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 0(5) \end{cases} \implies a = 5k \implies 5k \equiv 13(21) \implies k \equiv 11(21)$

Luego $x_1 = 5k = 5.11 = 55$

S2: $\begin{cases} a \equiv 4(5) \\ a \equiv 0(21) \end{cases} \implies a = 21k \implies 21k \equiv 4(5) \implies k \equiv 4(5)$

Luego $x_2 = 21k = 21.4 = 84$

Por lo tanto $x = x_1 + x_2 = 55 + 84 = 139 \implies a \equiv 35(105)$

Rta.: 34 es el entero positivo más chico que cumple lo pedido.

5.13. Ejercicio 13

$$\begin{cases} a \equiv 4(12) \\ a \equiv 43(63) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 4(3) \\ a \equiv 4(4) \\ a \equiv 43(9) \\ a \equiv 43(7) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases} \implies a \equiv 1(3) \qquad \iff \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(9) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases}$

Busco soluciones a los sistemas.

S1: $\begin{cases} a \equiv 0(252) \end{cases}$

Luego $x_1 = 0$

S2: $\begin{cases} a \equiv 7(9) \\ a \equiv 0(28) \end{cases} \implies a = 28k \implies 28k \equiv 7(9) \implies k \equiv 7(9)$

Luego $x_2 = 28k = 28.7 = 196$

S3: $\begin{cases} a \equiv 1(7) \\ a \equiv 0(36) \end{cases} \implies a = 36k \implies 36k \equiv 1(7) \implies k \equiv 1(7)$

Luego $x_3 = 36k = 36.1 = 36$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 196 + 36 = 232 \implies a \equiv 232(252)$

Luego $a \equiv 232(252) \iff a = 252k + 232$

Ahora uso que $12600 \leq a \leq 13300$,

$$\begin{aligned} 12600 \leq a \leq 13300 \\ 12600 \leq 252k + 232 \leq 13300 \\ \frac{12600 - 232}{252} \leq k \leq \frac{13300 - 232}{252} \\ 49,07 \leq k \leq 51,85 \end{aligned}$$

Luego $k \in \{50, 51\}$

- $k = 50 \implies a = 12832$
- $k = 51 \implies a = 13084$

Rta.: Había 12832 o 13084 latas.

5.14. Ejercicio 14

$$a^2 \equiv 21(238) \iff \begin{cases} a^2 \equiv 21(2) \\ a^2 \equiv 21(7) \\ a^2 \equiv 21(17) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 \equiv 1(2) \\ a^2 \equiv 0(7) \\ a^2 \equiv 4(17) \end{cases}$$

Usando tabla de restos llego a

$$\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(17) \vee a \equiv 15(17) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(17) \vee a \equiv 0(17) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(17) \vee a \equiv 0(17) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(17) \vee a \equiv 15(17) \end{cases}$

Busco soluciones de cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(119) \end{cases} \implies a = 119k \implies 119k \equiv 1(2) \implies k \equiv 1(2)$

Luego $x_1 = 119$

S2: $\begin{cases} a \equiv 0(238) \end{cases}$

Luego $x_2 = 0$

S3a: $\begin{cases} a \equiv 2(17) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \implies a = 14k \implies 14k \equiv 2(17) \implies k \equiv 5(17)$

Luego $x_{3a} = 14.5 = 70$

S3b: $\begin{cases} a \equiv 15(17) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \implies a = 14k \implies 14k \equiv 15(17) \implies k \equiv 12(17)$

Luego $x_{3b} = 14.12 = 168$

Así, obtengo dos soluciones:

- $x_a = x_1 + x_2 + x_{3a} = 119 + 0 + 70 = 189$
- $x_b = x_1 + x_2 + x_{3b} = 119 + 0 + 168 = 287 \equiv 49(238)$

Rta.: Los posibles restos son 49 y 189.