



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 3

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

3. Práctica 3	2
3.1. Ejercicio 1	2
3.2. Ejercicio 2	2
3.3. Ejercicio 3	2
3.4. Ejercicio 4	2
3.5. Ejercicio 5	3
3.6. Ejercicio 6	3
3.7. Ejercicio 7	3
3.8. Ejercicio 8	3
3.9. Ejercicio 9	3
3.10. Ejercicio 10	3
3.11. Ejercicio 11	4
3.12. Ejercicio 12	4
3.13. Ejercicio 13	4
3.14. Ejercicio 14	4
3.15. Ejercicio 15	4
3.16. Ejercicio 16	5
3.17. Ejercicio 17	5
3.18. Ejercicio 18	5
3.19. Ejercicio 19	5
3.20. Ejercicio 20	6
3.21. Ejercicio 21	6
3.22. Ejercicio 22	6
3.23. Ejercicio 23	6
3.24. Ejercicio 24	6

3. Práctica 3

3.1. Ejercicio 1

Por enunciado, $A = \{n \in V : n \geq 132\}$

Y también, $A^c = \{n \in V : n < 132\}$

Se que dado un elemento cualquiera, $x \in V \iff (x \in \mathbb{N} \wedge x \bmod 15 = 0)$

Por lo tanto, $A^c = \{n \in V : (n < 132 \wedge n \bmod 15 = 0)\}$

Así, $\#A^c = \lfloor \frac{132}{15} \rfloor = 8$

Por extensión, $A^c = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120\}$

3.2. Ejercicio 2

Defino el conjunto universal $V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\}$

Defino el conjunto $T = \{n \in \mathbb{N} : n \bmod 3 = 0\}$

Defino el conjunto $C = \{n \in \mathbb{N} : n \bmod 5 = 0\}$

Luego busco $\#(T^c \cup C^c) = \#(T \cup C)^c$

Entonces $(T \cup C) = \{n \in \mathbb{N} : n \bmod 15 = 0\}$ pues 3 y 5 son primos.

Por lo tanto $\#(T \cup C) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Y así, $\#(T \cup C)^c = 1000 - 66 = 934$

3.3. Ejercicio 3

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

3.4. Ejercicio 4

3.4.A. Pregunta i

Datos del enunciado:

1. $\#V = 150$
2. $\#A = 83$
3. $\#B = 67$
4. $\#(A \cap B) = 45$

Luego,

$$\begin{aligned}\#(A \cup B)^c &= \#V - \#(A \cup B) \\ &= \#V - (\#A + \#B - \#(A \cap B)) \\ &= 150 - (83 + 67 - 45) \\ &= 45\end{aligned}$$

3.4.B. Pregunta ii

TODO

3.5. Ejercicio 5

Datos del enunciado:

1. Rutas BSAS - Ros = 3
2. Rutas Ros - SF = 4
3. Rutas SF - Req = 4

Por lo tanto hay $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ formas de ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por Rosario y Santa Fe.

3.6. Ejercicio 6

3.6.A. Pregunta i

Hay $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ números.

3.6.B. Pregunta ii

Calculando por el complemento:

Hay $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números de cuatro cifras.

En el inciso anterior se calculó la cantidad de números que no tienen cierto dígito (calculado por 5, vale para 7).

Luego habrá $9000 - 5832 = 3168$ números.

3.7. Ejercicio 7

Puede distribuirlos en 3^{17} formas.

3.8. Ejercicio 8

Defino $A = \{materias\}$, se que $\#A = 5$

Luego las posibles elecciones están dadas por $\#P(A) = 2^5 = 32$

Si tiene que cursar al menos dos materias, no puede elegir las opciones de cursar ninguna materia o una sola materia.

Así tiene $32 - 5 - 1 = 26$ formas de cursar al menos dos materias.

3.9. Ejercicio 9

Se que A es de la forma $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

R es una relación en $A \times A \iff R \subseteq A \times A$: si R es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$

Luego la cantidad de relaciones en A será: $\#P(A \times A) = 2^{n^2}$

1. Reflexivas: 2^{n^2-2}
2. Simétricas: $2^{\sum_{k=1}^n k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
3. Simétricas: $2^{\sum_{k=1}^{n-1} k} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

3.10. Ejercicio 10

1. $\#\{f \in F/f \text{ es función}\} = 12^5$
2. $\#\{f \in F/10 \notin \text{Im}(f)\} = 11^5$

$$3. \# \{f \in F/10 \in \text{Im}(f)\} = 12^5 - 11^5$$

$$4. \# \{f \in F/f(1) \in \{2, 4, 6\}\} = 3 \cdot 12^4$$

3.11. Ejercicio 11

1. $7! = 5040$ funciones.
2. $3! \cdot 4! = 144$ funciones.

3.12. Ejercicio 12

De cinco cifras usando los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5\} : 5!$

De cinco cifras usando los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} : \frac{5!}{2!}$

De cinco cifras usando los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sin 2 en las centenas: $\frac{7!}{2!} \cdot \frac{4}{5}$

3.13. Ejercicio 13

Rdo. funciones inyectivas: Una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva sii $(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (x \neq y) \implies f(x) \neq f(y)$

1. $\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$
2. Para $f(1)$ tengo 5 opciones. Al resto todas menos las que ya fueron asignadas $(9, 8, 7, \dots) \implies 5 \cdot \frac{9!}{3!}$

3.14. Ejercicio 14

Defino $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Luego $\#A = \#B = 7$

$f : A \rightarrow B$ es viyectiva $\iff \forall x \in A; \exists! y \in B : f(x) = y$

Y además me piden que $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Luego habrá $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$ funciones que cumplen lo pedido.

3.15. Ejercicio 15

Tengo R relación de equivalencia en $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} : f \text{ es inyectiva}\}$

Por definición, $fRg \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$

Necesito saber cuantas $g \in A$ se relacionan con $f(n) = n + 2$

Pero,

$$\begin{aligned} fRg &\iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2) \\ 3 + 4 &= g(1) + g(2) \\ 7 &= g(1) + g(2) \end{aligned}$$

Entonces, busco las $g \in A : g(1) + g(2) = 7$

Hay seis funciones de $\{1, 2\} \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6\}$ que cumplen con esto.

Completo el total de funciones asignando el resto de los elementos de forma inyectiva.

Luego habrá $6 \cdot \frac{6!}{4!} = 180$ elementos dentro de la clase de equivalencia de $f(n) = n + 2$

3.16. Ejercicio 16

Defino $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ y $B = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ con $\#A = 8$ y $\#B = 12$

Condiciones que me piden:

1. f inyectiva
2. $f(5) + f(6) = 6$
3. $f(1) \leq 6$

Primero busco asignaciones a $f(5)$ y $f(6)$ que cumplan lo pedido. Para esto hay cuatro opciones posibles.

Luego $f(1)$ puede tomar cualquier valor menos los dos que ya fueron asignados ya que $f(5); f(6)$ siempre toman valores ≤ 6 .
Luego para $f(1)$ hay 4 opciones.

Para los demás elementos de A pueden tomar alguno de los 9 elementos restantes de B .

Por lo tanto hay $4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!}$ opciones.

3.17. Ejercicio 17

1. $\binom{7}{4}$
2. $\binom{6}{3}$
3. $\binom{6}{4}$
4. $\binom{5}{3} \cdot 2$

3.18. Ejercicio 18

Por enunciado $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ y $\#A = 20$

3.18.A. Pregunta i

Defino $B_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20 \wedge n \bmod 3 = 0\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

Luego para armar las funciones debo elegir 4 del conjunto B_1 y 6 elementos del conjunto $B - B_1$

Luego habrá $\binom{6}{4} \cdot \binom{14}{6}$ subconjuntos.

3.18.B. Pregunta ii

Hay suma impar de dos elementos si uno de ellos es par y el otro impar. Entonces, todos los elementos deben ser pares o impares.

Si son todos pares $\implies \binom{10}{5}$ subconjuntos.

Si son todos impares $\implies \binom{10}{5}$ subconjuntos.

Luego habrá $2 \cdot \binom{10}{5}$

3.19. Ejercicio 19

Cada punto de una recta se une a dos de la otra para formar un triángulo.

Es decir, para cada vértice en una recta, elijo dos en la otra recta para formar el triángulo.

Luego habrá $\binom{m}{2} \cdot n$ con $m \geq 2; n \in \mathbb{N}$

3.20. Ejercicio 20

Defino $A = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ y $B = \{1, 2, 3, \dots, 16\}$

Me piden:

1. f inyectiva
2. $n, f(n)$ pares
3. $f(1) < f(3) < f(5) < f(7)$

La segunda condición me dice que los pares solo pueden tener imagen par, luego habrá $\#fp$ funciones para los pares.

$$\#fp = \frac{8!}{3!}$$

Para los impares tengo que considerar la tercera condición, esta implica que no me importa el orden de los elementos de B, sino que me voy a quedar con aquel que cumple la condición.

Así habrá $\#fi$ funciones para los impares.

$$\#fi = \binom{11}{4} \cdot 7 \cdot 6$$

Por lo tanto, hay $\frac{8!}{3!} \cdot \binom{11}{4} \cdot 7 \cdot 6$ funciones que cumplen lo pedido.

3.21. Ejercicio 21

1. $7!$
2. $\frac{7!}{3!}$
3. $\frac{12!}{3! \cdot 2!}$

3.22. Ejercicio 22

1. $\binom{7}{3} \cdot 3! \cdot 4!$
2. $\binom{7}{4} \cdot 3!$
3. $4! \cdot 4!$

3.23. Ejercicio 23

1. Por el complemento: $10! - \binom{10}{2} \cdot 8!$
2. $\binom{10}{3} \cdot 3! \cdot 7!$

3.24. Ejercicio 24

Defino $F = \{D, D, D, D, D, D, N, N, B, P, H, K, C, M\}$

Condiciones:

1. Dos frutas por día.
2. No más de una N por día.

Calculo por el complemento,

$$\#Todas - \#Dos naranjas por día = 14! - 7 \cdot 12!$$