



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 2

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

2. Práctica 2	2
2.1. Ejercicio 1	2
2.2. Ejercicio 2	2
2.3. Ejercicio 3	2
2.4. Ejercicio 4	3
2.5. Ejercicio 5	3
2.6. Ejercicio 6	3
2.7. Ejercicio 7	5
2.8. Ejercicio 8	8
2.9. Ejercicio 9	9
2.10. Ejercicio 10	11
2.11. Ejercicio 11	14
2.12. Ejercicio 12	15
2.13. Ejercicio 13	16
2.14. Ejercicio 14	17
2.15. Ejercicio 15	17
2.16. Ejercicio 16	18
2.17. Ejercicio 17	20
2.18. Ejercicio 18	21
2.19. Ejercicio 19	23
2.20. Ejercicio 20	24
2.21. Ejercicio 21	24
2.22. Ejercicio 22	24
2.23. Ejercicio 23	25
2.24. Ejercicio 24	25

2. Práctica 2

2.1. Ejercicio 1

1. (a) $\sum_{i=1}^{100} i$
(b) $\sum_{i=1}^{10} i^2$
(c) $\sum_{i=1}^{12} (-1)^i \cdot i^2$
(d) $\sum_{i=1 \wedge i \text{ impar}}^{21} i^2$
(e) $\sum_{i=0}^n 2i + 1$
(f) $\sum_{i=1}^n i \cdot n$
2. (a) $\frac{100!}{4!}$
(b) $\prod_{i=1}^{10} 2^i$
(c) $\prod_{i=1}^n i \cdot n$

2.2. Ejercicio 2

- (a) $2 + 4 ; 2(n - 6) + 2(n - 5)$
- (b) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} ; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}$
- (c) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} ; \frac{n+n-1}{2 \cdot (n-1)} + \frac{2n}{2n}$
- (d) $n + \frac{n}{2} ; \frac{n}{n^2-1} + \frac{n}{n^2}$
- (e) $-(n+1) \cdot (n+2) ; \frac{n+n-1}{2(n-1)-3} \cdot \frac{2n}{2n-3}$

2.3. Ejercicio 3

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (4i + 1) &= \sum_{i=1}^n 4i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n i + n \\ &= 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \\ &= 2 \cdot n(n+1) + n \\ &= 2n^2 + 3n\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=6}^n 2(i-5) &= 2 \sum_{i=6}^n (i-5) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n (i-5) - \sum_{i=1}^5 (i-5) \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 5 + 10 \right) \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 5n + 10 \right) \\ &= n^2 - 9n + 20\end{aligned}$$

2.4. Ejercicio 4

(a) $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

(b) $\sum_{i=1}^n q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-2}{q-1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$

(c) $\sum_{i=1}^n q^{2i} = \sum_{i=1}^n (q^2)^i = \begin{cases} \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

(d) $\sum_{i=n}^{2n} q^i = \sum_{i=0}^{2n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^{2n+1}-q^n}{q-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

2.5. Ejercicio 5

Usando la suma aritmética:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (2i-1) &= \sum_{i=1}^n 2i - \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Usando el principio de inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2-1 = 1$$

$$n^2 = 1^2 = 1$$

Luego el caso base es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que para $k \geq 1$, $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) &= \sum_{i=1}^k (2i-1) + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Luego el paso inductivo es verdadero. Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

2.6. Ejercicio 6

2.6.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

Entonces necesito probar que,

$$\begin{aligned} &\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\ \iff &2k^2 + k + 6k + 6 = 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\ \iff &2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6 \end{aligned}$$

Luego $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ como se quería probar, el paso inductivo es verdadero.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.6.B. Pregunta ii

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1^2}{4} = 1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}\end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \iff k^2 + 4(k+1) &= k^2 + 4k + 4 \\ \iff k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7. Ejercicio 7

2.7.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2}$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 (-1)^{i+1} \cdot i^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1$$

$$\frac{(-1)^{1+1} \cdot 1(1+1)}{2} = \frac{(-1)^2 \cdot 1(2)}{2} = 1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2}\end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{k+1}.k(k+1) + 2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2}{2} &= \frac{(-1)^{k+2}.(k+1)(k+2)}{2} \\ (-1)^{k+1}.k(k+1) + 2.(-1)^{k+2}.(k+1)^2 &= (-1)^{k+2}.(k+1)(k+2) \\ (-1)^{k+1}.k + 2.(-1)^{k+2}.(k+1) &= (-1)^{k+2}.(k+2) \\ -k + 2.(k+1) &= k+2 \\ k+2 &= k+2\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.B. Pregunta ii

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i+1).3^{i-1} = n.3^n$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 (2i+1).3^{i-1} = 3$$

$$n.3^n = 3$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (2i+1).3^{i-1} = k.3^k$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} (2i+1).3^{i-1} = (k+1).3^{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i+1).3^{i-1} &= \sum_{i=1}^k (2i+1).3^{i-1} + (2(k+1)+1).3^k \\ &= k.3^k + (2k+2+1).3^k \\ &= 3^k.(k+2k+3) \\ &= 3^k.(3k+3) \\ &= 3^k.3(k+1) \\ &= (k+1)3^{k+1}\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.C. Pregunta iii

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{i.2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^1}{2.3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2^{1+1}}{1+2} - 1 = \frac{2^2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} &= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1 \\ \frac{(k+3)2^{k+1}}{k+2} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ \frac{(k+3)2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ 2^{k+1}(k+3+k+1) &= 2^{k+2} \cdot (k+2) \\ 2k+4 &= 2k+4 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.D. Pregunta iv

Prueba por inducción:

$$\text{Defino el predicado } p(n) : \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$$

Caso base n = 1

$$\prod_{i=1}^1 (1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a$$

$$\frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a}$$

$$\text{QpQ: } \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) &= \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) \cdot (1 + a^{2^k}) \\
 &= \frac{1 - a^{2^k}}{1 - a} \cdot (1 + a^{2^k}) \\
 &= \frac{(1 - a^{2^k}) \cdot (1 + a^{2^k})}{1 - a} \\
 &= \frac{1 - a^{2^{k+1}}}{1 - a}
 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.E. Pregunta v

Por inducción:

$$p(n) : \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

Caso base: $\downarrow p(1) \vee ?$

$$\prod_{i=1}^1 \frac{1+i}{2i-3} = -2$$

$$-2 = -2 \quad \vee$$

Paso inductivo: $\downarrow p(h) \vee \implies p(h+1) \vee ?$

$$\text{HI: } \prod_{i=1}^h \frac{h+i}{2i-3} = 2^h(1-2h) = \frac{(h+1) \cdot (h+2) \dots (2h)}{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2h-3)}$$

$$\text{qpq: } \prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-3} = 2^{h+1}(1-2(h+1)) = 2^{h+1}(-2h-1)$$

$$\text{Pero } \prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-3} = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)(h+4) \dots 2h(2h+1)(2h+2)}{(h+1) \cdot -1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2h-3)(2h-1)} \stackrel{\text{HI}}{=} 2^h(1-2h) \frac{(2h+1)(2h+2)}{(h+1)(2h-1)} = 2^{h+1}(-2h-1) \text{ como queríamos probar}$$

Como $p(1) \vee$ y $[p(h) \vee \implies p(h+1) \vee]$ por el principio de inducción $p(n) \vee \forall n \in \mathbb{N}$

2.8. Ejercicio 8

Prueba por inducción.

Defino el predicado $p(n) : a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^n a^{i-1} \cdot b^{n-i}$

Caso base n = 1

$$a^1 - b^1 = a - b$$

$$(a-b) \cdot \sum_{i=1}^1 a^{i-1} \cdot b^{1-i} = (a-b) \cdot 1 = a - b$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a^k - b^k = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i}$$

$$\text{QpQ: } a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i}$$

Pero,

TODO

2.9. Ejercicio 9

2.9.A. Pregunta i

Defino $p(n) : \sum_{i=1}^n a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i &= \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= -a_1 + a_{k+2} \\ &= a_{k+2} - a_1 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.9.B. Pregunta ii

Luego de probar con los casos $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Prueba por inducción:

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que:

$$\begin{aligned}\frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\ \frac{k+1}{k+2} &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.9.C. Pregunta iii

Luego de probar con los casos $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Prueba por inducción:

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2.1+1} = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \\ \frac{(2k+3).k+1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2k+3} \\ (2k+3).k+1 &= (k+1)(2k+1) \\ 2k^2+3k+1 &= 2k^2+k+2k+1 \\ 2k^2+3k+1 &= 2k^2+3k+1\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10. Ejercicio 10

2.10.A. Pregunta i

Defino $p(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

Caso base n = 1

$$3^1 + 5^1 = 3 + 5 = 8$$

$$2^{1+2} = 2^3 = 8$$

Como $8 \geq 8$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$

QpQ: $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+3}$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 5^{k+1} &= 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k \\ &= 3 \cdot 3^k + 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k \\ &= 3 \cdot (3^k + 5^k) + 2 \cdot 5^k \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva:

$$3 \cdot (3^k + 5^k) + 2 \cdot 5^k \geq 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k$$

Luego alcanza con probar que,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k &\geq 2^{k+3} \\ 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^{k+2} &\geq 0 \\ 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k &\geq 0 \end{aligned}$$

Pero $k \geq 1 \implies (2^{k+2} \geq 8 \wedge 2 \cdot 5^k \geq 10)$ y en particular $2^{k+2} + 2 \cdot 5^k \geq 0$ como se quería probar.

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : 3^n \geq n^3$

Caso base n = 1

$$3^1 = 3$$

$$1^3 = 1$$

Como $3 \geq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $3^k \geq k^3$

QpQ: $3^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3^k \cdot 3 \\ \iff 3^{k+1} &> 3k^3 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 3k^3 &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 3k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(2k^2 - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Pero esto se cumple unicamente para los $k \geq 3$ por lo tanto $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 3$

Hay que ver aparte los casos $k \in \{2, 3\}$

$p(2) : 3^2 \geq 2^3 \iff 9 \geq 8$ es verdadero.

$p(3) : 3^3 \geq 3^3 \iff 27 \geq 27$ es verdadero.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.C. Pregunta iii

Defino $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1+i}{i+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 + 1(1-1) = 1$$

Como $1 \leq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} \leq 1 + k(k-1)$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + (k+1)k = 1 + k^2 + k$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+i}{i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} + \frac{2k+1}{k+2} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\ &\leq 1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 1 + k^2 + k \\
-k + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq k \\
\frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 2k \\
\frac{2(2k+1) + (k+2)(k+1)}{2(k+2)} &\leq 2k \\
\frac{4k+2 + k^2 + 2k + k + 2}{2k+4} &\leq 2k \\
k^2 + 7k + 4 &\leq (2k+4)2k \\
k^2 + 7k + 4 &\leq 4k^2 + 8k \\
4 &\leq 3k^2 + k
\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.D. Pregunta iv

Defino $p(n) : \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^2 \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

Como $1 \leq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} \leq k$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=k+1}^{2(k+1)} \frac{i}{2^i} \leq k+1$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+1}^{2k+2} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} \\
&\leq k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} &\leq k+1 \\
\frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2(k+1)}{2 \cdot 2^{2k+1}} - \frac{k}{2^k} &\leq 1 \\
\frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^k \cdot 2^{k+1}} &\leq 1 \\
\frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\
\frac{3k+2 - k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\
3k+2 - k \cdot 2^{k+1} &\leq 2^{2k+1} \\
3k+2 &\leq 2^{2k+1} + k \cdot 2^{k+1} \\
3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2 \\
3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2^k \cdot 2 \\
3k+2 &\leq 2^{2k+2}(1+k) \\
3k+2 &\leq 2^{2k+2}(3k+2) \\
1 &\leq 2^{2k+2}
\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.11. Ejercicio 11

Defino $p(n) : \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$

Caso base n = 1

$$\prod_{i=1}^1 (1 + a_i) = 1 + a_i$$

$$1 + \sum_{i=1}^1 a_i = 1 + a_i$$

Como $1 + a_i \geq 1 + a_i$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\prod_{i=1}^k (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i$

QpQ: $\prod_{i=1}^{k+1} (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$

Pero,

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1} (1 + a_i) &= \prod_{i=1}^k (1 + a_i) + 1 + a_{k+1} \\
&\geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + 1 + a_{k+1} \\
&\geq 2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

$$2 \geq 1$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.12. Ejercicio 12

2.12.A. Pregunta i

Defino $p(n) : n! \geq 3^{n-1}; \forall n \geq 5$

Caso base n = 5

$$5! = 120$$

$$3^{5-1} = 3^4 = 81$$

Como $120 \geq 81$ el caso base $p(5)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $k! \geq 3^{k-1}$

QpQ: $(k+1)! \geq 3^k$

Pero,

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

$$\geq (k+1) \cdot 3^{k-1}$$

Luego alcanza probar que,

$$(k+1) \cdot 3^{k-1} \geq 3^k$$

$$\frac{(k+1) \cdot 3^k}{3} \geq 3^k$$

$$k+1 \geq 3$$

Que es verdadero $\forall k \geq 5$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

2.12.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : 3^n - 2^n \geq n^3; \forall n \geq 4$

Caso base n = 4

$$3^4 - 2^4 = 65$$

$$4^3 = 64$$

Como $65 \geq 64$ el caso base $p(4)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $3^k - 2^k \geq k^3$

QpQ: $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2^{k+1} &= 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot (3^k - 2^k) + 3^k \\ &\geq 2 \cdot k^3 + 3^k \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2k^3 + 3^k &\geq (k+1)^3 \\ 2k^3 + 3^k &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 2k^3 + 3^k - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k^3 + 3^k - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Ahora pruebo que,

$$\begin{aligned} k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3 &\geq 1 \\ k(k + 3^{k-2} - 3) &\geq 4 \end{aligned}$$

Que es verdadero, $\forall k \geq 4$.

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.

2.13. Ejercicio 13

Defino $p(n) : n^2 + 1 < 2^n$

$$n = 1 \implies p(1) : 1^2 + 1 < 2^1 \iff 2 < 2 \implies p(1) \text{ es falso.}$$

$$n = 2 \implies p(2) : 2^2 + 1 < 2^2 \iff 5 < 4 \implies p(2) \text{ es falso.}$$

$$n = 3 \implies p(3) : 3^2 + 1 < 2^3 \iff 10 < 8 \implies p(3) \text{ es falso.}$$

$$n = 4 \implies p(4) : 4^2 + 1 < 2^4 \iff 17 < 16 \implies p(4) \text{ es falso.}$$

$$n = 5 \implies p(5) : 5^2 + 1 < 2^5 \iff 26 < 32 \implies p(5) \text{ es verdadero.}$$

Luego tomo el caso base en $n = 5$ y ya se que $p(5)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $k^2 + 1 < 2^k$

QpQ: $(k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + 1 &= k^2 + 2k + 1 + 1 \\ &< 2^k + 2k + 1\end{aligned}$$

Queda probar que,

$$\begin{aligned}2^k + 2k + 1 &\leq 2^{k+1} \\ 2^k + 2k + 1 &\leq 2 \cdot 2^k \\ 2k + 1 &\leq 2^k \\ 0 &\leq 2^k - 2k - 1\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 5$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

2.14. Ejercicio 14

TODO

2.15. Ejercicio 15

2.15.A. Pregunta i

Defino $p(n) : a_n = 2^n \cdot n!$

Caso base n = 1

$a_1 = 2$ por definición.

$$a_1 = 2^1 \cdot 1! = 2$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = 2^k \cdot k!$

QpQ: $a_{k+1} = 2^{k+1} \cdot (k+1)!$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2k \cdot a_k + 2^{k+1} \cdot k! \\ &= 2k \cdot 2^k \cdot k! + 2^{k+1} \cdot k! \\ &= 2^{k+1} \cdot k! \cdot k + 2^{k+1} \cdot k!\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}2^{k+1} \cdot k! \cdot k + 2^{k+1} \cdot k! &= 2^{k+1} \cdot (k+1)! \\ 2^{k+1} \cdot k! \cdot (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1)! \\ 2^{k+1} \cdot k! \cdot (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1) \cdot k!\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.15.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : a_n = n^2 \cdot (n - 1)$

Caso base n = 1

Por definición $a_1 = 0$

$$1^2 \cdot (1 - 1) = 0$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k + 1)$

HI: $a_k = k^2 \cdot (k - 1)$

QpQ: $a_{k+1} = (k + 1)^2 \cdot k$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k(3k + 1) \\ &= k^2 \cdot (k - 1) + k(3k + 1) \\ &= k^3 - k^2 + 3k^2 + k \\ &= k^3 + 2k^2 + k \\ &= k(k^2 + 2k + 1) \\ &= k \cdot (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k + 1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16. Ejercicio 16

2.16.A. Pregunta i

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n^2$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 1$

$$1^2 = 1$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k + 1)$

HI: $a_k = k^2$

QpQ: $a_{k+1} = (k + 1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (1 + \sqrt{a_k})^2 \\ &= (1 + \sqrt{k^2})^2 \\ &= (1 + k)^2 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k + 1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16.B. Pregunta ii

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = 3^n$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 3$

$$3^1 = 3$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = 3^k$

QpQ: $a_{k+1} = 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 \cdot a_k + 3^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k \\ &= 3^k \cdot (2 + 1) \\ &= 3^{k+1} \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16.C. Pregunta iii

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = (n-1)!$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 1$

$$(1-1)! = 0! = 1 \text{ (Por definición de } 0!)$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = (k-1)!$

QpQ: $a_{k+1} = k!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= k \cdot a_k \\ &= k \cdot (k-1)! \\ &= k! \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.16.D. Pregunta iv

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = \frac{n+1}{n}$

Caso base n = 1

Por definicion $a_1 = 2$

$$\frac{1+1}{1} = 2$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a_k = \frac{k+1}{k}$$

$$\text{QpQ: } a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 - \frac{1}{a_k} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \\ &= 2 - \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{2(k+1) - k}{k+1} \\ &= \frac{2k + 2 - k}{k+1} \\ &= \frac{k+2}{k+1} \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.17. Ejercicio 17

2.17.A. Pregunta i

Defino $p(n) : a_n = n!$

Caso base $n = 1$

Por definición, $a_1 = 1$

$$1! = 1$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a_k = k!$$

$$\text{QpQ: } a_{k+1} = (k+1)!$$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k \cdot k! \\ &= k! + k \cdot k! \\ &= k! \cdot (k+1) \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.17.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : a_n = n^3$

Caso base n = 1

Por definición, $a_1 = 1$

$$1^3 = 1$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k^3$

QpQ: $a_{k+1} = (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.18. Ejercicio 18

2.18.A. Pregunta i

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n!$

Casos base n = 1 y n = 2

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k!$ y $a_{k+1} = (k+1)!$

QpQ: $a_{k+2} = (k+2)!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= k \cdot a_{k+1} + 2 \cdot (k+1) \cdot a_k \\ &= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1) \cdot k! \\ &= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1)! \\ &= (k+1)! \cdot (k+2) \\ &= (k+2)! \end{aligned}$$

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.18.B. Pregunta ii

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n^2$

Casos base $n = 1$ y $n = 2$

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 4$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = k^2$ y $a_{k+1} = (k+1)^2$

QpQ: $a_{k+2} = (k+2)^2$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 4 \cdot \sqrt{a_{k+1}} + a_k \\ &= 4 \cdot \sqrt{(k+1)^2} + k^2 \\ &= 4 \cdot (k+1) + k^2 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.18.C. Pregunta iii

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Casos base $n = 1$ y $n = 2$

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$ y $a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

QpQ: $a_{k+2} = \frac{(k+2)(k+3)}{2} \iff 2 \cdot a_{k+2} = (k+2)(k+3)$

Pero,

$$\begin{aligned}
 2 \cdot a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k + 3k + 5 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + 3k + 5 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2) + k(k+1) + 6k + 10}{2} \\
 &= \frac{k^2 + k + 2k + 2 + k^2 + k + 6k + 10}{2} \\
 &= \frac{2k^2 + 10k + 12}{2} \\
 &= 2k^2 + 5k + 6 \\
 &= (k+2)(k+3)
 \end{aligned}$$

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.19. Ejercicio 19

2.19.A. Pregunta i

Defino $p(n) : a_n < 1 + 3^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1 y n = 2

Por definición, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$

$$1 + 3^{1-1} = 1 + 3^0 = 2$$

$$1 + 3^{2-1} = 1 + 3^1 = 4$$

Luego $p(1); p(2)$ son verdaderos.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI: $a_k < 1 + 3^{k-1}$ y $a_{k+1} < 1 + 3^k$

QpQ: $a_{k+2} < 1 + 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
 a_{k+2} &= a_{k+1} + 5 \cdot a_k \\
 &< 1 + 3^k + 5 \cdot (1 + 3^{k-1}) \\
 &< 1 + 3^k + 5 + 5 \cdot 3^{k-1} \\
 a_{k+2} &< 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1}
 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 1 + 3^{k+1} \\
 5 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 3^{k+1} \\
 5 &\leq 3^{k+1} - 3^k - 5 \cdot 3^{k-1} \\
 5 &\leq 3^k \cdot (3 - 1 - \frac{5}{3}) \\
 5 &\leq 3^k \cdot \frac{17}{3}
 \end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$.

Luego $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora busco una fórmula para el término general de la sucesión. Se ve que es una sucesión de Lucas, por lo tanto.

El polinomio asociado a la sucesión es: $x^2 - x - 5 = 0$

Con raíces: $\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\}$

Luego busco α y β tales que:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta = 3 \end{cases}$$

De la primer ecuación sale que: $\beta = 1 - \alpha$

Reemplazando en la segunda,

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta &= 3 \\ (1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot \beta &= 6 \\ (1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot (1-\alpha) &= 6 \\ \alpha + \sqrt{21} \cdot \alpha + 1 - \alpha - \sqrt{21} + \sqrt{21} \cdot \alpha &= 6 \\ 2 \cdot \sqrt{21} \cdot \alpha &= 6 - 1 + \sqrt{21} \\ \alpha &= \frac{5+\sqrt{21}}{2 \cdot \sqrt{21}} \end{aligned}$$

Así, $\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{5+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}$

2.20. Ejercicio 20

TODO

2.21. Ejercicio 21

Luego de probar con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ conjeturo y defino $p(n) : a_n = n!, \forall n \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1

Por definición, $a_1 = 1$

$1! = 1$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que $(p(k) \wedge 1 \leq k \leq h) \implies p(h+1)$

HI: $a_k = k!$

QpQ: $a_{h+1} = (h+1)!$

TODO

2.22. Ejercicio 22

Defino $p(n) : f^{3k}(x) = x; \forall k \in \mathbb{N}$

Casos base n = 1

$f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = f \circ f(\frac{1}{1-x}) = f(\frac{x-1}{x}) = x$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 1$ quiero probar que $p(h) \implies p(h+1)$

HI: $f^{3h}(x) = x$

QpQ: $f^{3h+3}(x) = x$

Pero,

$$\begin{aligned} f^{3h+3}(x) &= f \circ f \circ f \dots f(x) \\ &= f \circ f \circ f(f^{3h}(x)) \\ &= f \circ f \circ f(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Luego $p(h) \implies p(h+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.23. Ejercicio 23

TODO

2.24. Ejercicio 24

$p(n) : \sum_{i=1}^r 2^{a_i} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por inducción global

Caso base: $2^0 = 1 \vee$

HI: Si $k \leq n$. "k" se puede escribir como suma de potencias \neq de 2

Veamos que $n+1$ también se puede

Si n es par $n = \sum_{i=1}^r 2^{a_i} \quad a_i \neq 0 \quad \forall i$

Por lo tanto: n par $\implies m = n+1$ impar

$m = n+1 = \sum_{i=1}^r 2^{a_i} + 2^0$

Si n es impar $n+1$ es par $\implies \exists \alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n+1}{2^\alpha}$ es impar.

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2^\alpha} &\leq n \\ n+1 &\leq 2^\alpha n \\ 1 &\leq (2^\alpha - 1)n \quad \text{como } (2^\alpha - 1) \geq 1 \quad \text{esto es verdadero siempre} \\ \implies \frac{n+1}{2^\alpha} &= \sum_{i=1}^r 2^{a_i} \quad \text{con } a_i \text{ todos } \neq \\ \implies n+1 &= \sum_{i=1}^r 2^{a_i + \alpha} \end{aligned}$$

Por lo tanto como $p(1) \vee$ y $[p(k) \vee \text{ con } k \leq n \implies n+1 \vee]$ entonces por el principio de inducción $p(n) \vee \quad \forall n \in \mathbb{N}$