



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 7

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

7. Práctica 7	2
7.1. Ejercicio 1	2
7.2. Ejercicio 2	2
7.3. Ejercicio 3	3
7.4. Ejercicio 4	5
7.5. Ejercicio 5	6
7.6. Ejercicio 6	7
7.7. Ejercicio 7	7
7.8. Ejercicio 8	8
7.9. Ejercicio 9	8
7.10. Ejercicio 10	8
7.11. Ejercicio 11	8
7.12. Ejercicio 12	9
7.13. Ejercicio 13	9
7.14. Ejercicio 14	10
7.15. Ejercicio 15	11
7.16. Ejercicio 16	12
7.17. Ejercicio 17	12
7.18. Ejercicio 18	13
7.19. Ejercicio 19	13
7.20. Ejercicio 20	13
7.21. Ejercicio 21	14
7.22. Ejercicio 22	14
7.23. Ejercicio 23	14
7.24. Ejercicio 24	15
7.25. Ejercicio 25	15
7.26. Ejercicio 26	15
7.27. Ejercicio 27	15
7.28. Ejercicio 28	16
7.29. Ejercicio 29	17
7.30. Ejercicio 30	18
7.31. Ejercicio 31	20
7.32. Ejercicio 32	20
7.33. Ejercicio 33	20
7.34. Ejercicio 34	22
7.35. Ejercicio 35	23
7.36. Ejercicio 36	24
7.37. Ejercicio 37	25
7.38. Ejercicio 38	25
7.39. Ejercicio 39	25

7. Práctica 7

7.1. Ejercicio 1

Rdo. propiedades del producto y suma de polinomios:

- Grado de un producto de polinomios $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$
- Coeficiente principal de un producto de polinomios $cp(ab) = ca(a) \cdot cd(b)$
- $$\begin{cases} gr(f+g) \leq \max(gr(f); gr(g)) \\ gr(f+g) = \max(gr(f); gr(g)) \iff gr(f) \neq gr(g) \vee (gr(f) = gr(g) \wedge cp(f) \neq cp(g)) \end{cases}$$

7.1.A. Pregunta i

- $gr(p) = 77.gr(4x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 7) = 77.6 = 462$
- $cp(p) = 4^{77}$

7.1.B. Pregunta ii

Sea $p = a^4 - b^7$ con $a = -3x^7 + 5x^3 + x^2 - x + 5$ y $b = 6x^4 + 2x^3 + x - 2$

$$\begin{aligned} gp(p) &= \max(gr(a^4); gr(b^7)) \iff gr(a^4) \neq gr(b^7) \vee cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= \max(7.4; 4.7) \iff cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= 28 \iff (-3)^4 \neq 6^7 \\ &= 28 \iff 81 \neq 279936 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 28$
- $cp(p) = 81 - 6^7$

7.1.C. Pregunta iii

$$\text{Sea } p = a - b + c \text{ con } \begin{cases} a = (-3x^5 + x^4 - x + 5)^4 \\ b = 82x^{20} \\ c = 19x^{19} \end{cases}$$

Luego $p = 81x^{20} + (\dots) - 81x^{20} + 19x^{19} \implies gr(p) = 19$ pues se cancelan los terminos con x^{20}

Entonces busco el coeficiente para x^{19}

$$\begin{aligned} cp(p) &= a_{19} + b_{19} + c_{19} \\ &= (-3. - 3. - 3.1) + 0 + 19 \\ &= -27 + 0 + 19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 19$
- $cp(p) = -8$

7.2. Ejercicio 2

1. a) $\text{En } \mathbb{Q}[x] = 2$
b) $\text{En } \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[x] = 2$

2. Usando bin de Newton, $c(20) = \binom{133}{20}(3i)^{113}$

3. Usando bin de Newton cuatro veces,

$$\begin{aligned} \blacksquare a_1 &= \binom{4}{1}x^1(-1)^3 \cdot \binom{19}{19}x^{19}5^0 = -4x^{20} \\ \blacksquare a_2 &= \binom{4}{2}x^2(-1)^2 \cdot \binom{19}{18}x^{18}5^1 = 570x^{20} \\ \blacksquare a_3 &= \binom{4}{3}x^3(-1)^1 \cdot \binom{19}{17}x^{17}5^2 = -17100x^{20} \\ \blacksquare a_4 &= \binom{4}{4}x^4(-1)^0 \cdot \binom{19}{16}x^{16}5^3 = 121125x^{20} \end{aligned}$$

$$\text{Luego } c(20) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 5 = -4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = 104586$$

4. $c(20) = 21504$

7.3. Ejercicio 3

7.3.A. Pregunta i

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} f^2 = xf + x + 1 &\iff f^2 - xf = x + 1 \\ &\iff f(f - x) = x + 1 \\ &\iff f \neq 0 \wedge f - x \neq 0 \end{aligned}$$

Tomo grado a ambos lados,

$$\begin{aligned} gr(f) + gr(f - x) &= gr(x + 1) \\ gr(f) + gr(f - x) &= 1 \end{aligned}$$

Luego el grado de f tiene que ser menor a 2.

Caso $gr(f) = 1$

Si $gr(f) = 1 \implies gr(f - x) = 0$ para cumplir la igualdad de grados.

Luego f es de la forma $f = ax + b$ con $a = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff (x + b)(x + b - x) = x + 1 \\ &\iff xb + b^2 = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff b = 1 \end{aligned}$$

Así, $f_1 = x + 1$

Caso $gr(f) = 0$

Que el grado del polinomio sea igual a cero implica que $f = c$ con c una constante.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff c(c - x) = x + 1 \\ &\iff c^2 - cx = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} -c = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \implies c = -1 \end{aligned}$$

Así, $f_2 = -1$

Rta.: $f = x + 1$ y $f = -1$

7.3.B. Pregunta ii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$f^2 - xf = x^2 + 1 \iff f(f - x) = -x^2 + 1$$

Tomo grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}
gr(f) + gr(f - x) &= gr(-x^2 + 1) \\
0 + 2 &= 2 \text{ No puede ser} \\
1 + 1 &= 2 \\
2 + 0 &= 2 \text{ No puede ser}
\end{aligned}$$

Así, el único caso posible es que $gr(f) = 1$ y que $gr(f - x) = 1$

Sea $f = ax + b$,

$$\begin{aligned}
f(f - x) = -x^2 + 1 &\iff (ax + b)(ax + b - x) = -x^2 + 1 \\
&\iff (ax + b)((a - 1)x + b) = -x^2 + 1 \\
&\iff a(a - 1)x^2 + abx + b(a - 1)x + b^2 = -x^2 + 1 \\
&\iff a(a - 1)x^2 + (ab + b(a - 1))x + b^2 = -x^2 + 1 \\
&\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a(a - 1) = -1 \\ ab + b(a - 1) = 0 \\ b^2 = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Busco soluciones para el sistema de tres ecuaciones que resultó.

De la tercera, se que $b = \pm 1$

$$b = 1 \implies a + a + 1 = 0 \iff 2a = -1 \iff a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pero con } a = -\frac{1}{2} \wedge b = 1 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq -1$$

Luego $b = 1$ NO sirve.

$$b = -1 \implies -a - a + 1 = 0 \implies -2a = -1 \implies a = \frac{1}{2}$$

Se llega al mismo valor de a que con b=1 y ya se probó que no sirve.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.C. Pregunta iii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned}
(x + 1)f^2 = x^6 + xf &\iff (x + 1)f^2 - xf = x^6 \\
&\iff f((x + 1)f - x) = x^6
\end{aligned}$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}
gr(f) + gr((x + 1)f - x) &= gr(x^6) \\
0 + 6 &= 6 \\
1 + 5 &= 6 \\
2 + 4 &= 6 \\
3 + 3 &= 6 \\
4 + 2 &= 6 \\
5 + 1 &= 6 \\
6 + 0 &= 6
\end{aligned}$$

Luego de dar todos los posibles valores a $gr(f)$, se puede ver que no existe $gr((x+1)f-x)$ que cumpla lo pedido. Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.D. Pregunta iv

Dado que por enunciado se que $f \neq 0$, puedo reescribir la igualdad como,

$$f^3 = gr(f) \cdot x^2 f \iff f^2 = gr(f) \cdot x^2$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$gr(f^2) = gr(gr(f) \cdot x^2)$$

$$gr(f^2) = 2$$

$$gr(f \cdot f) = 2$$

$$2gr(f) = 2$$

$$gr(f) = 1$$

Luego, con $f = ax + b$,

$$f^2 = gr(f) \cdot x^2 \iff (ax + b)^2 = x^2$$

$$\iff a^2 x^2 + 2abx + b^2 = x^2$$

$$\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Entonces, $a = \pm 1$ y $b = 0$ son las soluciones del sistema.

Rta.: $f_1 = x$ y $f_2 = -x$ son los únicos polinomios que cumplen lo pedido.

7.4. Ejercicio 4

En estos ejercicios hay que hacer la división con la caja. Yo voy a dejar los resultados de cada paso de la división.

7.4.A. Pregunta i

1. $C = 5x^2$; $R = 2x^3 - 10x^2 - x + 4$
2. $C = 2x$; $R = -10x^2 - 5x + 4$
3. $C = -10$; $R = -5x - 16$

Rta:

- $C = 5x^2 + 2x - 10$
- $R = -5x - 16$

7.4.B. Pregunta ii

1. $C = 2x^2$; $R = x^3 - 2x^2 - 4$
2. $C = \frac{1}{2}x$; $R = -2x^2 - \frac{1}{2}x - 4$
3. $C = -1$; $R = -\frac{1}{2}x - 3$

Rta:

- $C = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- $R = -\frac{1}{2}x - 3$

7.4.C. Pregunta iii

1. $C = x^{n-1}$; $R = x^{n-1} - 1$
2. $C = x^{n-2}$; $R = x^{n-2} - 1$
3. $C = \dots$; $R = \dots$
4. $C = 1$; $R = 0$

Rta:

- $C = \sum_{i=1}^n x^{n-i}(x-1)$
- $R = 0$

7.5. Ejercicio 5

7.5.A. Pregunta i

Haciendo $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x + 2 - a) + (1 - 2a + a^2)x - 1 + a$$

Luego busco que el resto $(1 - 2a + a^2)x - 1 + a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$(1 - 2a + a^2)x - 1 + a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2a + a^2 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se que $-1 + a = 0 \iff a = 1$.

Reemplazando en la primera y verifico que $a = 1$ cumple lo pedido, $1 - 2a + a^2 = 1 - 2 + 1 = 0$

Rta.: $a = 1$

7.5.B. Pregunta ii

Haciendo $x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1$ dividido $x^2 + x + 1$ llego a:

$$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + (-a - 1)x + 2 + a) + 1 - 2 - a$$

Luego busco que el resto $1 - 2 - a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$1 - 2 - a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2 - a = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $a = -1$ es el único que lo cumple.

7.5.C. Pregunta iii

(Esta división es larga y pesada) Haciendo $x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 - ax^2 + (-4a^2)x + (-1 + 5a - a^3)) + [(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)]$$

Luego busco que el resto sea igual a $-8x + 4$,

$$[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)] = -8x + 4 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} a^3 - 5a + 2 = 4 &\iff a^3 - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a(a^2 - 5) - 2 = 0 \end{aligned}$$

A simple vista veo que $a = -2$ es solución, luego usando Ruffini,

$$a^3 - 5a - 2 = (a^2 - 2a - 1)(a + 2)$$

Por lo tanto busco soluciones para $a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Queda ver cuales de estos valores de a hallados cumple la primer ecuación.

- $a = -2 \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 = 16 - 24 - 2 + 2 = -8$
- $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)
- $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)

7.6. Ejercicio 6

TODO

7.7. Ejercicio 7

7.7.A. Pregunta i

Por definición de congruencias se que $x^{31} - 2 \equiv 0(x^{31} - 2) \implies x^{31} \equiv 2(x^{31} - 2)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{353} - x - 1 &\equiv (x^{31})^{11} \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2^{11} \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2048x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Rta.: } r_{x^{31}-2}(x^{353} - x - 1) = 2048x^{12} - x - 1$$

7.7.B. Pregunta ii

Se que $x^6 + 1 | x^6 + 1 \iff x^6 + 1 \equiv 0(x^6 + 1) \iff x^6 \equiv -1(x^6 + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1 &\equiv (x^6)^{166} \cdot x^4 + (x^6)^6 \cdot x^4 + (x^6)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot x^4 + (-1)^6 \cdot x^4 + (-1)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv x^4 + x^4 - x^2 + 1 \\ &\equiv 2x^4 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Rta.: } r_{x^6+1}(x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1) = 2x^4 - x^2 + 1$$

7.7.C. Pregunta ii

Se que $x^{100} - x + 1 \equiv 0(x^{100} - x + 1) \iff x^{100} \equiv x - 1(x^{100} - x + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{200} - 3x^{101} + 2 &\equiv (x^{100})^2 - 3(x^{100})x + 2 \\ &\equiv (x - 1)^2 - 3(x - 1)x + 2 \\ &\equiv x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv -2x^2 + x + 3(x^{100} - x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Rta.: } r_{x^{100}-x+1}(x^{200} - 3x^{101} + 2) = -2x^2 + x + 3$$

7.8. Ejercicio 8

TODO

7.9. Ejercicio 9

Se resuelve con el algoritmo de Euclides en polinomios. Calculadora de MCD de polinomios <https://planetcalc.com/7760/>

1. ■ $MCD = -x + 1$
2. ■ $MCD = x^2 + 1$
 ■ $x^2 + 1 = f + (-x^3)g$
3. ■ $MCD = 3$
 ■ $3 = (-x + 2)f + (1 + 2x^2 - 4x)g$

7.10. Ejercicio 10

Se que el resto tiene que tener grado menor al divisor, luego $gr(r) \leq 2$

Por algoritmo de división de polinomios existen q cociente y r resto tales que:

$$f = q(x^3 - 2x^2 - x + 2) + r$$

El enunciado me da las evaluaciones de f en 1; 2; -1, luego

$$\begin{aligned} f(1) &= q(1)(1 - 2 - 1 + 2) + r(1) \implies f(1) = r(1) = -2 \\ f(2) &= q(1)(8 - 8 - 2 + 2) + r(2) \implies f(2) = r(2) = 1 \\ f(-1) &= q(1)(-1 - 2 + 1 + 2) + r(-1) \implies f(-1) = r(-1) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto se que r es de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a; b; c \in \mathbb{Q}$, luego

$$\begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Restando la tercera a la primera, $2b = -2 \iff b = -1$

Rearmando el sistema con lo hallado,

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 3 \\ a + c = -1 \end{cases}$$

La tercera es igual a la primera así que la puedo eliminar y restando la primera a la segunda:

$$3a = 4 \iff a = \frac{4}{3}$$

$$\text{Luego } a + c = -1 \iff \frac{4}{3} + c = -1 \iff c = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Así, } r_{x^3-2x^2-x+2}(f) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}$$

7.11. Ejercicio 11

$$\text{Sea } f = x^{2n} + 3x^{n+1} + 3x^n - 5x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Sea } g = x^3 - x$$

Se que $f = q.g + r$ con $gr(r) \leq 2 \implies r = ax^2 + bx + c$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned}x^3 - x = 0 &\iff x(x^2 - 1) = 0 \\&\iff x \in \{-1, 0, 1\}\end{aligned}$$

Evalúo f para las raíces halladas,

$$\begin{aligned}f(0) &= q(0)g(0) + r(0) \implies r(0) = 1 \\f(1) &= q(1)g(1) + r(1) \implies r(1) = 1 + 3 + 3 - 5 + 2 + 1 = 5 \\f(-1) &= q(-1)g(-1) + r(-1) \implies r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 - 1 = -5\end{aligned}$$

Por lo tanto, sabiendo que $r(x) = ax^2 + bx + c$
$$\begin{cases} r(0) = 1 = c \\ r(1) = 5 = a + b + c \\ r(-1) = -5 = 25a - 5b + c \end{cases}$$

Sabiendo $c = 1 \implies \begin{cases} a + b = 4 \implies a = 4 - b \\ 25a - 5b = -6 \end{cases}$

Sabiendo $a = 4 - b \implies$

$$\begin{aligned}25(4 - b) - 5b &= -6 \\100 - 25b - 5b &= -6 \\-30b &= -106 \\b &= \frac{53}{15}\end{aligned}$$

Luego $a = 4 - b \implies a = 4 - \frac{53}{15} = \frac{7}{15}$

Así, $r_f(g) = \frac{7}{15}x^2 + \frac{53}{15}x + 1$

7.12. Ejercicio 12

Sea $w = x^3$

Sea $g = w^2 + w - 2$

Busco raíces de g

$$g(w) = 0 \iff w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -2}}{2} \iff \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, recordando que $w = x^3$,

$$w_1 = x^3 = 1 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Y,

$$w_2 = x^3 = -2 \iff \begin{cases} x_4 = -\sqrt[3]{2} \\ x_5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

7.13. Ejercicio 13

Por definición de raíz, $w + w^2 + w^4$ es raíz de f $\iff f(w + w^2 + w^4) = 0$

Luego se que,

- $w = e^{\frac{2}{7}\pi i}$
- $w^2 = e^{\frac{4}{7}\pi i}$
- $w^4 = e^{\frac{8}{7}\pi i}$

Luego defino,

- $r = \operatorname{Re}(w + w^2 + w^4) = \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{8}{7}\pi = -\frac{1}{2}$
- $m = \operatorname{Im}(w + w^2 + w^4) = \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Luego evalúo f en $k = r + m.i$

$$\begin{aligned}
 f(k) &= (r + m.i)^2 + (r + m.i) + 2 \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i\right) + 2 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}.i - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i + 2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

7.14. Ejercicio 14

7.14.A. Pregunta i

Me piden probar que $(w + w^{-1})$ y $(w^2 + w^{-2})$ son raíces de f .

$$\begin{aligned}
 w + w^{-1} &= e^{\frac{2}{5}\pi i} + e^{-\frac{2}{5}\pi i} \\
 &= \cos \frac{2}{5}\pi + \cos -\frac{2}{5}\pi + i \left(\sin \frac{2}{5}\pi + \sin -\frac{2}{5}\pi \right) \\
 &= \cos \left(\frac{2}{5}\pi \right) + \cos \left(-\frac{2}{5}\pi \right)
 \end{aligned}$$

Luego sea $A = \cos \left(\frac{2}{5}\pi \right) + \cos \left(-\frac{2}{5}\pi \right) \implies f(A) = A^2 + A - 1 = 0$

Así, $(w + w^{-1})$ es raíz de f .

$$\begin{aligned}
 w^2 + w^{-2} &= e^{\frac{4}{5}\pi i} + e^{-\frac{4}{5}\pi i} \\
 &= \cos \frac{4}{5}\pi + \cos -\frac{4}{5}\pi + i \left(\sin \frac{4}{5}\pi + \sin -\frac{4}{5}\pi \right) \\
 &= \cos \left(\frac{4}{5}\pi \right) + \cos \left(-\frac{4}{5}\pi \right)
 \end{aligned}$$

Luego sea $B = \cos \left(\frac{4}{5}\pi \right) + \cos \left(-\frac{4}{5}\pi \right) \implies f(B) = B^2 + B - 1 = 0$

Así, $(w^2 + w^{-2})$ es raíz de f .

7.14.B. Pregunta ii

TODO

7.15. Ejercicio 15

7.15.A. Pregunta i

a es raíz de $f \iff (x-a)|f \iff f = n(x-a)$

a es raíz de $g \iff (x-a)|g \iff g = m(x-a)$

Por propiedades del MCD se que existen s, t tales que,

$$\begin{aligned}(f : g) = sf + tg &\iff (f : g) = sn(x-a) + tm(x-a) \\ &\iff (f : g) = (x-a) \cdot (sn + tm) \\ &\iff (x-a)|(f : g)\end{aligned}$$

Luego $(x-a)|(f : g) \iff (x-a)$ es raíz de $(f : g)$ como se quería probar.

7.15.B. Pregunta ii

Primero busco el MCD entre $x^4 + 3x - 2$ y $x^4 + 3x^3 - 3x + 1$

(Acá van las cuentas del algo de Euclides)

Luego $MCD = x^2 + x - 1$

Busco raíces del MCD,

$$\begin{aligned}x^2 + x - 1 = 0 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} \\ &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Luego que f teng auna raíz común con $g \implies (f : g)|f$

$$x^2 + x - 1 | x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \iff x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = q(x^2 + x - 1)$$

(Acá va la división)

Obtengo que, $x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1)$

Ahora busco raíces de $x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned}x^2 - x + 2 = 0 &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

Luego las raíces de f son:

- $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- $x_3 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$
- $x_4 = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$

7.16. Ejercicio 16

7.16.A. Pregunta i

La idea es evaluar en la función y sus derivadas hasta encontrar la derivada en la que no vale cero.

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - 2 + 1 = 0 \implies \text{mult}(1, f) \geq 1 \\f'(x) &= 5x^4 - 6x^2 + 1 \\f'(1) &= 5 - 6 + 1 = 0 \implies \text{mult}(1, f) \geq 2 \\f''(x) &= 20x^3 - 12x \\f''(1) &= 20 - 12 \neq 0 \implies \text{mult}(1, f) = 2\end{aligned}$$

7.16.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned}f(x) &= x^6 - 3x^4 + 4 \\f(i) &= (i^2)^3 - 3(i^2)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0 \implies \text{mult}(i, f) \geq 1 \\f'(x) &= 6x^5 - 12x^3 \\f'(i) &= 6(i^2)^2 \cdot i - 12(i^2) \cdot i = 6i + 12i \neq 0 \implies \text{mult}(i, f) = 1\end{aligned}$$

7.16.C. Pregunta iii

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-2)^2 \cdot (x^2-4) + (x-2)^3 \cdot (x-1) \\f(2) &= 0 + 0 = 0 \implies \text{mult}(2, f) \geq 1 \\f'(x) &= 2(x-2) \cdot (x^2-4) + (x-2)^2 \cdot 2x + 3(x-2)^2 \cdot (x-1) + (x-2)^3 \\f'(x) &= 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 \\f'(2) &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \implies \text{mult}(2, f) \geq 2 \\f''(x) &= 24x^2 - 66x + 36 \\f''(2) &= 96 - 264 + 36 = 0 \implies \text{mult}(2, f) \geq 3 \\f'''(x) &= 48x - 66 \\f'''(2) &= 96 - 66 = 30 \neq 0 \implies \text{mult}(2, f) = 3\end{aligned}$$

7.17. Ejercicio 17

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que f tiene raíces simples si $\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}f'(x) &= (n+1)nx^n - n(n+1)x^{n-1} \\&= (n+1)nx^{n-1}(x-1) = 0 \iff x \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

Por lo tanto las unicas posibles raíces multiples son $x_0 = 0; x_1 = 1$

Queda ver los valores de a tales que $f(x_1)$, $f(x_2)$ son iguales a cero,

$$\begin{aligned}f(0) &= a = 0 \iff a = 0 \\f(1) &= n - (n+1) + a = 0 \iff a = n+1 - n = 1\end{aligned}$$

Rta.: f tiene raíces simples $\iff a \in \{0, 1\}$

7.18. Ejercicio 18

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que f tiene raíces múltiples si $\exists a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$
Luego,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2n+1)x^{2n} - (2n+1) \\ &= (2n+1)(x^{2n} - 1) = 0 \iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Entonces busco los a tales que $f(1) = 0$ y $f(-1) = 0$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - (2n+1) + a = 0 \iff a = 2n \iff a \equiv 0(2) \\ f(-1) &= (-1)^{2n+1} - (2n+1)(-1) + a = -1 + 2n + 1 + a = 0 \iff a = -2n \iff a \equiv 0(2) \end{aligned}$$

Rta.: Tiene raíces múltiples $\forall a \in \mathbb{C} : a \equiv 0(2)$

7.19. Ejercicio 19

Al igual que en los anteriores, primero busco la derivada y busco los valores para los que es igual a cero.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^{19} + 80x^9 = 0 \\ 2x^9(x^{10} + 40) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{10} = -40) \end{aligned}$$

Luego $x = 0$ es raíz múltiple de f si $a = 0$ y tiene multiplicidad 10.

Ahora veo el caso $x^{10} = -40$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^{10})^2 + 8x^{10} + 2a \\ f(x) &= (-40)^2 + 8(-40) + 2a \iff a = 640 \end{aligned}$$

Luego si $a = 640$, los x tales que $x^{10} = -40$ serán raíces múltiples de f , dado que $gr(f) = 20 \implies f$ tiene 20 raíces en \mathbb{C} . Dado que existen 10 x tales que $x^{10} = -40 \implies f$ tiene 10 raíces de multiplicidad 2.

7.20. Ejercicio 20

Por propiedades de las raíces múltiples, se que f tiene raíz múltiple $\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) = 0$

Luego busco los x tales que $f'(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 68x^{67} - 68x^3 = 68x^3(x^{64} - 1) \\ \implies f'(x) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{64} = 1) \end{aligned}$$

Si $x = 0$, $f(0) = 16 \neq 0$. Luego no es raíz de f .

Si $x^{64} = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{64} \cdot x^4 - 17x^4 - 16 = 0 \\ x^4 - 17x^4 - 16 &= 0 \\ x^4(1 - 17) &= 16 \\ x^4 &= -1 \end{aligned}$$

Luego los α que cumplen lo pedido son $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \in G_{64} \wedge \alpha^4 = -1\}$

Pero se que,

$$a^{64} = (a^4)^{16} = (-1)^{16} = 1$$

Luego si $a^4 = -1 \implies a \in G_{64}$

Y los α tales que $\alpha^4 = -1$ son:

- $\alpha_0 = e^{\frac{1}{4}\pi i}$
- $\alpha_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$
- $\alpha_2 = e^{\frac{5}{4}\pi i}$
- $\alpha_3 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Y cada uno de ellos tiene $\text{mult}(\alpha_i, f) = 2$

7.21. Ejercicio 21

Para este ejercicio se puede usar la regla de la división de Ruffini, [Calculadora de Ruffini](#)

7.21.A. Pregunta i

Probado usando Ruffini

7.21.B. Pregunta ii

Usando ruffini queda resto igual a $a + 2$, luego f es divisible por $(x - 1)^3 \iff a + 2 = 0 \iff a = -2$

7.22. Ejercicio 22

Busco a tales que

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f''(1) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - a - 3 + 2 + 3a - 2a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies \text{mult}(1, f) \geq 1 \\f'(x) &= 4x^3 - 3ax^2 - 6x + 2 + 3a \\f'(1) &= 4 - 3a + 6 + 2 + 3a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies \text{mult}(1, f) \geq 2 \\f''(x) &= 12x^2 - 6ax + 6 \\f''(1) &= 12 - 6a - 6 = 12 - 6a\end{aligned}$$

Luego $f(1) \neq 0 \iff 12 - 6a \neq 0 \iff 12 = 6a \iff a = 2$

Rta.: 1 es raíz doble de f para $a = 2$

7.23. Ejercicio 23

f tiene raíces simples $\iff \forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Si defino $f_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

Luego $f' = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f_{n-1}$

Ahora supongo $f_n(a) = 0$ y quiero ver que $f_{n-1}(a) \neq 0$

Pero, $f_{n-1}(a) = f_n(a) - \frac{\alpha^n}{n!} = 0 - \frac{\alpha^n}{n!} \neq 0; \forall \alpha \neq 0$

Y si $\alpha = 0 \implies f_n(0) = 1 \neq 0 \implies x = 0$ no es raíz de f_n como se quería probar.

7.24. Ejercicio 24

Demostración usando inducción

Defino $p(n) : f_n(i) = 0 \wedge f'_n(i) = 0 \wedge f''_n(i) \neq 0$

Caso base $n = 1$

$$f_1(i) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$f'_1(x) = 4x^3 + 4x$$

$$f'_1(i) = -4i + 4i = 0$$

$$f''_1(x) = 12x^2 + 4$$

$$f''_1(i) = -12 + 4 \neq 0$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 1$ quiero probar que $p(h) \implies p(h+1)$

HI: $f_h(i) = 0 \wedge f'_h(i) = 0 \wedge f''_h(i) \neq 0$

Qpq: $f_{h+1}(i) = 0 \wedge f'_{h+1}(i) = 0 \wedge f''_{h+1}(i) \neq 0$

Pero,

$$f_{h+1} = (x-i)(f_h + f'_h) \implies f_{h+1}(i) = (i-i)(f_h(i) + f'_h(i)) = 0$$

$$f'_{h+1} = (f_h + f'_h) + (x-i)(f'_h + f''_h) \implies f'_{h+1}(i) = 0 + (i-i)(f'_h + f''_h) = 0$$

$$f''_{h+1} = f'_h + f''_h + f'_h + f''_h + (x-i)(f'_h + f''_h) \implies f''_{h+1}(i) = 0 + f''_h + 0 + f''_h + 0 = 2f''_h \neq 0$$

Luego $p(h) \implies p(h+1); \forall h \geq 1$

Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

7.25. Ejercicio 25

TODO

7.26. Ejercicio 26

TODO

7.27. Ejercicio 27

Rdo. raíces en $\mathbb{Q}[x]$: Sea $f \in \mathbb{Z}[x] : \frac{c}{d}$ es raíz de $f \iff c|a_n \wedge d|a_0$ con $c\mathbb{Z}; d \in \mathbb{N}$

7.27.A. Pregunta i

Usando el rdo, busco posibles candidatos:

$$c \in \text{Div}(-1) = \{\pm 1\}$$

$$d \in \text{Div}_+(2) = \{1, 2\}$$

$$\implies \frac{c}{d} \in \{\pm 1; \pm \frac{1}{2}\}$$

Evalúo en cada uno de los posibles candidatos y llego a que los únicos a que cumplen $f(a) = 0$ son

- $a = \frac{1}{2}$
- $a = -1$

7.27.B. Pregunta ii

El criterio de Gauss para encontrar raíces enteras, solo funciona con $f \in \mathbb{Z}[x]$

Luego tengo que transformar el polinomio en \mathbb{Q} a uno en \mathbb{Z} ,

$$\begin{aligned} f &= x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 3 \\ 2f = h &= 2x^5 - x^4 - 4x^3 + x^2 - 7x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \frac{c}{d} \text{ es raíz de } h \iff \begin{cases} c \mid -6 \implies c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \\ d \mid 2 \implies d \in \{1, 2\} \end{cases}$$

Evaluando en los candidatos hallados, encuentro que las raíces racionales de f son: $\{2, -\frac{3}{2}\}$

7.27.C. Pregunta iii

Usando el criterio de Gauss,

$$f\left(\frac{c}{d}\right) = 0 \iff \begin{cases} c \mid -2 \implies c \in \{\pm 1, \pm 2\} \\ d \mid 1 \implies d = 1 \end{cases}$$

Entonces las posibles raíces enteras de f son $\{\pm 1, \pm 2\}$

Evaluando en los cuatro posibles candidatos se llega a que ninguna anula f . Luego f no tiene raíces enteras.

7.28. Ejercicio 28

7.28.A. Pregunta i

$$f = x^2 + 6x - 2$$

Usando la resolvente cuadrática, $x = \frac{-6 \pm w}{2}$ con $w^2 = 36 - 4 \cdot -2 = 44$

Luego,

$$x_1 = -3 + \sqrt{11}$$

$$x_2 = -3 - \sqrt{11}$$

Entonces,

$f = x^2 + 6x - 2$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ pues es de grado 2 son raíces en \mathbb{Q}

$f = (x - (3 + \sqrt{11})) \cdot (x - (3 - \sqrt{11}))$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$ pues los factores son polinomios irred de gr 1

7.28.B. Pregunta ii

$$f = x^2 + x - 6$$

Usando la resolvente, $x = \frac{-1 \pm w}{2}$ con $w^2 = 1 - 4 \cdot -6 = 25$

Luego,

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

Entonces,

$$f = (x - 2)(x + 3) \text{ es la factorización en } \mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$$

7.28.C. Pregunta iii

$$f = x^2 - 2x + 10$$

Usando la resolvente, $x = \frac{2 \pm w}{2}$ con $w^2 = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 \implies w = 6i$

Luego,

$$x_1 = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$$

$$x_2 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$$

Por lo tanto,

$f = x^2 - 2x + 10$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$

$f = (x - (1 + 3i)) \cdot (x - (1 - 3i))$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.29. Ejercicio 29

7.29.A. Pregunta i

$$f = x^2 + (1 + 2i)x + 2i$$

Usando la resolvente, $x = \frac{-(1+2i) \pm w}{2}$ con w tal que,

$$w^2 = (1 + 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2i$$

$$w^2 = (1 + 2i)(1 + 2i) - 8i$$

$$w^2 = 1 + 2i + 2i - 4 - 8i$$

$$w^2 = -3 - 4i$$

Luego busco los $w = a + bi$ tales que $w^2 = -3 - 4i$

Pero $w^2 = (a + bi) \cdot (a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi$ y

$$|w^2| = |-3 - 4i| \iff |w|^2 = 5 \iff a^2 + b^2 = 5$$

Usando la igualdad de números complejos,

$$w^2 = -3 - 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Luego } (1) + (3) \implies 2a^2 = 2 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$$

$$\text{Luego } (3) - (1) \implies 2b^2 = 8 \iff b^2 = 4 \iff b = \pm 2$$

Usando (2): $w_1 = 1 - 2i; w_2 = -1 + 2i$

Con los w hallados, busco los x ;

$$x_1 = \frac{-1 - 2i + 1 - 2i}{2} = -2i$$

$$x_2 = \frac{-1 - 2i - 1 + 2i}{2} = -1$$

Luego $f = (x + 2i)(x + 1)$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.29.B. Pregunta ii

$$f = x^8 - 1$$

Luego busco los $\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \iff \alpha^8 = 1 \implies \alpha \in G_8$

Y se que el grupo $G_8 = \{c \in \mathbb{C} : c = e^{\frac{2k\pi i}{8}}; 0 \leq k \leq 7\}$

Por lo tanto, $f = \prod_{k=0}^7 (x - e^{\frac{2k\pi i}{8}})$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.29.C. Pregunta iii

$$f = x^6 - (2 - 2i)^{12}$$

Idem ejercicio anterior, busco los $\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \iff \alpha^6 = (2 - 2i)^{12}$

Ahora voy a usar la forma polar para hallar los α que cumplen lo pedido.

$$\text{Defino } \alpha = |\alpha| \cdot e^{\theta i} \implies \alpha^6 = |\alpha|^6 \cdot e^{6\theta i}$$

$$\text{Además, } 2 - 2i = |2 - 2i| \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i} = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}$$

$$\text{Luego } (2 - 2i)^{12} = (\sqrt{8})^{12} \cdot e^{12 \cdot \frac{7}{4}\pi i} = 262144 \cdot e^{21\pi i}$$

Por lo tanto usando la igualdad de números complejos,

$$\alpha^6 = (2 - 2i)^{12} \iff \begin{cases} |\alpha|^6 = 262144 \implies |\alpha| = 8 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases}$$

Luego,

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{\pi + 2k\pi}{6} < 2\pi$$

$$0 \leq 2k < 12$$

$$0 \leq k < 6$$

Por lo tanto, $f = \prod_{k=0}^5 (x - 8 \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi i}{6}})$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.30. Ejercicio 30

7.30.A. Pregunta i

$$f = x^6 - 9$$

Veo que $x^6 = (x^3)^2$ y $9 = 3^2$ por lo tanto, $x^6 - 9$ es diferencia de cuadrados.

Así, $f = (x^3 - 3)(x^3 + 3)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ pues los factores no tienen raíces en \mathbb{Q}

Ahora defino $g = x^3 - 3$ y $h = x^3 + 3$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff x^3 = 3 \\ &\iff x = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}}; 0 \leq k \leq 2 \end{aligned}$$

Luego las raíces de g son,

$$\begin{aligned} \blacksquare x_1 &= \sqrt[3]{3} \\ \blacksquare x_2 &= -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[6]{243}}{2}i \\ \blacksquare x_3 &= -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{243}}{2}i \end{aligned}$$

Ahora busco raíces de h,

$$h(x) = 0 \iff x^3 = -3$$

$$\text{Defino } \beta = |\beta| \cdot e^{\theta i} \implies \beta^3 = |\beta|^3 \cdot e^{3\theta i}$$

$$\text{Y se que } -3 = 3 \cdot e^{\pi i}$$

$$\text{Usando la igualdad de números complejos, } \beta^3 = -3 \iff \begin{cases} |\beta|^3 = 3 \implies |\beta| = \sqrt[3]{3} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{3}; 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

Luego las raíces de h son,

- $x_1 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{243}i}{2}$
- $x_2 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\pi i} = -\sqrt[3]{3}$
- $x_3 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{2}{3}\pi i} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{243}i}{2}$

Luego queda armar la factorización del polinomio, con todas las raíces halladas. \square

7.30.B. Pregunta ii

En $\mathbb{Q}[x]$

Se ve fácil que no tiene raíces en \mathbb{Q} . Pero el hecho de que sea un polinomio de grado 4 sin raíces, no quiere decir que no sea irreducible en \mathbb{Q} ya que podría ser producto de dos polinomios de grado 2.

Luego,

$$\begin{aligned} x^4 + 3 &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (c + a)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + cb) \end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios,
$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = a + c \\ 0 = b + d + ac \\ 1 = bd \end{cases}$$

Con un poco de manipulación del sistema, se llega a que no existen soluciones a, b, c, d que cumplan todas las restricciones.

Luego f es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$

En $\mathbb{C}[x]$

Busco los $\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^4 = -3$

Los α que lo cumplen son:

- $\alpha_1 = \sqrt[4]{3}$
- $\alpha_2 = -\sqrt[4]{3}$
- $\alpha_3 = \sqrt[4]{3}i$
- $\alpha_4 = -\sqrt[4]{3}i$

Luego, $f = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3}i)(x + \sqrt[4]{3}i)$ es la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$

En $\mathbb{R}[x]$

Agrupo los conjugados de las raíces complejas.

Luego, $f = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})$ es la factorización de f en $\mathbb{R}[x]$

7.30.C. Pregunta iii

$$f = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$$

En $\mathbb{Q}[x]$

Usando el criterio de Gauss, obtengo candidatos en $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Evaluando, obtengo que $x = -1$ y $x = 2$ son raíces de f .

Luego, $f = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$

En $\mathbb{R}[x]$

Dado que $(x^2 + 3)$ no tiene raíces reales, $f = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$

En $\mathbb{C}[x]$

Busco las raíces complejas de $(x^2 + 3)$,

Luego, $f = (x + 1)(x - 2)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.31. Ejercicio 31

TODO

7.32. Ejercicio 32

Quiero usar la suma geométrica, por lo que separo en casos $a = 1$ y $a \neq 1$

$a = 1 \implies f(1) = n \neq 0 \implies a = 1$ no es raíz de f

$a \neq 1 \implies f(a) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = 0 \iff a^{n+1} = 1 \iff a \in G_{n+1} - \{1\}$

Luego $\#(G_{n+1} - \{1\}) = n + 1 - 1 = n \implies f$ tiene n raíces \implies todas las raíces deben ser simples, como se quería probar.

7.33. Ejercicio 33

7.33.A. Pregunta i

Rdo.: Sea $a + b\sqrt{d}; a, b, c \in \mathbb{Q}; \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}; b \neq 0; d > 0 \implies (x - (a + b\sqrt{d}))(x - (a - b\sqrt{d}))|f$

Luego dado que $2 - \sqrt{3}$ es raíz, por el rdo, $2 + \sqrt{3}$ también lo es $\implies (x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3}))|f$

$$\begin{aligned}(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3})) &= x^2 - 2x + \sqrt{3}x - 2x + 4 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 3 \\ &= x^2 + (-2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})x + (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3) \\ &= x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto se que $x^2 + 4x + 1|f$

Usando el algoritmo de división, $f = (x^2 + 4x + 1)(x^3 - 2x + 1)$

Sea ahora $g = x^3 - 2x + 1$

Busco raíces de g . Veo a simple vista que $g(1) = 0 \implies x = 1$ es raíz de g .

Usando Ruffini, llego a que $g = (x - 1)(x^2 + x - 1)$

Defino $h = x^2 + x - 1$, $h = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Usando todo lo hallado,

- $f = (x^2 - 4x + 1)(x - 1)(x^2 + x - 1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x - 1)(x - (\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}))(x - (\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}))$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$

7.33.B. Pregunta ii

Se que $1 + 2i$ es raíz $\iff 1 - 2i$ es raíz $\implies (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))|f$

Luego $(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) = x^2 - 2x + 5$

Usando el algoritmo de división obtengo que $f = (x^2 - 2x + 5)(x^3 + 2x^2 - 2x + 3)$

Defino $g = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

Por el lema de Gauss, las posibles raíces enteras de g son $\{\pm 1; \pm 3\}$

Evaluando, obtengo que -3 es raíz de g

Usando ruffini, $g = (x + 3)(x^2 - x + 1)$

Sea ahora $h = x^2 - x + 1$, busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$$h(x) = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{Luego } h = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$$

Con todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - x + 1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - x + 1)$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))(x + 3)(x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.33.C. Pregunta iii

Se que a es raíz con $\text{mult}(a, f) = n \iff f^n(a) = 0 \wedge f^{n+1}(a) \neq 0$

Luego busco la multiplicidad de $\sqrt{2}i$ sabiendo que es raíz multiple $\implies f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 30x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 24x + 16 \\ f''(\sqrt{2}i) &= 30(\sqrt{2}i)^4 + 20(\sqrt{2}i)^3 + 60(\sqrt{2}i)^2 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\ &= 30 \cdot 4 - 20\sqrt{8}i - 60 \cdot 2 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\ &= 120 - 40\sqrt{2}i - 120 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\ &= -40\sqrt{2}i + 24(\sqrt{2}i) + 16 \neq 0 \implies \text{mult}(\sqrt{2}i, f) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) | f \implies (x^2 + 2)^2 | f \implies x^4 + 4x^2 + 4 | f$$

$$\text{Usando ahora el algoritmo de división, } f = (x^4 + 4x^2 + 4)(x^2 + x + 1)$$

Defino $g = x^2 + x + 1$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$$\text{Luego } g = (x - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}))$$

Con lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^2$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}))(x - \sqrt{2}i)^2(x + \sqrt{2}i)^2$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.33.D. Pregunta iv

Se que existe una raíz imaginaria pura, es decir del tipo bi

Luego bi es raíz de sii,

$$\begin{aligned} f(bi) = 0 &\iff (bi)^4 + 2(bi)^3 + 3(bi)^2 + 10(bi) - 10 = 0 \\ &\iff b^4 - 2b^3i - 3b^2 + 10bi - 10 = 0 \\ &\iff b^4 - 3b^2 - 10 + (-2b^3 + 10b)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} b^4 - 3b^2 - 10 = 0 \\ -2b^3 + 10b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtengo que $b = 0 \vee b = \pm\sqrt{5}$

Reemplazando en la primera $b = 0 \implies 0^4 - 3 \cdot 0^2 - 10 = -10 \neq 0 \implies b = 0$ no sirve.

Y reemplazando en la primera $b = \sqrt{5} \implies (\sqrt{5})^4 - 3(\sqrt{5})^2 - 10 = 0 \implies b = \sqrt{5}$ sirve.

Luego $\pm\sqrt{5}i$ son raíces de $f \iff (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) | f$

Por lo tanto, $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = (x^2 + 5) | f$

Usando el algoritmo de división, obtengo que $f = (x^2 + 5)(x^2 + 2x - 2)$

Defino $g = x^2 + 2x - 2$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego $g = (x - 1)(x + 3)$

Con lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 + 5)(x - 1)(x + 3)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$
- $f = (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - 1)(x + 3)$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.33.E. Pregunta v

Se que sea g un polinomio, $g | f \wedge g | x^3 + 1 \implies g | (f : x^3 + 1)$, luego busco $MCD(f, x^3 + 1)$

Usando el algoritmo de Euclides, $MCD(f, x^3 + 1) = x^2 - x + 1$

Por lo tanto, se que $x^2 - x + 1 | f$

Usando el algoritmo de división, $f = (x^2 - x + 1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$

Defino $h = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$ y busco sus raíces.

Usando el lema de Gauss obtengo posibles candidatos a raíces enteras: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Evalutando en los candidatos obtengo que $x = 2$ es raíz de h .

Usando Ruffini, $h = (x - 2)(x^2 - 5)$

Defino $k = x^2 - 5$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego, $k = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

Defino $m = x^2 - x + 1$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego, $m = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$

Con todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 - x + 1)(x - 2)(x^2 - 5)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x^2 - x + 1)(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.34. Ejercicio 34

$a \in \mathbb{Q}$ es raíz doble $f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0 \wedge f''(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^3 - 3(a+4)x^2 + 2(4a+5)x - (5a+2) \\f''(x) &= 12x^2 - 6(a+4)x + 8a + 10\end{aligned}$$

Ahora busco los a que cumplan lo pedido, evalúo f en a ,

$$\begin{aligned}f(a) = 0 &\iff a^4 - (a+4)a^3 + (4a+5)a^2 - (5a+2)a + 2a = 0 \\&\iff a^4 - a^4 - 4a^3 + 4a^3 + 5a^2 - 5a^2 - 2a + 2a = 0 \\&\iff 0 = 0\end{aligned}$$

Luego $f(a) = 0; \forall a \in \mathbb{Q}$

Ahora evalúo f' en a ,

$$\begin{aligned}f'(a) = 0 &\iff 4a^3 - 3(a+4)a^2 + 2(4a+5)a - (5a+2) = 0 \\&\iff 4a^3 - 3a^3 - 12a^2 + 8a^2 + 10a - 5a - 2 = 0 \\&\iff a^3 - 4a^2 + 5a - 2 = 0\end{aligned}$$

Luego busco las raíces enteras de $g = a^3 - 4a^2 + 5a - 2$

Usando el lema de Gauss, los candidatos son: $\{\pm 1, \pm 2\}$

Evaluable obtengo que 1 es raíz de g . Usando Ruffini obtengo que,

$$g = (a-1)(a^2 - 3a + 2)$$

Luego defino $h = a^2 - 3a + 2$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$$\text{Obtengo que } h = (a-1)(a-2)$$

$$\text{Por lo tanto, } g = (a-1)^2(a-2)$$

Entonces los únicos valores de a tales que la derivada primera se anula son $a = 1; a = 2$

Ahora, para que sean raíces dobles no deben anular la derivada segunda,

$$\begin{aligned}f''(1) \neq 0 &\iff 12 \cdot 1^2 - 6(1+4)1 + 8 \cdot 1 + 10 \neq 0 \\&\iff 12 - 30 + 8 + 10 \neq 0 \\&\iff 0 \neq 0\end{aligned}$$

Luego $a = 1$ no cumple lo pedido.

$$\begin{aligned}f''(2) \neq 0 &\iff 12 \cdot 2^2 - 6(2+4)2 + 8 \cdot 2 + 10 \neq 0 \\&\iff 12 \cdot 4 - 6 \cdot 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 10 \neq 0 \\&\iff 48 - 72 + 16 + 10 \neq 0 \\&\iff 2 \neq 0\end{aligned}$$

Luego $a = 2$ cumple lo pedido.

$$\text{Entonces, } f = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

$$\text{Se que } a = 2 \text{ es raíz doble } \iff (x-2)^2 | f \iff (x^2 - 4x + 4) | f$$

$$\text{Usando el algoritmo de división, } f = (x-2)^2(x^2 - 2x + 1)$$

Y se ve que $x^2 - 2x + 1$ tiene forma del binomio cuadrático $(x-1)^2$

Por lo tanto, $f = (x-2)^2(x-1)^2$ es la factorización de f en $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$

7.35. Ejercicio 35

Se que $w \in G_6$ es raíz de f pero $w \notin G_3$

$$\text{Luego } w^6 = 1 \implies (w^2)^3 = 1 \iff w^2 = 1 \implies w = -1$$

Entonces busco $a \in \mathbb{C} : (x+1) | f$

$$\begin{aligned}f(-1) = 0 &\iff 1 - 1 - 3 - 2 + 1 + 3 + a = 0 \\&\iff -1 + a = 0 \\&\iff a = 1\end{aligned}$$

$$\text{Luego } f = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Usando el lema de Gauss y Ruffini obtengo las raíces enteras y la factorización de f .

Luego $f = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+2x-1)$

Usando la resolvente cuadrática,

$$(x^2-x+1) = (x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}))(x - (-1 - \sqrt{2}))$$

$$(x^2+2x-1) = (x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (\sqrt{2} - 1))$$

Luego,

- $f = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+2x-1)$ es la factorización en $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (\sqrt{2} - 1))$ es la factorización en $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x-1)(x+1)(x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}))(x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (\sqrt{2} - 1))$ es la factorización en $\mathbb{C}[x]$

7.36. Ejercicio 36

7.36.A. Pregunta i

Por TFA se que $x^2|(f : f')$ y que $(x^2+1)|(f : f')$

Luego,

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \wedge f'(0) = 0 \wedge mult(0, f') = 2 &\implies mult(0, f) = 3 \\ f(1) = 0 \wedge f'(1) = 0 \wedge mult(1, f') = 1 &\implies mult(1, f) = 2 \\ f(-1) = 0 \wedge f'(-1) = 0 \wedge mult(-1, f') = 1 &\implies mult(-1, f) = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto para cumplir la primer condición, $f = x^3(x-1)^2(x+1)^2$ es el de menor grado que cumple lo pedido.

7.36.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned} (f : f') &= x^5 - 5x^4 + \frac{25}{4}x^3 \\ (f : f') &= x^3(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) \\ (f : f') &= x^3(x - \frac{5}{2})^2 \end{aligned}$$

Luego $f = x^4(x - \frac{5}{2})^3$

$$\begin{aligned} f(1) = 3 &\iff a \cdot 1 \cdot (1 - \frac{5}{2})^3 = 3 \\ &\iff a \cdot (-\frac{3}{2})^3 = 3 \\ &\iff a = 3 \cdot -\frac{8}{27} = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

Luego $f = -\frac{8}{9}x^3(x - \frac{5}{2})^2$

7.36.C. Pregunta iii

TODO

7.36.D. Pregunta iv

TODO

7.37. Ejercicio 37

Sea $g = \alpha x^3 + \beta x^2 + \sigma x + \theta$ un polinomio genérico de grado 3 con raíces a, b, c

$$\begin{aligned} g &= \alpha((x-a)(x-b)(x-c)) \\ &= \alpha((x^2 - bx - ax + ab)(x-c)) \\ &= \alpha(x^3 - x^2c - bx^2 + bcx - ax^2 + acx + abx - abc) \\ &= \alpha(x^3 + (-a-b-c)x^2 + (bc+ac+ab)x - abc) \\ &= \alpha x^3 + \alpha(-a-b-c)x^2 + \alpha(bc+ac+ab)x - \alpha abc \end{aligned}$$

Luego,

- $-\frac{\beta}{\alpha} = a + b + c$
- $\frac{\sigma}{\alpha} = bc + ac + ab$
- $-\frac{\theta}{\alpha} = abc$

Ahora sea $f = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \implies \alpha = 2; \beta = -3; \sigma = 4; \theta = 1$ con a, b, c raíces de f .

- $a + b + c = \frac{3}{2}$
- $ab + ac + bc = \frac{4}{2} = 2$
- $abc = -\frac{1}{2}$

7.38. Ejercicio 38

7.38.A. Pregunta i

Se que tiene una raíz real, luego $\exists a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$, la busco.

$$\begin{aligned} f(a) = 0 &\iff a^4 - (i+4)a^3 + (8+4i)a^2 - (2i+24)a + 12 = 0 \\ &\iff a^4 - a^3i + 4a^3 + 8a^2 + 4a^2i - 2ai - 24a + 12 = 0 \\ &\iff (a^4 + 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12) + (-a^3 + 4a^2 - 2a)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} a^4 + 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12 = 0 \\ -a^3 + 4a^2 - 2a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Del sistema obtengo que $a = 2 \pm \sqrt{2}$ cumplen lo pedido

$$\text{Luego } (x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))|f \iff (x^2 - 4x + 2)|f$$

Usando el algoritmo de división, $f = (x^2 - 4x + 2)(x^2 - ix + 6)$

Defino $g = x^2 - ix + 6$ y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$$\text{Luego } g = (x - 3i)(x + 3i)$$

Y por lo tanto, $f = (x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))(x - 3i)(x + 3i)$ es la factorización de f en $\mathbb{C}[x]$

7.38.B. Pregunta ii

TODO

7.39. Ejercicio 39

TODO