



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Final 14/05/2021

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



## Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

# Índice

<b>1. Final 14/05/2021</b>	<b>2</b>
1.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
1.2. Ejercicio 2 . . . . .	2
1.2.A. Pregunta i . . . . .	3
1.2.B. Pregunta ii . . . . .	3
1.3. Ejercicio 3 . . . . .	3
1.4. Ejercicio 5 . . . . .	4

# 1. Final 14/05/2021

## 1.1. Ejercicio 1

Defino  $p(n) : \frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n}; \forall n \geq 2$

**Caso base  $n = 2$**

$$\begin{aligned} p(2) : \frac{4^2}{2+1} &< \binom{2 \cdot 2}{2} \\ p(2) : \frac{16}{3} &< \binom{4}{2} \\ p(2) : \frac{16}{3} &< \frac{4!}{2!2!} \\ p(2) : \frac{16}{3} &< 6 \end{aligned}$$

$p(2)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Dado  $h \geq 2$ , quiero probar que  $p(h) \implies p(h+1)$

$$\text{HI: } \frac{4^h}{h+1} < \binom{2h}{h} \implies \frac{4^h}{h+2} < \binom{2h}{h} \frac{h+1}{h+2}$$

$$\text{QpQ: } \frac{4^{h+1}}{h+2} < \binom{2(h+1)}{h+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{4^{h+1}}{h+2} &= \frac{4^h}{h+2} \cdot 4 \\ &\leq \binom{2h}{h} \frac{h+1}{h+2} \cdot 4 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} \binom{2h}{h} \frac{h+1}{h+2} \cdot 4 &< \binom{2(h+1)}{h+1} \\ \frac{(2h)!}{h!h!} \cdot \frac{h+1}{h+2} \cdot 4 &< \frac{(2h+2)!}{(h+1)!(h+1)!} \\ \frac{(2h)!(h+1)4}{h!h!(h+2)} &< \frac{(2h+2)(2h+1)(2h)!}{(h+1)h!(h+1)h!} \\ \frac{(h+1)4}{h+2} &< \frac{(2h+2)(2h+1)}{(h+1)^2} \\ (h+1)^3 \cdot 4 &< 2(h+1)(2h+1)(h+2) \\ (h+1)^2 \cdot \frac{4}{2} &< (2h+1)(h+2) \\ 2h^2 + 4h + 2 &< 2h^2 + 4h + h + 2 \\ 0 &< h \end{aligned}$$

Dado que  $h \geq 2$  qued probado el paso inductivo.

Luego  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

## 1.2. Ejercicio 2

Tengo el conjunto  $X = P(\{1, 2, 3, \dots, 12\})$ . Se define  $R$  relación tal que  $ARB \iff \# \text{pares}(A) = \# \text{pares}(B)$

### 1.2.A. Pregunta i

Voy a probar cada propiedad de la relación de equivalencia por separado.

#### Reflexividad

Por definición de reflexividad,  $R$  es reflexiva  $\iff \forall A \in X : ARA$

Por definición de la relación,  $ARA \iff \#pares(A) = \#pares(A)$

Dado que  $A = A$ , en particular tienen los mismos elementos pares, luego  $R$  es reflexiva.

#### Simetría

Por definición de simetría,  $R$  es simétrica  $\iff \forall (A, B) \in X^2 : ARB \implies BRA$

Por definición de la relación,  $ARB \iff \#pares(A) = \#pares(B)$

Y quiero probar que  $BRA \iff \#pares(B) = \#pares(A)$

Pero,

$$\begin{aligned} ARB &\iff \#pares(A) = \#pares(B) \\ &\iff \#pares(B) = \#pares(A) \\ &\iff BRA \end{aligned}$$

Luego  $R$  es simétrica.

#### Transitividad

Por definición de transitividad,  $R$  es transitiva  $\iff \forall (A, B, C) \in X^3 : (ARB \wedge BRC) \implies ARC$

Por definición de la relación,

$$\begin{aligned} ARB &\iff \#pares(A) = \#pares(B) \\ BRC &\iff \#pares(B) = \#pares(C) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} ARB \wedge BRC &\iff \#pares(A) = \#pares(B) \wedge \#pares(B) = \#pares(C) \\ &\implies \#pares(A) = \#pares(C) \\ &\implies ARC \end{aligned}$$

Luego  $R$  es transitiva.

Dado que  $R$  es reflexiva, simétrica y transitiva;  $R$  es una relación de equivalencia.

### 1.2.B. Pregunta ii

Veo que por definición de la relación, lo que determina que un conjunto pertenezca a una clase de equivalencia es la cantidad de pares que contenga.

Luego existen 7 clases de equivalencia: clases con elementos que contienen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 pares.

Luego la clase del  $\# \{3 \text{ pares}\} = \binom{6}{3} \cdot 2^6 = 1280$  tiene más de 1000 elementos como se quería probar.

### 1.3. Ejercicio 3

Defino  $d = (a^{60} + 6 : 560)$  y se que  $560 = 7 \cdot 2^4 \cdot 5$

Luego la factorización en primos de  $d$  será:

$$d = 2^i \cdot 5^j \cdot 7^k \text{ con } \begin{cases} 0 \leq i \leq 4 \\ 0 \leq j \leq 1 \\ 0 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

Estudio cada primo en particular.

**Caso  $p = 5$**

$$\begin{aligned} 5|a^{60} + 6 &\iff a^{60} + 6 \equiv 0(5) \\ &\iff a^{60} \equiv 4(5) \\ &\iff \begin{cases} 0 \equiv 4(5) & 5|a \\ 1 \equiv 4(5) & 5 \nmid a \text{ por PTF} \end{cases} \end{aligned}$$

En ambos casos se llega a un absurdo, luego  $j = 0$

**Caso  $p = 7$**

$$\begin{aligned} 7|a^{60} + 6 &\iff a^{60} + 6 \equiv 0(7) \\ &\iff a^{60} \equiv 1(7) \\ &\iff \begin{cases} 0 \equiv 1(7) & 7|a \\ 1 \equiv 1(7) & 7 \nmid a \text{ por PTF} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego  $k = 0 \vee k = 1$

**Caso  $p = 2$**

Si  $a \equiv 0(2) \iff a = 2k$ ,

$$\begin{aligned} a^{60} + 6 &\equiv 0^{60} + 6 \equiv 0(2) \\ a^{60} + 6 &\equiv (2k)^{2^{30}} + 6 \equiv 2(4) \end{aligned}$$

Y si no es divisible por 4 tampoco lo es por 8 y por 16

Si  $a \equiv 1(2)$ ,

$$a^{60} + 6 \equiv 1^{60} + 6 \equiv 1(2)$$

Luego si no es divisible por 2, tampoco lo será por 5, 8, 16

Luego  $i = 0 \vee i = 1$

Por lo tanto, los posibles MCD son

- $k = 0 \wedge i = 0 \implies d = 1$
- $k = 0 \wedge i = 1 \implies d = 2$
- $k = 1 \wedge i = 0 \implies d = 7$
- $k = 1 \wedge i = 1 \implies d = 14$

## 1.4. Ejercicio 5

$P$  tiene una raíz imaginaria pura  $\iff \exists a \in \mathbb{R} : P(ai) = 0$

$$\begin{aligned} P(ai) = 0 &\iff (ai)^6 + (ai)^5 + 5(ai)^4 + 4(ai)^3 + 8(ai)^2 + 4(ai) + 4 = 0 \\ &\iff -a^6 + a^5i + 5a^4 - 4a^3i - 8a^2 + 4ai + 4 = 0 \\ &\iff (-a^6 + 5a^4 - 8a^2 + 4) + (a^5 - 4a^3 + 4a)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} -a^6 + 5a^4 - 8a^2 + 4 = 0 \\ a^5 - 4a^3 + 4a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De donde se obtiene que  $a = \sqrt{2}$

Luego  $\sqrt{2}i$  es raíz de  $P \iff -\sqrt{2}i$  es raíz de  $P$ .

Por lo tanto  $(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) | P \iff (x^2 + 2) | P$

Usando el algoritmo de división de polinomios,  $P = (x^2 + 2)(x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$

Y por enunciado se que son raíces múltiples, luego se que  $(x^2 + 2) | (x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2)$

Usando el algoritmo de división,  $P = (x^2 + 2)^2(x^2 + x + 1)$

Defino  $g = x^2 + x + 1$  y busco sus raíces utilizando la resolvente cuadrática.

Obtengo que  $g = (x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$

Por lo tanto,

- $P = (x - \sqrt{2}i)^2(x + \sqrt{2}i)^2(x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$
- $P = (x^2 + 2)^2(x^2 + x + 1)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$

Las raíces de  $P$  son sus multiplicidades son:

- $\text{mult}(\sqrt{2}i, f) = 2$
- $\text{mult}(-\sqrt{2}i, f) = 2$
- $\text{mult}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, f) = 1$
- $\text{mult}(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, f) = 1$