DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 7

2do cuatrimestre 2021 — Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

7. Práctica 7

7.1. Ejercicio 1

Rdo. propiedades del producto y suma de polinomios:

- Grado de un producto de polinomios $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$
- Coeficiente principal de un prodcuto de polinomios $cp(ab) = ca(a) \cdot cd(b)$
- $\begin{cases} gr(f+g) \leq max(gr(f); gr(g)) \\ gr(f+g) = max(gr(f); gr(g)) \iff gr(f) \neq gr(g) \vee (gr(f) = gr(g) \wedge cp(f) \neq cp(g)) \end{cases}$

7.1.A. Pregunta i

- $gr(p) = 77.gr(4x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 7) = 77.6 = 462$
- $cp(p) = 4^{77}$

7.1.B. Pregunta ii

Sea $p = a^4 - b^7$ con $a = -3x^7 + 5x^3 + x^2 - x + 5$ y $b = 6x^4 + 2x^3 + x - 2$

$$\begin{aligned} gp(p) &= max(gr(a^4); gr(b^7)) \iff gr(a^4) \neq gr(b^7) \vee cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= max(7.4; 4.7) \iff cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= 28 \iff (-3)^4 \neq 6^7 \\ &= 28 \iff 81 \neq 279936 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 28$
- $cp(p) = 81 - 6^7$

7.1.C. Pregunta iii

Sea $p = a - b + c$ con $\begin{cases} a = (-3x^5 + x^4 - x + 5)^4 \\ b = 82x^{20} \\ c = 19x^{19} \end{cases}$

Luego $p = 81x^{20} + (...) - 81x^{20} + 19x^{19} \implies gr(p) = 19$ pues se cancelan los termino con x^{20}

Entonces busco el coeficiente para x^{19}

$$\begin{aligned} cp(p) &= a_{19} + b_{19} + c_{19} \\ &= (-3. - 3. - 3.1) + 0 + 19 \\ &= -27 + 0 + 19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 19$
- $cp(p) = -8$

7.2. Ejercicio 2

1. *a)* En $\mathbb{Q}[x] = 2$

   b) En $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[x] = 2$

2. Usando bin de Newton, $c(20) = \binom{133}{20}(3i)^{113}$

3. Usando bin de Newton cuatro veces,

   - $a_1 = \binom{4}{1}x^1(-1)^3 \cdot \binom{19}{19}x^{19}5^0 = -4x^{20}$
   - $a_2 = \binom{4}{2}x^2(-1)^2 \cdot \binom{19}{18}x^{18}5^1 = 570x^{20}$
   - $a_3 = \binom{4}{3}x^3(-1)^1 \cdot \binom{19}{17}x^{17}5^2 = -17100x^{20}$
   - $a_4 = \binom{4}{4}x^4(-1)^0 \cdot \binom{19}{16}x^{16}5^3 = 121125x^{20}$

   Luego $c(20) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 5 = -4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = 104586$

4. $c(20) = 21504$

7.3. Ejercicio 3

7.3.A. Pregunta i

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} f^2 = xf + x + 1 &\iff f^2 - xf = x + 1 \\ &\iff f(f - x) = x + 1 \\ &\iff f \neq 0 \wedge f - x \neq 0 \end{aligned}$$

Tomo grado a ambos lados,

$$\begin{aligned} &gr(f) + gr(f - x) = gr(x + 1) \\ &gr(f) + gr(f - x) = 1 \end{aligned}$$

Luego el grado de f tiene que se menor a 2.

Caso gr(f) = 1

Si $gr(f) = 1 \implies gr(f - x) = 0$ para cumplir la igualdad de grados.

Luego f es de la forma $f = ax + b$ con $a = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff (x + b)(x + b - x) = x + 1 \\ &\iff xb + b^2 = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff b = 1 \end{aligned}$$

Así, $f_1 = x + 1$

Caso gr(f) = 0

Que el grado del polinomio sea igual a cero implica que $f = c$ con c una constante.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff c(c - x) = x + 1 \\ &\iff c^2 - cx = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} -c = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \implies c = -1 \end{aligned}$$

Así, $f_2 = -1$

Rta.: $f = x + 1$ y $f = -1$

7.3.B. Pregunta ii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$f^2 - xf = x^2 + 1 \iff f(f - x) = -x^2 + 1$$

Tomo grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr(f - x) &= gr(-x^2 + 1) \\ 0 + 2 &= 2 \text{ No puede ser} \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 + 0 &= 2 \text{ No puede ser} \end{aligned}$$

Así, el único caso posible es que $gr(f) = 1$ y que $gr(f - x) = 1$

Sea $f = ax + b$,

$$\begin{aligned} f(f - x) = -x^2 + 1 &\iff (ax + b)(ax + b - x) = -x^2 + 1 \\ &\iff (ax + b)((a - 1)x + b) = -x^2 + 1 \\ &\iff a(a - 1)x^2 + abx + b(a - 1)x + b^2 = -x^2 + 1 \\ &\iff a(a - 1)x^2 + (ab + b(a - 1))x + b^2 = -x^2 + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} a(a - 1) = -1 \\ ab + b(a - 1) = 0 \\ b^2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Busco soluciones para el sistema de tres ecuaciones que resultó.

De la tercera, se que $b = \pm 1$

$b = 1 \implies a + a + 1 = 0 \iff 2a = 1 \iff a = \frac{1}{2}$

Pero con $a = \frac{1}{2} \wedge b = 1 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq -1$

Luego $b = 1$ NO sirve.

$b = -1 \implies -a - a + 1 = 0 \implies -2a = -1 \implies a = \frac{1}{2}$

Se llega al mismo valor de a que con b=1 y ya se probó que no sirve.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.C. Pregunta iii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} (x + 1)f^2 = x^6 + xf &\iff (x + 1)f^2 - xf = x^6 \\ &\iff f((x + 1)f - x) = x^6 \end{aligned}$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr((x + 1)f - x) &= gr(x^6) \\ 0 + 6 &= 6 \\ 1 + 5 &= 6 \\ 2 + 4 &= 6 \\ 3 + 3 &= 6 \\ 4 + 2 &= 6 \\ 5 + 1 &= 6 \\ 6 + 0 &= 6 \end{aligned}$$

Luego de dar todos los posibles valores a $gr(f)$, se puede ver que no existe $gr((x+1)f - x)$ que cumpla lo pedido.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.D. Pregunta iv

Dado que por enunciado se que $f \neq 0$, puedo reescribir la igualdad como,

$$f^3 = gr(f) \cdot x^2 f \iff f^2 = gr(f) \cdot x^2$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f^2) &= gr(gr(f) \cdot x^2) \\ gr(f^2) &= 2 \\ gr(f.f) &= 2 \\ 2gr(f) &= 2 \\ gr(f) &= 1 \end{aligned}$$

Luego, con $f = ax + b$,

$$\begin{aligned} f^2 = gr(f) \cdot x^2 &\iff (ax+b)^2 = x^2 \\ &\iff a^2x^2 + 2abx + b^2 = x^2 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, $a = \pm 1$ y $b = 0$ son las soluciones del sistema.

Rta.: $f_1 = x$ y $f_2 = -x$ son los únicos polinomios que cumplen lo pedido.

7.4. Ejercicio 4

En estos ejercicios hay que hacer la división con la caja. Yo voy a dejar los resultados de cada paso de la división.

7.4.A. Pregunta i

1. C $= 5x^2$; R $= 2x^3 - 10x^2 - x + 4$
2. C $= 2x$; R $= -10x^2 - 5x + 4$
3. C $= -10$; R $= -5x - 16$

Rta:

- C $= 5x^2 + 2x - 10$
- R $= -5x - 16$

7.4.B. Pregunta ii

1. C $= 2x^2$; R $= x^3 - 2x^2 - 4$
2. C $= \frac{1}{2}x$; R $= -2x^2 - \frac{1}{2}x - 4$
3. C $= -1$; R $= -\frac{1}{2}x - 3$

Rta:

- C $= 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- R $= -\frac{1}{2}x - 3$

7.4.C. Pregunta iii

1. C $= x^{n-1}$; R $= x^{n-1} - 1$
2. C $= x^{n-2}$; R $= x^{n-2} - 1$
3. C = ...; R = ...
4. C = 1; R = 0

Rta:

- C $= \sum_{i=1}^{n} x^{n-i}(x-1)$
- R $= 0$

7.5. Ejercicio 5

7.5.A. Pregunta i

Haciendo $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x + 2 - a) + \left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a$$

Luego busco que el resto $\left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$\left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2a + a^2 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se que $-1 + a = 0 \iff a = 1$.

Reemplazando en la primera y verifico que $a = 1$ cumple lo pedido, $1 - 2a + a^2 = 1 - 2 + 1 = 0$

Rta.: $a = 1$

7.5.B. Pregunta ii

Haciendo $x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1$ dividido $x^2 + x + 1$ llego a:

$$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + (-a - 1)x + 2 + a) + 1 - 2 - a$$

Luego busco que el resto $1 - 2 - a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$1 - 2 - a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2 - a = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $a = -1$ es el único que lo cumple.

7.5.C. Pregunta iii

(Esta división es larga y pesada) Haciendo $x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 - ax^2 + (-4a^2)x + (-1 + 5a - a^3)) + \left[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)\right]$$

Luego busco que el resto sea igual a $-8x + 4$,

$$\left[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)\right] = -8x + 4 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} a^3 - 5a + 2 = 4 &\iff a^3 - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a(a^2 - 5) - 2 = 0 \end{aligned}$$

A simple vista veo que $a = -2$ es solución, luego usando Ruffini,

$$a^3 - 5a - 2 = (a^2 - 2a - 1)(a + 2)$$

Por lo tanto busco soluciones para $a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Queda ver cuales de estos valores de a hallados cumple la primer ecuación.

- $a = -2 \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 = 16 - 24 - 2 + 2 = -8$
- $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)
- $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)

7.6. Ejercicio 6

TODO

7.7. Ejercicio 7

7.7.A. Pregunta i

Por definición de congruencias se que $x^{31} - 2 \equiv 0(x^{31} - 2) \implies x^{31} \equiv 2(x^{31} - 2)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{353} - x - 1 &\equiv (x^{31})^11 \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2^11 \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2048x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^{31}-2}(x^{353} - x - 1) = 2048x^{12} - x - 1$

7.7.B. Pregunta ii

Se que $x^6 + 1 | x^6 + 1 \iff x^6 + 1 \equiv 0(x^6 + 1) \iff x^6 \equiv -1(x^6 + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1 &\equiv (x^6)^{166} \cdot x^4 + (x^6)^6 \cdot x^4 + (x^6)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot x^4 + (-1)^6 \cdot x^4 + (-1)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv x^4 + x^4 - x^2 + 1 \\ &\equiv 2x^4 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^6+1}(x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1) = 2x^4 - x^2 + 1$

7.7.C. Pregunta ii

Se que $x^{100} - x + 1 \equiv 0(x^{100} - x + 1) \iff x^{100} \equiv x - 1(x^{100} - x + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{200} - 3x^{101} + 2 &\equiv (x^{100})^2 - 3(x^{100})x + 2 \\ &\equiv (x - 1)^2 - 3(x - 1)x + 2 \\ &\equiv x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv -2x^2 + x + 3(x^{100} - x + 1) \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^{100}-x+1}(x^{200} - 3x^{101} + 2) = -2x^2 + x + 3$

7.8. Ejercicio 8

TODO