Práctica 3

2do cuatrimestre 2021 — Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

3. Práctica 3

3.1. Ejercicio 1

Por enunciado, $A = \{n \in V : n \geq 132\}$

Y también, $A^c = \{n \in V : n < 132\}$

Se que dado un elemento cualquiera, $x \in V \iff (x \in \mathbb{N} \wedge x \bmod 15 = 0)$

Por lo tanto, $A^c = \{n \in V : (n < 132 \wedge n \bmod 15 = 0)\}$

Así, $\#A^c = \lfloor \frac{132}{15} \rfloor = 8$

Por extensión, $A^c = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120\}$

3.2. Ejercicio 2

Defino el conjunto universal $V = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 1000\}$

Defino el conjunto $T = \{n \in \mathbb{N} : n \bmod 3 = 0\}$

Defino el conjunto $C = \{n \in \mathbb{N} : n \bmod 5 = 0\}$

Luego busco $\#(T^c \cup C^c) = \#(T \cup C)^c$

Entonces $(T \cup C) = \{n \in \mathbb{N} : n \bmod 15 = 0\}$ pues 3 y 5 son primos.

Por lo tanto $\#(T \cup C) = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$

Y así, $\#(T \cup C)^c = 1000 - 66 = 934$

3.3. Ejercicio 3

$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$

3.4. Ejercicio 4

3.4.A. Pregunta i

Datos del enunciado:

1. $\#V = 150$
2. $\#A = 83$
3. $\#B = 67$
4. $\#(A \cap B) = 45$

Luego,

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B)^c &= \#V - \#(A \cup B) \\
&= \#V - (\#A + \#B - \#(A \cap B)) \\
&= 150 - (83 + 67 - 45) \\
&= 45
\end{aligned}$$

3.4.B. Pregunta ii

TODO

3.5. Ejercicio 5

Datos del enunciado:

1. Rutas BSAS - Ros = 3
2. Rutas Ros - SF = 4
3. Rutas SF - Req = 4

Por lo tanto hay $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ formas de ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por Rosario y Santa Fe.

3.6. Ejercicio 6

3.6.A. Pregunta i

Hay $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ números.

3.6.B. Pregunta ii

Calculando por el complemento:
Hay $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ números de cuatro cifras.
En el inciso anterior se calculó la cantidad de números que no tienen cierto dígito (calculado por 5, vale para 7).
Luego habrá $9000 - 5832 = 3168$ números.

3.7. Ejercicio 7

Puede distribuirlos en 3^{17} formas.

3.8. Ejercicio 8

Defino $A = \{materias\}$, se que $\#A = 5$
Luego las posibles elecciones están dadas por $\#P(A) = 2^5 = 32$
Si tiene que cursar al menos dos materias, no puede elegir las opciones de cursar ninguna materia o una sola materia.
Así tiene $32 - 5 - 1 = 26$ formas de cursar al menos dos materias.

3.9. Ejercicio 9

Se que A es de la forma $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
R es una relación en $A \times A \iff R \subseteq A \times A$: si R es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$
Luego la cantidad de relaciones en A será: $\#P(A \times A) = 2^{n^2}$

1. Reflexivas: 2^{n^2-2}
2. Simétricas: $2^{\sum_{k=1}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
3. Simétricas: $2^{\sum_{k=1}^{n-1} k} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

3.10. Ejercicio 10

1. $\#\{f \in F/\text{f es función}\} = 12^5$
2. $\#\{f \in F/10 \notin \text{Im(f)}\} = 11^5$

3. $\#\{f \in F / 10 \in \mathrm{Im(f)}\} = 12^5 - 11^5$

4. $\#\{f \in F / f(1) \in \{2,4,6\}\} = 3 \cdot 12^4$

3.11. Ejercicio 11

1. $7! = 5040$ funciones.

2. $3! \cdot 4! = 144$ funciones.

3.12. Ejercicio 12

De cinco cifras usando los dígitos $\{1,2,3,4,5\} : 5!$

De cinco cifras usando los dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7\} : \frac{5!}{2!}$

De cinco cifras usando los dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ sin 2 en las cententas: $\frac{7!}{2!} \cdot \frac{4}{5}$

3.13. Ejercicio 13

Rdo. funciones inyectivas: Una función $f : A \to B$ es inyectiva sii $(x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (x \neq y) \implies f(x) \neq f(y)$

1. $\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$

2. Para $f(1)$ tengo 5 opciones. Al resto todas menos las que ya fueron asignadas (9,8,7,...) $\implies 5 \cdot \frac{9!}{3!}$

3.14. Ejercicio 14

Defino $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Luego $\#A = \#B = 7$

$f : A \to B$ es viyectiva $\iff \forall x \in A; \exists! y \in B : f(x) = y$
Y además me piden que $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$

Luego habrá $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$ funciones que cumplen lo pedido.

3.15. Ejercicio 15

Tengo R relación de equivalencia en $A = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$: f es inyectiva$\}$

Por definición, $fRg \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$

Necesito saber cuantas $g \in A$ se relaciones con $f(n) = n + 2$

Pero,

$$\begin{aligned} fRg \iff f(1) + f(2) &= g(1) + g(2) \\ 3 + 4 &= g(1) + g(2) \\ 7 &= g(1) + g(2) \end{aligned}$$

Entonces, busco las $g \in A : g(1) + g(2) = 7$

Hay seis funciones de $\{1,2\} \to \{2,3,4,5,6\}$ que cumplen con esto.

Completo el total de funciones asignando el resto de los elementos de forma inyectiva.

Luego habrá $6 \cdot \frac{6!}{4!} = 180$ elementos dentro de la clase de equivalencia de $f(n) = n + 2$

3.16. Ejercicio 16

Defino $A = \{1, 2, 3, ...8\}$ y $B = \{1, 2, 3, ..., 12\}$ con $\#A = 8$ y $\#B = 12$

Condiciones que me piden:

1. f inyectiva
2. $f(5) + f(5) = 6$
3. $f(1) \leq 6$

Primero busco asignaciones a $f(5)$ y $f(6)$ que cumplan lo pedido. Para esto hay cuatro opciones posibles.

Luego $f(1)$ puede tomar cualquier valor menos los dos que ya fueron asignados ya que $f(5); f(6)$ siempre toman valores ≤ 6. Luego para $f(1)$ hay 4 opciones.

Para los demás elementos de A pueden tomar alguno de los 9 elementos restantes de B.

Por lo tanto hay $4 \cdot 4 \cdot \frac{9!}{4!}$ opciones.

3.17. Ejercicio 17

1. $\binom{7}{4}$
2. $\binom{6}{3}$
3. $\binom{6}{4}$
4. $\binom{5}{3} \cdot 2$

3.18. Ejercicio 18

Por enunciado $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$ y $\#A = 20$

3.18.A. Pregunta i

Defino $B_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20 \wedge n \bmod 3 = 0\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

Luego para armar las funciones debo elegir 4 del conjunto B_1 y 6 elementos del conjunto $B - B_1$

Luego habrá $\binom{6}{4} \cdot \binom{14}{6}$ subconjuntos.

3.18.B. Pregunta ii

Hay suma impar de dos elementos si uno de ellos es par y el otro impar. Entonces, todos los elementos deben ser pares o impares.

Si son todos pares $\implies \binom{10}{5}$ subconjuntos.

Si son todos impares $\implies \binom{10}{5}$ subconjuntos.

Luego habrá $2 \cdot \binom{10}{5}$

3.19. Ejercicio 19

Cada punto de una recta se une a dos de la otra para formar un triángulo.

Es decir, para cada vértice en una recta, elijo dos en la otra recta para formar el triángulo.

Luego habrá $\binom{m}{2} \cdot n$ con $m \geq 2; n \in \mathbb{N}$

3.20. Ejercicio 20

Defino $A = \{1, 2, 3, ..., 11\}$ y $B = \{1, 2, 3, ..., 16\}$

Me piden:

1. f inyectiva
2. $n, f(n)$ pares
3. $f(1) < f(3) < f(5) < f(7)$

La segunda condición me dice que los pares solo pueden tener imagen par, luego habrá $\#fp$ funciones para los pares.

$\#fp = \frac{8!}{3!}$

Para los impares tengo que considerar la tercera condición, esta implica que no me importa el orden de los elementos de B, sino que me voy a quedar con aquel que cumple la condición.

Así habrá $\#fi$ funciones para los impares.

$\#fi = \binom{11}{4} \cdot 7 \cdot 6$

Por lo tanto, hay $\frac{8!}{3!} \cdot \binom{11}{4} \cdot 7 \cdot 6$ funciones que cumplen lo pedido.

3.21. Ejercicio 21

1. $7!$
2. $\frac{7!}{3!}$
3. $\frac{12!}{3! \cdot 2!}$

3.22. Ejercicio 22

1. $\binom{7}{3} \cdot 3! \cdot 4!$
2. $\binom{7}{4} \cdot 3!$
3. $4! \cdot 4!$

3.23. Ejercicio 23

1. Por el complemento: $\frac{10!}{3!.2!} - \frac{9!}{3!}$
2. $\binom{10}{3} \cdot 3! \cdot 7!$

3.24. Ejercicio 24

Defino $F = \{D, D, D, D, D, D, N, N, B, P, H, K, C, M\}$

Condiciones:

1. Dos frutas por día.
2. No más de una N por día.

Calculo por el complemento,

$\#\text{Todas} - \#\text{Dos naranjas por día} = 14! - 7 \cdot 12!$

3.25. Ejercicio 25

Hay 15 personas pero A Juan y Nicolás los puedo pensar como bloque (JN), luego tengo 14 elementos para ordenar.

Calculo por el complemento:

$$\begin{aligned} Rta. &= \#\text{Todas las formas donde JN va en auto} - \#\text{LMD no van en auto y JN va en auto} \\ &= 3 \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{4} - 3 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} \end{aligned}$$

3.26. Ejercicio 26

Hago la demostración por inducción.

Defino $p(n) : \binom{2n}{n} > n \cdot 2^n ; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$

Caso base n=4

$p(4) : \binom{8}{4} > 4 \cdot 2^4 \iff \frac{8!}{4! \cdot 4!} > 4 \cdot 2^4 \iff 70 > 64$

Luego p(4) es verdadero.

Paso inductivo

Dado $k \geq 4$ quiero probar que $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\binom{2k}{k} > k \cdot 2^k$

Qpq: $\binom{2(k+1)}{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+1} \iff \binom{2k+2}{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned} \binom{2k+2}{k+1} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)! \cdot (2k+2-h-1)!} \\ &= \frac{(2k+2) \cdot (2k+1) \cdot (2k)!}{(k+1) \cdot k! \cdot (k+1) \cdot k!} \\ &> \frac{(2k+2)(2k+1)(k.2^k)}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} \frac{(2k+2)(2k+1)(k.2^k)}{(k+1)^2} &\geq (k+1) \cdot 2^{k+1} \\ \frac{2(k+1)(2k+1)(k.2^k)}{(k+1)(k+1)} &\geq (k+1) \cdot 2^k \cdot 2 \\ \frac{(2k+1) \cdot k}{k+1} &\geq k+1 \\ 2k^2 + k &\geq k^2 + 2k + 1 \\ k^2 - k &\geq 1 \\ k \cdot (k-1) &\geq 1 \end{aligned}$$

Que es verdadero, $\forall k \geq 4$.

Luego $p(k) \implies p(k+1)$ como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$

3.27. Ejercicio 27

Lo pruebo por inducción.

Defino $p(n) : a_n = \binom{2n}{n} \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base n=1

$p(1) : a_1 = \binom{2.1}{1} = 2$

Por definición de la sucesión, $a_1 = 2$

Luego $p(n)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $k \geq 1$ quiero probar que $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $a_k = \binom{2k}{k}$

Qpq: $a_{k+1} = \binom{2(k+1)}{k+1} = \binom{2k+2}{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 4 \cdot a_k - 2 \cdot \frac{(2k)!}{(k+1)! \cdot k!} \\
&= 4 \cdot \binom{2k}{k} - 2 \cdot \frac{(2k)!}{(k+1)! \cdot k!} \\
&= 4 \cdot \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} - 2 \cdot \frac{(2k)!}{(k+1)! \cdot k!} \\
&= \frac{4 \cdot (k+1) \cdot (2k)! - 2 \cdot (2k)!}{(k+1)! \cdot k!}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
\frac{4 \cdot (k+1) \cdot (2k)! - 2 \cdot (2k)!}{(k+1)! \cdot k!} &= \binom{2k+2}{k+1} \\
\frac{4 \cdot (k+1) \cdot (2k)! - 2 \cdot (2k)!}{(k+1)! \cdot k!} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} \\
\frac{4 \cdot (k+1) - 2}{k!} &= \frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{(k+1)!} \\
4 \cdot (k+1) - 2 &= \frac{2(k+1)(2k+1)}{k+1} \\
4k + 4 - 2 &= 4k + 2 \\
4k + 2 &= 4k + 2
\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1)$ como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

3.28. Ejercicio 28

TODO

3.29. Ejercicio 29

Enunciado, $X = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ y R una relación en $P(X)$

Por definición, sean $A \in P(X); B \in P(X)$ conjuntos, $ARB \iff A - B = \emptyset \iff A \subseteq B$

Luego busco $A \in P(X) : (\#A \geq 2) \wedge (AR\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$

Por el complemento: $\#P(\{1, 2, ..., 9\}) - \#\{c : \#c < 2 \wedge c - \{1, 2, ..., 9\} = \emptyset\}$

Luego habrá $2^9 - \left[\binom{9}{0} + \binom{9}{1}\right] = 2^9 - 10$ subconjuntos.

3.30. Ejercicio 30

Por enunciado, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10\}$

Por definición, $ARB \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}$

Luego busco conjuntos $B \in P(X) : (\#B = 5) \wedge (BR\{1, 3, 5\})$

Pero $BR\{1, 3, 5\} \iff B \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$

Así, busco subconjuntos de X de 5 elementos que incluyan al $\{1, 3\}$ y no tengan al 2.

Entonces, hay $\binom{7}{3} = 35$ subconjuntos.

3.31. Ejercicio 31

Por enunciado, $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$ y $A = \{1\}$

Se que $A \triangle B \iff (A \cup B) - (A \cap B)$

Entonces, busco B tales que $A \triangle B$ tengan 0 o 1 o 2 elementos.

Para obtener 0 elementos $B = \{1\} \implies A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1\} - \{1\} = \emptyset$

Hay un elemento.

Para obtener 1 elemento $B = \{b_1, 1\} \implies A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{b_1, 1\} - \{1\} = \{b_1\}$

Luego hay $\binom{99}{1} + 99$ que cumplen esto.

Para obtener 2 elementos $B = \{b_1, b_2, 1\} \implies A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{b_1, b_2, 1\} - \{1\} = \{b_1, b_2\}$

Luego hay $\binom{99}{2}$ que cumplen esto.

Así, habrá $1 + \binom{99}{1} + 99 + \binom{99}{2} = 5050$

3.32. Ejercicio 32

3.32.A. Pregunta i

Tengo un conjunto A con n elementos. Busco que la relación de equivalencia de $a \in A$ tenga n elementos.

La relación de equivalencia me dice con cuantos elementos se relaciona, en este caso, el elemento a.

Luego voy a tener tantas clases de equivalencia como formas de elegir n elementos de un conjunto de $2n$ elementos.

Así, habrá $\binom{2n}{n}$ clases de equivalencia.

3.32.B. Pregunta ii

Con el mismo rezanamiento que el inciso anterior habrá, $\binom{3n}{b} \cdot \binom{2n}{n}$ clases de equivalencia.