DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 1

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Práctica 1

1.1. Ejercicio 1

(a) Verdadero

(b) Falso

(c) Verdadero

(d) Falso

(e) Falso

1.2. Ejercicio 2

(a) Falso

(b) Falso

(c) Verdadero

(d) Verdadero

(e) Verdadero

(f) Verdadero

(g) Verdadero

(h) Falso

(i) Falso

(j) Verdadero

(k) Falso

(l) Verdadero

1.3. Ejercicio 3

Rdo.: Sean A y B conjuntos. $A \subseteq B \iff \forall x \in A \to x \in B$

(a) $A \subseteq B$

(b) $A \not\subseteq B$ pues $3 \notin B$

(c) $A \not\subseteq B$ pues $2.25 \notin B$

(d) $A \subseteq B$

1.4. Ejercicio 4

(a) $A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$

(b) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$

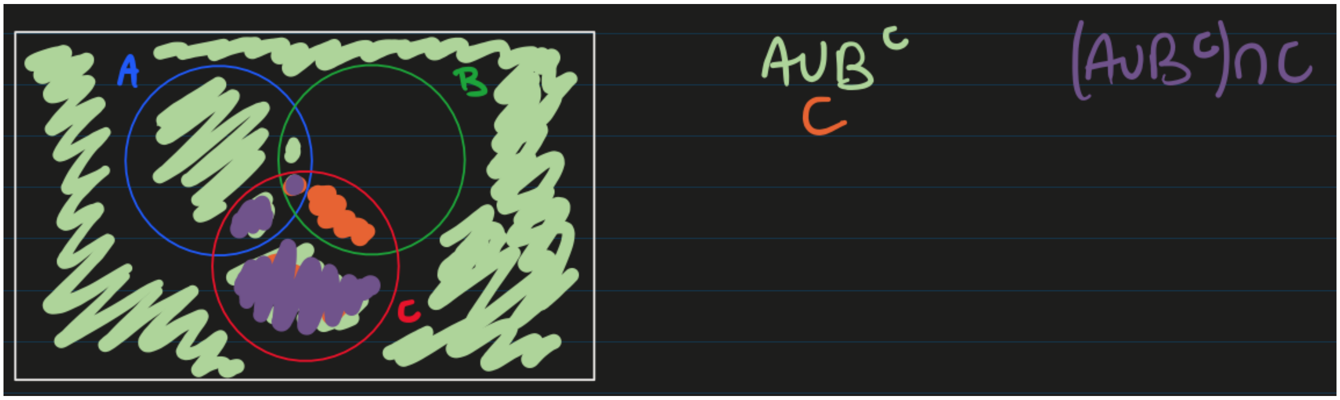
(c) $A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$

1.5. Ejercicio 5

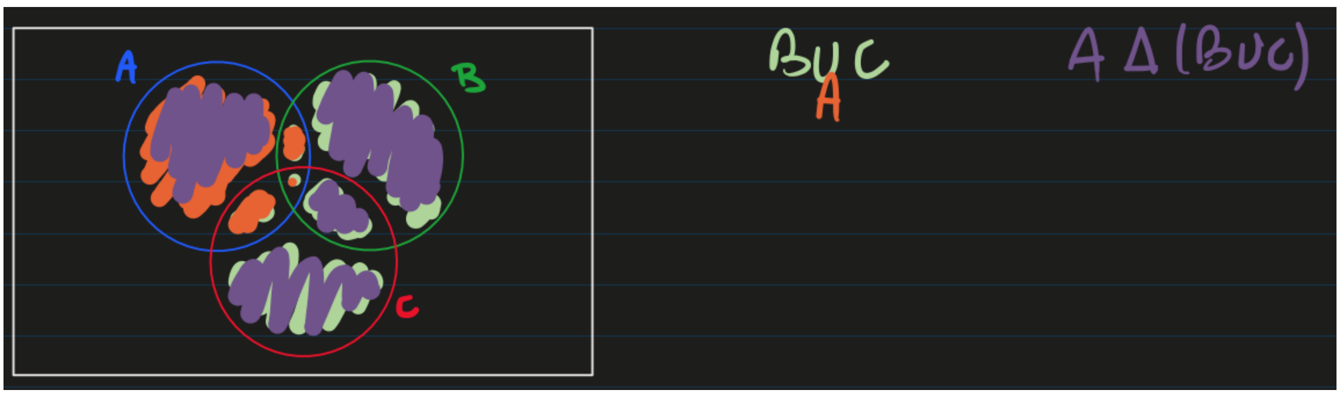
Rdo. DeMorgan: Sean A y B conjuntos, $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$ y $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$

1. $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$
2. $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

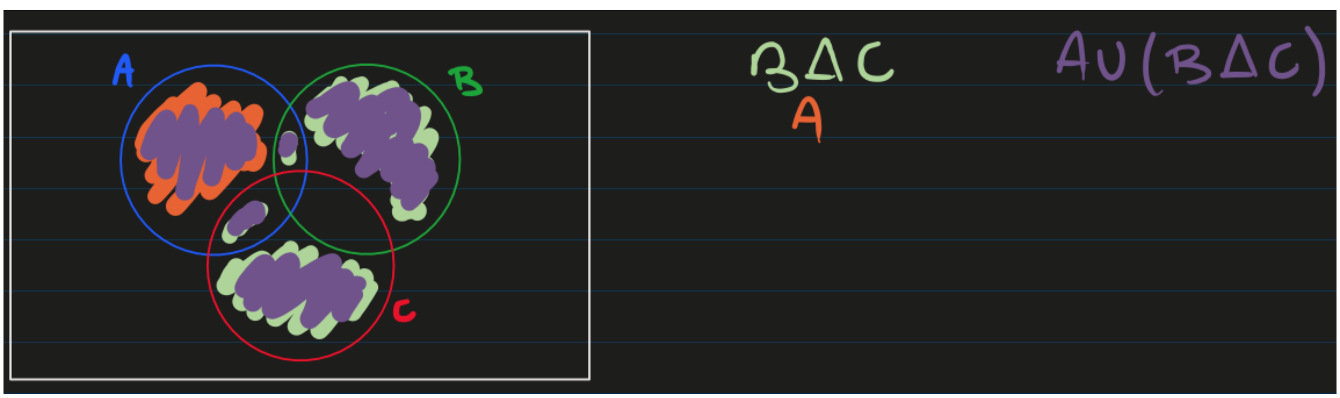
1.6. Ejercicio 6



(a)



(b)



(c)

1.7. Ejercicio 7

(a) $(A \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$

(b) $((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)) \cap B^c$

(c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cap (A \cap B \cap C)^c$

1.8. Ejercicio 8

Rdo. conjunto de partes: Sea A un conjunto, el conjunto de partes de A, $P(A)$ es aquel formado por todos los subonjuntos de A.

(a) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

(b) $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

(c) $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{3\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, 3\}, \{\{1, 2\}, 3\}, \{1, \{1, 2\}, 3\}\}$

1.9. Ejercicio 9

Quiero probar un ($\iff$) por lo que debo verificar la doble inclusión.

(a) $A \subseteq B \to P(A) \subseteq P(B)$ Sea x tal que $x \in P(A) \to (\forall y \in x) : y \in A$.
Pero $A \subseteq B \to y \in B$. Por lo tanto $(\forall x \in P(A)) : x \in P(B) \to P(A) \subseteq P(B)$

(b) $P(A) \subseteq P(B) \to A \subseteq B$ Por definición del conjunto de partes, $A \in P(A)$ por lo tanto se que $A \in P(B)$
Además $B \in P(B)$ y es el elemento con más elementos de $P(B)$, así $A \subseteq B$ como se quería probar.

1.10. Ejercicio 10

1.10.A. Inciso a

Calculadora de tablas de verdad. Link

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V

Los 4 tienen los mismos valores de verdad, son equivalentes

1.10.B. Inciso b

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Inversas

1.11. Ejercicio 11

(a) $a = 1$ pues $1 \in \mathbb{N}$ pero $\frac{1-1}{1} = 0 \notin \mathbb{N}$.

(b) $x = y = 4$ pues $\sqrt{4+4} = \sqrt{8} \neq 4 = \sqrt{4} + \sqrt{4}$

(c) $x = -3$ pues $(-3)^2 = 9 > 4$ sin embargo $(-3) \not> 2$

1.12. Ejercicio 12

(a) El $\vee$ lógico es falso unicamente cuando ambas preposiciones son falsas. Así, la proposición será falsa sii $(x < 5) \wedge (x > 8)$ Pero es fácil ver que no existe ningún $x \in \mathbb{N}$ que lo cumpla.

(b) Es verdadera pues $n = 6$ hace verdadera la proposición $(n \geq 5) \wedge (n \leq 8)$

(c) Es verdadera pues el conjunto de los $\mathbb{N}$ es infinito y por lo tanto existe $m = n + 1$ que hace verdadera la proposición.

(d) Es falsa pues no existe un natural n tal que $1 > n$.

(e) Es verdadera pues $f(x) = x^2$ es una función estrictamente creciente en el intervalo $[0, \infty]$ y dado que $f(3) = 9 > 4$ podemos afirmar que la preposición es verdadera.

(f) Es verdadera pues sea $c \in \mathbb{C} \to c = a + b.i$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $(\forall r \in \mathbb{R}) : (r + 0.i) \in \mathbb{C}$

1.13. Ejercicio 13

(a)

A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) - C$	$A - C$	$B - C$	$(A - C) \Delta (B - C)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Son iguales, la premisa es Verdadera

(b) Falsa. Contraejemplo. $A = \{1\}$ $B = \{2\}$ $C = \{1\}$

(c)

A	B	C	$C \subseteq A$	$B \cap C$	$A \Delta B$	$(A \Delta B)^c$	$(B \cap C) \subseteq (A \Delta B)^c$	$C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \Delta B)^c$
V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V	V

Es Verdadera en todos los A, B, C posibles

A	B	AΔB	A = B
V	V	F	V
~~V~~	~~F~~	~~V~~	
~~F~~	~~V~~	~~V~~	
F	F	F	V

Es Verdadera

(d)

1.14. Ejercicio 14

Se prueban con tablas de verdad. Van los primeros cuatro.

A	B	C	$B\Delta C$	$A\cap(B\Delta C)$	$A\cap B$	$A\cap C$	$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Son iguales, la afirmación es Verdadera

(a)

A	B	C	$B-C$	$A-(B-C)$	$A-B$	$A\cap C$	$(A-B)\cup(A\cap C)$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Son iguales, la afirmación es verdadera

(b)

(c)

A	B	C	$A \Delta B$	$A \Delta C$	$B \Delta C$	$(A \Delta C) \cup (B \Delta C)$	$A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Es V en todos los casos demostrado

(d)

A	B	C	$A \cap C$	$(A \cap C) - B$	$A - B$	$(A - B) \cap C$
V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

(e) TODO

(f) TODO

(g) TODO

1.15. Ejercicio 15

1. $A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
2. $A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}$
3. $(A \cap B) \times (A \cup B) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

1.16. Ejercicio 16

Pruebo la doble implicación.

(a) TODO

(b) TODO

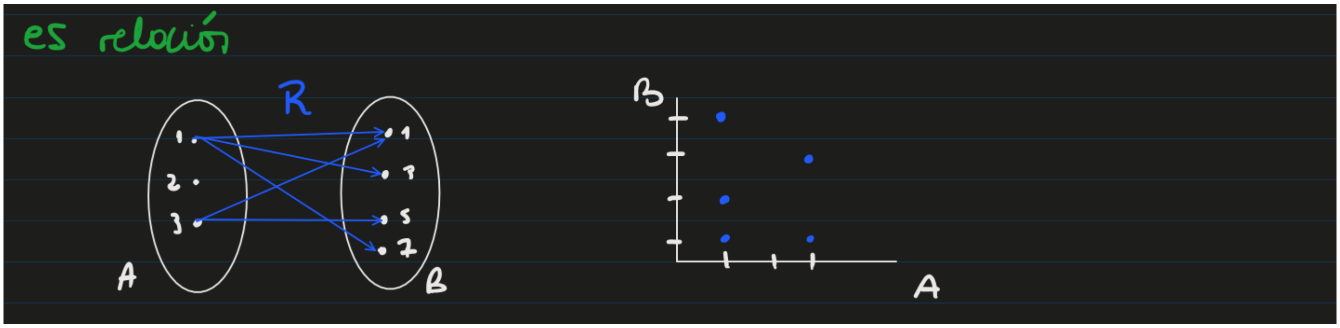
(c) *a*) $(A \cup B) \times C \to (A \times C) \cup (B \times C)$
$(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff (x \in (A \cup B) \wedge y \in C) \iff ((x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C)$
$\iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

b) $(A \times C) \cup (B \times C) \to (A \cup B) \times C$
$(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \iff ((x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C) \to (x \in (A \cup B) \wedge y \in C)$
$\to (x,y) \in (A \cup B) \times C$

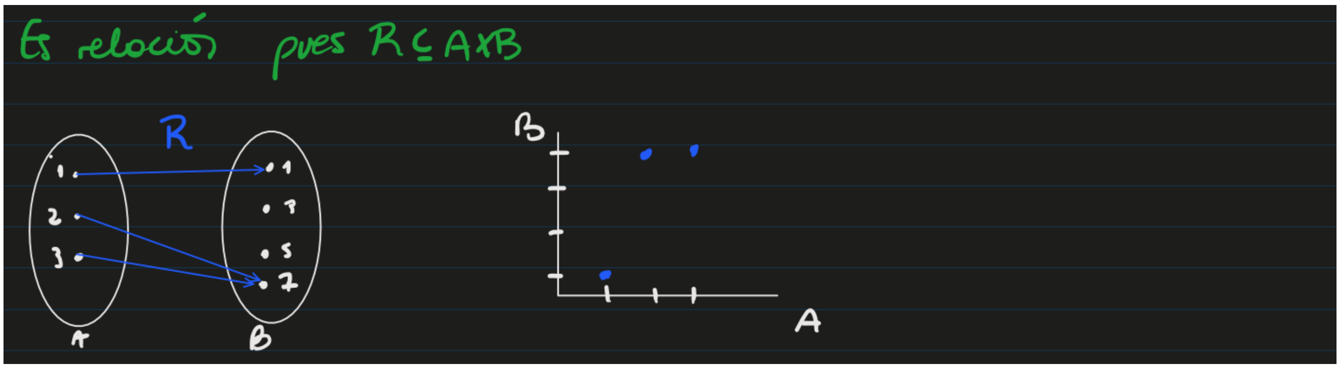
c) TODO

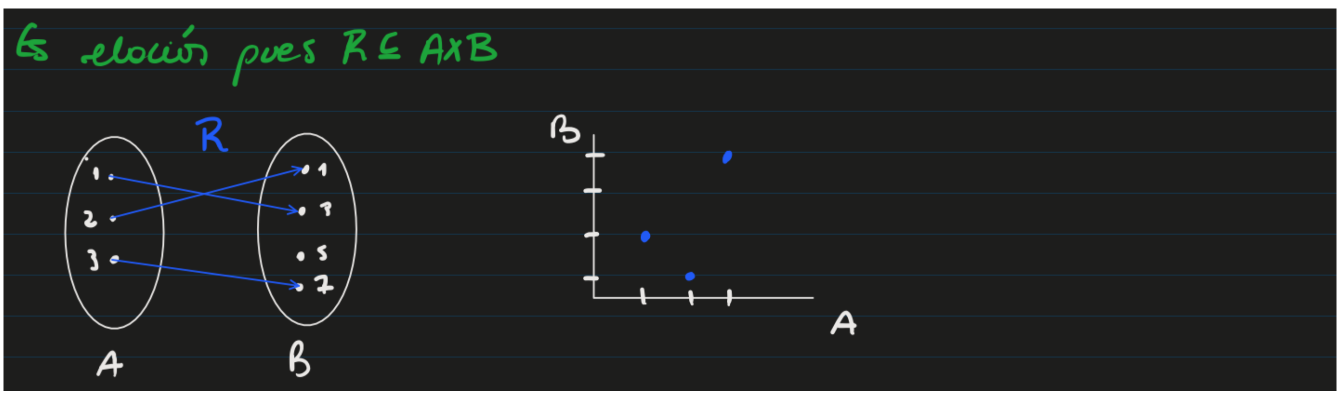
1.17. Ejercicio 17

Rdo. relación: Sean A y B conjuntos, R es relación de A en B si $R \subseteq A \times B$ es decir, si R es un subonjunto del producto cartesiano $A \times B$
$R \subseteq A \times B \iff \forall (X, y) \in R : (x \in A \wedge y \in B)$

(a) 

(b) No es relación $(3, 2) \notin A \times B$ pues $2 \notin B$

(c) 

(d) 

1.18. Ejercicio 18

(a) $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,3), (2,5), (2,7), (3,3), (3,5), (3,7)\}$

(b) $R = \{(2,1), (3,1)\}$

(c) $R = \{(2,1), (2,3), (2,5), (2,7)\}$

(d) $R = \{(1,7), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7)\}$

1.19. Ejercicio 19

(a) NO es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva.
$R = \{(a,b), (b,a), (c,c), (c,d), (c,h), (e,c), (f,f), (h,g)\}$

(b) ES transitiva. NO es reflexiva, simétrica, antisimétrica.
$R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(c,c),(c,e),(c,h),(c,g),(f,f),(h,g)\}$

(c) ES reflexiva. NO es simétrica, antisimétrica, transitiva.
$R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(c,e),(c,h),(d,c),(d,d),(e,e),(f,f),(g,g),(h,h),(h,g)\}$

(d) Es reflexiva, simétrica y transitiva. NO es antisimétrica.
$R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(e,h),(e,g),(f,f),(g,e),(g,g),(g,h),(h,h),(h,e),(h,g)\}$

1.20. Ejercicio 20

1.21. Ejercicio 21

(a) 4 pares.

(b) 1 pares.

(c) 1 pares.

(d) 5 pares.

(e) 4 pares.

(f) 5 pares.

1.22. Ejercicio 22

(a) Es relación de orden.

(b) Es relación de equivalencia.

(c) Es relación de orden.

(d) Es reflexiva y transitiva.

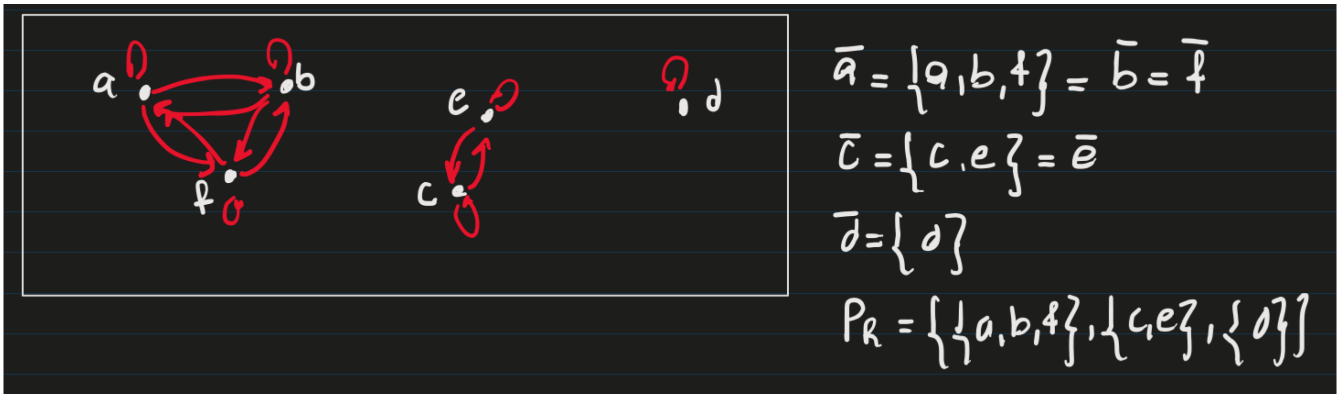
1.23. Ejercicio 23

(a) Una relación es simétrica sii $(a,b) \to (b,a) \in \mathbb{R}$
Una relación es antisimétrica sii $((a,b) \in \mathbb{R} \wedge (b,a) \in \mathbb{R}) \to a = b$
Luego, las relaciones en A simétricas y antisimétricas son de la forma:
$R = \{(a,b) \in A^2 / a = b\}$

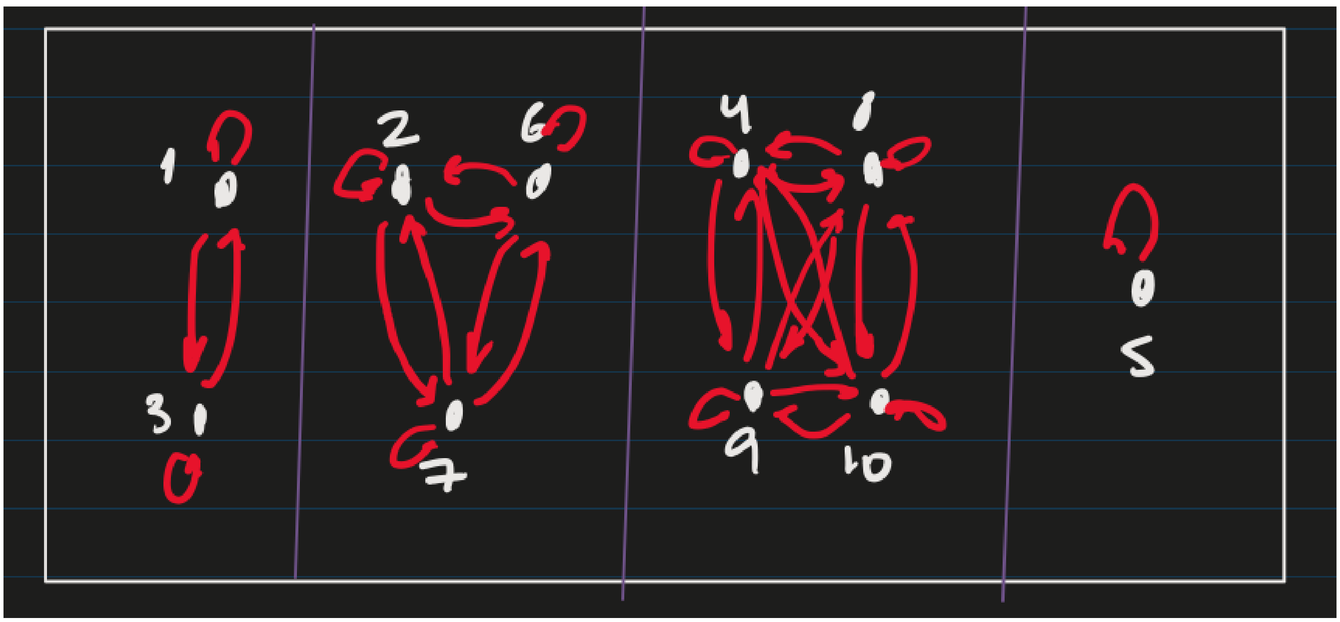
(b) R también es de orden y equivalencia, pues es reflexiva y transitiva.

La relación $R = \emptyset$ no es simétrica ni antisimétrica.

1.24. Ejercicio 24



1.25. Ejercicio 25



Tiene cuatro clases de equivalencia. Representantes: $\tilde{1} = 1; \tilde{2} = 2; \tilde{4} = 4; \tilde{5} = 5$

1.26. Ejercicio 26

Demostración de relación de equivalencia. Vamos a probar que es reflexiva y simétrica y transitiva, cada uno por separado.

Reflexividad

R es reflexiva sii ARA
Por definición, $ARA \iff ((A \triangle A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset)$
Por definición de la diferencia simétrica, $(A \triangle A) = \emptyset$
Por lo tanto, $\emptyset \cap \{1,2,3\} = \emptyset$ como se quería probar.

Así, R es **reflexiva**.

Simetría

R es simétrica $\iff ARA \to BRA$.
Por definición, $ARB \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
Por definición de la diferencia simétrica, $(A \triangle B) = (B \triangle A)$
Por lo tanto, $(A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = (B \triangle A) \cap \{1,2,3\}$ Y por definición se que $(B \triangle A) \cap \{1,2,3\} \iff BRA$ como se quería probar.

Así, R es **simétrica**.

Transitividad

R es transitiva $\iff (ARB \wedge BRC \to ARC)$.
Por definición,
$ARB \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$BRC \iff (B \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$ARC \iff (A \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Por ejercicio 14.3, $(A \triangle B) \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

Por lo tanto, $ARC \iff ((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Haciendo distributiva, $ARC \iff ((A \triangle B) \cap \{1,2,3\}) \cup ((B \triangle C) \cap \{1,2,3\}) = \emptyset$

Pero se que,
$(A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$ y
$(B \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Entonces, $ARC \iff (\emptyset \cup \emptyset = \emptyset)$ que es verdadero.

Así, R es **transitiva**.

Dado que R es refelexiva, simétrica y transitiva, queda demostrado que R es una **relación de equivalencia**.

Antisimétria

R es antisimétrica $\iff (ARB \wedge BRA \to B = A)$.

Contraejemplo: $A = \{4\}$; $B = \emptyset$

$ARB \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$ARB \iff \{4\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$ es verdadero.

$BRA \iff (B \triangle A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$BRA \iff \{4\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$ es verdadero.

Por lo tanto ARB y BRA pero $A \neq B$

Así, R NO es **antisimétrica**.

(2) Busco la clase de equivalencia del $\{1,2,3\}$

Se que la clase de equivalencia está formada por todos los $B \in P$ tales que:
$\{1,2,3\}RB \iff (\{1,2,3\} \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Por definición de la diferencia simétrica, los B que cumple esto son:

$\overline{\{1,2,3\}} = \{B \in P / \{1,2,3\} \subset B\}$

1.27. Ejercicio 27

(1) De nuevo vamos a probar por separado la refexividad, simetría y transitividad.

Reflexividad

R es reflexiva $\iff (\forall x \in A) : xRx$

Por definición, $xRx \iff x^2 - x^2 = 93x - 93y \iff 0 = 0$

Así, R es **reflexiva**.

Simetría

R es simétrica $\iff (\forall x, y \in A) : xRy \to yRx$

Por definición,

$$\begin{aligned} xRy &\iff x^2 - y^2 = 93x - 93y \\ &\iff -x^2 + y^2 = -93x + 93y \\ &\iff y^2 - x^2 = 93y - 93x \\ &\iff yRx \end{aligned}$$

Así, R es **simétrica**.

Transitividad

R es transitiva $\iff (\forall x, y, z \in A) : (xRy \wedge yRz) \to xRz$

Por definición,

$$xRy \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$$
$$yRz \iff y^2 - z^2 = 93y - 93z$$

Sumando ambas,

$$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 93x - 93y + 93y - 93z$$
$$\iff x^2 - z^2 = 93x - 93z \iff xRz$$

Así, R es **transitiva**.

Por lo tanto, R es reflexiva, simétrica y transitiva; luego R es una **relación de equivalencia**.

(2) $\overline{x} = \{x, 93 - x\}$

1.28. Ejercicio 28

Habrá una clase de equivalencia para cada cardinal posible en los subconjuntos de $P(A)$ es decir,

(a) $\tilde{1} = \{\text{subconjuntos con } \# = 1\}$

(b) $\tilde{2} = \{\text{subconjuntos con } \# = 2\}$

(c) $\tilde{3} = \{\text{subconjuntos con } \# = 3\}$

(d) etc

Lo que define 10 clases de equivalencia, más la clase $\tilde{0} = \emptyset$ determinan 11 clases de equivalencia.

1.29. Ejercicio 29

Rdo. función: Una relación $R \subseteq A \times B$ es una función de A en B si: $\forall x \in A, \exists! y \in B / xRy$

(a) No. El 3 tiene dos asignaciones en R: $(3, a) y (3, d)$

(b) No. El 5 no tiene asignación en R.

(c) Sí

(d) Sí

(e) No. $\nexists b \in \mathbb{N} : 2b - 3 = \pi$

(f) No. Tomando $a = 1$ se obtiene más de un valor en $R : (1, 4), (1, 9)$

1.30. Ejercicio 30

1.30.A. Inciso 1

Inyectiva

Por definición, f es inyectiva $\iff \forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \to x = y$

Contraejemplo: $x = 1; y = -1$

$f(x) = 12 - 5 = 7$
$f(y) = 12 - 5 = 7$

Luego $f(x) = f(y)$ pero $x \neq y$

Así, f NO es **inyectiva**.

Sobreyectiva

Por definición, f es sobreyectiva $\iff Im(f) = \mathbb{R}$

Pero por ej. $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -6$ pues $f(x) = 12x^2 - 5 \geq -5, \forall x \in \mathbb{R}$

Así, f NO es **sobreyectiva**.

$Im(f) = \mathbb{R}_{\geq -5}$

1.30.B. Inciso 2

Inyectiva

Por definición, f es inyectiva $\iff \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : f(a, b) = f(c, d) \to (a, b) = (c, d)$

Contraejemplo: $(1, 3), (2, 2)$

$f(1, 3) = 1 + 3 = 4$
$f(2, 2) = 2 + 2 = 4$

Luego $f(a, b) = f(c, d)$ pero $(a, b) \neq (c, d)$

Así, f NO es **inyectiva**.

Sobreyectiva

Por definición, f es sobreyectiva $\iff Im(f) = \mathbb{R}$

Sea $n \in \mathbb{R}$ quiero ver que $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = n$

Luego $n = x + y \iff y = n - x \to y \in \mathbb{R}$

Así, f es **sobreyectiva**.

1.30.C. Inciso 3