DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 5

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

5. Práctica 5

5.1. Ejercicio 1

5.1.A. Pregunta i

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $7a + 11b = 10$

Verifico que existe solución

Dado que $(7 : 11) = 1 \implies 1|10 \implies$ existe solución.

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{aligned} 7.s + 11.t &= 1 \\ 7.(-3) + 11.2 &= 1 \\ 7.(-3).10 + 11.2.10 &= 1.10 \\ 7.(-30) + 11.20 &= 10 \\ -210 + 220 &= 10 \end{aligned}$$

Luego $(-30, 20)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff -11|7.a \iff -11|a \iff a = -11.k$

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff 7(-11.k) = 11.b \iff b = 7.k$

Luego $(-11.k, 7.k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-11.k, 7.k) + (-30, 20) = (-11.k - 30, 7.k + 20); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a, b) = (-11.k - 30, 7.k + 20)$ luego,

$$\begin{aligned} 7a + 11b = 10 &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7. - 11.k - 210 + 11.7.k + 220 = 10 \\ &\iff -210 + 220 = 10 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.B. Pregunta ii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $20a + 16b = 30$

Verifico que existe solución

$(20 : 16) = 4 \land 4 \not| 30$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.1.C. Pregunta iii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $39a - 24b = 6$

Verifico que existe solución

$(39:24)=3 \wedge 3|6$ luego existe solución en F^2

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$20a+16b=30 \leftrightsquigarrow 13a-8b=2$

Busco una solución particular

$13.(2)-8.(3)=26-24=2$

Luego $(2,3)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a-8b=0 \iff 13a=8b \implies 13|8b \iff 13|b \iff b=13k$

$13a-8b=0 \iff 13a=8b \iff 13a=8(13k) \iff a=8k$

Luego $(8k,13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S=(8k,13k)+(2,3)=(8k+2,13k+3); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a,b)=(8k+2,13k+3)$ luego,

$$\begin{aligned} 39a-24b=6 &\iff 39(8k+2)-24(13k+3)=6 \\ &\iff 39.8k+78-24.13k-72=6 \\ &\iff 78-72=6 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.D. Pregunta iv

Busco los $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $1555a-300b=11$

Verifico que existe solución

$(1555:300)=5 \wedge 4 \not| 5$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.2. Ejercicio 2

Primero busco soluciones $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ para la ecuación $33a+9b=120$

Verifico que existe solución

$(33:9)=3 \wedge 3|120 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$33a+9b=120 \leftrightsquigarrow 11a+3b=40$

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{gathered} 11.s+3.t=1 \\ 11.(2)+3.(-7)=1 \\ 11.2.(40)+3.(-7).(40)=1.(40) \\ 11.80+3.(-280)=40 \end{gathered}$$

Luego $(80, -280)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11| -3b \implies 11|b \implies b = 11k$

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11a = -3(11k) \implies a = -3k$

Luego $(-3k, 11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-3k, 11k) + (80, -280) = (-3k + 80, 11k - 280); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego tengo definidas las restricciones para a y b de tal forma que cumplan con la diofántica, ahora uso los datos de divisibilidad.

$a = -3k + 80 \implies -3k + 80 \equiv 0(4) \implies k \equiv 0(4)$

$b = 11k - 280 \implies 11k - 280 \equiv 0(8) \implies k \equiv 0(8)$

Pero $k \equiv 0(8) \iff k \equiv 0(4)$

Luego $k = 8n \implies a = 3(8n) + 80 \wedge b = 11(8n) - 280; n \in \mathbb{Z}$

Rta.: $(a, b) = (24n + 80, 88n - 280); \forall n \in \mathbb{Z}$

5.3. Ejercicio 3

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen $39a + 48b = 135$

Verifico que existe solución

$(39 : 135) = 3 \wedge 3|135 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$39a + 48b = 135 \leftrightsquigarrow 13a + 16b = 45$

Busco una solución particular

$(225, -180)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13| -16b \implies 13|b \implies b = 13k$

$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13a = -16(13k) \implies a = -16k$

Luego $(-16k, 13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-16k, 13k) + (225, -180) = (-16k + 225, 13k - 180); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego,
$a \geq 0 \implies -16k + 225 \geq 0 \implies 16k \leq 225 \implies k \leq \frac{225}{16} \implies k \leq 14$
$b \geq 0 \implies 13k - 180 \geq 0 \implies 13k \geq 180 \implies k \geq \frac{180}{13} \implies k \geq 14$

Luego $14 \leq k \leq 14 \implies k = 14 \implies$ se compran 1 unidad de a y 2 de b, gastando 135 pesos.

5.4. Ejercicio 4

1. $17x \equiv 3(11) \iff 6x \equiv 3(11) \iff 2.6 \equiv 2.3(11) \iff x \equiv 6(11)$
2. $56x \equiv 28(35) \iff 21x \equiv 28(35) \iff 3x \equiv 4(5) \iff 6x \equiv 8(5) \iff x \equiv 3(5)$
3. $56x \equiv 2(884)$ No tiene solución pues $(56 : 884) = 4 \not| 2$
4. $78x \equiv 30(12126) \iff 13x \equiv 5(2021) \iff 311.13x \equiv 311.5(2021) \iff x \equiv 1551(2021)$

5.5. Ejercicio 5

Primero resuelvo la diofántica: busco $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 28a + 10b = 26$

Verifico que existe solución

$(28 : 10) = 2 \wedge 2|26 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$28a + 10b = 26 \rightsquigarrow 14a + 5b = 13$

Busco una solución particular

$(-13, 39)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14| - 5b \implies 14|b \implies b = 14k$

$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14a = -5(14k) \implies a = -5k$

Luego $(-5k, 14k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-5k, 14k) + (-13, 39) = (-5k - 13, 14k + 39); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego $a = -5 - 13 \wedge b = 14k + 39$. Usando el dato de la congruencia,

$$\begin{aligned} b \equiv 2a(5) &\iff 14k + 39 \equiv 2(-5k - 13)(5) \\ &\iff 4k + 4 \equiv 4(5) \\ &\iff 4(k + 1) \equiv 4(5) \\ &\iff k + 1 \equiv 1(5) \\ &\iff k \equiv 0(5) \end{aligned}$$

Luego se que $k = 5n; n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, las soluciones serán $(a, b) = (-25n - 13, 70n + 39); n \in \mathbb{Z}$

5.6. Ejercicio 6

$$\begin{aligned} 7a \equiv 5(18) &\iff (-5).7.a \equiv (-5).5(18) \\ &\iff -35a \equiv -25(18) \\ &\iff a \equiv 11(18) \end{aligned}$$

Luego el resto de dividir a a por 18 es 11.

5.7. Ejercicio 7

Primero busco los $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 110x + 250y = 100$

Verifico que existe solución

$(110 : 250) = 10 \wedge 10|100 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$110x + 250y = 100 \rightsquigarrow 11x + 25y = 10$

Busco una solución particular

$(-90,40)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11x+25y=0 \iff 11x=-25y \implies 11|-25y \implies 11|y \implies y=11k$

$11x+25y=0 \iff 11x=-25y \implies 11x=-25(11k) \implies x=-25k$

Luego $(-25k,11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S=(-25k,11k)+(-90,40)=(-25k-90,11k+40);\forall k \in \mathbb{Z}$

Luego $x=-25k-90 \wedge y=11k+40$,

$$\begin{aligned} 37^2|(x-y)^{4321} &\iff 37^2|(-25k-90-11k-40)^{4321} \\ &\iff 37^2|(-36k-130)^{4321} \end{aligned}$$

Pero por propiedades de la divisibilidad,

$$\begin{aligned} 37^2|(-36k-130)^{4321} &\iff 37|(-36k-130) \\ &\iff -36k \equiv 130(37) \\ &\iff k \equiv 4(37) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x,y)=(-25n-90,11n+40)$ para todo $n \equiv 4(37)$

5.8. Ejercicio 8

Sea $d=(2a-3:4a^2+10a-10)$

Busco llegar a una expresión del tipo $d|n$ con $n \in \mathbb{Z}$

Luego,

$$\begin{aligned} d|2a-3 \wedge d|4a^2+10a-10 &\iff d|2a(2a-3)-4a^2-10a+10 \\ &\iff d|4a^2-6a-4a^2-10a+10 \\ &\iff d|-16a+10 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iff d|-16a+10 \wedge d|2a-3 &\iff d|-16a+10+8(2a-3) \\ &\iff d|-16a+10+10a-24 \\ &\iff d|-14 \\ &\iff d \in Div_+(-14)=\{1,2,7,14\} \end{aligned}$$

- $d=2 \implies 2|2a-3 \implies 2a-3 \equiv 0(2) \implies 0 \equiv 3(2)$ ABS
- $d=7 \implies 7|2a-3 \implies 2a-3 \equiv 0(7) \implies 2a \equiv 3(7) \implies a \equiv 5(7)$

Luego con $a \equiv 5(7)$ se tiene,

$$\begin{aligned} 4a^2+10a-10 &\equiv 4.25+10.5-10(7) \\ &\equiv 2+1+4(7) \\ &\equiv 7(7) \\ &\equiv 0(7) \end{aligned}$$

Así, para $a \equiv 5(7)$ el MCD es igual a 7. No pruebo con 14 ya que $14 = 2.7$ y si $2 \not| 2a - 3$ tampoco lo hará 14.

Rta.: Con $a \equiv 5(7)$ el MCD $\neq 1$

5.9. Ejercicio 9

Sea $d = (5a + 8 : 7a + 3)$

Busco una expresión del tipo $d|n$ con $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} d|5a+8 \wedge d|7a+3 &\iff d|7(5a+8) - 5(7a+3) \\ &\iff d|35a + 56 - 35a - 15 \\ &\iff d|41 \end{aligned}$$

Luego $d \in Div_+(41) \iff d \in \{1, 41\}$

Con $d = 41$,

$$\begin{aligned} d = 41 &\implies 41|5a+8 \\ &\iff 5a + 8 \equiv 0(41) \\ &\iff 5a \equiv 33(41) \\ &\iff 8.5a \equiv 8.33(41) \\ &\iff -a \equiv 18(41) \\ &\iff a \equiv 23(41) \end{aligned}$$

Con $a \equiv 23(41)$
$7a + 3 \equiv 7.23 + 3 \equiv 0(41)$

Rta.: $\begin{cases} (5a + 8 : 7a + 3) = 41 & a \equiv 23(41) \\ (5a + 8 : 7a + 3) = 1 & a \not\equiv 23(41) \end{cases}$

5.10. Ejercicio 10

5.10.A. Pregunta i

$\begin{cases} a \equiv 3(10) \\ a \equiv 2(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$

El TCR me asegura que existe una solución $x \equiv n(630)$ con $0 \leq n \leq 630$ pues 10,7,9 son primos dos a dos.

Quiebro el sistema de ecuaciones en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 3(10) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(10) \\ a \equiv 2(7) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(10) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 5(9) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema por separado.

S1, $\begin{cases} 0 \equiv 3(10) \\ 0 \equiv 0(63) \end{cases} \implies a = 63k \implies 63k \equiv 3(10) \implies 3k \equiv 3(10) \implies k \equiv 1(10)$

Luego $a = 63.k = 63.1 = 63$

S2, $\begin{cases} a \equiv 2(7) \\ a \equiv 0(90) \end{cases} \implies a = 90k \implies 90k \equiv 2(7) \implies 6k \equiv 2(7) \implies k \equiv 5(7)$

Luego $a = 90k = 90.5 = 450$

S3, $\begin{cases} a \equiv 5(9) \\ a \equiv 0(70) \end{cases} \implies a = 70k \implies 70k \equiv 5(9) \implies 7k \equiv 5(9) \implies k \equiv 2(9)$

Luego $a = 70.k = 70.2 = 140$

Por lo tanto se que $x \equiv 63 + 450 + 140 = 653(630)$ es solución al sistema.

Rta.: $x \equiv 653 \equiv 23(630)$ es solución al sistema.

5.10.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} a \equiv 1(6) \\ a \equiv 2(20) \\ a \equiv 3(9) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 1(2) \\ a \equiv 2(4) \implies a \equiv 0(2) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 3(9) \implies a \equiv 0(3) \end{cases} \quad \text{Luego el sistema es imcompatible.}$$

5.10.C. Pregunta iii

$$\begin{cases} a \equiv 1(12) \\ a \equiv 7(10) \\ a \equiv 4(9) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 1(4) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 7(5) \\ a \equiv 7(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 4(9) \implies a \equiv 1(3) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 4(9) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 2(5) \\ a \equiv 0(9) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 4(9) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema,

S1, $\begin{cases} a \equiv 1(4) \\ a \equiv 0(45) \end{cases} \implies a = 45k \implies 45k \equiv 1(4) \implies k \equiv 1(4)$

Luego $x_1 = 45$

S2, $\begin{cases} a \equiv 2(5) \\ a \equiv 0(36) \end{cases} \implies a = 36k \implies 36k \equiv 2(5) \implies k \equiv 2(5)$

Luego $x_2 = 36.2 = 72$

S3, $\begin{cases} a \equiv 4(9) \\ a \equiv 0(20) \end{cases} \implies a = 20k \implies 20k \equiv 4(9) \implies k \equiv 2(9)$

Luego $x_3 = 20.2 = 40$

Entonces sea $x = x_1 + x_2 + x_3 = 45 + 72 + 40 = 157$

El TCR me asegura que hay una único solución del sistema MOD 180

Rta.: $x \equiv 157(180)$ es solución al sistema.

5.11. Ejercicio 11

5.11.A. Pregunta i

$$\begin{cases} 3a \equiv 4(5) \\ 5a \equiv 4(6) \\ 6a \equiv 2(7) \end{cases} \iff \begin{cases} 3.3a \equiv 3.4(5) \\ 5.5a \equiv 5.4(6) \\ 6.6a \equiv 6.2(7) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 2(6) \\ a \equiv 5(7) \end{cases}$$

Quiebro el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(6) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 2(6) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(6) \\ a \equiv 5(7) \end{cases}$

Busco soluciones de cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(42) \end{cases} \implies a = 42k \implies 42k \equiv 3(5) \implies 2k \equiv 3(5) \implies k \equiv 4(5)$

Luego $x_1 = 42.4 = 168$

S2: $\begin{cases} a \equiv 2(6) \\ a \equiv 0(35) \end{cases} \implies a = 35k \implies 35k \equiv 2(6) \implies -k \equiv 2(6) \implies k \equiv 4(6)$

Luego $x_2 = 35.4 = 140$

S3: $\begin{cases} a \equiv 5(7) \\ a \equiv 0(30) \end{cases} \implies a = 30k \implies 30k \equiv 5(7) \implies 2k \equiv 5(7) \implies k \equiv 6(7)$

Luego $x_3 = 30.6 = 180$

Así, defino $x = x_1 + x_2 + x_3 = 168 + 140 + 180 = 488$

Rta.: $a \equiv 488 \equiv 68(210)$ es solución al sistema.

5.11.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} 3a \equiv 1(10) \\ 5a \equiv 3(6) \\ 9a \equiv 1(14) \end{cases} \iff \begin{cases} -a \equiv 3(10) \implies a \equiv 7(10) \\ a \equiv 3(6) \\ -a \equiv 3(14) \implies a \equiv 11(14) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(10) \\ a \equiv 3(6) \\ a \equiv 11(14) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 7(2) \\ a \equiv 3(3) \\ a \equiv 3(2) \\ a \equiv 11(7) \\ a \equiv 11(2) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 11(14) \end{cases}$$

Quiebro el sostema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(14) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(14) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(3) \\ a \equiv 11(14) \end{cases}$

Busco soluciones de cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 7(5) \\ a \equiv 0(42) \end{cases} \implies a = 42k \implies 42k \equiv 7(5) \implies 2k \equiv 2(5) \implies k \equiv 1(5)$

Luego $x_1 = 42k = 42.1 = 42$

S2: $\begin{cases} a \equiv 0(210) \end{cases}$

Luego $x_2 = 0$

S3: $\begin{cases} a \equiv 11(14) \\ a \equiv 0(15) \end{cases} \implies a = 15k \implies 15k \equiv 11(14) \implies k \equiv 11(14)$

Luego $x_3 = 15k = 15.11 = 165$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 42 + 0 + 165 = 207$

Rta.: $a \equiv 207(210)$

5.11.C. Pregunta iii

$$\begin{cases} 15a \equiv 10(35) \\ 21a \equiv 15(8) \\ 18a \equiv 24(30) \end{cases} \iff \begin{cases} 3a \equiv 2(7) \\ 21a \equiv 15(8) \\ 3a \equiv 4(5) \end{cases} \iff \begin{cases} -a \equiv 4(7) \implies a \equiv 3(7) \\ a \equiv 3(8) \\ -a \equiv 12(5) \implies a \equiv 3(5) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 3(7) \\ a \equiv 3(8) \\ a \equiv 3(5) \end{cases}$$

Rta.: $a \equiv 3(280)$

5.12. Ejercicio 12

5.12.A. Pregunta i

$$\begin{cases} a \equiv 5(6) \\ a \equiv 3(10) \\ a \equiv 5(8) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 5(3) \implies a \equiv 2(3) \\ a \equiv 5(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 3(2) \implies a \equiv 1(2) \\ a \equiv 5(8) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 5(8) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 0(8) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(3) \\ a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(8) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(3) \\ a \equiv 0(5) \\ a \equiv 5(8) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 2(3) \\ a \equiv 0(40) \end{cases} \implies a = 40k \implies 40k \equiv 2(3) \implies k \equiv 2(3)$

Luego $x_1 = 40.2 = 80$

S2: $\begin{cases} a \equiv 3(5) \\ a \equiv 0(24) \end{cases} \implies a = 24k \implies 24k \equiv 3(5) \implies -k \equiv 3(5) \implies k \equiv 2(5)$

Luego $x_2 = 24.2 = 48$

S3: $\begin{cases} a \equiv 5(8) \\ a \equiv 0(15) \end{cases} \implies a = 15k \implies 15k \equiv 5(8) \implies k \equiv 3(8)$

Luego $x_3 = 15.3 = 45$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 80 + 48 + 45 = 173$

Rta.: $r_{480}(a) = 173$

5.12.B. Pregunta ii

$$\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ 6a \equiv 9(15) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ 2a \equiv 3(5) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 4(5) \end{cases}$$

Divido el sistema en dos.

S1: $\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 0(5) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(21) \\ a \equiv 5(5) \end{cases}$

Busco soluciones a los sistemas.

S1: $\begin{cases} a \equiv 13(21) \\ a \equiv 0(5) \end{cases} \implies a = 5k \implies 5k \equiv 13(21) \implies k \equiv 11(21)$

Luego $x_1 = 5k = 5.11 = 55$

S2: $\begin{cases} a \equiv 4(5) \\ a \equiv 0(21) \end{cases} \implies a = 21k \implies 21k \equiv 4(5) \implies k \equiv 4(5)$

Luego $x_2 = 21k = 21.4 = 84$

Por lo tanto $x = x_1 + x_2 = 55 + 84 = 139 \implies a \equiv 35(105)$

Rta.: 34 es el entero positivo más chico que cumple lo pedido.

5.13. Ejercicio 13

$$\begin{cases} a \equiv 4(12) \\ a \equiv 43(63) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 4(3) \\ a \equiv 4(4) \\ a \equiv 43(9) \\ a \equiv 43(7) \end{cases} \iff \begin{cases} a \equiv 1(3) \\ a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases} \implies a \equiv 1(3) \qquad \iff \begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(9) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 7(9) \\ a \equiv 0(7) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(4) \\ a \equiv 0(9) \\ a \equiv 1(7) \end{cases}$

Busco soluciones a los sistemas.

S1: $\begin{cases} a \equiv 0(252) \end{cases}$

Luego $x_1 = 0$

S2: $\begin{cases} a \equiv 7(9) \\ a \equiv 0(28) \end{cases} \implies a = 28k \implies 28k \equiv 7(9) \implies k \equiv 7(9)$

Luego $x_2 = 28k = 28.7 = 196$

S3: $\begin{cases} a \equiv 1(7) \\ a \equiv 0(36) \end{cases} \implies a = 36k \implies 36k \equiv 1(7) \implies k \equiv 1(7)$

Luego $x_3 = 36k = 36.1 = 36$

Por lo tanto, $x = x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 196 + 36 = 232 \implies a \equiv 232(252)$

Luego $a \equiv 232(252) \iff a = 252k + 232$

Ahora uso que $12600 \leq a \leq 13300$,

$$\begin{aligned} 12600 \leq a \leq 13300 \\ 12600 \leq 252k + 232 \leq 13300 \\ \frac{12600 - 232}{252} \leq k \leq \frac{13300 - 232}{252} \\ 49,07 \leq k \leq 51,85 \end{aligned}$$

Luego $k \in \{50, 51\}$

- $k = 50 \implies a = 12832$
- $k = 51 \implies a = 13084$

Rta.: Había 12832 o 13084 latas.

5.14. Ejercicio 14

$$a^2 \equiv 21(238) \iff \begin{cases} a^2 \equiv 21(2) \\ a^2 \equiv 21(7) \\ a^2 \equiv 21(17) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 \equiv 1(2) \\ a^2 \equiv 0(7) \\ a^2 \equiv 4(17) \end{cases}$$

Usando tabla de restos llego a

$$\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(17) \lor a \equiv 15(17) \end{cases}$$

Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(17) \lor a \equiv 0(17) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(17) \lor a \equiv 0(17) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(17) \lor a \equiv 15(17) \end{cases}$

Busco soluciones de cada sistema.

S1: $\begin{cases} a \equiv 1(2) \\ a \equiv 0(119) \end{cases} \implies a = 119k \implies 119k \equiv 1(2) \implies k \equiv 1(2)$

Luego $x_1 = 119$

S2: $\begin{cases} a \equiv 0(238) \end{cases}$

Luego $x_2 = 0$

S3a: $\begin{cases} a \equiv 2(17) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \implies a = 14k \implies 14k \equiv 2(17) \implies k \equiv 5(17)$

Luego $x_{3a} = 14.5 = 70$

S3b: $\begin{cases} a \equiv 15(17) \\ a \equiv 0(14) \end{cases} \implies a = 14k \implies 14k \equiv 15(17) \implies k \equiv 12(17)$

Luego $x_{3b} = 14.12 = 168$

Así, obtengo dos soluciones:

- $x_a = x_1 + x_2 + x_{3a} = 119 + 0 + 70 = 189$
- $x_b = x_1 + x_2 + x_{3b} = 119 + 0 + 168 = 287 \equiv 49(238)$

Rta.: Los posibles restos son 49 y 189.

5.15. Ejercicio 15

Rdo. PTF: $a^{p-1} \equiv 1(p) \iff p$ es primo $\land (a : p) = 1$

5.15.A. Pregunta i

Como 11 es primo por PTF $a^{10} \equiv 1(11)$ si $(a : 11) = 1$

$$\begin{aligned} 71^{22283} &\equiv 5^{22283}(11) \\ &\equiv 5^{10q+3}(11) \\ &\equiv 5^{10^q}.5^3(11) \\ &\equiv 1^q.125(11) \\ &\equiv 4(11) \end{aligned}$$

Luego $r_{11}(71^{22283}) = 4$

5.15.B. Pregunta ii

$$
\begin{aligned}
5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138} &\equiv 5.7^{2451} + 3.0^{2345} - 10.8^{138}(13) \\
&\equiv 5.7^{12.q+3} - 10.8^{12q+6}(13) \\
&\equiv 5.7^{12^q}.7^3 - 10.8^{12^q}.8^6(13) \\
&\equiv 25 - 120(13) \\
&\equiv 9(13)
\end{aligned}
$$

Luego $r_{13}(5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138}) = 9$

5.16. Ejercicio 16

5.16.A. Pregunta i

$2^{194}X \equiv 7(97)$

Como $(2:97) = 1$ y 97 es primo $\implies 2^{96} \equiv 1(97)$

$$
\begin{aligned}
2^{194}X \equiv 7(97) &\iff (2^{96})^2.4X \equiv 7(97) \\
&\iff (1)^2.4X \equiv 7(97) \\
&\iff 4X \equiv 7(97) \\
&\iff -24.4X \equiv -24.7(97) \\
&\iff X \equiv 26(97)
\end{aligned}
$$

5.16.B. Pregunta ii

$5^{86}X \equiv 3(89)$

Como $(5:89) = 1$ y 89 es primo $\implies 5^{88} \equiv 1(89)$

Luego,

$$
\begin{aligned}
5^{86}X \equiv 3(89) &\iff 5^{88}X \equiv 5^2.3(89) \\
&\iff X \equiv 375(89) \\
&\iff X \equiv 19(89)
\end{aligned}
$$

5.17. Ejercicio 17

TODO

5.18. Ejercicio 18

Se que $561 = 3.11.17$ y que $a \perp 561$ luego,

$$
a^{560} \equiv 1(561) \iff \begin{cases} a^{560} \equiv 1(3) \iff (a^2)^{280} \equiv 1(3) \\ a^{560} \equiv 1(11) \iff (a^{10})^{56} \equiv 1(11) \\ a^{560} \equiv 1(17) \iff (a^{16})^{35} \equiv 1(17) \end{cases}
$$

Los tres verdaderos por el PTF.

5.19. Ejercicio 19

5.19.A. Pregunta i

$$\begin{cases} 2^{2013}X \equiv 6(13) \\ 5^{2013}X \equiv 4(7) \\ 7^{2013}X \equiv 2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{9}X \equiv 6(13) \\ 5^{3}X \equiv 4(7) \\ 7^{1}X \equiv 2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} 5X \equiv 6(13) \\ 6X \equiv 4(7) \\ 7X \equiv 2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} -5.5.X \equiv -5.6(13) \\ X \equiv 3(7) \\ -2.7.X \equiv -2.2(5) \end{cases} \iff \begin{cases} X \equiv 9(13) \\ X \equiv 3(7) \\ X \equiv 1(5) \end{cases}$$

Ahora puedo usar el Teorema Chino del Resto. Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} X \equiv 9(13) \\ X \equiv 0(7) \\ X \equiv 0(5) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} X \equiv 0(13) \\ X \equiv 3(7) \\ X \equiv 0(5) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} X \equiv 0(13) \\ X \equiv 0(7) \\ X \equiv 1(5) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema.

S1: $\begin{cases} X \equiv 9(13) \\ X \equiv 0(35) \end{cases} \implies X \equiv 35k \implies 35k \equiv 9(13) \implies 9k \equiv 9(13) \implies k \equiv 1(13)$

Luego $x_1 = 35.k = 35.1 = 35$

S2: $\begin{cases} X \equiv 3(7) \\ X \equiv 0(65) \end{cases} \implies X \equiv 65k \implies 65k \equiv 3(7) \implies 2k \equiv 3(7) \implies k \equiv 5(7)$

Luego $x_2 = 65.k = 65.5 = 325$

S3: $\begin{cases} X \equiv 1(5) \\ X \equiv 0(91) \end{cases} \implies X \equiv 91k \implies 91k \equiv 1(5) \implies k \equiv 1(5)$

Luego $x_3 = 91.k = 91.1 = 91$

Así, $X \equiv x_1 + x_2 + x_3 \equiv 35 + 325 + 91 \equiv 451(455)$

5.19.B. Pregunta ii

TODO

5.20. Ejercicio 20

5.20.A. Pregunta i

Se que $70 = 2.5.7$

Luego sea $x = 3.7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$

$$\begin{cases} x \equiv 1 + 1(2) \\ x \equiv 3.2^{135} + 4^{78} + 1(5) \\ x \equiv 3^{78} + 4^{222}(7) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 3.2^{3} + 4^{2} + 1(5) \\ x \equiv 3^{0} + 4^{0}(7) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 1(5) \\ x \equiv 2(7) \end{cases}$$

Ahora puedo usar el TCR. Divido el sistema en tres.

S1: $\begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 0(5) \\ x \equiv 0(7) \end{cases}$ S2: $\begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 1(5) \\ x \equiv 0(7) \end{cases}$ S3: $\begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 0(5) \\ x \equiv 2(7) \end{cases}$

Busco soluciones a cada sistema.

S1: $\begin{cases} x \equiv 0(2) \\ x \equiv 0(35) \end{cases}$

Luego $x_1 = 0$

S2: $\begin{cases} x \equiv 1(5) \\ x \equiv 0(14) \end{cases} \implies x = 14k \implies 14k \equiv 1(5) \implies k \equiv 4(5)$

Luego $x_2 = 14k = 14.4 = 56$

S3: $\begin{cases} x \equiv 2(7) \\ x \equiv 0(10) \end{cases} \implies x = 10k \implies 10k \equiv 2(7) \implies 3k \equiv 2(7) \implies k \equiv 3(7)$

Luego $x_3 = 10k = 10.3 = 30$

Así, $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 56 + 30 = 86 \equiv 16(70)$

Rta.: $r_{70}(3.7^{135} + 24^{78} + 11^{222}) = 16$

5.20.B. Pregunta ii

Se que $56 = 8.7$ luego voy a buscar congruencias de la sumatoria mod 7 y mod 8.

$\begin{cases} \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv n_1(7) \\ \sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv n_2(8) \end{cases}$

Módulo 7

- $(i:7) = 1 \implies i^6 \equiv 1(7) \implies (i^6)^7 \equiv 1(7) \implies i^{42} \equiv 1(7)$
- $(i:7) \neq 1 \implies 7|i \implies i^{42} \equiv 0(7)$

Luego $\sum_{i=1}^{1759} i^{42} = \sum_{i=1 \wedge 7|i}^{1759} i^{42} + \sum_{i=1 \wedge 7\nmid i}^{1759} i^{42}$

Por lo tanto, necesito saber la cantidad de números x entre 1 y 1759 tales que $x \not\equiv 0(7)$. Se que $1759 = 251.7 + 2$ luego hay $1759 - 251 = 1508$ que cumplen lo pedido.

Entonces, $\sum_{i=1}^{1759} i^{42} \equiv 1508 \equiv 3(7)$

Módulo 8

- $2|i \implies i = 2k \implies i^{42} = (2k)^{42} = (2^3)^{14}.k^{42} \implies i^{42} \equiv 0(8)$
- $2 \nmid i \implies (i \equiv 1(8)) \vee (i \equiv 3(8)) \vee (i \equiv 5(8)) \vee (i \equiv 7(8)) \implies i^{42} \equiv 1(8)$

El segundo item se puede probar con tabla de restos.

Luego, $\sum_{i=1}^{1759} i^{42} = \sum_{i=1 \wedge 2|i}^{1759} i^{42} \sum_{i=1 \wedge 2\nmid i}^{1759} i^{42} \equiv 0 + 880 \equiv 0(8)$

Entonces $\begin{cases} x \equiv 3(7) \\ x \equiv 0(8) \end{cases} \implies x \equiv 24(56)$

Por TCR es la única solución al sistema. Luego $r_{56}(\sum_{i=1}^{1759} i^{42}) = 24$

5.21. Ejercicio 21

$2^{2^n} \equiv r(13)$ y se que $(2:13) = 1$ y 13 es primo $\implies 2^{12} \equiv 1(13)$

Si escribo $2^n = 12k + r_{12}(2^n)$ luego $2^{12k+r} \equiv (2^{12})^k.2^r(13) \equiv 2^{r_{12}(2^n)}(13)$

Ahora estudio congruencia de 2^n mod 12

$2^n \equiv k(12) \iff \begin{cases} 2^n \equiv k(3) \\ 2^n \equiv k(4) \end{cases}$

Caso mod 4

- $n = 1 \implies 2^n \equiv 2(4)$
- $n \geq 2 \implies 2^n \equiv 0(4)$

Caso mod 3

Por PTF $2^2 \equiv 1(3)$ pues $(2:3) = 1$ y 3 es primo.

Luego $n = 2j + r_2(n) \implies 2^n \equiv k(3) \iff 2^{2j+r_2(n)} \equiv (2^2)^j.2^{r_2(n)} \equiv 2^{r_2(n)}$

Así llego a que,

$2^n \equiv 0(4)$ o $2^n \equiv 2(4)$
$2^n \equiv 1(3)$ o $2^n \equiv 2(3)$

- $n = 1 \implies \begin{cases} 2^1 \equiv 2(4) \\ 2^1 \equiv 2(3) \end{cases} \implies 2 \equiv 2(12)$
- $n \geq 2 \wedge n \text{ mód } 2 = 0 \implies \begin{cases} 2^n \equiv 0(4) \\ 2^n \equiv 1(3) \end{cases} \implies 2^n \equiv 4(12)$
- $n \geq 2 \wedge n \text{ mód } 2 = 1 \implies \begin{cases} 2^n \equiv 0(4) \\ 2^n \equiv 2(3) \end{cases} \implies 2^n \equiv 8(12)$

Luego con estas 3 estudio $2^{r_{12}(2^n)} \equiv h(13)$

- $n = 1 \implies 2^2 \equiv 4(13) \implies r_{13}(2^{2^n}) = 4$
- $n \geq 2 \wedge n \text{ mód } 2 = 0 \implies 2^4 \equiv 3(13) \implies r_{13}(2^{2^n}) = 3$
- $n \geq 2 \wedge n \text{ mód } 2 = 1 \implies 2^8 \equiv 9(13) \implies r_{13}(2^{2^n}) = 9$

5.22. Ejercicio 22

$7x^{45} \equiv 1(46) \iff \begin{cases} 7x^{45} \equiv 1(23) \\ 7x^{45} \equiv 1(2) \end{cases} \iff \begin{cases} 7x^{45} \equiv 1(23) \\ x^{45} \equiv 1(2) \end{cases}$

Es facil ver que $23 \not| x$ y $2 \not| x$

Por lo tanto por PTF $x^{22} \equiv 1(23)$ y $x \equiv 1(2)$

$\begin{cases} 7x \equiv 1(23) \\ x \equiv 1(2) \end{cases} \iff \begin{cases} 10.7x \equiv 10.1(23) \\ x \equiv 1(2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 10(23) \\ x \equiv 1(2) \end{cases}$

Luego por TCR, la unica solución es $x \equiv 33(46)$

5.23. Ejercicio 23

Busco los x tales que $x \in Div(25^{70}) \wedge \begin{cases} x \equiv 2(9) \\ x \equiv 3(11) \end{cases}$

Luego $25^{70} = (5^2)^{70} = 5^{140} \implies Div_+(5^{140}) = \{5^n\}; 0 \leq n \leq 140$

Así, busco soluciones de $\begin{cases} 5^n \equiv 2(9) \\ 5^n \equiv 3(11) \end{cases}$

Caso mod 11

$5^n \equiv 3(11) \iff 5^{10k+r_{10}(n)} \equiv 3(11) \iff 5^{r_{10}(n)} \equiv 3(11)$

Luego por tabla de restos se puede ver que $5^n \equiv 3(11) \iff (n \equiv 2(10)) \vee (n \equiv 7(10))$

Caso mod 9

- $n = 0 \implies 5^0 \equiv 1(9)$
- $n = 1 \implies 5^1 \equiv 5(9)$
- $n = 2 \implies 5^2 \equiv 7(9)$

- $n=3 \implies 5^3 \equiv 8(9)$
- $n=4 \implies 5^4 \equiv 4(9)$
- $n=5 \implies 5^5 \equiv 2(9)$
- $n=6 \implies 5^6 \equiv 1(9)$

Y a partir de $n=6$ se empiezan a repetir.

Armando tabla de restos módulo 6 se puede ver que $5^n \equiv 2(9) \iff n \equiv 5(6)$

Uniendo lo hallado,

$\begin{cases} n \equiv 5(6) \\ n \equiv 2(5) \end{cases} \implies n \equiv 17(30) \iff n = 30k+17$

Luego para el n hallado, busco los divisores de 5^{140}

$$\begin{aligned} 0 \leq n \leq 140 &\iff 0 \leq 30k+17 \leq 140 \\ &\iff -17 \leq 30k \leq 123 \\ &\iff \frac{-17}{30} \leq k \leq \frac{123}{30} \\ &\iff -0,5 \leq k \leq 4,1 \\ &\iff k \in \{0,1,2,3,4\} \end{aligned}$$

Así, los divisores que cumplen lo pedido son: $\{5^{17}, 5^{47}, 5^{77}, 5^{107}, 5^{137}\}$

5.24. Ejercicio 24

5.24.A. Pregunta i

Caso p = 2

$4|38^5+6+171 \iff 38^5+6+171 \equiv 0(4) \iff 2^5+2+3 \equiv 0+2+3 \equiv 5(4)$

Luego $p \neq 2$

Caso $p \neq 2$

$$2p|38^{2p^2-p-1}+3p+171 \iff \begin{cases} 2|38^{2p^2-p-1}+3p+171 \\ p|38^{2p^2-p-1}+3p+171 \end{cases}$$

Pero $2|38^{2p^2-p-1}+3p+171 \iff 38^{2p^2-p-1}+3p+171 \equiv 0+p+1 \equiv 0(2)$

Así, 2 siempre divide.

Si $p|38 \implies p=19 \implies 38^{2p^2-p-1}+3p+171 \equiv 0+0+0(19) \equiv 0(19)$

Si $p \not| 38 \implies 38^{2p^2-p-1}+3p+171 \equiv (38^{p-1})^{2p+1}+0+171 \equiv 172(19)$

Entonces busco p tal que $172 \equiv 0(p) \iff 172 = p.k$

Pero $172 = 4.43 \implies p = 43$ es solución.

Rta.: $\{19, 43\}$

5.24.B. Pregunta ii

TODO

5.25. Ejercicio 25

Se que $88 = 11.2^3$

$$(a^{760}+11a+10:88)=2 \implies \begin{cases} 2|a^{760}+11a+10 \\ 11 \not| a^{760}+11a+10 \\ 2^2 \not| a^{760}+11a+10 \end{cases}$$

Busco valores de a que cumplan las tres condiciones.

$2|a^{760}+11a+10 \iff a^{760}+11a+10 \equiv 0(2) \iff a^{760}+a \equiv 0(2)$

Que se cumple $\forall a \in \mathbb{Z}$

$$a^{760}+11a+10 \equiv a^{760}+10(11) \implies \begin{cases} a^{760}+11a+10 \equiv 10(11) & 11|a \\ a^{760}+11a+10 \equiv 10(11) & 11 \not| a \end{cases}$$

Luego $11 \not| a^{760}+11a+10; \forall a \in \mathbb{Z}$

$a^{760}+11a+10 \equiv a^{760}+3a+2(4)$

Busco valores de a tales que $a^{760}+3a+2 \not\equiv 0(4)$

- $a \equiv 0(4) \implies a^{760}+3a+2 \equiv 0+0+2 \equiv 2(4)$
- $a \equiv 1(4) \implies a^{760}+3a+2 \equiv 1+3+2 \equiv 2(4)$
- $a \equiv 2(4) \implies a^{760}+3a+2 \equiv 0+2+2 \equiv 0(4)$
- $a \equiv 3(4) \implies a^{760}+3a+2 \equiv 1+1+2 \equiv 0(4)$

Así, $a \equiv 0(4)$ o $a \equiv 1(4)$

Luego $\begin{cases} a \equiv 10(11) \\ a \equiv 0(4) \end{cases} \implies a \equiv 32(44)$

y $\begin{cases} a \equiv 10(11) \\ a \equiv 1(4) \end{cases} \implies a \equiv 21(44)$

Luego los posibles restos son $\{21, 32\}$