



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 2

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

2. Práctica 2	2
2.1. Ejercicio 1	2
2.2. Ejercicio 2	2
2.3. Ejercicio 3	2
2.4. Ejercicio 4	3
2.5. Ejercicio 5	3
2.6. Ejercicio 6	4
2.7. Ejercicio 7	5
2.8. Ejercicio 8	8
2.9. Ejercicio 9	8
2.10. Ejercicio 10	10
2.11. Ejercicio 11	13
2.12. Ejercicio 12	14

2. Práctica 2

2.1. Ejercicio 1

1. (a) $\sum_{i=1}^{100} i$
(b) $\sum_{i=1}^{10} i^2$
(c) $\sum_{i=1}^{12} (-1)^i \cdot i^2$
(d) $\sum_{i=1 \wedge i \text{ impar}}^{21} i^2$
(e) $\sum_{i=0}^n 2i + 1$
(f) $\sum_{i=1}^n i \cdot n$
2. (a) $\frac{100!}{4!}$
(b) $\prod_{i=1}^{10} 2^i$
(c) $\prod_{i=1}^n i \cdot n$

2.2. Ejercicio 2

- (a) $2 + 4 ; 2(n - 6) + 2(n - 5)$
- (b) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} ; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}$
- (c) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} ; \frac{n+n-1}{2 \cdot (n-1)} + \frac{2n}{2n}$
- (d) $n + \frac{n}{2} ; \frac{n}{n^2-1} + \frac{n}{n^2}$
- (e) $-(n+1) \cdot (n+2) ; \frac{n+n-1}{2(n-1)-3} \cdot \frac{2n}{2n-3}$

2.3. Ejercicio 3

- (a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (4i + 1) &= \sum_{i=1}^n 4i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n i + n \\ &= 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \\ &= 2 \cdot n(n+1) + n \\ &= 2n^2 + 3n \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=6}^n 2(i-5) &= 2 \sum_{i=6}^n (i-5) \\&= 2 \left(\sum_{i=6}^n i - \sum_{i=6}^n 5 \right) \\&= 2 \left(\left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^5 i \right) - \left(\sum_{i=1}^n 5 - \sum_{i=1}^5 5 \right) \right) \\&= 2 \left(\left(\frac{n(n+1)}{2} - 15 \right) - (5n - 25) \right) \\&= 2 \left(\left(\frac{n(n+1) - 30}{2} \right) - 5(n+5) \right) \\&= n(n+1) - 30 - 10(n+5) \\&= n^2 + n - 30 - 10n - 50 \\&= n^2 - 9n - 80\end{aligned}$$

2.4. Ejercicio 4

(a) $\sum_{i=0}^n 2^i = n^{n+1} - 1$

(b) $\sum_{i=1}^n q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-2}{q-1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$

(c) $\sum_{i=1}^n q^{2i} = \sum_{i=1}^n (q^2)^i = \begin{cases} \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

(d) $\sum_{i=n}^{2n} q^i = \sum_{i=0}^{2n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^{2n+1}-q^n}{q-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

2.5. Ejercicio 5

Usando la suma aritmética:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i-1) &= \sum_{i=1}^n 2i - \sum_{i=1}^n 1 \\&= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\&= n^2 + n - n \\&= n^2\end{aligned}$$

Usando el principio de inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2-1 = 1$$

$$n^2 = 1^2 = 1$$

Luego el caso base es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que para $k \geq 1$, $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) &= \sum_{i=1}^k (2i-1) + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Luego el paso inductivo es verdadero. Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

2.6. Ejercicio 6

2.6.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2\end{aligned}$$

Entonces necesito probar que,

$$\begin{aligned}&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\ \iff &2k^2 + k + 6k + 6 = 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\ \iff &2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6\end{aligned}$$

Luego $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ como se quería probar, el paso inductivo el verdadero.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.6.B. Pregunta ii

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \iff k^2 + 4(k+1) &= k^2 + 4k + 4 \\ \iff k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7. Ejercicio 7

2.7.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2}$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 (-1)^{i+1} \cdot i^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1$$

$$\frac{(-1)^{1+1} \cdot 1(1+1)}{2} = \frac{(-1)^2 \cdot 1(2)}{2} = 1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2}$$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2} &= \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2} \\ (-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 &= (-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2) \\ (-1)^{k+1} \cdot k + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1) &= (-1)^{k+2} \cdot (k+2) \\ -k + 2 \cdot (k+1) &= k+2 \\ k+2 &= k+2 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.B. Pregunta ii

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i+1) \cdot 3^{i-1} = n \cdot 3^n$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 (2i+1) \cdot 3^{i-1} = 3$$

$$n \cdot 3^n = 3$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (2i+1) \cdot 3^{i-1} = k \cdot 3^k$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} (2i+1) \cdot 3^{i-1} = (k+1) \cdot 3^{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i+1) \cdot 3^{i-1} &= \sum_{i=1}^k (2i+1) \cdot 3^{i-1} + (2(k+1)+1) \cdot 3^k \\ &= k \cdot 3^k + (2k+2+1) \cdot 3^k \\ &= 3^k \cdot (k+2k+3) \\ &= 3^k \cdot (3k+3) \\ &= 3^k \cdot 3(k+1) \\ &= 3^k \cdot 3(k+1) \\ &= (k+1) 3^{k+1} \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.C. Pregunta iii

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2^{1+1}}{1+2} - 1 = \frac{2^2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} &= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1 \\ \frac{(k+3)2^{k+1}}{k+2} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ \frac{(k+3)2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ 2^{k+1}(k+3+k+1) &= 2^{k+2} \cdot (k+2) \\ 2k+4 &= 2k+4 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.7.D. Pregunta iv

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

Caso base n = 1

$$\prod_{i=1}^1 (1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a$$

$$\frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a}$$

$$\text{QpQ: } \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1 - a^{2^{k+1}}}{1 - a}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) &= \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) \cdot (1 + a^{2^k}) \\ &= \frac{1 - a^{2^k}}{1 - a} \cdot (1 + a^{2^k}) \\ &= \frac{(1 - a^{2^k}) \cdot (1 + a^{2^k})}{1 - a} \\ &= \frac{1 - a^{2^{k+1}}}{1 - a} \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.8. Ejercicio 8

Prueba por inducción.

Defino el predicado $p(n) : a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{i=1}^n a^{i-1} \cdot b^{n-i}$

Caso base n = 1

$$a^1 - b^1 = a - b$$

$$(a - b) \cdot \sum_{i=1}^1 a^{i-1} \cdot b^{1-i} = (a - b) \cdot 1 = a - b$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } a^k - b^k = (a - b) \cdot \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i}$$

$$\text{QpQ: } a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i}$$

Pero,

TODO

2.9. Ejercicio 9

2.9.A. Pregunta i

Defino $p(n) : \sum_{i=1}^n a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i &= \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\
&= a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\
&= -a_1 + a_{k+2} \\
&= a_{k+2} - a_1
\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.9.B. Pregunta ii

Luego de probar con los casos $n \in \{1, 2, 3\}$ conjeturo y defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Prueba por inducción:

Caso base n = 1

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{k+1}{k+2} &= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.9.C. Pregunta iii

Luego de probar con los casos $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ conjeturo y defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Prueba por inducción:

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \\ \frac{(2k+3) \cdot k + 1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2k+3} \\ (2k+3) \cdot k + 1 &= (k+1)(2k+1) \\ 2k^2 + 3k + 1 &= 2k^2 + k + 2k + 1 \\ 2k^2 + 3k + 1 &= 2k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10. Ejercicio 10

2.10.A. Pregunta i

Defino $p(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

Caso base n = 1

$$3^1 + 5^1 = 3 + 5 = 8$$

$$2^{1+2} = 2^3 = 8$$

Como $8 \geq 8$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

HI: $3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$

QpQ: $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+3}$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 5^{k+1} &= 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k \\ &= 3 \cdot 3^k + 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k \\ &= 3 \cdot (3^k + 5^k) + 2 \cdot 5^k \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva:

$$3 \cdot (3^k + 5^k) + 2 \cdot 5^k \geq 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k$$

Luego alcanza con probar que,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k &\geq 2^{k+3} \\ 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^{k+2} &\geq 0 \\ 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k &\geq 0 \end{aligned}$$

Pero $k \geq 1 \implies (2^{k+2} \geq 8 \wedge 2 \cdot 5^k \geq 10)$ y en particular $2^{k+2} + 2 \cdot 5^k \geq 0$ como se quería probar.

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : 3^n \geq n^3$

Caso base n = 1

$$3^1 = 3$$

$$1^3 = 1$$

Como $3 \geq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

HI: $3^k \geq k^3$

QpQ: $3^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3^k \cdot 3 \\ \iff 3^{k+1} &> 3k^3 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 3k^3 &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 3k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(2k^2 - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Pero esto se cumple unicamente para los $k \geq 3$ por lo tanto $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 3$

Hay que ver aparte los casos $k \in \{2, 3\}$

$p(2) : 3^2 \geq 2^3 \iff 9 \geq 8$ es verdadero.

$p(3) : 3^3 \geq 3^3 \iff 27 \geq 27$ es verdadero.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.C. Pregunta iii

Defino $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1+i}{i+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 + 1(1-1) = 1$$

Como $1 \leq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} \leq 1 + k(k-1)$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + (k+1)k = 1 + k^2 + k$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+i}{i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} + \frac{2k+1}{k+2} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\ &\leq 1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 1 + k^2 + k \\ -k + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq k \\ \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 2k \\ \frac{2(2k+1) + (k+2)(k+1)}{2(k+2)} &\leq 2k \\ \frac{4k+2 + k^2 + 2k + k + 2}{2k+4} &\leq 2k \\ k^2 + 7k + 4 &\leq (2k+4)2k \\ k^2 + 7k + 4 &\leq 4k^2 + 8k \\ 4 &\leq 3k^2 + k \end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.10.D. Pregunta iv

Defino $p(n) : \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

Caso base n = 1

$$\sum_{i=1}^2 \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

Como $1 \leq 1$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} \leq k$$

QpQ: $\sum_{i=k+1}^{2(k+1)} \frac{i}{2^i} \leq k+1$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{2k+2} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} \\ &\leq k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} &\leq k+1 \\ \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2(k+1)}{2 \cdot 2^{2k+1}} - \frac{k}{2^k} &\leq 1 \\ \frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^k \cdot 2^{k+1}} &\leq 1 \\ \frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\ \frac{3k+2-k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\ 3k+2-k \cdot 2^{k+1} &\leq 2^{2k+1} \\ 3k+2 &\leq 2^{2k+1} + k \cdot 2^{k+1} \\ 3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2 \\ 3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2^k \cdot 2 \\ 3k+2 &\leq 2^{2k+2}(1+k) \\ 3k+2 &\leq 2^{2k+2}(3k+2) \\ 1 &\leq 2^{2k+2} \end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.11. Ejercicio 11

Defino $p(n) : \prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$

Caso base n = 1

$$\prod_{i=1}^1 (1+a_i) = 1+a_i$$

$$1 + \sum_{i=1}^1 a_i = 1+a_i$$

Como $1+a_i \geq 1+a_i$ el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } \prod_{i=1}^k (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i$$

$$\text{QpQ: } \prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

Pero,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1} (1 + a_i) &= \prod_{i=1}^k (1 + a_i) + 1 + a_{k+1} \\ &\geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + 1 + a_{k+1} \\ &\geq 2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i &\geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \\ 2 &\geq 1\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 1$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.12. Ejercicio 12

2.12.A. Pregunta i

Defino $p(n) : n! \geq 3^{n-1}; \forall n \geq 5$

Caso base n = 5

$$5! = 120$$

$$3^{5-1} = 3^4 = 81$$

Como $120 \geq 81$ el caso base $p(5)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

HI: $k! \geq 3^{k-1}$

QpQ: $(k+1)! \geq 3^k$

Pero,

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\geq (k+1) \cdot 3^{k-1}\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}(k+1) \cdot 3^{k-1} &\geq 3^k \\ \frac{(k+1) \cdot 3^k}{3} &\geq 3^k \\ k+1 &\geq 3\end{aligned}$$

Que es verdadero $\forall k \geq 5$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$.

2.12.B. Pregunta ii

Defino $p(n) : 3^n - 2^n \geq n^3; \forall n \geq 4$

Caso base $n = 4$

$$3^4 - 2^4 = 65$$

$$4^3 = 64$$

Como $65 \geq 64$ el caso base $p(4)$ es verdadero.

Paso inductivo Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

$$\text{HI: } 3^k - 2^k \geq k^3$$

$$\text{QpQ: } 3^{k+1} - 2^{k+1} \geq (k+1)^3$$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2^{k+1} &= 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot (3^k - 2^k) + 3^k \\ &\geq 2 \cdot k^3 + 3^k \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2k^3 + 3^k &\geq (k+1)^3 \\ 2k^3 + 3^k &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 2k^3 + 3^k - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k^3 + 3^k - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Ahora pruebo que,

$$\begin{aligned} k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3 &\geq 1 \\ k(k + 3^{k-2} - 3) &\geq 4 \end{aligned}$$

Que es verdadero, $\forall k \geq 4$.

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Así, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.