DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 2

2do cuatrimestre 2021 | Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

1. Práctica 2

1.1. Ejercicio 1

1. (a) $\sum_{i=1}^{100} i$
   (b) $\sum_{i=1}^{10} i^2$
   (c) $\sum_{i=1}^{12} (-1)^i.i^2$
   (d) $\sum_{i=1 \wedge \text{i impar}}^{21} i^2$
   (e) $\sum_{i=0}^{n} 2i + 1$
   (f) $\sum_{i=1}^{n} i.n$
2. (a) $\frac{100!}{4!}$
   (b) $\prod_{i=1}^{10} 2^i$
   (c) $\prod_{i=1}^{n} i.n$

1.2. Ejercicio 2

(a) $2 + 4$; $2(n-6) + 2(n-5)$

(b) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$; $\frac{1}{(2n-1).2n} + \frac{1}{2n.(2n+1)}$

(c) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4}$; $\frac{n+n-1}{2.(n-1)} + \frac{2n}{2n}$

(d) $n + \frac{n}{2}$; $\frac{n}{n^2-1} + \frac{n}{n^2}$

(e) $-(n+1).(n+2)$; $\frac{n+n-1}{2(n-1)-3} \cdot \frac{2n}{2n-3}$

1.3. Ejercicio 3

(a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(4i+1) &= \sum_{i=1}^{n} 4i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 4.\sum_{i=1}^{n} i + n \\
&= 4.\frac{n.(n+1)}{2} + n \\
&= 2.n(n+1) + n \\
&= 2n^2 + 3n
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=6}^{n} 2(i-5) &= 2\sum_{i=6}^{n}(i-5) \\
&= 2\left(\sum_{i=6}^{n} i - \sum_{i=6}^{n} 5\right) \\
&= 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{5} i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} 5 - \sum_{i=1}^{5} 5\right)\right) \\
&= 2\left(\left(\frac{n(n+1)}{2} - 15\right) - (5n-25)\right) \\
&= 2\left(\left(\frac{n(n+1)-30}{2}\right) - 5(n+5)\right) \\
&= n(n+1) - 30 - 10(n+5) \\
&= n^2 + n - 30 - 10n - 50 \\
&= n^2 - 9n - 80
\end{aligned}$$

1.4. Ejercicio 4

(a) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = n^{n+1} - 1$

(b) $\sum_{i=1}^{n} q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-2}{q-1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$

(c) $\sum_{i=1}^{n} q^{2i} = \sum_{i=1}^{n} (q^2)^i = \begin{cases} \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

(d) $\sum_{i=n}^{2n} q^i = \sum_{i=0}^{2n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^{2n+1}-q^n}{q-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

1.5. Ejercicio 5

Usando la suma aritmética:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (2i-1) &= \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 2.\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= n^2 + n - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

Usando el principio de inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Caso base n = 1</u>

$\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 2 - 1 = 1$

$n^2 = 1^2 = 1$

Luego el caso base es verdadero.

<u>Paso inductivo</u>

Quiero probar que para $k \geq 1$, $p(k) \implies p(k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2(k+1) - 1 \\
&= k^2 + 2(k+1) - 1 \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

Luego el paso inductivo es verdadero. Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

1.6. Ejercicio 6

1.6.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2
\end{aligned}$$

Entonces necesito probar que,

$$\begin{aligned}
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
\iff \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
\iff k(2k+1) + 6(k+1) &= (k+2)(2k+3) \\
\iff 2k^2 + k + 6k + 6 &= 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\
\iff 2k^2 + 7k + 6 &= 2k^2 + 7k + 6
\end{aligned}$$

Luego $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ como se quería probar, el paso inductivo el verdadero.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.6.B. Pregunta ii

Defino el predicado $p(n) : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Caso base n = 1

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1$

$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Luego el caso base $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Para todo $k \geq 1 : p(k) \implies (k+1)$

HI: $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

QpQ: $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \iff k^2 + 4(k+1) &= k^2 + 4k + 4 \\ \iff k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4 \end{aligned}$$

Luego $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$, como se quería probar.

Por lo tanto, $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$.