



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Práctica 2

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

<b>2. Práctica 2</b>	<b>2</b>
2.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
2.2. Ejercicio 2 . . . . .	2
2.3. Ejercicio 3 . . . . .	2
2.4. Ejercicio 4 . . . . .	3
2.5. Ejercicio 5 . . . . .	3
2.6. Ejercicio 6 . . . . .	4
2.7. Ejercicio 7 . . . . .	5
2.8. Ejercicio 8 . . . . .	8
2.9. Ejercicio 9 . . . . .	8
2.10. Ejercicio 10 . . . . .	10
2.11. Ejercicio 11 . . . . .	13
2.12. Ejercicio 12 . . . . .	14
2.13. Ejercicio 13 . . . . .	15
2.14. Ejercicio 14 . . . . .	16
2.15. Ejercicio 15 . . . . .	16
2.16. Ejercicio 16 . . . . .	17
2.17. Ejercicio 17 . . . . .	19
2.18. Ejercicio 18 . . . . .	20
2.19. Ejercicio 19 . . . . .	22
2.20. Ejercicio 20 . . . . .	23
2.21. Ejercicio 21 . . . . .	23
2.22. Ejercicio 22 . . . . .	24
2.23. Ejercicio 23 . . . . .	24

## 2. Práctica 2

### 2.1. Ejercicio 1

1. (a)  $\sum_{i=1}^{100} i$   
(b)  $\sum_{i=1}^{10} i^2$   
(c)  $\sum_{i=1}^{12} (-1)^i \cdot i^2$   
(d)  $\sum_{i=1 \wedge i \text{ impar}}^{21} i^2$   
(e)  $\sum_{i=0}^n 2i + 1$   
(f)  $\sum_{i=1}^n i \cdot n$
2. (a)  $\frac{100!}{4!}$   
(b)  $\prod_{i=1}^{10} 2^i$   
(c)  $\prod_{i=1}^n i \cdot n$

### 2.2. Ejercicio 2

- (a)  $2 + 4 ; 2(n - 6) + 2(n - 5)$
- (b)  $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} ; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}$
- (c)  $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} ; \frac{n+n-1}{2 \cdot (n-1)} + \frac{2n}{2n}$
- (d)  $n + \frac{n}{2} ; \frac{n}{n^2-1} + \frac{n}{n^2}$
- (e)  $-(n+1) \cdot (n+2) ; \frac{n+n-1}{2(n-1)-3} \cdot \frac{2n}{2n-3}$

### 2.3. Ejercicio 3

- (a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (4i + 1) &= \sum_{i=1}^n 4i + \sum_{i=1}^n 1 \\ &= 4 \cdot \sum_{i=1}^n i + n \\ &= 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \\ &= 2 \cdot n(n+1) + n \\ &= 2n^2 + 3n\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=6}^n 2(i-5) &= 2 \sum_{i=6}^n (i-5) \\&= 2 \left( \sum_{i=6}^n i - \sum_{i=6}^n 5 \right) \\&= 2 \left( \left( \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^5 i \right) - \left( \sum_{i=1}^n 5 - \sum_{i=1}^5 5 \right) \right) \\&= 2 \left( \left( \frac{n(n+1)}{2} - 15 \right) - (5n - 25) \right) \\&= 2 \left( \left( \frac{n(n+1) - 30}{2} \right) - 5(n-5) \right) \\&= n(n+1) - 30 - 10(n-5) \\&= n^2 + n - 30 - 10n + 50 \\&= n^2 - 9n + 20\end{aligned}$$

## 2.4. Ejercicio 4

(a)  $\sum_{i=0}^n 2^i = n^{n+1} - 1$

(b)  $\sum_{i=1}^n q^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-2}{q-1} & q \neq 1 \\ n & q = 1 \end{cases}$

(c)  $\sum_{i=1}^n q^{2i} = \sum_{i=1}^n (q^2)^i = \begin{cases} \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

(d)  $\sum_{i=n}^{2n} q^i = \sum_{i=0}^{2n} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} \frac{q^{2n+1}-q^n}{q-1} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$

## 2.5. Ejercicio 5

Usando la suma aritmética:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i-1) &= \sum_{i=1}^n 2i - \sum_{i=1}^n 1 \\&= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\&= n^2 + n - n \\&= n^2\end{aligned}$$

Usando el principio de inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2; \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 (2i-1) = 2-1 = 1$$

$$n^2 = 1^2 = 1$$

Luego el caso base es verdadero.

Paso inductivo

Quiero probar que para  $k \geq 1$ ,  $p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$

QpQ:  $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) &= \sum_{i=1}^k (2i-1) + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2(k+1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Luego el paso inductivo es verdadero. Por lo tanto  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$

## 2.6. Ejercicio 6

### 2.6.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2\end{aligned}$$

Entonces necesito probar que,

$$\begin{aligned}&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ \iff &k(2k+1) + 6(k+1) = (k+2)(2k+3) \\ \iff &2k^2 + k + 6k + 6 = 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\ \iff &2k^2 + 7k + 6 = 2k^2 + 7k + 6\end{aligned}$$

Luego  $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$  como se quería probar, el paso inductivo el verdadero.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.6.B. Pregunta ii

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\ \iff k^2 + 4(k+1) &= k^2 + 4k + 4 \\ \iff k^2 + 4k + 4 &= k^2 + 4k + 4 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.7. Ejercicio 7

### 2.7.A. Pregunta i

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2}$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 (-1)^{i+1} \cdot i^2 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1$$

$$\frac{(-1)^{1+1} \cdot 1(1+1)}{2} = \frac{(-1)^2 \cdot 1(2)}{2} = 1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2}$$

QpQ:  $\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot i^2 + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2}{2} &= \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2} \\ (-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2 &= (-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2) \\ (-1)^{k+1} \cdot k + 2 \cdot (-1)^{k+2} \cdot (k+1) &= (-1)^{k+2} \cdot (k+2) \\ -k + 2 \cdot (k+1) &= k+2 \\ k+2 &= k+2 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.7.B. Pregunta ii

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n (2i+1) \cdot 3^{i-1} = n \cdot 3^n$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 (2i+1) \cdot 3^{i-1} = 3$$

$$n \cdot 3^n = 3$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k (2i+1) \cdot 3^{i-1} = k \cdot 3^k$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} (2i+1) \cdot 3^{i-1} = (k+1) \cdot 3^{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (2i+1) \cdot 3^{i-1} &= \sum_{i=1}^k (2i+1) \cdot 3^{i-1} + (2(k+1)+1) \cdot 3^k \\ &= k \cdot 3^k + (2k+2+1) \cdot 3^k \\ &= 3^k \cdot (k+2k+3) \\ &= 3^k \cdot (3k+3) \\ &= 3^k \cdot 3(k+1) \\ &= (k+1) 3^{k+1} \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.7.C. Pregunta iii

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2^{1+1}}{1+2} - 1 = \frac{2^2}{3} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^k \frac{i \cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

Luego debo probar,

$$\begin{aligned} \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)} &= \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1 \\ \frac{(k+3)2^{k+1}}{k+2} + \frac{(k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ \frac{(k+3)2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1}}{k+2} &= 2^{k+2} \\ 2^{k+1}(k+3+k+1) &= 2^{k+2} \cdot (k+2) \\ 2k+4 &= 2k+4 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.7.D. Pregunta iv

Prueba por inducción:

Defino el predicado  $p(n) : \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^n}}{1-a}$

**Caso base n = 1**

$$\prod_{i=1}^1 (1 + a^{2^{i-1}}) = 1 + a$$

$$\frac{1-a^{2^1}}{1-a} = \frac{1-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1 + a$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^k}}{1-a}$$



QpQ:  $\prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a}$

Pero,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} (1 + a^{2^{i-1}}) &= \prod_{i=1}^k (1 + a^{2^{i-1}}) \cdot (1 + a^{2^k}) \\ &= \frac{1 - a^{2^k}}{1 - a} \cdot (1 + a^{2^k}) \\ &= \frac{(1 - a^{2^k}) \cdot (1 + a^{2^k})}{1 - a} \\ &= \frac{1 - a^{2^{k+1}}}{1 - a} \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.8. Ejercicio 8

Prueba por inducción.

Defino el predicado  $p(n) : a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{i=1}^n a^{i-1} \cdot b^{n-i}$

**Caso base n = 1**

$$a^1 - b^1 = a - b$$

$$(a - b) \cdot \sum_{i=1}^1 a^{i-1} \cdot b^{1-i} = (a - b) \cdot 1 = a - b$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a^k - b^k = (a - b) \cdot \sum_{i=1}^k a^{i-1} \cdot b^{k-i}$$

$$\text{QpQ: } a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b) \cdot \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} \cdot b^{k+1-i}$$

Pero,

TODO

## 2.9. Ejercicio 9

### 2.9.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : \sum_{i=1}^n a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_1$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i &= \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\
&= a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\
&= -a_1 + a_{k+2} \\
&= a_{k+2} - a_1
\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.9.B. Pregunta ii

Luego de probar con los casos  $n \in \{1, 2, 3\}$  conjeturo y defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Prueba por inducción:

**Caso base n = 1**

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que:

$$\begin{aligned}
\frac{(k+2)k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \\
\frac{k+1}{k+2} &= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.9.C. Pregunta iii

Luego de probar con los casos  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino el predicado  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Prueba por inducción:

### Caso base $n = 1$

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

Luego el caso base  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2(k+1)+1} \\ \frac{(2k+3) \cdot k + 1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{k+1}{2k+3} \\ (2k+3) \cdot k + 1 &= (k+1)(2k+1) \\ 2k^2 + 3k + 1 &= 2k^2 + k + 2k + 1 \\ 2k^2 + 3k + 1 &= 2k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.10. Ejercicio 10

### 2.10.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : 3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

### Caso base $n = 1$

$$3^1 + 5^1 = 3 + 5 = 8$$

$$2^{1+2} = 2^3 = 8$$

Como  $8 \geq 8$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

### Paso inductivo

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } 3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$$

$$\text{QpQ: } 3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+3}$$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} + 5^{k+1} &= 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k \\ &= 3 \cdot 3^k + 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 5^k \\ &= 3 \cdot (3^k + 5^k) + 2 \cdot 5^k \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva:

$$3 \cdot (3^k + 5^k) + 2 \cdot 5^k \geq 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k$$

Luego alcanza con probar que,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k &\geq 2^{k+3} \\ 3 \cdot 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k - 2 \cdot 2^{k+2} &\geq 0 \\ 2^{k+2} + 2 \cdot 5^k &\geq 0 \end{aligned}$$

Pero  $k \geq 1 \implies (2^{k+2} \geq 8 \wedge 2 \cdot 5^k \geq 10)$  y en particular  $2^{k+2} + 2 \cdot 5^k \geq 0$  como se quería probar.

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Por lo tanto,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.10.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : 3^n \geq n^3$

**Caso base n = 1**

$$3^1 = 3$$

$$1^3 = 1$$

Como  $3 \geq 1$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $3^k \geq k^3$

QpQ:  $3^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3^k \cdot 3 \\ \iff 3^{k+1} &> 3k^3 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 3k^3 &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 3k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(2k^2 - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Pero esto se cumple unicamente para los  $k \geq 3$  por lo tanto  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 3$

Hay que ver aparte los casos  $k \in \{2, 3\}$

$p(2) : 3^2 \geq 2^3 \iff 9 \geq 8$  es verdadero.

$p(3) : 3^3 \geq 3^3 \iff 27 \geq 27$  es verdadero.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.10.C. Pregunta iii

Defino  $p(n) : \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^1 \frac{1+i}{i+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 + 1(1-1) = 1$$

Como  $1 \leq 1$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} \leq 1 + k(k-1)$$

$$\text{QpQ: } \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + (k+1)k = 1 + k^2 + k$$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+i}{i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{k+i}{i+1} + \frac{2k+1}{k+2} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1} \\ &\leq 1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 1 + k(k-1) + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 1 + k^2 + k \\ -k + \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq k \\ \frac{2k+1}{k+2} + \frac{k+1}{2} &\leq 2k \\ \frac{2(2k+1) + (k+2)(k+1)}{2(k+2)} &\leq 2k \\ \frac{4k+2 + k^2 + 2k + k + 2}{2k+4} &\leq 2k \\ k^2 + 7k + 4 &\leq (2k+4)2k \\ k^2 + 7k + 4 &\leq 4k^2 + 8k \\ 4 &\leq 3k^2 + k \end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.10.D. Pregunta iv

Defino  $p(n) : \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

**Caso base n = 1**

$$\sum_{i=1}^2 \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

Como  $1 \leq 1$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $\sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} \leq k$

QpQ:  $\sum_{i=k+1}^{2(k+1)} \frac{i}{2^i} \leq k+1$

Pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{2k+2} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} \\ &\leq k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k} &\leq k+1 \\ \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2(k+1)}{2 \cdot 2^{2k+1}} - \frac{k}{2^k} &\leq 1 \\ \frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^k \cdot 2^{k+1}} &\leq 1 \\ \frac{3k+2}{2^{2k+1}} - \frac{k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\ \frac{3k+2 - k \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+1}} &\leq 1 \\ 3k+2 - k \cdot 2^{k+1} &\leq 2^{2k+1} \\ 3k+2 &\leq 2^{2k+1} + k \cdot 2^{k+1} \\ 3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2 \\ 3k+2 &\leq 2^k \cdot 2^k \cdot 2 + k \cdot 2^k \cdot 2^k \cdot 2 \\ 3k+2 &\leq 2^{2k+2}(1+k) \\ 3k+2 &\leq 2^{2k+2}(3k+2) \\ 1 &\leq 2^{2k+2} \end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.11. Ejercicio 11

Defino  $p(n) : \prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$

**Caso base n = 1**

$$\prod_{i=1}^1 (1+a_i) = 1+a_i$$

$$1 + \sum_{i=1}^1 a_i = 1+a_i$$

Como  $1+a_i \geq 1+a_i$  el caso base  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $\prod_{i=1}^k (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i$

QpQ:  $\prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$

Pero,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) &= \prod_{i=1}^k(1+a_i) + 1 + a_{k+1} \\ &\geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i + 1 + a_{k+1} \\ &\geq 2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}2 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i &\geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \\ 2 &\geq 1\end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.12. Ejercicio 12

### 2.12.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : n! \geq 3^{n-1}; \forall n \geq 5$

**Caso base n = 5**

$$5! = 120$$

$$3^{5-1} = 3^4 = 81$$

Como  $120 \geq 81$  el caso base  $p(5)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $k! \geq 3^{k-1}$

QpQ:  $(k+1)! \geq 3^k$

Pero,

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \cdot k! \\ &\geq (k+1) \cdot 3^{k-1}\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}(k+1) \cdot 3^{k-1} &\geq 3^k \\ \frac{(k+1) \cdot 3^k}{3} &\geq 3^k \\ k+1 &\geq 3\end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 5$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ .

### 2.12.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : 3^n - 2^n \geq n^3; \forall n \geq 4$

**Caso base  $n = 4$**

$$3^4 - 2^4 = 65$$

$$4^3 = 64$$

Como  $65 \geq 64$  el caso base  $p(4)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $3^k - 2^k \geq k^3$

QpQ:  $3^{k+1} - 2^{k+1} \geq (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2^{k+1} &= 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot 3^k + 3^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot (3^k - 2^k) + 3^k \\ &\geq 2 \cdot k^3 + 3^k \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2k^3 + 3^k &\geq (k+1)^3 \\ 2k^3 + 3^k &\geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ 2k^3 + 3^k - k^3 - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k^3 + 3^k - 3k^2 - 3k &\geq 1 \\ k(k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3) &\geq 1 \end{aligned}$$

Ahora pruebo que,

$$\begin{aligned} k^2 + 3^{k-1} - 3k - 3 &\geq 1 \\ k(k + 3^{k-2} - 3) &\geq 4 \end{aligned}$$

Que es verdadero,  $\forall k \geq 4$ .

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ .

### 2.13. Ejercicio 13

Defino  $p(n) : n^2 + 1 < 2^n$

$$n = 1 \implies p(1) : 1^2 + 1 < 2^1 \iff 2 < 2 \implies p(1) \text{ es falso.}$$

$$n = 2 \implies p(2) : 2^2 + 1 < 2^2 \iff 5 < 4 \implies p(2) \text{ es falso.}$$

$$n = 3 \implies p(3) : 3^2 + 1 < 2^3 \iff 10 < 8 \implies p(3) \text{ es falso.}$$

$$n = 4 \implies p(4) : 4^2 + 1 < 2^4 \iff 17 < 16 \implies p(4) \text{ es falso.}$$

$$n = 5 \implies p(5) : 5^2 + 1 < 2^5 \iff 26 < 32 \implies p(5) \text{ es verdadero.}$$



Luego tomo el caso base en  $n = 5$  y ya se que  $p(5)$  es verdadero.

### **Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $k^2 + 1 < 2^k$

QpQ:  $(k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + 1 &= k^2 + 2k + 1 + 1 \\ &< 2^k + 2k + 1\end{aligned}$$

Queda probar que,

$$\begin{aligned}2^k + 2k + 1 &\leq 2^{k+1} \\ 2^k + 2k + 1 &\leq 2 \cdot 2^k \\ 2k + 1 &\leq 2^k \\ 0 &\leq 2^k - 2k - 1\end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 5$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ .

## **2.14. Ejercicio 14**

TODO

## **2.15. Ejercicio 15**

### **2.15.A. Pregunta i**

Defino  $p(n) : a_n = 2^n \cdot n!$

**Caso base n = 1**

$a_1 = 2$  por definición.

$a_1 = 2^1 \cdot 1! = 2$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

### **Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = 2^k \cdot k!$

QpQ:  $a_{k+1} = 2^{k+1} \cdot (k+1)!$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2k \cdot a_k + 2^{k+1} \cdot k! \\ &= 2k \cdot 2^k \cdot k! + 2^{k+1} \cdot k! \\ &= 2^{k+1} \cdot k! \cdot k + 2^{k+1} \cdot k!\end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} \cdot k! \cdot k + 2^{k+1} \cdot k! &= 2^{k+1} \cdot (k+1)! \\ 2^{k+1} \cdot k! (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1)! \\ 2^{k+1} \cdot k! \cdot (k+1) &= 2^{k+1} \cdot (k+1) \cdot k! \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.15.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : a_n = n^2 \cdot (n-1)$

**Caso base n = 1**

Por definición  $a_1 = 0$

$$1^2 \cdot (1-1) = 0$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k^2 \cdot (k-1)$

QpQ:  $a_{k+1} = (k+1)^2 \cdot k$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k(3k+1) \\ &= k^2 \cdot (k-1) + k(3k+1) \\ &= k^3 - k^2 + 3k^2 + k \\ &= k^3 + 2k^2 + k \\ &= k(k^2 + 2k + 1) \\ &= k \cdot (k+1)^2 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.16. Ejercicio 16

### 2.16.A. Pregunta i

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n^2$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 1$

$$1^2 = 1$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k^2$

QpQ:  $a_{k+1} = (k+1)^2$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= (1 + \sqrt{a_k})^2 \\&= (1 + \sqrt{k^2})^2 \\&= (1 + k)^2\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.16.B. Pregunta ii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = 3^n$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 3$

$$3^1 = 3$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = 3^k$

QpQ:  $a_{k+1} = 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2 \cdot a_k + 3^k \\&= 2 \cdot 3^k + 3^k \\&= 3^k \cdot (2 + 1) \\&= 3^{k+1}\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.16.C. Pregunta iii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = (n-1)!$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 1$

$(1-1)! = 0! = 1$  (Por definición de 0!)

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = (k-1)!$

QpQ:  $a_{k+1} = k!$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= k \cdot a_k \\&= k \cdot (k-1)! \\&= k!\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

#### 2.16.D. Pregunta iv

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = \frac{n+1}{n}$

**Caso base n = 1**

Por definicion  $a_1 = 2$

$$\frac{1+1}{1} = 2$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

$$\text{HI: } a_k = \frac{k+1}{k}$$

$$\text{QpQ: } a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2 - \frac{1}{a_k} \\&= 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} \\&= 2 - \frac{k}{k+1} \\&= \frac{2(k+1) - k}{k+1} \\&= \frac{2k + 2 - k}{k+1} \\&= \frac{k+2}{k+1}\end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

#### 2.17. Ejercicio 17

##### 2.17.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : a_n = n!$

**Caso base n = 1**

Por definición,  $a_1 = 1$

$$1! = 1$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k!$

QpQ:  $a_{k+1} = (k+1)!$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k \cdot k! \\ &= k! + k \cdot k! \\ &= k! \cdot (k+1) \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.17.B. Pregunta ii

Defino  $p(n) : a_n = n^3$

**Caso base n = 1**

Por definición,  $a_1 = 1$

$$1^3 = 1$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : p(k) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k^3$

QpQ:  $a_{k+1} = (k+1)^3$

Pero,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

Luego  $p(k) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.18. Ejercicio 18

### 2.18.A. Pregunta i

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n!$

**Casos base n = 1 y n = 2**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 2$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k!$  y  $a_{k+1} = (k+1)!$

QpQ:  $a_{k+2} = (k+2)!$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+2} &= k \cdot a_{k+1} + 2 \cdot (k+1) \cdot a_k \\&= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1) \cdot k! \\&= k \cdot (k+1)! + 2 \cdot (k+1)! \\&= (k+1)! \cdot (k+2) \\&= (k+2)!\end{aligned}$$

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.18.B. Pregunta ii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n^2$

**Casos base  $n = 1$  y  $n = 2$**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 4$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = k^2$  y  $a_{k+1} = (k+1)^2$

QpQ:  $a_{k+2} = (k+2)^2$

Pero,

$$\begin{aligned}a_{k+2} &= 4 \cdot \sqrt{a_{k+1}} + a_k \\&= 4 \cdot \sqrt{(k+1)^2} + k^2 \\&= 4 \cdot (k+1) + k^2 \\&= k^2 + 4k + 4 \\&= (k+2)^2\end{aligned}$$

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 2.18.C. Pregunta iii

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Casos base  $n = 1$  y  $n = 2$**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 3$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k = \frac{k(k+1)}{2}$  y  $a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

QpQ:  $a_{k+2} = \frac{(k+2)(k+3)}{2} \iff 2 \cdot a_{k+2} = (k+2)(k+3)$

Pero,

$$\begin{aligned}
 2 \cdot a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k + 3k + 5 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} + 3k + 5 \\
 &= \frac{(k+1)(k+2) + k(k+1) + 6k + 10}{2} \\
 &= \frac{k^2 + k + 2k + 2 + k^2 + k + 6k + 10}{2} \\
 &= \frac{2k^2 + 10k + 12}{2} \\
 &= 2k^2 + 5k + 6 \\
 &= (k+2)(k+3)
 \end{aligned}$$

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.19. Ejercicio 19

### 2.19.A. Pregunta i

Defino  $p(n) : a_n < 1 + 3^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}$

**Casos base n = 1 y n = 2**

Por definición,  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 3$

$$1 + 3^{1-1} = 1 + 3^0 = 2$$

$$1 + 3^{2-1} = 1 + 3^1 = 4$$

Luego  $p(1); p(2)$  son verdaderos.

**Paso inductivo**

Para todo  $k \geq 1 : (p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1)$

HI:  $a_k < 1 + 3^{k-1}$  y  $a_{k+1} < 1 + 3^k$

QpQ:  $a_{k+2} < 1 + 3^{k+1}$

Pero,

$$\begin{aligned}
 a_{k+2} &= a_{k+1} + 5 \cdot a_k \\
 &< 1 + 3^k + 5 \cdot (1 + 3^{k-1}) \\
 &< 1 + 3^k + 5 + 5 \cdot 3^{k-1} \\
 a_{k+2} &< 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1}
 \end{aligned}$$

Luego alcanza probar que,

$$\begin{aligned}
 6 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 1 + 3^{k+1} \\
 5 + 3^k + 5 \cdot 3^{k-1} &\leq 3^{k+1} \\
 5 &\leq 3^{k+1} - 3^k - 5 \cdot 3^{k-1} \\
 5 &\leq 3^k \cdot (3 - 1 - \frac{5}{3}) \\
 5 &\leq 3^k \cdot \frac{17}{3}
 \end{aligned}$$

Que es verdadero  $\forall k \geq 1$ .

Luego  $(p(k) \wedge p(k+1)) \implies p(k+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Ahora busco una fórmula para el término general de la sucesión. Se ve que es una sucesión de Lucas, por lo tanto.

El polinomio asociado a la sucesión es:  $x^2 - x - 5 = 0$

Con raíces:  $\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\}$

Luego busco  $\alpha$  y  $\beta$  tales que:  $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta = 3 \end{cases}$

De la primer ecuación sale que:  $\beta = 1 - \alpha$

Reemplazando en la segunda,

$$\begin{aligned}
 \frac{1+\sqrt{21}}{2} \cdot \alpha + \frac{1-\sqrt{21}}{2} \cdot \beta &= 3 \\
 (1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot \beta &= 6 \\
 (1+\sqrt{21}) \cdot \alpha + (1-\sqrt{21}) \cdot (1-\alpha) &= 6 \\
 \alpha + \sqrt{21} \cdot \alpha + 1 - \alpha - \sqrt{21} + \sqrt{21} \cdot \alpha &= 6 \\
 2 \cdot \sqrt{21} \cdot \alpha &= 6 - 1 + \sqrt{21} \\
 \alpha &= \frac{5+\sqrt{21}}{2 \cdot \sqrt{21}}
 \end{aligned}$$

Así,  $\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{5+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}$

## 2.20. Ejercicio 20

TODO

## 2.21. Ejercicio 21

Luego de probar con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  conjeturo y defino  $p(n) : a_n = n!, \forall n \in \mathbb{N}$

**Casos base n = 1**

Por definición,  $a_1 = 1$

$1! = 1$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Quiero probar que  $(p(k) \wedge 1 \leq k \leq h) \implies p(h+1)$



HI:  $a_k = k!$

QpQ:  $a_{h+1} = (h+1)!$

TODO

## 2.22. Ejercicio 22

Defino  $p(n) : f^{3k}(x) = x; \forall k \in \mathbb{N}$

**Casos base  $n = 1$**

$$f^3(x) = f \circ f \circ f(x) = f \circ f\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.

**Paso inductivo**

Dado  $h \geq 1$  quiero probar que  $p(h) \implies p(h+1)$

HI:  $f^{3h}(x) = x$

QpQ:  $f^{3h+3}(x) = x$

Pero,

$$\begin{aligned} f^{3h+3}(x) &= f \circ f \circ f \dots f(x) \\ &= f \circ f \circ f(f^{3h}(x)) \\ &= f \circ f \circ f(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Luego  $p(h) \implies p(h+1); \forall k \geq 1$ , como se quería probar.

Así,  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.23. Ejercicio 23

TODO