



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Práctica 7

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

<b>7. Práctica 7</b>	<b>2</b>
7.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
7.2. Ejercicio 2 . . . . .	2
7.3. Ejercicio 3 . . . . .	3
7.4. Ejercicio 4 . . . . .	5
7.5. Ejercicio 5 . . . . .	6
7.6. Ejercicio 6 . . . . .	7
7.7. Ejercicio 7 . . . . .	7
7.8. Ejercicio 8 . . . . .	8
7.9. Ejercicio 9 . . . . .	8
7.10. Ejercicio 10 . . . . .	8
7.11. Ejercicio 11 . . . . .	9
7.12. Ejercicio 12 . . . . .	10
7.13. Ejercicio 13 . . . . .	10
7.14. Ejercicio 14 . . . . .	11
7.15. Ejercicio 15 . . . . .	11
7.16. Ejercicio 16 . . . . .	12
7.17. Ejercicio 17 . . . . .	13
7.18. Ejercicio 18 . . . . .	13
7.19. Ejercicio 19 . . . . .	14
7.20. Ejercicio 20 . . . . .	14
7.21. Ejercicio 21 . . . . .	14
7.22. Ejercicio 22 . . . . .	15
7.23. Ejercicio 23 . . . . .	15
7.24. Ejercicio 24 . . . . .	15
7.25. Ejercicio 25 . . . . .	16
7.26. Ejercicio 26 . . . . .	16
7.27. Ejercicio 27 . . . . .	16
7.28. Ejercicio 28 . . . . .	17
7.29. Ejercicio 29 . . . . .	17
7.30. Ejercicio 30 . . . . .	19
7.31. Ejercicio 31 . . . . .	20
7.32. Ejercicio 32 . . . . .	21
7.33. Ejercicio 33 . . . . .	21
7.34. Ejercicio 34 . . . . .	23
7.35. Ejercicio 35 . . . . .	24
7.36. Ejercicio 36 . . . . .	25
7.37. Ejercicio 37 . . . . .	25
7.38. Ejercicio 38 . . . . .	26
7.39. Ejercicio 39 . . . . .	26

## 7. Práctica 7

### 7.1. Ejercicio 1

Rdo. propiedades del producto y suma de polinomios:

- Grado de un producto de polinomios  $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$
- Coeficiente principal de un producto de polinomios  $cp(ab) = ca(a) \cdot cd(b)$
- $$\begin{cases} gr(f+g) \leq \max(gr(f); gr(g)) \\ gr(f+g) = \max(gr(f); gr(g)) \iff gr(f) \neq gr(g) \vee (gr(f) = gr(g) \wedge cp(f) \neq cp(g)) \end{cases}$$

#### 7.1.A. Pregunta i

- $gr(p) = 77.gr(4x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 7) = 77.6 = 462$
- $cp(p) = 4^{77}$

#### 7.1.B. Pregunta ii

Sea  $p = a^4 - b^7$  con  $a = -3x^7 + 5x^3 + x^2 - x + 5$  y  $b = 6x^4 + 2x^3 + x - 2$

$$\begin{aligned} gp(p) &= \max(gr(a^4); gr(b^7)) \iff gr(a^4) \neq gr(b^7) \vee cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= \max(7.4; 4.7) \iff cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= 28 \iff (-3)^4 \neq 6^7 \\ &= 28 \iff 81 \neq 279936 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 28$
- $cp(p) = 81 - 6^7$

#### 7.1.C. Pregunta iii

$$\text{Sea } p = a - b + c \text{ con } \begin{cases} a = (-3x^5 + x^4 - x + 5)^4 \\ b = 82x^{20} \\ c = 19x^{19} \end{cases}$$

Luego  $p = 81x^{20} + (\dots) - 81x^{20} + 19x^{19} \implies gr(p) = 19$  pues se cancelan los terminos con  $x^{20}$

Entonces busco el coeficiente para  $x^{19}$

$$\begin{aligned} cp(p) &= a_{19} + b_{19} + c_{19} \\ &= (-3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot 1) + 0 + 19 \\ &= -27 + 0 + 19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 19$
- $cp(p) = -8$

### 7.2. Ejercicio 2

1. a)  $\text{En } \mathbb{Q}[x] = 2$   
b)  $\text{En } \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[x] = 2$

2. Usando bin de Newton,  $c(20) = \binom{133}{20}(3i)^{113}$

3. Usando bin de Newton cuatro veces,

$$\begin{aligned} \blacksquare a_1 &= \binom{4}{1}x^1(-1)^3 \cdot \binom{19}{19}x^{19}5^0 = -4x^{20} \\ \blacksquare a_2 &= \binom{4}{2}x^2(-1)^2 \cdot \binom{19}{18}x^{18}5^1 = 570x^{20} \\ \blacksquare a_3 &= \binom{4}{3}x^3(-1)^1 \cdot \binom{19}{17}x^{17}5^2 = -17100x^{20} \\ \blacksquare a_4 &= \binom{4}{4}x^4(-1)^0 \cdot \binom{19}{16}x^{16}5^3 = 121125x^{20} \end{aligned}$$

$$\text{Luego } c(20) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 5 = -4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = 104586$$

4.  $c(20) = 21504$

### 7.3. Ejercicio 3

#### 7.3.A. Pregunta i

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} f^2 = xf + x + 1 &\iff f^2 - xf = x + 1 \\ &\iff f(f - x) = x + 1 \\ &\iff f \neq 0 \wedge f - x \neq 0 \end{aligned}$$

Tomo grado a ambos lados,

$$\begin{aligned} gr(f) + gr(f - x) &= gr(x + 1) \\ gr(f) + gr(f - x) &= 1 \end{aligned}$$

Luego el grado de f tiene que ser menor a 2.

#### Caso $gr(f) = 1$

Si  $gr(f) = 1 \implies gr(f - x) = 0$  para cumplir la igualdad de grados.

Luego f es de la forma  $f = ax + b$  con  $a = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff (x + b)(x + b - x) = x + 1 \\ &\iff xb + b^2 = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff b = 1 \end{aligned}$$

Así,  $f_1 = x + 1$

#### Caso $gr(f) = 0$

Que el grado del polinomio sea igual a cero implica que  $f = c$  con c una constante.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff c(c - x) = x + 1 \\ &\iff c^2 - cx = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} -c = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \implies c = -1 \end{aligned}$$

Así,  $f_2 = -1$

Rta.:  $f = x + 1$  y  $f = -1$

### 7.3.B. Pregunta ii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$f^2 - xf = x^2 + 1 \iff f(f - x) = -x^2 + 1$$

Tomo grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}
gr(f) + gr(f - x) &= gr(-x^2 + 1) \\
0 + 2 &= 2 \text{ No puede ser} \\
1 + 1 &= 2 \\
2 + 0 &= 2 \text{ No puede ser}
\end{aligned}$$

Así, el único caso posible es que  $gr(f) = 1$  y que  $gr(f - x) = 1$

Sea  $f = ax + b$ ,

$$\begin{aligned}
f(f - x) = -x^2 + 1 &\iff (ax + b)(ax + b - x) = -x^2 + 1 \\
&\iff (ax + b)((a - 1)x + b) = -x^2 + 1 \\
&\iff a(a - 1)x^2 + abx + b(a - 1)x + b^2 = -x^2 + 1 \\
&\iff a(a - 1)x^2 + (ab + b(a - 1))x + b^2 = -x^2 + 1 \\
&\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a(a - 1) = -1 \\ ab + b(a - 1) = 0 \\ b^2 = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Busco soluciones para el sistema de tres ecuaciones que resultó.

De la tercera, se que  $b = \pm 1$

$$b = 1 \implies a + a + 1 = 0 \iff 2a = -1 \iff a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pero con } a = -\frac{1}{2} \wedge b = 1 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq -1$$

Luego  $b = 1$  NO sirve.

$$b = -1 \implies -a - a + 1 = 0 \implies -2a = -1 \implies a = \frac{1}{2}$$

Se llega al mismo valor de a que con b=1 y ya se probó que no sirve.

Por lo tanto,  $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$  que cumpla lo pedido.

### 7.3.C. Pregunta iii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned}
(x + 1)f^2 = x^6 + xf &\iff (x + 1)f^2 - xf = x^6 \\
&\iff f((x + 1)f - x) = x^6
\end{aligned}$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}
gr(f) + gr((x + 1)f - x) &= gr(x^6) \\
0 + 6 &= 6 \\
1 + 5 &= 6 \\
2 + 4 &= 6 \\
3 + 3 &= 6 \\
4 + 2 &= 6 \\
5 + 1 &= 6 \\
6 + 0 &= 6
\end{aligned}$$

Luego de dar todos los posibles valores a  $gr(f)$ , se puede ver que no existe  $gr((x+1)f-x)$  que cumpla lo pedido. Por lo tanto,  $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$  que cumpla lo pedido.

### 7.3.D. Pregunta iv

Dado que por enunciado se que  $f \neq 0$ , puedo reescribir la igualdad como,

$$f^3 = gr(f) \cdot x^2 f \iff f^2 = gr(f) \cdot x^2$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$gr(f^2) = gr(gr(f) \cdot x^2)$$

$$gr(f^2) = 2$$

$$gr(f \cdot f) = 2$$

$$2gr(f) = 2$$

$$gr(f) = 1$$

Luego, con  $f = ax + b$ ,

$$f^2 = gr(f) \cdot x^2 \iff (ax + b)^2 = x^2$$

$$\iff a^2 x^2 + 2abx + b^2 = x^2$$

$$\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Entonces,  $a = \pm 1$  y  $b = 0$  son las soluciones del sistema.

Rta.:  $f_1 = x$  y  $f_2 = -x$  son los únicos polinomios que cumplen lo pedido.

## 7.4. Ejercicio 4

En estos ejercicios hay que hacer la división con la caja. Yo voy a dejar los resultados de cada paso de la división.

### 7.4.A. Pregunta i

1.  $C = 5x^2$ ;  $R = 2x^3 - 10x^2 - x + 4$
2.  $C = 2x$ ;  $R = -10x^2 - 5x + 4$
3.  $C = -10$ ;  $R = -5x - 16$

Rta:

- $C = 5x^2 + 2x - 10$
- $R = -5x - 16$

### 7.4.B. Pregunta ii

1.  $C = 2x^2$ ;  $R = x^3 - 2x^2 - 4$
2.  $C = \frac{1}{2}x$ ;  $R = -2x^2 - \frac{1}{2}x - 4$
3.  $C = -1$ ;  $R = -\frac{1}{2}x - 3$

Rta:

- $C = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- $R = -\frac{1}{2}x - 3$

### 7.4.C. Pregunta iii

1.  $C = x^{n-1}$ ;  $R = x^{n-1} - 1$
2.  $C = x^{n-2}$ ;  $R = x^{n-2} - 1$
3.  $C = \dots$ ;  $R = \dots$
4.  $C = 1$ ;  $R = 0$

Rta:

- $C = \sum_{i=1}^n x^{n-i}(x-1)$
- $R = 0$

## 7.5. Ejercicio 5

### 7.5.A. Pregunta i

Haciendo  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  dividido  $x^2 + ax + 1$  llego a:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x + 2 - a) + (1 - 2a + a^2)x - 1 + a$$

Luego busco que el resto  $(1 - 2a + a^2)x - 1 + a$  sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$(1 - 2a + a^2)x - 1 + a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2a + a^2 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se que  $-1 + a = 0 \iff a = 1$ .

Reemplazando en la primera y verifico que  $a = 1$  cumple lo pedido,  $1 - 2a + a^2 = 1 - 2 + 1 = 0$

Rta.:  $a = 1$

### 7.5.B. Pregunta ii

Haciendo  $x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1$  dividido  $x^2 + x + 1$  llego a:

$$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + (-a - 1)x + 2 + a) + 1 - 2 - a$$

Luego busco que el resto  $1 - 2 - a$  sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$1 - 2 - a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2 - a = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto  $a = -1$  es el único que lo cumple.

### 7.5.C. Pregunta iii

(Esta división es larga y pesada) Haciendo  $x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$  dividido  $x^2 + ax + 1$  llego a:

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 - ax^2 + (-4a^2)x + (-1 + 5a - a^3)) + [(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)]$$

Luego busco que el resto sea igual a  $-8x + 4$ ,

$$[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)] = -8x + 4 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} a^3 - 5a + 2 = 4 &\iff a^3 - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a(a^2 - 5) - 2 = 0 \end{aligned}$$

A simple vista veo que  $a = -2$  es solución, luego usando Ruffini,

$$a^3 - 5a - 2 = (a^2 - 2a - 1)(a + 2)$$

Por lo tanto busco soluciones para  $a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Queda ver cuales de estos valores de  $a$  hallados cumple la primer ecuación.

- $a = -2 \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 = 16 - 24 - 2 + 2 = -8$
- $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$  (Wolfram)
- $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$  (Wolfram)

## 7.6. Ejercicio 6

TODO

## 7.7. Ejercicio 7

### 7.7.A. Pregunta i

Por definición de congruencias se que  $x^{31} - 2 \equiv 0(x^{31} - 2) \implies x^{31} \equiv 2(x^{31} - 2)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{353} - x - 1 &\equiv (x^{31})^{11} \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2^{11} \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2048x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Rta.: } r_{x^{31}-2}(x^{353} - x - 1) = 2048x^{12} - x - 1$$

### 7.7.B. Pregunta ii

Se que  $x^6 + 1 | x^6 + 1 \iff x^6 + 1 \equiv 0(x^6 + 1) \iff x^6 \equiv -1(x^6 + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1 &\equiv (x^6)^{166} \cdot x^4 + (x^6)^6 \cdot x^4 + (x^6)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot x^4 + (-1)^6 \cdot x^4 + (-1)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv x^4 + x^4 - x^2 + 1 \\ &\equiv 2x^4 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Rta.: } r_{x^6+1}(x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1) = 2x^4 - x^2 + 1$$

### 7.7.C. Pregunta iii

Se que  $x^{100} - x + 1 \equiv 0(x^{100} - x + 1) \iff x^{100} \equiv x - 1(x^{100} - x + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{200} - 3x^{101} + 2 &\equiv (x^{100})^2 - 3(x^{100})x + 2 \\ &\equiv (x - 1)^2 - 3(x - 1)x + 2 \\ &\equiv x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv -2x^2 + x + 3(x^{100} - x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Rta.: } r_{x^{100}-x+1}(x^{200} - 3x^{101} + 2) = -2x^2 + x + 3$$



### 7.7.D. Pregunta iv

$$f = x^{3016} + 2x^{1833} - x^{174} + x^{137} + 2x^4 - x^3 + 1$$

Según el ejercicio 4iii:  $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \implies x^5 \equiv 1(g)$

$$x^{3016} + 2x^{1833} - x^{174} + x^{137} + 2x^4 - x^3 + 1 \equiv (x^5)^{603} \cdot x + 2(x^5)^{366} x^3 - (x^5)^{34} x^4 + (x^5)^{27} x^2 + 2x^4 - x^3 + 1 \equiv x + 2x^3 - x^4 + x^2 + 2x^4 - x^3 + 1 \equiv 0(g)$$

## 7.8. Ejercicio 8

### 7.8.A. Pregunta i

Probar que  $x - a \mid x^n - a^n$  en  $K[x]$

$$x - a \mid x^n - a^n \iff x^n - a^n \equiv 0(x - a)$$

Caso base:  $x - a \mid x - a$

Paso inductivo:

$$\text{HI: } x - a \mid x^n - a^n \text{ qpq } x - a \mid x^{n+1} - a^{n+1}$$

Pero

$$x^{n+1} - a^{n+1} = x \cdot x^n - a \cdot a^n = (x^n - a^n) \cdot x + a^n x - a a^n \stackrel{\text{HI}}{=} (x - a) k x + a^n x - a a^n = (x - a) k x + (x - a) a^n = (x - a)(k x + a^n)$$

Entonces como  $(k x + a^n) \in K$

$\implies$  Por inducción queda probado que  $x - a \mid x^n - a^n \forall n \in \mathbb{N}$

### 7.8.B. Pregunta ii

Probar que si  $n$  es impar entonces  $x + a \mid x^n + a^n$  en  $K[X]$

$x + a = x - (-a) \implies$  por i:  $x - (-a) \mid x^n - (-a)^n \implies$  ya que  $n$  es impar  $x + a \mid x^n + a^n \forall n \in \mathbb{N}$  impar

### 7.8.C. Pregunta iii

Probar que si  $n$  es par entonces  $x + a \mid x^n + a^n$  en  $K[X]$

$x + a = x - (-a) \implies x - (-a) \mid x^n - (-a)^n = x^n - a^n \implies x + a \mid x^n - a^n$  como quería probar

Calcular los cocientes en cada caso:

Caso i:  $x - a \mid x^n - a^n$

Haciendo el algoritmo de división entre  $x^n - a^n$  por  $x - a$  termino conjeturando:  $x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots + a^{n-2} x^{n-(n-1)} + a^{n-1}$   
 $\implies \text{COCIENTE} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-(k+1)}$

Caso ii: Otra vez haces el algoritmo de división pero entre  $x^n + a^n$  y  $x + a$ , de donde sale que es lo mismo que antes pero va variando con  $+$  y  $- \implies \text{COCIENTE} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-(k+1)} \cdot (-1)^k$

## 7.9. Ejercicio 9

Se resuelve con el algoritmo de Euclides en polinomios. Calculadora de MCD de polinomios <https://planetcalc.com/7760/>

1.  $\blacksquare \text{ MCD} = -x + 1$
2.  $\blacksquare \text{ MCD} = x^2 + 1$   
 $\blacksquare x^2 + 1 = f + (-x^3)g$
3.  $\blacksquare \text{ MCD} = 3$   
 $\blacksquare 3 = (-x + 2)f + (1 + 2x^2 - 4x)g$

## 7.10. Ejercicio 10

Se que el resto tiene que tener grado menor al divisor, luego  $gr(r) \leq 2$

Por algoritmo de división de polinomios existen  $q$  cociente y  $r$  resto tales que:

$$f = q(x^3 - 2x^2 - x + 2) + r$$

El enunciado me da las evaluaciones de  $f$  en  $1; 2; -1$ , luego

$$\begin{aligned} f(1) &= q(1)(1 - 2 - 1 + 2) + r(1) \implies f(1) = r(1) = -2 \\ f(2) &= q(1)(8 - 8 - 2 + 2) + r(2) \implies f(2) = r(2) = 1 \\ f(-1) &= q(1)(-1 - 2 + 1 + 2) + r(-1) \implies f(-1) = r(-1) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto se que  $r$  es de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a; b; c \in \mathbb{Q}$ , luego

$$\begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Restando la tercera a la primera,  $2b = -2 \iff b = -1$

Rearmando el sistema con lo hallado,

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 3 \\ a + c = -1 \end{cases}$$

La tercera es igual a la primera así que la puedo eliminar y restando la primera a la segunda:

$$3a = 4 \iff a = \frac{4}{3}$$

$$\text{Luego } a + c = -1 \iff \frac{4}{3} + c = -1 \iff c = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Así, } r_{x^3-2x^2-x+2}(f) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}$$

## 7.11. Ejercicio 11

$$\text{Sea } f = x^{2n} + 3x^{n+1} + 3x^n - 5x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Sea } g = x^3 - x$$

$$\text{Se que } f = q \cdot g + r \text{ con } \deg(r) \leq 2 \implies r = ax^2 + bx + c$$

Busco raíces de  $g$ ,

$$\begin{aligned} x^3 - x = 0 &\iff x(x^2 - 1) = 0 \\ &\iff x \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Evalúo  $f$  para las raíces halladas,

$$\begin{aligned} f(0) &= q(0)g(0) + r(0) \implies r(0) = 1 \\ f(1) &= q(1)g(1) + r(1) \implies r(1) = 1 + 3 + 3 - 5 + 2 + 1 = 5 \\ f(-1) &= q(-1)g(-1) + r(-1) \implies r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 - 1 = -5 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, sabiendo que } r(x) = ax^2 + bx + c \begin{cases} r(0) = 1 = c \\ r(1) = 5 = a + b + c \\ r(-1) = -5 = 25a - 5b + c \end{cases}$$

$$\text{Sabiendo } c = 1 \implies \begin{cases} a + b = 4 \implies a = 4 - b \\ 25a - 5b = -6 \end{cases}$$

Sabiendo  $a = 4 - b \implies$

$$\begin{aligned}25(4 - b) - 5b &= -6 \\100 - 25b - 5b &= -6 \\-30b &= -106 \\b &= \frac{53}{15}\end{aligned}$$

Luego  $a = 4 - b \implies a = 4 - \frac{53}{15} = \frac{7}{15}$

$$\text{Así, } r_f(g) = \frac{7}{15}x^2 + \frac{53}{15}x + 1$$

## 7.12. Ejercicio 12

Sea  $w = x^3$

Sea  $g = w^2 + w - 2$

Busco raíces de  $g$

$$g(w) = 0 \iff w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -2}}{2} \iff \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, recordando que  $w = x^3$ ,

$$w_1 = x^3 = 1 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Y,

$$w_2 = x^3 = -2 \iff \begin{cases} x_4 = -\sqrt[3]{2} \\ x_5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

## 7.13. Ejercicio 13

Por definición de raíz,  $w + w^2 + w^4$  es raíz de  $f \iff f(w + w^2 + w^4) = 0$

Luego se que,

- $w = e^{\frac{2}{7}\pi i}$
- $w^2 = e^{\frac{4}{7}\pi i}$
- $w^4 = e^{\frac{8}{7}\pi i}$

Luego defino,

- $r = \operatorname{Re}(w + w^2 + w^4) = \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{8}{7}\pi = -\frac{1}{2}$
- $m = \operatorname{Im}(w + w^2 + w^4) = \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Luego evalúo  $f$  en  $k = r + m.i$

$$\begin{aligned}f(k) &= (r + m.i)^2 + (r + m.i) + 2 \\&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i\right) + 2 \\&= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}.i - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i + 2 \\&= 0\end{aligned}$$

## 7.14. Ejercicio 14

### 7.14.A. Pregunta i

Me piden probar que  $(w + w^{-1})$  y  $(w^2 + w^{-2})$  son raíces de  $f$ .

$$\begin{aligned}w + w^{-1} &= e^{\frac{2}{5}\pi i} + e^{-\frac{2}{5}\pi i} \\&= \cos \frac{2}{5}\pi + \cos -\frac{2}{5}\pi + i \left( \sin \frac{2}{5}\pi + \sin -\frac{2}{5}\pi \right) \\&= \cos \left( \frac{2}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{2}{5}\pi \right)\end{aligned}$$

Luego sea  $A = \cos \left( \frac{2}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{2}{5}\pi \right) \implies f(A) = A^2 + A - 1 = 0$

Así,  $(w + w^{-1})$  es raíz de  $f$ .

$$\begin{aligned}w^2 + w^{-2} &= e^{\frac{4}{5}\pi i} + e^{-\frac{4}{5}\pi i} \\&= \cos \frac{4}{5}\pi + \cos -\frac{4}{5}\pi + i \left( \sin \frac{4}{5}\pi + \sin -\frac{4}{5}\pi \right) \\&= \cos \left( \frac{4}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{4}{5}\pi \right)\end{aligned}$$

Luego sea  $B = \cos \left( \frac{4}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{4}{5}\pi \right) \implies f(B) = B^2 + B - 1 = 0$

Así,  $(w^2 + w^{-2})$  es raíz de  $f$ .

### 7.14.B. Pregunta ii

TODO

## 7.15. Ejercicio 15

### 7.15.A. Pregunta i

$a$  es raíz de  $f \iff (x - a)|f \iff f = n(x - a)$

$a$  es raíz de  $g \iff (x - a)|g \iff f = m(x - a)$

Por propiedades del MCD se que existen  $s, t$  tales que,

$$\begin{aligned}(f : g) = sf + tg &\iff (f : g) = sn(x - a) + tm(x - a) \\&\iff (f : g) = (x - a) \cdot (sn + tm) \\&\iff (x - a)|(f : g)\end{aligned}$$

Luego  $(x - a)|(f : g) \iff (x - a)$  es raíz de  $(f : g)$  como se quería probar.

### 7.15.B. Pregunta ii

Primero busco el MCD entre  $x^4 + 3x - 2$  y  $x^4 + 3x^3 - 3x + 1$

(Acá van las cuentas del algo de Euclides)

Luego  $MCD = x^2 + x - 1$

Busco raíces del MCD,

$$\begin{aligned}x^2 + x - 1 = 0 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} \\ &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Luego que  $f$  teng auna raíz común con  $g \implies (f : g) | f$

$$x^2 + x - 1 | x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \iff x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = q(x^2 + x - 1)$$

(Acá va la división)

Obtengo que,  $x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1)$

Ahora busco raíces de  $x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned}x^2 - x + 2 = 0 &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

Luego las raíces de  $f$  son:

- $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
- $x_3 = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}$
- $x_4 = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2}$

## 7.16. Ejercicio 16

### 7.16.A. Pregunta i

La idea es evaluar en la función y sus derivadas hasta encontrar la derivada en la que no vale cero.

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - 2 + 1 = 0 \implies \text{mult}(1, f) \geq 1 \\ f'(x) &= 5x^4 - 6x^2 + 1 \\ f'(1) &= 5 - 6 + 1 = 0 \implies \text{mult}(1, f) \geq 2 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x \\ f''(1) &= 20 - 12 \neq 0 \implies \text{mult}(1, f) = 2\end{aligned}$$

### 7.16.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned}f(x) &= x^6 - 3x^4 + 4 \\ f(i) &= (i^2)^3 - 3(i^2)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0 \implies \text{mult}(i, f) \geq 1 \\ f'(x) &= 6x^5 - 12x^3 \\ f'(i) &= 6(i^2)^2 \cdot i - 12(i^2) \cdot i = 6i + 12i \neq 0 \implies \text{mult}(i, f) = 1\end{aligned}$$

### 7.16.C. Pregunta iii

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-2)^2 \cdot (x^2-4) + (x-2)^3 \cdot (x-1) \\f(2) &= 0+0=0 \implies \text{mult}(2, f) \geq 1 \\f'(x) &= 2(x-2) \cdot (x^2-4) + (x-2)^2 \cdot 2x + 3(x-2)^2 \cdot (x-1) + (x-2)^3 \\f'(x) &= 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 \\f'(2) &= 0+0+0+0=0 \implies \text{mult}(2, f) \geq 2 \\f''(x) &= 24x^2 - 66x + 36 \\f''(2) &= 96 - 264 + 36 = 0 \implies \text{mult}(2, f) \geq 3 \\f'''(x) &= 48x - 66 \\f'''(2) &= 96 - 66 = 30 \neq 0 \implies \text{mult}(2, f) = 3\end{aligned}$$

### 7.17. Ejercicio 17

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que  $f$  tiene raíces simples si  $\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}f'(x) &= (n+1)nx^n - n(n+1)x^{n-1} \\&= (n+1)nx^{n-1}(x-1) = 0 \iff x \in \{0, 1\}\end{aligned}$$

Por lo tanto las unicas posibles raíces multiples son  $x_0 = 0; x_1 = 1$

Queda ver los valores de  $a$  tales que  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  son iguales a cero,

$$\begin{aligned}f(0) &= a = 0 \iff a = 0 \\f(1) &= n - (n+1) + a = 0 \iff a = n+1 - n = 1\end{aligned}$$

Rta.:  $f$  tiene raíces simples  $\iff a \in \{0, 1\}$

### 7.18. Ejercicio 18

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que  $f$  tiene raíces multiples si  $\exists a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

Luego,

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2n+1)x^{2n} - (2n+1) \\&= (2n+1)(x^{2n} - 1) = 0 \iff x = \pm 1\end{aligned}$$

Entonces busco los  $a$  tales que  $f(1) = 0$  y  $f(-1) = 0$

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - (2n+1) + a = 0 \iff a = 2n \iff a \equiv 0(2) \\f(-1) &= (-1)^{2n+1} - (2n+1)(-1) + a = -1 + 2n + 1 + a = 0 \iff a = -2n \iff a \equiv 0(2)\end{aligned}$$

Rta.: Tiene raíces multiples  $\forall a \in \mathbb{C} : a \equiv 0(2)$

### 7.19. Ejercicio 19

Al igual que en los anteriores, primero busco la derivada y busco los valores para los que es igual a cero.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 20x^{19} + 80x^9 = 0 \\20x^9(x^{10} + 4) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{10} = -4)\end{aligned}$$

Luego  $x = 0$  es raíz múltiple de  $f$  si  $a = 0$  y tiene multiplicidad 10.

Ahora veo el caso  $x^{10} = -4$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^{10})^2 + 8x^{10} + 2a \\f(x) &= (-4)^2 + 8(-4) + 2a \iff 0 = 16 - 32 + 2a \iff a = 8\end{aligned}$$

Luego si  $a = 8$ , los  $x$  tales que  $x^{10} = -4$  serán raíces múltiples de  $f$ , dado que  $gr(f) = 20 \implies f$  tiene 20 raíces en  $\mathbb{C}$ . Dado que existen 10  $x$  tales que  $x^{10} = -4 \implies f$  tiene 10 raíces de multiplicidad 2.

### 7.20. Ejercicio 20

Por propiedades de las raíces múltiples, se que  $f$  tiene raíz múltiple  $\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) = 0$

Luego busco los  $x$  tales que  $f'(x) = 0$ ,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 68x^{67} - 68x^3 = 68x^3(x^{64} - 1) \\ \implies f'(x) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{64} = 1)\end{aligned}$$

Si  $x = 0$ ,  $f(0) = 16 \neq 0$ . Luego no es raíz de  $f$ .

Si  $x^{64} = 1$ ,

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{64} \cdot x^4 - 17x^4 - 16 = 0 \\x^4 - 17x^4 - 16 &= 0 \\x^4(1 - 17) &= 16 \\x^4 &= -1\end{aligned}$$

Luego los  $\alpha$  que cumplen lo pedido son  $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \in G_{64} \wedge \alpha^4 = -1\}$

Pero se que,

$$a^{64} = (a^4)^{16} = (-1)^{16} = 1$$

Luego si  $a^4 = -1 \implies a \in G_{64}$

Y los  $\alpha$  tales que  $\alpha^4 = -1$  son:

- $\alpha_0 = e^{\frac{1}{4}\pi i}$
- $\alpha_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$
- $\alpha_2 = e^{\frac{5}{4}\pi i}$
- $\alpha_3 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Y cada uno de ellos tiene  $mult(\alpha_i, f) = 2$

### 7.21. Ejercicio 21

Para este ejercicio se puede usar la regla de la división de Ruffini, [Calculadora de Ruffini](#)

### 7.21.A. Pregunta i

Probado usando Ruffini

### 7.21.B. Pregunta ii

Usando ruffini queda resto igual a  $a + 2$ , luego  $f$  es divisible por  $(x - 1)^3 \iff a + 2 = 0 \iff a = -2$

### 7.22. Ejercicio 22

Busco  $a$  tales que

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f''(1) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 1 - a - 3 + 2 + 3a - 2a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies \text{mult}(1, f) \geq 1 \\
 f'(x) &= 4x^3 - 3ax^2 - 6x + 2 + 3a \\
 f'(1) &= 4 - 3a + 6 + 2 + 3a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies \text{mult}(1, f) \geq 2 \\
 f''(x) &= 12x^2 - 6ax + 6 \\
 f''(1) &= 12 - 6a - 6 = 12 - 6a
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } f(1) \neq 0 \iff 12 - 6a \neq 0 \iff 12 = 6a \iff a = 2$$

Rta.: 1 es raíz doble de  $f$  para  $a = 2$

### 7.23. Ejercicio 23

$f$  tiene raíces simples  $\iff \forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Si defino  $f_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

$$\text{Luego } f' = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f_{n-1}$$

Ahora supongo  $f_n(a) = 0$  y quiero ver que  $f_{n-1}(a) \neq 0$

$$\text{Pero, } f_{n-1}(a) = f_n(a) - \frac{\alpha^n}{n!} = 0 - \frac{\alpha^n}{n!} \neq 0; \forall \alpha \neq 0$$

Y si  $\alpha = 0 \implies f_n(0) = 1 \neq 0 \implies x = 0$  no es raíz de  $f_n$  como se quería probar.

### 7.24. Ejercicio 24

Demostración usando inducción

$$\text{Defino } p(n) : f_n(i) = 0 \wedge f'_n(i) = 0 \wedge f''_n(i) \neq 0$$

**Caso base  $n = 1$**

$$\begin{aligned}
 f_1(i) &= 1 - 2 + 1 = 0 \\
 f'_1(x) &= 4x^3 + 4x \\
 f'_1(i) &= -4i + 4i = 0 \\
 f''_1(x) &= 12x^2 + 4 \\
 f''_1(i) &= -12 + 4 \neq 0
 \end{aligned}$$

Luego  $p(1)$  es verdadero.



### Paso inductivo

Dado  $h \geq 1$  quiero probar que  $p(h) \implies p(h+1)$

HI:  $f_h(i) = 0 \wedge f'_h(i) = 0 \wedge f''_h(i) \neq 0$

Qpq:  $f_{h+1}(i) = 0 \wedge f'_{h+1}(i) = 0 \wedge f''_{h+1}(i) \neq 0$

Pero,

$$\begin{aligned}f_{h+1} &= (x-i)(f_h + f'_h) \implies f_{h+1}(i) = (i-i)(f_h(i) + f'_h(i)) = 0 \\f'_{h+1} &= (f_h + f'_h) + (x-i)(f'_h + f''_h) \implies f'_{h+1}(i) = 0 + (i-i)(f'_h + f''_h) = 0 \\f''_{h+1} &= f'_h + f''_h + f'_h + f''_h + (x-i)(f'_h + f''_h) \implies f''_{h+1}(i) = 0 + f''_h + 0 + f''_h + 0 = 2f''_h \neq 0\end{aligned}$$

Luego  $p(h) \implies p(h+1); \forall h \geq 1$

Por lo tanto  $p(n)$  es verdadero,  $\forall n \in \mathbb{N}$

## 7.25. Ejercicio 25

TODO

## 7.26. Ejercicio 26

TODO

## 7.27. Ejercicio 27

Rdo. raíces en  $\mathbb{Q}[x]$ : Sea  $f \in \mathbb{Z}[x] : \frac{c}{d}$  es raíz de  $f \iff c|a_n \wedge d|a_0$  con  $c \in \mathbb{Z}; d \in \mathbb{N}$

### 7.27.A. Pregunta i

Usando el rdo, busco posibles candidatos:

$$\begin{aligned}c &\in Div(-1) = \{\pm 1\} \\d &\in Div_+(2) = \{1, 2\} \\\implies \frac{c}{d} &\in \{\pm 1; \pm \frac{1}{2}\}\end{aligned}$$

Evalúo en cada uno de los posibles candidatos y llego a que los únicos  $a$  que cumplen  $f(a) = 0$  son

- $a = \frac{1}{2}$
- $a = -1$

### 7.27.B. Pregunta ii

El criterio de Gauss para encontrar raíces enteras, solo funciona con  $f \in \mathbb{Z}[x]$

Luego tengo que transformar el polinomio en  $\mathbb{Q}$  a uno en  $\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned}f &= x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 3 \\2f &= h = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + x^2 - 7x - 3\end{aligned}$$

Así,  $\frac{c}{d}$  es raíz de  $h \iff \begin{cases} c| -6 \implies c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \\ d| 2 \implies d \in \{1, 2\} \end{cases}$

Evaluando en los candidatos hallados, encuentro que las raíces racionales de  $f$  son:  $\{2, -\frac{3}{2}\}$

### 7.27.C. Pregunta iii

Usando el criterio de Gauss,

$$f\left(\frac{c}{d}\right) = 0 \iff \begin{cases} c \mid -2 \implies c \in \{\pm 1, \pm 2\} \\ d \mid 1 \implies d = 1 \end{cases}$$

Entonces las posibles raíces enteras de  $f$  son  $\{\pm 1, \pm 2\}$

Evaluando en los cuatro posibles candidatos se llega a que ninguna anula  $f$ . Luego  $f$  no tiene raíces enteras.

## 7.28. Ejercicio 28

### 7.28.A. Pregunta i

$$f = x^2 + 6x - 2$$

Usando la resolvente cuadrática,  $x = \frac{-6 \pm w}{2}$  con  $w^2 = 36 - 4 \cdot -2 = 44$

Luego,

$$x_1 = -3 + \sqrt{11}$$

$$x_2 = -3 - \sqrt{11}$$

Entonces,

$f = x^2 + 6x - 2$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$  pues es de grado 2 son raíces en  $\mathbb{Q}$

$f = (x - (3 + \sqrt{11})) \cdot (x - (3 - \sqrt{11}))$  es la factorización en  $\mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$  pues los factores son polinomios irred de gr 1

### 7.28.B. Pregunta ii

$$f = x^2 + x - 6$$

Usando la resolvente,  $x = \frac{-1 \pm w}{2}$  con  $w^2 = 1 - 4 \cdot -6 = 25$

Luego,

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

Entonces,

$$f = (x - 2)(x + 3) \text{ es la factorización en } \mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$$

### 7.28.C. Pregunta iii

$$f = x^2 - 2x + 10$$

Usando la resolvente,  $x = \frac{2 \pm w}{2}$  con  $w^2 = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 \implies w = 6i$

Luego,

$$x_1 = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$$

$$x_2 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$$

Por lo tanto,

$f = x^2 - 2x + 10$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$

$f = (x - (1 + 3i)) \cdot (x - (1 - 3i))$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

## 7.29. Ejercicio 29

### 7.29.A. Pregunta i

$$f = x^2 + (1 + 2i)x + 2i$$

Usando la resolvente,  $x = \frac{-(1+2i) \pm w}{2}$  con  $w$  tal que,

$$\begin{aligned}w^2 &= (1+2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2i \\w^2 &= (1+2i)(1+2i) - 8i \\w^2 &= 1+2i+2i-4-8i \\w^2 &= -3-4i\end{aligned}$$

Luego busco los  $w = a + bi$  tales que  $w^2 = -3 - 4i$

Pero  $w^2 = (a + bi) \cdot (a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi$  y  
 $|w^2| = |-3 - 4i| \iff |w|^2 = 5 \iff a^2 + b^2 = 5$

Usando la igualdad de números complejos,

$$w^2 = -3 - 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Luego (1) + (3)  $\implies 2a^2 = 2 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$

Luego (3) - (1)  $\implies 2b^2 = 8 \iff b^2 = 4 \iff b = \pm 2$

Usando (2):  $w_1 = 1 - 2i; w_2 = -1 + 2i$

Con los  $w$  hallados, busco los  $x$ ;

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-1 - 2i + 1 - 2i}{2} = -2i \\x_2 &= \frac{-1 - 2i - 1 + 2i}{2} = -1\end{aligned}$$

Luego  $f = (x + 2i)(x + 1)$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.29.B. Pregunta ii

$$f = x^8 - 1$$

Luego busco los  $\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \iff \alpha^8 = 1 \implies \alpha \in G_8$

Y se que el grupo  $G_8 = \{c \in \mathbb{C} : c = e^{\frac{2k\pi i}{8}}; 0 \leq k \leq 7\}$

Por lo tanto,  $f = \prod_{k=0}^7 (x - e^{\frac{2k\pi i}{8}})$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.29.C. Pregunta iii

$$f = x^6 - (2 - 2i)^{12}$$

Idem ejercicio anterior, busco los  $\alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \iff \alpha^6 = (2 - 2i)^{12}$

Ahora voy a usar la forma polar para hallar los  $\alpha$  que cumplen lo pedido.

Defino  $\alpha = |\alpha| \cdot e^{\theta i} \implies \alpha^6 = |\alpha|^6 \cdot e^{6\theta i}$

Además,  $2 - 2i = |2 - 2i| \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i} = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Luego  $(2 - 2i)^{12} = (\sqrt{8})^{12} \cdot e^{12 \cdot \frac{7}{4}\pi i} = 262144 \cdot e^{21\pi i}$

Por lo tanto usando la igualdad de números complejos,

$$\alpha^6 = (2 - 2i)^{12} \iff \begin{cases} |\alpha|^6 = 262144 \implies |\alpha| = 8 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}0 &\leq \theta < 2\pi \\0 &\leq \frac{\pi + 2k\pi}{6} < 2\pi \\0 &\leq 2k < 12 \\0 &\leq k < 6\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f = \prod_{k=0}^5 (x - 8 \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi i}{6}})$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.30. Ejercicio 30

#### 7.30.A. Pregunta i

$$f = x^6 - 9$$

Veo que  $x^6 = (x^3)^2$  y  $9 = 3^2$  por lo tanto,  $x^6 - 9$  es diferencia de cuadrados.

Así,  $f = (x^3 - 3)(x^3 + 3)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$  pues los factores no tienen raíces en  $\mathbb{Q}$

Ahora defino  $g = x^3 - 3$  y  $h = x^3 + 3$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned}g(x) = 0 &\iff x^3 = 3 \\&\iff x = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{3}}; 0 \leq k \leq 2\end{aligned}$$

Luego las raíces de g son,

$$\begin{aligned}\blacksquare x_1 &= \sqrt[3]{3} \\ \blacksquare x_2 &= -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[6]{243}i}{2} \\ \blacksquare x_3 &= -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[6]{243}i}{2}\end{aligned}$$

Ahora busco raíces de h,

$$h(x) = 0 \iff x^3 = -3$$

Defino  $\beta = |\beta| \cdot e^{\theta i} \implies \beta^3 = |\beta|^3 \cdot e^{3\theta i}$

Y se que  $-3 = 3 \cdot e^{\pi i}$

Usando la igualdad de números complejos,  $\beta^3 = -3 \iff \begin{cases} |\beta|^3 = 3 \implies |\beta| = \sqrt[3]{3} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \implies \theta = \frac{\pi+2k\pi}{3}; 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$

Luego las raíces de h son,

$$\begin{aligned}\blacksquare x_1 &= \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{243}i}{2} \\ \blacksquare x_2 &= \sqrt[3]{3} \cdot e^{\pi i} = -\sqrt[3]{3} \\ \blacksquare x_3 &= \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{5}{3}\pi i} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{243}i}{2}\end{aligned}$$

Luego queda armar la factorización del polinomio, con todas las raíces halladas.  $\square$

### 7.30.B. Pregunta ii

**En**  $\mathbb{Q}[x]$

Se ve fácil que no tiene raíces en  $\mathbb{Q}$ . Pero el hecho de que sea un polinomio de grado 4 sin raíces, no quiere decir que no sea irreducible en  $\mathbb{Q}$  ya que podría ser producto de dos polinomios de grado 2.

Luego,

$$\begin{aligned}x^4 + 3 &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\&= x^4 + (c + a)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + cb)\end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios, 
$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = a + c \\ 0 = b + d + ac \\ 1 = bd \end{cases}$$

Con un poco de manipulación del sistema, se llega a que no existen soluciones  $a, b, c, d$  que cumplan todas las restricciones.

Luego  $f$  es irreducible en  $\mathbb{Q}[x]$

**En**  $\mathbb{C}[x]$

Busco los  $\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^4 = -3$

Los  $\alpha$  que lo cumplen son:

- $\alpha_1 = \sqrt[4]{3}$
- $\alpha_2 = -\sqrt[4]{3}$
- $\alpha_3 = \sqrt[4]{3}i$
- $\alpha_4 = -\sqrt[4]{3}i$

Luego,  $f = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3}i)(x + \sqrt[4]{3}i)$  es la factorización de  $f$  en  $\mathbb{C}[x]$

**En**  $\mathbb{R}[x]$

Agrupo los conjugados de las raíces complejas.

Luego,  $f = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})$  es la factorización de  $f$  en  $\mathbb{R}[x]$

### 7.30.C. Pregunta iii

$$f = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$$

**En**  $\mathbb{Q}[x]$

Usando el criterio de Gauss, obtengo candidatos en  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Evaluando, obtengo que  $x = -1$  y  $x = 2$  son raíces de  $f$ .

Luego,  $f = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$

**En**  $\mathbb{R}[x]$

Dado que  $(x^2 + 3)$  no tiene raíces reales,  $f = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 3)$  es la factorización en  $\mathbb{R}[x]$

**En**  $\mathbb{C}[x]$

Busco las raíces complejas de  $(x^2 + 3)$ ,

Luego,  $f = (x + 1)(x - 2)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.31. Ejercicio 31

TODO

### 7.32. Ejercicio 32

Quiero usar la suma geométrica, por lo que separo en casos  $a = 1$  y  $a \neq 1$

$a = 1 \implies f(1) = n \neq 0 \implies a = 1$  no es raíz de  $f$

$a \neq 1 \implies f(a) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = 0 \iff a^{n+1} = 1 \iff a \in G_{n+1} - \{1\}$

Luego  $\#(G_{n+1} - \{-1\}) = n + 1 - 1 = n \implies f$  tiene  $n$  raíces  $\implies$  todas las raíces deben ser simples, como se quería probar.

### 7.33. Ejercicio 33

#### 7.33.A. Pregunta i

Rdo.: Sea  $a + b\sqrt{d}; a, b, c \in \mathbb{Q}; \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}; b \neq 0; d > 0 \implies (x - (a + b\sqrt{d}))(x - (a - b\sqrt{d}))|f$

Luego dado que  $2 - \sqrt{3}$  es raíz, por el rdo,  $2 + \sqrt{3}$  también lo es  $\implies (x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3}))|f$

$$\begin{aligned}(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3})) &= x^2 - 2x + \sqrt{3}x - 2x + 4 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 3 \\ &= x^2 + (-2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3})x + (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3) \\ &= x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Por lo tanto se que  $x^2 + 4x + 1|f$

Usando el algoritmo de división,  $f = (x^2 + 4x + 1)(x^3 - 2x + 1)$

Sea ahora  $g = x^3 - 2x + 1$

Busco raíces de  $g$ . Veo a simple vista que  $g(1) = 0 \implies x = 1$  es raíz de  $g$ .

Usando Ruffini, llego a que  $g = (x - 1)(x^2 + x - 1)$

Defino  $h = x^2 + x - 1$ ,  $h = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Usando todo lo hallado,

- $f = (x^2 - 4x + 1)(x - 1)(x^2 + x - 1)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3})(x - 1)(x - (\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}))(x - (\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}))$  es la factorización en  $\mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$

#### 7.33.B. Pregunta ii

Se que  $1 + 2i$  es raíz  $\iff 1 - 2i$  es raíz  $\implies (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))|f$

Luego  $(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) = x^2 - 2x + 5$

Usando el algoritmo de división obtengo que  $f = (x^2 - 2x + 5)(x^3 + 2x^2 - 2x + 3)$

Defino  $g = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

Por el lema de Gauss, las posibles raíces enteras de  $g$  son  $\{\pm 1; \pm 3\}$

Evaluando, obtengo que  $-3$  es raíz de  $g$

Usando ruffini,  $g = (x + 3)(x^2 - x + 1)$

Sea ahora  $h = x^2 - x + 1$ , busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$h(x) = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

Luego  $h = (x - (\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}))$

Con todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - x + 1)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x^2 - 2x + 5)(x + 3)(x^2 - x + 1)$  es la factorización en  $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))(x + 3)(x - (\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}))$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.33.C. Pregunta iii

Se que  $a$  es raíz con  $\text{mult}(a, f) = n \iff f^n(a) = 0 \wedge f^{n+1}(a) \neq 0$

Luego busco la multiplicidad de  $\sqrt{2}i$  sabiendo que es raíz multiple  $\implies f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 30x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 24x + 16 \\ f''(\sqrt{2}i) &= 30(\sqrt{2}i)^4 + 20(\sqrt{2}i)^3 + 60(\sqrt{2}i)^2 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\ &= 30 \cdot 4 - 20\sqrt{8}i - 60 \cdot 2 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\ &= 120 - 40\sqrt{2}i - 120 + 24(\sqrt{2}i) + 16 \\ &= -40\sqrt{2}i + 24(\sqrt{2}i) + 16 \neq 0 \implies \text{mult}(\sqrt{2}i, f) = 2 \end{aligned}$$

Luego  $(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) | f \implies (x^2 + 2)^2 | f \implies x^4 + 4x^2 + 4 | f$

Usando ahora el algoritmo de división,  $f = (x^4 + 4x^2 + 4)(x^2 + x + 1)$

Defino  $g = x^2 + x + 1$  y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$$\text{Luego } g = (x - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}))$$

Con lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^2$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}))(x - \sqrt{2}i)^2(x + \sqrt{2}i)^2$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.33.D. Pregunta iv

Se que existe una raíz imaginaria pura, es decir del tipo  $bi$

Luego  $bi$  es raíz de sii,

$$\begin{aligned} f(bi) = 0 &\iff (bi)^4 + 2(bi)^3 + 3(bi)^2 + 10(bi) - 10 = 0 \\ &\iff b^4 - 2b^3i - 3b^2 + 10bi - 10 = 0 \\ &\iff b^4 - 3b^2 - 10 + (-2b^3 + 10b)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} b^4 - 3b^2 - 10 = 0 \\ -2b^3 + 10b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtengo que  $b = 0 \vee b = \pm\sqrt{5}$

Reemplazando en la primera  $b = 0 \implies 0^4 - 3 \cdot 0^2 - 10 = -10 \neq 0 \implies b = 0$  no sirve.

Y reemplazando en la primera  $b = \sqrt{5} \implies (\sqrt{5})^4 - 3(\sqrt{5})^2 - 10 = 0 \implies b = \sqrt{5}$  sirve.

Luego  $\pm\sqrt{5}i$  son raíces de  $f \iff (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) | f$

Por lo tanto,  $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = (x^2 + 5) | f$

Usando el algoritmo de division, obtngo que  $f = (x^2 + 5)(x^2 + 2x - 2)$

Defino  $g = x^2 + 2x - 2$  y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

$$\text{Luego } g = (x - 1)(x + 3)$$

Con lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 + 5)(x - 1)(x + 3)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]$
- $f = (x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i)(x - 1)(x + 3)$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.33.E. Pregunta v

Se que sea  $g$  un polinomio,  $g|f \wedge g|x^3 + 1 \implies g|(f : x^3 + 1)$ , luego busco  $MCD(f, x^3 + 1)$

Usando el algoritmo de Euclides,  $MCD(f, x^3 + 1) = x^2 - x + 1$

Por lo tanto, se que  $x^2 - x + 1|f$

Usando el algoritmo de división,  $f = (x^2 - x + 1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 10)$

Defino  $h = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$  y busco sus raíces.

Usando el lema de Gauss obtengo posibles candidatos a raíces enteras:  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Evaluando en los candidatos obtengo que  $x = 2$  es raíz de  $h$ .

Usando Ruffini,  $h = (x - 2)(x^2 - 5)$

Defino  $k = x^2 - 5$  y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego,  $k = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

Defino  $m = x^2 - x + 1$  y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego,  $m = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$

Con todo lo hallado armo las factorizaciones.

- $f = (x^2 - x + 1)(x - 2)(x^2 - 5)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x^2 - x + 1)(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$  es la factorización en  $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))(x - 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.34. Ejercicio 34

$a \in \mathbb{Q}$  es raíz doble  $f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0 \wedge f''(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^3 - 3(a+4)x^2 + 2(4a+5)x - (5a+2) \\f''(x) &= 12x^2 - 6(a+4)x + 8a + 10\end{aligned}$$

Ahora busco los  $a$  que cumplan lo pedido, evalúo  $f$  en  $a$ ,

$$\begin{aligned}f(a) = 0 &\iff a^4 - (a+4)a^3 + (4a+5)a^2 - (5a+2)a + 2a = 0 \\&\iff a^4 - a^4 - 4a^3 + 4a^3 + 5a^2 - 5a^2 - 2a + 2a = 0 \\&\iff 0 = 0\end{aligned}$$

Luego  $f(a) = 0; \forall a \in \mathbb{Q}$

Ahora evalúo  $f'$  en  $a$ ,

$$\begin{aligned}f'(a) = 0 &\iff 4a^3 - 3(a+4)a^2 + 2(4a+5)a - (5a+2) = 0 \\&\iff 4a^3 - 3a^3 - 12a^2 + 8a^2 + 10a - 5a - 2 = 0 \\&\iff a^3 - 4a^2 + 5a - 2 = 0\end{aligned}$$

Luego busco las raíces enteras de  $g = a^3 - 4a^2 + 5a - 2$

Usando el lema de Gauss, los candidatos son:  $\{\pm 1, \pm 2\}$

Evaluando obtengo que 1 es raíz de  $g$ . Usando Ruffini obtengo que,

$$g = (a - 1)(a^2 - 3a + 2)$$

Luego defino  $h = a^2 - 3a + 2$  y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.



Obtengo que  $h = (a - 1)(a - 2)$

Por lo tanto,  $g = (a - 1)^2(a - 2)$

Entonces los únicos valores de  $a$  tales que la derivada primera se anula son  $a = 1; a = 2$

Ahora, para que sean raíces dobles no deben anular la derivada segunda,

$$\begin{aligned}f''(1) \neq 0 &\iff 12 \cdot 1^2 - 6(1 + 4)1 + 8 \cdot 1 + 10 \neq 0 \\&\iff 12 - 30 + 8 + 10 \neq 0 \\&\iff 0 \neq 0\end{aligned}$$

Luego  $a = 1$  no cumple lo pedido.

$$\begin{aligned}f''(2) \neq 0 &\iff 12 \cdot 2^2 - 6(2 + 4)2 + 8 \cdot 2 + 10 \neq 0 \\&\iff 12 \cdot 4 - 6 \cdot 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 10 \neq 0 \\&\iff 48 - 72 + 16 + 10 \neq 0 \\&\iff 2 \neq 0\end{aligned}$$

Luego  $a = 2$  cumple lo pedido.

Entonces,  $f = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$

Se que  $a = 2$  es raíz doble  $\iff (x - 2)^2 | f \iff (x^2 - 4x + 4) | f$

Usando el algoritmo de división,  $f = (x - 2)^2(x^2 - 2x + 1)$

Y se ve que  $x^2 - 2x + 1$  tiene forma del binomio cuadrático  $(x - 1)^2$

Por lo tanto,  $f = (x - 2)^2(x - 1)^2$  es la factorización de  $f$  en  $\mathbb{Q}[x]; \mathbb{R}[x]; \mathbb{C}[x]$

### 7.35. Ejercicio 35

Se que  $w \in G_6$  es raíz de  $f$  pero  $w \notin G_3$

Luego  $w^6 = 1 \implies (w^2)^3 = 1 \iff w^2 = 1 \implies w = -1$

Entonces busco  $a \in \mathbb{C} : (x + 1) | f$

$$\begin{aligned}f(-1) = 0 &\iff 1 - 1 - 3 - 2 + 1 + 3 + a = 0 \\&\iff -1 + a = 0 \\&\iff a = 1\end{aligned}$$

Luego  $f = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 1$

Usando el lema de Gauss y Ruffini obtengo las raíces enteras y la factorización de  $f$ .

Luego  $f = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 2x - 1)$

Usando la resolvente cuadrática,

$$(x^2 - x + 1) = (x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}))(x - (-1 - \sqrt{2}))$$

$$(x^2 + 2x - 1) = (x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (\sqrt{2} - 1))$$

Luego,

- $f = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 2x - 1)$  es la factorización en  $\mathbb{Q}[x]$
- $f = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (\sqrt{2} - 1))$  es la factorización en  $\mathbb{R}[x]$
- $f = (x - 1)(x + 1)(x - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}))(x - (-1 - \sqrt{2}))(x - (\sqrt{2} - 1))$  es la factorización en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.36. Ejercicio 36

#### 7.36.A. Pregunta i

Por TFA se que  $x^2|(f : f')$  y que  $(x^2 + 1)|(f : f')$

Luego,

$$\begin{aligned}f(0) = 0 \wedge f'(0) = 0 \wedge \text{mult}(0, f') = 2 &\implies \text{mult}(0, f) = 3 \\f(1) = 0 \wedge f'(1) = 0 \wedge \text{mult}(1, f') = 1 &\implies \text{mult}(1, f) = 2 \\f(-1) = 0 \wedge f'(-1) = 0 \wedge \text{mult}(-1, f') = 1 &\implies \text{mult}(-1, f) = 2\end{aligned}$$

Por lo tanto para cumplir la primer condición,  $f = x^3(x - 1)^2(x + 1)^2$  es el de menor grado que cumple lo pedido.

#### 7.36.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned}(f : f') &= x^5 - 5x^4 + \frac{25}{4}x^3 \\(f : f') &= x^3(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) \\(f : f') &= x^3(x - \frac{5}{2})^2\end{aligned}$$

Luego  $f = x^4(x - \frac{5}{2})^3$

$$\begin{aligned}f(1) = 3 &\iff a \cdot 1 \cdot (1 - \frac{5}{2})^3 = 3 \\&\iff a \cdot (-\frac{3}{2})^3 = 3 \\&\iff a = 3 \cdot -\frac{8}{27} = -\frac{8}{9}\end{aligned}$$

Luego  $f = -\frac{8}{9}x^3(x - \frac{5}{2})^2$

#### 7.36.C. Pregunta iii

TODO

#### 7.36.D. Pregunta iv

TODO

### 7.37. Ejercicio 37

Sea  $g = \alpha x^3 + \beta x^2 + \sigma x + \theta$  un polinomio genérico de grado 3 con raíces  $a, b, c$

$$\begin{aligned}g &= \alpha((x - a)(x - b)(x - c)) \\&= \alpha((x^2 - bx - ax + ab)(x - c)) \\&= \alpha(x^3 - x^2c - bx^2 + bcx - ax^2 + acx + abx - abc) \\&= \alpha(x^3 + (-a - b - c)x^2 + (bc + ac + ab)x - abc) \\&= \alpha x^3 + \alpha(-a - b - c)x^2 + \alpha(bc + ac + ab)x - \alpha abc\end{aligned}$$

Luego,

- $-\frac{\beta}{\alpha} = a + b + c$
- $\frac{\sigma}{\alpha} = bc + ac + ab$
- $-\frac{\theta}{\alpha} = abc$

Ahora sea  $f = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \implies \alpha = 2; \beta = -3; \sigma = 4; \theta = 1$  con  $a, b, c$  raíces de  $f$ .

- $a + b + c = \frac{3}{2}$
- $ab + ac + bc = \frac{4}{2} = 2$
- $abc = -\frac{1}{2}$

## 7.38. Ejercicio 38

### 7.38.A. Pregunta i

Se que tiene una raíz real, luego  $\exists a \in \mathbb{R} : f(a) = 0$ , la busco.

$$\begin{aligned}
 f(a) = 0 &\iff a^4 - (i+4)a^3 + (8+4i)a^2 - (2i+24)a + 12 = 0 \\
 &\iff a^4 - a^3i + 4a^3 + 8a^2 + 4a^2i - 2ai - 24a + 12 = 0 \\
 &\iff (a^4 + 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12) + (-a^3 + 4a^2 - 2a)i = 0 \\
 &\iff \begin{cases} a^4 + 4a^3 + 8a^2 - 24a + 12 = 0 \\ -a^3 + 4a^2 - 2a = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Del sistema obtengo que  $a = 2 \pm \sqrt{2}$  cumplen lo pedido

Luego  $(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))|f \iff (x^2 - 4x + 2)|f$

Usando el algoritmo de división,  $f = (x^2 - 4x + 2)(x^2 - ix + 6)$

Defino  $g = x^2 - ix + 6$  y busco sus raíces usando la resolvente cuadrática.

Luego  $g = (x - 3i)(x + 3i)$

Y por lo tanto,  $f = (x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))(x - 3i)(x + 3i)$  es la factorización de  $f$  en  $\mathbb{C}[x]$

### 7.38.B. Pregunta ii

TODO

## 7.39. Ejercicio 39

TODO