DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 7

2do cuatrimestre 2021 — Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	`ypajarino@dc.uba.ar`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

7. Práctica 7

7.1. Ejercicio 1

Rdo. propiedades del producto y suma de polinomios:

- Grado de un producto de polinomios $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$
- Coeficiente principal de un prodcuto de polinomios $cp(ab) = ca(a) \cdot cd(b)$
- $\begin{cases} gr(f+g) \leq max(gr(f); gr(g)) \\ gr(f+g) = max(gr(f); gr(g)) \iff gr(f) \neq gr(g) \vee (gr(f) = gr(g) \wedge cp(f) \neq cp(g)) \end{cases}$

7.1.A. Pregunta i

- $gr(p) = 77.gr(4x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 7) = 77.6 = 462$
- $cp(p) = 4^{77}$

7.1.B. Pregunta ii

Sea $p = a^4 - b^7$ con $a = -3x^7 + 5x^3 + x^2 - x + 5$ y $b = 6x^4 + 2x^3 + x - 2$

$$\begin{aligned} gp(p) &= max(gr(a^4); gr(b^7)) \iff gr(a^4) \neq gr(b^7) \vee cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= max(7.4; 4.7) \iff cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= 28 \iff (-3)^4 \neq 6^7 \\ &= 28 \iff 81 \neq 279936 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 28$
- $cp(p) = 81 - 6^7$

7.1.C. Pregunta iii

Sea $p = a - b + c$ con $\begin{cases} a = (-3x^5 + x^4 - x + 5)^4 \\ b = 82x^{20} \\ c = 19x^{19} \end{cases}$

Luego $p = 81x^{20} + (...) - 81x^{20} + 19x^{19} \implies gr(p) = 19$ pues se cancelan los termino con x^{20}

Entonces busco el coeficiente para x^{19}

$$\begin{aligned} cp(p) &= a_{19} + b_{19} + c_{19} \\ &= (-3. - 3. - 3.1) + 0 + 19 \\ &= -27 + 0 + 19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 19$
- $cp(p) = -8$

7.2. Ejercicio 2

1. *a*) En $\mathbb{Q}[x] = 2$

   b) En $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[x] = 2$

2. Usando bin de Newton, $c(20) = \binom{133}{20}(3i)^{113}$
3. Usando bin de Newton cuatro veces,
   - $a_1 = \binom{4}{1}x^1(-1)^3 \cdot \binom{19}{19}x^{19}5^0 = -4x^{20}$
   - $a_2 = \binom{4}{2}x^2(-1)^2 \cdot \binom{19}{18}x^{18}5^1 = 570x^{20}$
   - $a_3 = \binom{4}{3}x^3(-1)^1 \cdot \binom{19}{17}x^{17}5^2 = -17100x^{20}$
   - $a_4 = \binom{4}{4}x^4(-1)^0 \cdot \binom{19}{16}x^{16}5^3 = 121125x^{20}$

   Luego $c(20) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 5 = -4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = 104586$
4. $c(20) = 21504$

7.3. Ejercicio 3

7.3.A. Pregunta i

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} f^2 = xf + x + 1 &\iff f^2 - xf = x + 1 \\ &\iff f(f - x) = x + 1 \\ &\iff f \neq 0 \wedge f - x \neq 0 \end{aligned}$$

Tomo grado a ambos lados,

$$\begin{aligned} &gr(f) + gr(f - x) = gr(x + 1) \\ &gr(f) + gr(f - x) = 1 \end{aligned}$$

Luego el grado de f tiene que se menor a 2.

Caso gr(f) = 1

Si $gr(f) = 1 \implies gr(f - x) = 0$ para cumplir la igualdad de grados.

Luego f es de la forma $f = ax + b$ con $a = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff (x + b)(x + b - x) = x + 1 \\ &\iff xb + b^2 = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff b = 1 \end{aligned}$$

Así, $f_1 = x + 1$

Caso gr(f) = 0

Que el grado del polinomio sea igual a cero implica que $f = c$ con c una constante.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(f - x) = x + 1 &\iff c(c - x) = x + 1 \\ &\iff c^2 - cx = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} -c = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \implies c = -1 \end{aligned}$$

Así, $f_2 = -1$

Rta.: $f = x + 1$ y $f = -1$

7.3.B. Pregunta ii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$f^2 - xf = x^2 + 1 \iff f(f - x) = -x^2 + 1$$

Tomo grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr(f - x) &= gr(-x^2 + 1) \\ 0 + 2 &= 2 \text{ No puede ser} \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 + 0 &= 2 \text{ No puede ser} \end{aligned}$$

Así, el único caso posible es que $gr(f) = 1$ y que $gr(f - x) = 1$

Sea $f = ax + b$,

$$\begin{aligned} f(f - x) = -x^2 + 1 &\iff (ax + b)(ax + b - x) = -x^2 + 1 \\ &\iff (ax + b)((a - 1)x + b) = -x^2 + 1 \\ &\iff a(a - 1)x^2 + abx + b(a - 1)x + b^2 = -x^2 + 1 \\ &\iff a(a - 1)x^2 + (ab + b(a - 1))x + b^2 = -x^2 + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} a(a - 1) = -1 \\ ab + b(a - 1) = 0 \\ b^2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Busco soluciones para el sistema de tres ecuaciones que resultó.

De la tercera, se que $b = \pm 1$

$b = 1 \implies a + a + 1 = 0 \iff 2a = 1 \iff a = \frac{1}{2}$

Pero con $a = \frac{1}{2} \wedge b = 1 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq -1$

Luego $b = 1$ NO sirve.

$b = -1 \implies -a - a + 1 = 0 \implies -2a = -1 \implies a = \frac{1}{2}$

Se llega al mismo valor de a que con b=1 y ya se probó que no sirve.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.C. Pregunta iii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} (x + 1)f^2 = x^6 + xf &\iff (x + 1)f^2 - xf = x^6 \\ &\iff f((x + 1)f - x) = x^6 \end{aligned}$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr((x + 1)f - x) &= gr(x^6) \\ 0 + 6 &= 6 \\ 1 + 5 &= 6 \\ 2 + 4 &= 6 \\ 3 + 3 &= 6 \\ 4 + 2 &= 6 \\ 5 + 1 &= 6 \\ 6 + 0 &= 6 \end{aligned}$$

Luego de dar todos los posibles valores a $gr(f)$, se puede ver que no existe $gr((x+1)f - x)$ que cumpla lo pedido.

Por lo tanto, $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$ que cumpla lo pedido.

7.3.D. Pregunta iv

Dado que por enunciado se que $f \neq 0$, puedo reescribir la igualdad como,

$$f^3 = gr(f) \cdot x^2 f \iff f^2 = gr(f) \cdot x^2$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f^2) &= gr(gr(f) \cdot x^2) \\ gr(f^2) &= 2 \\ gr(f.f) &= 2 \\ 2gr(f) &= 2 \\ gr(f) &= 1 \end{aligned}$$

Luego, con $f = ax + b$,

$$\begin{aligned} f^2 = gr(f) \cdot x^2 &\iff (ax+b)^2 = x^2 \\ &\iff a^2x^2 + 2abx + b^2 = x^2 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, $a = \pm 1$ y $b = 0$ son las soluciones del sistema.

Rta.: $f_1 = x$ y $f_2 = -x$ son los únicos polinomios que cumplen lo pedido.

7.4. Ejercicio 4

En estos ejercicios hay que hacer la división con la caja. Yo voy a dejar los resultados de cada paso de la división.

7.4.A. Pregunta i

1. C $= 5x^2$; R $= 2x^3 - 10x^2 - x + 4$
2. C $= 2x$; R $= -10x^2 - 5x + 4$
3. C $= -10$; R $= -5x - 16$

Rta:

- C $= 5x^2 + 2x - 10$
- R $= -5x - 16$

7.4.B. Pregunta ii

1. C $= 2x^2$; R $= x^3 - 2x^2 - 4$
2. C $= \frac{1}{2}x$; R $= -2x^2 - \frac{1}{2}x - 4$
3. C $= -1$; R $= -\frac{1}{2}x - 3$

Rta:

- C $= 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- R $= -\frac{1}{2}x - 3$

7.4.C. Pregunta iii

1. C = x^{n-1}; R = $x^{n-1} - 1$
2. C = x^{n-2}; R = $x^{n-2} - 1$
3. C = ...; R = ...
4. C = 1; R = 0

Rta:

- C = $\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}(x-1)$
- R = 0

7.5. Ejercicio 5

7.5.A. Pregunta i

Haciendo $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x + 2 - a) + \left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a$$

Luego busco que el resto $\left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$\left(1 - 2a + a^2\right) x - 1 + a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2a + a^2 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se que $-1 + a = 0 \iff a = 1$.

Reemplazando en la primera y verifico que $a = 1$ cumple lo pedido, $1 - 2a + a^2 = 1 - 2 + 1 = 0$

Rta.: $a = 1$

7.5.B. Pregunta ii

Haciendo $x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1$ dividido $x^2 + x + 1$ llego a:

$$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + (-a - 1)x + 2 + a) + 1 - 2 - a$$

Luego busco que el resto $1 - 2 - a$ sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$1 - 2 - a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2 - a = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $a = -1$ es el único que lo cumple.

7.5.C. Pregunta iii

(Esta división es larga y pesada) Haciendo $x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$ dividido $x^2 + ax + 1$ llego a:

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 - ax^2 + (-4a^2)x + (-1 + 5a - a^3)) + \left[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)\right]$$

Luego busco que el resto sea igual a $-8x + 4$,

$$\left[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)\right] = -8x + 4 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} a^3 - 5a + 2 = 4 &\iff a^3 - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a(a^2 - 5) - 2 = 0 \end{aligned}$$

A simple vista veo que $a = -2$ es solución, luego usando Ruffini,

$$a^3 - 5a - 2 = (a^2 - 2a - 1)(a + 2)$$

Por lo tanto busco soluciones para $a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Queda ver cuales de estos valores de a hallados cumple la primer ecuación.

- $a = -2 \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 = 16 - 24 - 2 + 2 = -8$
- $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)
- $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$ (Wolfram)

7.6. Ejercicio 6

TODO

7.7. Ejercicio 7

7.7.A. Pregunta i

Por definición de congruencias se que $x^{31} - 2 \equiv 0(x^{31} - 2) \implies x^{31} \equiv 2(x^{31} - 2)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{353} - x - 1 &\equiv (x^{31})^1 1 \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2^1 1 \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2048x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^{31}-2}(x^{353} - x - 1) = 2048x^{12} - x - 1$

7.7.B. Pregunta ii

Se que $x^6 + 1 | x^6 + 1 \iff x^6 + 1 \equiv 0(x^6 + 1) \iff x^6 \equiv -1(x^6 + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1 &\equiv (x^6)^{166} \cdot x^4 + (x^6)^6 \cdot x^4 + (x^6)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot x^4 + (-1)^6 \cdot x^4 + (-1)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv x^4 + x^4 - x^2 + 1 \\ &\equiv 2x^4 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^6+1}(x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1) = 2x^4 - x^2 + 1$

7.7.C. Pregunta ii

Se que $x^{100} - x + 1 \equiv 0(x^{100} - x + 1) \iff x^{100} \equiv x - 1(x^{100} - x + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{200} - 3x^{101} + 2 &\equiv (x^{100})^2 - 3(x^{100})x + 2 \\ &\equiv (x - 1)^2 - 3(x - 1)x + 2 \\ &\equiv x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv -2x^2 + x + 3(x^{100} - x + 1) \end{aligned}$$

Rta.: $r_{x^{100}-x+1}(x^{200} - 3x^{101} + 2) = -2x^2 + x + 3$

7.8. Ejercicio 8

TODO

7.9. Ejercicio 9

Se resuelve con el algoritmo de Euclides en polinomios. Calculadora de MCD de polinomios https://planetcalc.com/7760/

1. - $MCD = -x + 1$
2. - $MCD = x^2 + 1$
   - $x^2 + 1 = f + (-x^3)g$
3. - $MCD = 3$
   - $3 = (-x + 2)f + (1 + 2x^2 - 4x)g$

7.10. Ejercicio 10

Se que el resto tiene que tener grado menor al divisor, luego $gr(r) \leq 2$

Por algoritmo de división de polinomios existen q cociente y r resto tales que:

$$f = q(x^3 - 2x^2 - x + 2) + r$$

El enunciado me da las evaluaciones de f en $1; 2; -1$, luego

$$f(1) = q(1)(1 - 2 - 1 + 2) + r(1) \implies f(1) = r(1) = -2$$
$$f(2) = q(1)(8 - 8 - 2 + 2) + r(2) \implies f(2) = r(2) = 1$$
$$f(-1) = q(1)(-1 - 2 + 1 + 2) + r(-1) \implies f(-1) = r(-1) = 0$$

Por lo tanto se que r es de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a; b; c \in \mathbb{Q}$, luego

$$\begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Restando la tercera a la primera, $2b = -2 \iff b = -1$

Rearmando el sistema con lo hallado,

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 3 \\ a + c = -1 \end{cases}$$

La tercera es igual a la primera así que la puedo eliminar y restando la primera a la segunda:

$3a = 4 \iff a = \frac{4}{3}$

Luego $a + c = -1 \iff \frac{4}{3} + c = -1 \iff c = -\frac{7}{3}$

Así, $r_{x^3-2x^2-x+2}(f) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}$

7.11. Ejercicio 11

Sea $f = x^{2n} + 3x^{n+1} + 3x^n - 5x^2 + 2x + 1$
Sea $g = x^3 - x$

Se que $f = q.g + r$ con $gr(r) \leq 2 \implies r = ax^2 + bx + c$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned} x^3 - x = 0 &\iff x(x^2-1) = 0 \\ &\iff x \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Evalúo f para las raíces halladas,

$$\begin{aligned} f(0) = q(0)g(0) + r(0) &\implies r(0) = 1 \\ f(1) = q(1)g(1) + r(1) &\implies r(1) = 1 + 3 + 3 - 5 + 2 + 1 = 5 \\ f(-1) = q(-1)g(-1) + r(-1) &\implies r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 - 1 = -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, sabiendo que $r(x) = ax^2 + bx + c$ $\begin{cases} r(0) = 1 = c \\ r(1) = 5 = a + b + c \\ r(-1) = -5 = 25a - 5b + c \end{cases}$

Sabiendo $c = 1 \implies \begin{cases} a + b = 4 \implies a = 4 - b \\ 25a - 5b = -6 \end{cases}$

Sabiendo $a = 4 - b \implies$

$$\begin{aligned} 25(4-b) - 5b &= -6 \\ 100 - 25b - 5b &= -6 \\ -30b &= -106 \\ b &= \frac{53}{15} \end{aligned}$$

Luego $a = 4 - b \implies a = 4 - \frac{53}{15} = \frac{7}{15}$

Así, $r_f(g) = \frac{7}{15}x^2 + \frac{53}{15}x + 1$

7.12. Ejercicio 12

Sea $w = x^3$

Sea $g = w^2 + w - 2$

Busco raíces de g

$$g(w) = 0 \iff w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1. - 2}}{2} \iff \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, recordando que $w = x^3$,

$$w_1 = x^3 = 1 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Y,

$$w_2 = x^3 = -2 \iff \begin{cases} x_4 = -\sqrt[3]{2} \\ x_5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

7.13. Ejercicio 13

Por definición de raíz, $w + w^2 + w^4$ es raíz de f $\iff f(w + w^2 + w^4) = 0$

Luego se que,

- $w = e^{\frac{2}{7}\pi i}$
- $w^2 = e^{\frac{4}{7}\pi i}$
- $w^4 = e^{\frac{8}{7}\pi i}$

Luego defino,

- $r = Re(w + w^2 + w^4) = \cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{8}{7}\pi = -\frac{1}{2}$
- $m = Im(w + w^2 + w^4) = \sin\frac{2}{7}\pi + \sin\frac{4}{7}\pi + \sin\frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Luego evalúo f en $k = r + m.i$

$$\begin{aligned}
f(k) &= (r + m.i)^2 + (r + m.i) + 2 \\
&= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i)^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i) + 2 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}.i - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

7.14. Ejercicio 14

7.14.A. Pregunta i

Me piden probar que $(w + w^{-1})$ y $(w^2 + w^{-2})$ son raíces de f.

$$\begin{aligned}
w + w^{-1} &= e^{\frac{2}{5}\pi i} + e^{-\frac{2}{5}\pi i} \\
&= \cos\frac{2}{5}\pi + \cos-\frac{2}{5}\pi + i\left(\sin\frac{2}{5}\pi + \sin-\frac{2}{5}\pi\right) \\
&= \cos(\frac{2}{5}\pi) + \cos(-\frac{2}{5}\pi)
\end{aligned}$$

Luego sea $A = \cos(\frac{2}{5}\pi) + \cos(-\frac{2}{5}\pi) \implies f(A) = A^2 + A - 1 = 0$
Así, $(w + w^{-1})$ es raíz de f.

$$\begin{aligned}
w^2 + w^{-2} &= e^{\frac{4}{5}\pi i} + e^{-\frac{4}{5}\pi i} \\
&= \cos\frac{4}{5}\pi + \cos-\frac{4}{5}\pi + i\left(\sin\frac{4}{5}\pi + \sin-\frac{4}{5}\pi\right) \\
&= \cos(\frac{4}{5}\pi) + \cos(-\frac{4}{5}\pi)
\end{aligned}$$

Luego sea $B = \cos(\frac{4}{5}\pi) + \cos(-\frac{4}{5}\pi) \implies f(B) = B^2 + B - 1 = 0$
Así, $(w^2 + w^{-2})$ es raíz de f.

7.14.B. Pregunta ii

TODO

7.15. Ejercicio 15

7.15.A. Pregunta i

a es raíz de $f \iff (x-a)|f \iff f = n(x-a)$
a es raíz de $g \iff (x-a)|g \iff f = m(x-a)$

Por propiedades del MCD se que existen s, t tales que,

$$\begin{aligned}(f:g) = sf + tg &\iff (f:g) = sn(x-a) + tm(x-a)\\ &\iff (f:g) = (x-a)\cdot(sn+tm)\\ &\iff (x-a)|(f:g)\end{aligned}$$

Luego $(x-a)|(f:g) \iff (x-a)$ es raíz de $(f:g)$ como se quería probar.

7.15.B. Pregunta ii

Primero busco el MCD entre $x^4 + 3x - 2$ y $x^4 + 3x^3 - 3x + 1$

(Acá van las cuentas del algo de Euclides)

Luego $MCD = x^2 + x - 1$

Busco raíces del MCD,

$$\begin{aligned}x^2 + x - 1 = 0 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1. - 1}}{2}\\ &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Luego que f teng auna raíz común con g $\implies (f:g)|f$

$$x^2 + x - 1 | x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \iff x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = q(x^2 + x - 1)$$

(Acá va la división)

Obtengo que, $x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1)$

Ahora busco raíces de $x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned}x^2 - x + 2 = 0 &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}\\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

Luego las raíces de f son:

- $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- $x_3 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$
- $x_4 = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$

7.16. Ejercicio 16

7.16.A. Pregunta i

La idea es evaluar en la función y sus derivadas hasta encontrar la derivada en la que no vale cero.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1-2+1=0 \implies mult(1,f) \geq 1 \\
f'(x) &= 5x^4-6x^2+1 \\
f'(1) &= 5-6+1=0 \implies mult(1,f) \geq 2 \\
f''(x) &= 20x^3-12x \\
f''(1) &= 20-12 \neq 0 \implies mult(1,f) = 2
\end{aligned}$$

7.16.B. Pregunta ii

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^6-3x^4+4 \\
f(i) &= (i^2)^3-3(i^2)^2+4=-1-3+4=0 \implies mult(i,f) \geq 1 \\
f'(x) &= 6x^5-12x^3 \\
f'(i) &= 6(i^2)^2.i-12(i^2).i=6i+12i \neq 0 \implies mult(i,f) = 1
\end{aligned}$$

7.16.C. Pregunta iii

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-2)^2 \cdot (x^2-4)+(x-2)^3 \cdot (x-1) \\
f(2) &= 0+0=0 \implies mult(2,f) \geq 1 \\
f'(x) &= 2(x-2) \cdot (x^2-4)+(x-2)^2 \cdot 2x+3(x-2)^2 \cdot (x-1)+(x-2)^3 \\
f'(x) &= 8x^3-33x^2+36x-4 \\
f'(2) &= 0+0+0+0=0 \implies mult(2,f) \geq 2 \\
f''(x) &= 24x^2-66x+36 \\
f''(2) &= 96-264+36=0 \implies mult(2,f) \geq 3 \\
f'''(x) &= 48x-66 \\
f'''(2) &= 96-66=30 \neq 0 \implies mult(2,f) = 3
\end{aligned}$$

7.17. Ejercicio 17

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que f tiene raíces simples si $\forall a \in \mathbb{C} : f(a)=0 \implies f'(a) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (n+1)nx^n-n(n+1)x^{n-1} \\
&= (n+1)nx^{n-1}(x-1)=0 \iff x \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto las unicas posibles raíces multiples son $x_0=0; x_1=1$

Queda ver los valores de a tales que $f(x_1)$, $f(x_2)$ son iguales a cero,

$$\begin{aligned}
f(0)=a=0 &\iff a=0 \\
f(1)=n-(n+1)+a=0 &\iff a=n+1-n=1
\end{aligned}$$

Rta.: f tiene raíces simples $\iff a \in \{0,1\}$

7.18. Ejercicio 18

Por propiedades de la multiplicidad de raíces, se que f tiene raíces multiples si $\exists a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \wedge f'(a) = 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2n+1)x^{2n} - (2n+1) \\ &= (2n+1)(x^{2n} - 1) = 0 \iff x = \pm 1 \end{aligned}$$

Entonces busco los a tales que $f(1) = 0$ y $f(-1) = 0$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - (2n+1) + a = 0 \iff a = 2n \iff a \equiv 0(2) \\ f(-1) &= (-1)^{2n+1} - (2n+1)(-1) + a = -1 + 2n + 1 + a = 0 \iff a = -2n \iff a \equiv 0(2) \end{aligned}$$

Rta.: Tiene raíces multiples $\forall a \in \mathbb{C} : a \equiv 0(2)$

7.19. Ejercicio 19

Al igual que en los anteriores, primero busco la derivada y busco los valores para los que es igual a cero.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^{19} + 80x^9 = 0 \\ 2x^9(x^{10} + 40) &= 0 \iff (x = 0) \vee (x^{10} = -40) \end{aligned}$$

Luego $x = 0$ es raíz multiple de f sii $a = 0$ y tiene multiplicidad 10.

Ahora veo el caso $x^{10} = -40$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^{10})^2 + 8x^{10} + 2a \\ f(x) = (-40)^2 + 8(-40) + 2a &\iff a = 640 \end{aligned}$$

Luego si $a = 640$, los x tales que $x^{10} = -40$ serán raíces multiples de f, dado que $gr(f) = 20 \implies$ f tiene 20 raíecs en $\mathbb{C}$. Dado que existen 10 x tales que $x^{10} = -40 \implies$ f tiene 10 raíces de multiplicidad 2.

7.20. Ejercicio 20

Por propiedades de las raíces multiples, se que f tiene raíz múltiple $\iff \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) = 0$

Luego busco los x tales que $f'(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 68x^{67} - 68x^3 = 68x^3(x^{64} - 1) \\ \implies f'(x) = 0 &\iff (x = 0) \vee (x^{64} = 1) \end{aligned}$$

Si $x = 0$, $f(0) = 16 \neq 0$. Luego no es raíz de f.

Si $x^{64} = 1$,

$$\begin{aligned} f(x) = x^{64} \cdot x^4 - 17x^4 - 16 &= 0 \\ x^4 - 17x^4 - 16 &= 0 \\ x^4(1 - 17) &= 16 \\ x^4 &= -1 \end{aligned}$$

Luego los α que cumplen lo pedido son $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \in G_{64} \wedge \alpha^4 = -1\}$

Pero se que,

$$a^{64} = (a^4)^{16} = (-1)^{16} = 1$$

Luego si $a^4 = -1 \implies a \in G_{64}$

Y los α tales que $\alpha^4 = -1$ son:

- $\alpha_0 = e^{\frac{1}{4}\pi i}$
- $\alpha_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i}$
- $\alpha_2 = e^{\frac{5}{4}\pi i}$
- $\alpha_3 = e^{\frac{7}{4}\pi i}$

Y cada uno de ellos tiene $mult(\alpha_i, f) = 2$

7.21. Ejercicio 21

Para este ejercicio se puede usar la regla de la división de Ruffini, Calculadora de Ruffini

7.21.A. Pregunta i

Probado usando Ruffini

7.21.B. Pregunta ii

Usando ruffini queda resto igual a $a + 2$, luego f es divisible por $(x-1)^3 \iff a + 2 = 0 \iff a = -2$

7.22. Ejercicio 22

Busco a tales que

- $f(1) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f''(1) \neq 0$

Luego,

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - a - 3 + 2 + 3a - 2a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies mult(1, f) \geq 1 \\ f'(x) &= 4x^3 - 3ax^2 - 6x + 2 + 3a \\ f'(1) &= 4 - 3a + 6 + 2 + 3a = 0; \forall a \in \mathbb{C} \implies mult(1, f) \geq 2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 6ax + 6 \\ f''(1) &= 12 - 6a - 6 = 12 - 6a \end{aligned}$$

Luego $f(1) \neq 0 \iff 12 - 6a \neq 0 \iff 12 = 6a \iff a = 2$

Rta.: 1 es raíz doble de f para $a = 2$

7.23. Ejercicio 23

f tiene raíces simples $\iff \forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0 \implies f'(a) \neq 0$

Si defino $f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Luego $f' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = f_{n-1}$

Ahora supongo $f_n(a) = 0$ y quiero ver que $f_{n-1}(a) \neq 0$

Pero, $f_{n-1}(a) = f_n(a) - \frac{\alpha^n}{n!} = 0 - \frac{\alpha^n}{n!} \neq 0; \forall \alpha \neq 0$

Y si $\alpha = 0 \implies f_n(0) = 1 \neq 0 \implies x = 0$ no es raíz de f_n como se quería probar.

7.24. Ejercicio 24

Demostración usando inducción

Defino $p(n) : f_n(i) = 0 \wedge f_n'(i) = 0 \wedge f_n''(i) \neq 0$

Caso base n = 1

$$\begin{aligned} f_1(i) &= 1 - 2 + 1 = 0 \\ f_1'(x) &= 4x^3 + 4x \\ f_1'(i) &= -4i + 4i = 0 \\ f_1''(x) &= 12x^2 + 4 \\ f_1''(i) &= -12 + 4 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego $p(1)$ es verdadero.

Paso inductivo

Dado $h \geq 1$ quiero probar que $p(h) \implies p(h+1)$

HI: $f_h(i) = 0 \wedge f_h'(i) = 0 \wedge f_h''(i) \neq 0$

Qpq: $f_{h+1}(i) = 0 \wedge f_{h+1}'(i) = 0 \wedge f_{h+1}''(i) \neq 0$

Pero,

$$\begin{aligned} &f_{h+1} = (x - i)(f_h + f_h') \implies f_{h+1}(i) = (i - i)(f_h(i) + f_h'(i)) = 0 \\ &f_{h+1}' = (f_h + f_h') + (x - i)(f_h' + f_h'') \implies f_{h+1}'(i) = 0 + (i - i)(f_h' + f_h'') = 0 \\ &f_{h+1}'' = f_h' + f_h'' + f_h' + f_h'' + (x - i)(f_h' + f_h'') \implies f_{h+1}''(i) = 0 + f_h'' + 0 + f_h'' + 0 = 2f_h'' \neq 0 \end{aligned}$$

Luego $p(h) \implies p(h+1); \forall h \geq 1$

Por lo tanto $p(n)$ es verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}$

7.25. Ejercicio 25

TODO

7.26. Ejercicio 26

TODO