



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Práctica 5

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>



## 5. Práctica 5

### 5.1. Ejercicio 1

#### 5.1.A. Pregunta i

Busco los  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $7a + 11b = 10$

**Verifico que existe solución**

Dado que  $(7 : 11) = 1 \implies 1|10 \implies$  existe solución.

**Busco una solución particular**

Por propiedades del MCD se que existen  $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$  tales que:

$$\begin{aligned}7s + 11t &= 1 \\7(-3) + 11 \cdot 2 &= 1 \\7(-3) \cdot 10 + 11 \cdot 2 \cdot 10 &= 1 \cdot 10 \\7(-30) + 11 \cdot 20 &= 10 \\-210 + 220 &= 10\end{aligned}$$

Luego  $(-30, 20)$  es solución particular.

**Solución del homogeneo asociado**

$$7a + 11b = 0 \iff 7a = -11b \iff -11|7a \iff -11|a \iff a = -11k$$

$$7a + 11b = 0 \iff 7a = -11b \iff 7(-11k) = 11b \iff b = 7k$$

Luego  $(-11k, 7k)$  es solución del homogeneo asociado,  $\forall k \in \mathbb{Z}$

**Solución general**

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-11k, 7k) + (-30, 20) = (-11k - 30, 7k + 20); \forall k \in \mathbb{Z}$$

**Verifico**

Sea  $(a, b) = (-11k - 30, 7k + 20)$  luego,

$$\begin{aligned}7a + 11b = 10 &\iff 7(-11k - 30) + 11(7k + 20) = 10 \\&\iff 7(-11k - 30) + 11(7k + 20) = 10 \\&\iff 7 \cdot -11k - 210 + 11 \cdot 7k + 220 = 10 \\&\iff -210 + 220 = 10\end{aligned}$$

Verificado.

#### 5.1.B. Pregunta ii

Busco los  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $20a + 16b = 30$

**Verifico que existe solución**

$$(20 : 16) = 4 \wedge 4 \nmid 30$$

Por lo tanto no hay solución en  $\mathbb{Z}^2$  para la ecuación.

#### 5.1.C. Pregunta iii

Busco los  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $39a - 24b = 6$

**Verifico que existe solución**

$(39 : 24) = 3 \wedge 3|6$  luego existe solución en  $F^2$

### **Coprimizar**

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$20a + 16b = 30 \rightsquigarrow 13a - 8b = 2$$

### **Busco una solución particular**

$$13.(2) - 8.(3) = 26 - 24 = 2$$

Luego  $(2, 3)$  es solución particular.

### **Solución del homogéneo asociado**

$$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \implies 13|8b \iff 13|b \iff b = 13k$$

$$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \iff 13a = 8(13k) \iff a = 8k$$

Luego  $(8k, 13k)$  es solución del homogéneo asociado,  $\forall k \in \mathbb{Z}$

### **Solución general**

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (8k, 13k) + (2, 3) = (8k + 2, 13k + 3); \forall k \in \mathbb{Z}$$

### **Verifico**

Sea  $(a, b) = (8k + 2, 13k + 3)$  luego,

$$\begin{aligned} 39a - 24b = 6 &\iff 39(8k + 2) - 24(13k + 3) = 6 \\ &\iff 39.8k + 78 - 24.13k - 72 = 6 \\ &\iff 78 - 72 = 6 \end{aligned}$$

Verificado.

## **5.1.D. Pregunta iv**

Busco los  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $1555a - 300b = 11$

### **Verifico que existe solución**

$$(1555 : 300) = 5 \wedge 4 \nmid 5$$

Por lo tanto no hay solución en  $\mathbb{Z}^2$  para la ecuación.

## **5.2. Ejercicio 2**

Primero busco soluciones  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  para la ecuación  $33a + 9b = 120$

### **Verifico que existe solución**

$$(33 : 9) = 3 \wedge 3|120 \implies \text{existe solución.}$$

### **Coprimizar**

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$33a + 9b = 120 \rightsquigarrow 11a + 3b = 40$$

### **Busco una solución particular**

Por propiedades del MCD se que existen  $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$  tales que:

$$\begin{aligned} 11.s + 3.t &= 1 \\ 11.(2) + 3.(-7) &= 1 \\ 11.2.(40) + 3.(-7).(40) &= 1.(40) \\ 11.80 + 3.(-280) &= 40 \end{aligned}$$

Luego  $(80, -280)$  es solución particular.

### Solución del homogéneo asociado

$$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11 \mid -3b \implies 11 \mid b \implies b = 11k$$

$$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11a = -3(11k) \implies a = -3k$$

Luego  $(-3k, 11k)$  es solución del homogéneo asociado,  $\forall k \in \mathbb{Z}$

### Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-3k, 11k) + (80, -280) = (-3k + 80, 11k - 280); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego tengo definidas las restricciones para  $a$  y  $b$  de tal forma que cumplan con la diofántica, ahora uso los datos de divisibilidad.

$$a = -3k + 80 \implies -3k + 80 \equiv 0(4) \implies k \equiv 0(4)$$

$$b = 11k - 280 \implies 11k - 280 \equiv 0(8) \implies k \equiv 0(8)$$

$$\text{Pero } k \equiv 0(8) \iff k \equiv 0(4)$$

$$\text{Luego } k = 8n \implies a = 3(8n) + 80 \wedge b = 11(8n) - 280; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Rta.: } (a, b) = (24n + 80, 88n - 280); \forall n \in \mathbb{Z}$$

## 5.3. Ejercicio 3

Busco los  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  que cumplen  $39a + 48b = 135$

### Verifico que existe solución

$$(39 : 135) = 3 \wedge 3 \mid 135 \implies \text{existe solución.}$$

### Coprimizar

Dado que el MCD es distinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$39a + 48b = 135 \rightsquigarrow 13a + 16b = 45$$

### Busco una solución particular

$(225, -180)$  es solución particular.

### Solución del homogéneo asociado

$$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13 \mid -16b \implies 13 \mid b \implies b = 13k$$

$$13a + 16b = 0 \iff 13a = -16b \implies 13a = -16(13k) \implies a = -16k$$

Luego  $(-16k, 13k)$  es solución del homogéneo asociado,  $\forall k \in \mathbb{Z}$

### Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-16k, 13k) + (225, -180) = (-16k + 225, 13k - 180); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego,

$$a \geq 0 \implies -16k + 225 \geq 0 \implies 16k \leq 225 \implies k \leq \frac{225}{16} \implies k \leq 14$$

$$b \geq 0 \implies 13k - 180 \geq 0 \implies 13k \geq 180 \implies k \geq \frac{180}{13} \implies k \geq 14$$

Luego  $14 \leq k \leq 14 \implies k = 14 \implies$  se compran 1 unidad de  $a$  y 2 de  $b$ , gastando 135 pesos.

## 5.4. Ejercicio 4

$$1. \quad 17x \equiv 3(11) \iff 6x \equiv 3(11) \iff 2.6 \equiv 2.3(11) \iff x \equiv 6(11)$$

$$2. \quad 56x \equiv 28(35) \iff 21x \equiv 28(35) \iff 3x \equiv 4(5) \iff 6x \equiv 8(5) \iff x \equiv 3(5)$$

$$3. \quad 56x \equiv 2(884) \text{ No tiene solución pues } (56 : 884) = 4 \nmid 2$$

$$4. \quad 78x \equiv 30(12126) \iff 13x \equiv 5(2021) \iff 311.13x \equiv 311.5(2021) \iff x \equiv 1551(2021)$$

## 5.5. Ejercicio 5

Primero resuelvo la diofántica: busco  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 28a + 10b = 26$

**Verifico que existe solución**

$(28 : 10) = 2 \wedge 2|26 \implies$  existe solución.

**Coprimizar**

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$$28a + 10b = 26 \iff 14a + 5b = 13$$

**Busco una solución particular**

$(-13, 39)$  es solución particular.

**Solución del homogéneo asociado**

$$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14|-5b \implies 14|b \implies b = 14k$$

$$14a + 5b = 0 \iff 14a = -5b \implies 14a = -5(14k) \implies a = -5k$$

Luego  $(-5k, 14k)$  es solución del homogéneo asociado,  $\forall k \in \mathbb{Z}$

**Solución general**

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$$S = (-5k, 14k) + (-13, 39) = (-5k - 13, 14k + 39); \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego  $a = -5 - 13 \wedge b = 14k + 39$ . Usando el dato de la congruencia,

$$\begin{aligned} b \equiv 2a(5) &\iff 14k + 39 \equiv 2(-5k - 13)(5) \\ &\iff 4k + 4 \equiv 4(5) \\ &\iff 4(k + 1) \equiv 4(5) \\ &\iff k + 1 \equiv 1(5) \\ &\iff k \equiv 0(5) \end{aligned}$$

Luego se que  $k = 5n; n \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, las soluciones serán  $(a, b) = (-25n - 13, 70n + 39); n \in \mathbb{Z}$

## 5.6. Ejercicio 6

$$\begin{aligned} 7a \equiv 5(18) &\iff (-5).7.a \equiv (-5).5(18) \\ &\iff -35a \equiv -25(18) \\ &\iff a \equiv 11(18) \end{aligned}$$

Luego el resto de dividir a  $a$  por 18 es 11.

## 5.7. Ejercicio 7

TODO