DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Práctica 5

2do cuatrimestre 2021 — Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

5. Práctica 5

5.1. Ejercicio 1

5.1.A. Pregunta i

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $7a + 11b = 10$

Verifico que existe solución

Dado que $(7 : 11) = 1 \implies 1|10 \implies$ existe solución.

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{aligned} 7.s + 11.t &= 1 \\ 7.(-3) + 11.2 &= 1 \\ 7.(-3).10 + 11.2.10 &= 1.10 \\ 7.(-30) + 11.20 &= 10 \\ -210 + 220 &= 10 \end{aligned}$$

Luego $(-30, 20)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff -11|7.a \iff -11|a \iff a = -11.k$

$7.a + 11.b = 0 \iff 7.a = -11.b \iff 7(-11.k) = 11.b \iff b = 7.k$

Luego $(-11.k, 7.k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-11.k, 7.k) + (-30, 20) = (-11.k - 30, 7.k + 20); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a, b) = (-11.k - 30, 7.k + 20)$ luego,

$$\begin{aligned} 7a + 11b = 10 &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7(-11.k - 30) + 11(7.k + 20) = 10 \\ &\iff 7. - 11.k - 210 + 11.7.k + 220 = 10 \\ &\iff -210 + 220 = 10 \end{aligned}$$

Verificado.

5.1.B. Pregunta ii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $20a + 16b = 30$

Verifico que existe solución

$(20 : 16) = 4 \wedge 4 \not| 30$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.1.C. Pregunta iii

Busco los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $39a - 24b = 6$

Verifico que existe solución

$(39:24) = 3 \wedge 3|6$ luego existe solución en F^2

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$20a + 16b = 30 \leftrightsquigarrow 13a - 8b = 2$

Busco una solución particular

$13.(2) - 8.(3) = 26 - 24 = 2$

Luego $(2,3)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \implies 13|8b \iff 13|b \iff b = 13k$

$13a - 8b = 0 \iff 13a = 8b \iff 13a = 8(13k) \iff a = 8k$

Luego $(8k, 13k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (8k, 13k) + (2,3) = (8k+2, 13k+3); \forall k \in \mathbb{Z}$

Verifico

Sea $(a,b) = (8k+2, 13k+3)$ luego,

$$\begin{aligned}
39a - 24b = 6 &\iff 39(8k+2) - 24(13k+3) = 6 \\
&\iff 39.8k + 78 - 24.13k - 72 = 6 \\
&\iff 78 - 72 = 6
\end{aligned}$$

Verificado.

5.1.D. Pregunta iv

Busco los $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $1555a - 300b = 11$

Verifico que existe solución

$(1555:300) = 5 \wedge 4 \nmid 5$

Por lo tanto no hay solución en $\mathbb{Z}^2$ para la ecuación.

5.2. Ejercicio 2

Primero busco soluciones $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ para la ecuación $33a + 9b = 120$

Verifico que existe solución

$(33:9) = 3 \wedge 3|120 \implies$ existe solución.

Coprimizar

Dado que el MCD es disinto a 1, debo coprimizar la ecuación para no perder soluciones.

$33a + 9b = 120 \leftrightsquigarrow 11a + 3b = 40$

Busco una solución particular

Por propiedades del MCD se que existen $(s,t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que:

$$\begin{gathered}
11.s + 3.t = 1 \\
11.(2) + 3.(-7) = 1 \\
11.2.(40) + 3.(-7).(40) = 1.(40) \\
11.80 + 3.(-280) = 40
\end{gathered}$$

Luego $(80, -280)$ es solución particular.

Solución del homogeneo asociado

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11| - 3b \implies 11|b \implies b = 11k$

$11a + 3b = 0 \iff 11a = -3b \implies 11a = -3(11k) \implies a = -3k$

Luego $(-3k, 11k)$ es solución del homogeneo asociado, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Solución general

Uniendo las dos soluciones halladas previamente,

$S = (-3k, 11k) + (80, -280) = (-3k + 80, 11k - 280); \forall k \in \mathbb{Z}$

Luego tengo definidas las restricciones para a y b de tal forma que cumplan con la diofántica, ahora uso los datos de divisibilidad.

$a = -3k + 80 \implies -3k + 80 \equiv 0(4) \implies k \equiv 0(4)$

$b = 11k - 280 \implies 11k - 280 \equiv 0(8) \implies k \equiv 0(8)$

Pero $k \equiv 0(8) \iff k \equiv 0(4)$

Luego $k = 8n \implies a = 3(8n) + 80 \wedge b = 11(8n) - 280; n \in \mathbb{Z}$

Rta.: $(a, b) = (24n + 80, 88n - 280); \forall n \in \mathbb{Z}$

5.3. Ejercicio 3