



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Práctica 7

2do cuatrimestre 2021

Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar



## Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

Índice

<b>7. Práctica 7</b>	<b>2</b>
7.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
7.2. Ejercicio 2 . . . . .	2
7.3. Ejercicio 3 . . . . .	3
7.4. Ejercicio 4 . . . . .	5
7.5. Ejercicio 5 . . . . .	6
7.6. Ejercicio 6 . . . . .	7
7.7. Ejercicio 7 . . . . .	7
7.8. Ejercicio 8 . . . . .	8
7.9. Ejercicio 9 . . . . .	8
7.10. Ejercicio 10 . . . . .	8
7.11. Ejercicio 11 . . . . .	8
7.12. Ejercicio 12 . . . . .	9
7.13. Ejercicio 13 . . . . .	9
7.14. Ejercicio 14 . . . . .	10
7.15. Ejercicio 15 . . . . .	11

## 7. Práctica 7

### 7.1. Ejercicio 1

Rdo. propiedades del producto y suma de polinomios:

- Grado de un producto de polinomios  $gr(ab) = gr(a) + gr(b)$
- Coeficiente principal de un producto de polinomios  $cp(ab) = ca(a) \cdot cd(b)$
- $$\begin{cases} gr(f+g) \leq \max(gr(f); gr(g)) \\ gr(f+g) = \max(gr(f); gr(g)) \iff gr(f) \neq gr(g) \vee (gr(f) = gr(g) \wedge cp(f) \neq cp(g)) \end{cases}$$

#### 7.1.A. Pregunta i

- $gr(p) = 77.gr(4x^6 - 2x^5 + 3x^2 - 2x + 7) = 77.6 = 462$
- $cp(p) = 4^{77}$

#### 7.1.B. Pregunta ii

Sea  $p = a^4 - b^7$  con  $a = -3x^7 + 5x^3 + x^2 - x + 5$  y  $b = 6x^4 + 2x^3 + x - 2$

$$\begin{aligned} gp(p) &= \max(gr(a^4); gr(b^7)) \iff gr(a^4) \neq gr(b^7) \vee cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= \max(7.4; 4.7) \iff cp(a^4) \neq cp(b^7) \\ &= 28 \iff (-3)^4 \neq 6^7 \\ &= 28 \iff 81 \neq 279936 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 28$
- $cp(p) = 81 - 6^7$

#### 7.1.C. Pregunta iii

$$\text{Sea } p = a - b + c \text{ con } \begin{cases} a = (-3x^5 + x^4 - x + 5)^4 \\ b = 82x^{20} \\ c = 19x^{19} \end{cases}$$

Luego  $p = 81x^{20} + (\dots) - 81x^{20} + 19x^{19} \implies gr(p) = 19$  pues se cancelan los terminos con  $x^{20}$

Entonces busco el coeficiente para  $x^{19}$

$$\begin{aligned} cp(p) &= a_{19} + b_{19} + c_{19} \\ &= (-3. - 3. - 3.1) + 0 + 19 \\ &= -27 + 0 + 19 \\ &= -8 \end{aligned}$$

- $gr(p) = 19$
- $cp(p) = -8$

### 7.2. Ejercicio 2

1. a)  $\text{En } \mathbb{Q}[x] = 2$   
b)  $\text{En } \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[x] = 2$

2. Usando bin de Newton,  $c(20) = \binom{133}{20}(3i)^{113}$

3. Usando bin de Newton cuatro veces,

$$\begin{aligned}\blacksquare a_1 &= \binom{4}{1}x^1(-1)^3 \cdot \binom{19}{19}x^{19}5^0 = -4x^{20} \\ \blacksquare a_2 &= \binom{4}{2}x^2(-1)^2 \cdot \binom{19}{18}x^{18}5^1 = 570x^{20} \\ \blacksquare a_3 &= \binom{4}{3}x^3(-1)^1 \cdot \binom{19}{17}x^{17}5^2 = -17100x^{20} \\ \blacksquare a_4 &= \binom{4}{4}x^4(-1)^0 \cdot \binom{19}{16}x^{16}5^3 = 121125x^{20}\end{aligned}$$

$$\text{Luego } c(20) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 5 = -4 + 570 - 17100 + 121125 - 5 = 104586$$

4.  $c(20) = 21504$

### 7.3. Ejercicio 3

#### 7.3.A. Pregunta i

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned}f^2 = xf + x + 1 &\iff f^2 - xf = x + 1 \\ &\iff f(f - x) = x + 1 \\ &\iff f \neq 0 \wedge f - x \neq 0\end{aligned}$$

Tomo grado a ambos lados,

$$\begin{aligned}gr(f) + gr(f - x) &= gr(x + 1) \\ gr(f) + gr(f - x) &= 1\end{aligned}$$

Luego el grado de f tiene que ser menor a 2.

#### Caso $gr(f) = 1$

Si  $gr(f) = 1 \implies gr(f - x) = 0$  para cumplir la igualdad de grados.

Luego f es de la forma  $f = ax + b$  con  $a = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned}f(f - x) = x + 1 &\iff (x + b)(x + b - x) = x + 1 \\ &\iff xb + b^2 = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} b = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \iff b = 1\end{aligned}$$

Así,  $f_1 = x + 1$

#### Caso $gr(f) = 0$

Que el grado del polinomio sea igual a cero implica que  $f = c$  con c una constante.

Entonces,

$$\begin{aligned}f(f - x) = x + 1 &\iff c(c - x) = x + 1 \\ &\iff c^2 - cx = x + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios } \begin{cases} -c = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \implies c = -1\end{aligned}$$

Así,  $f_2 = -1$

Rta.:  $f = x + 1$  y  $f = -1$

### 7.3.B. Pregunta ii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$f^2 - xf = x^2 + 1 \iff f(f - x) = -x^2 + 1$$

Tomo grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr(f - x) &= gr(-x^2 + 1) \\ 0 + 2 &= 2 \text{ No puede ser} \\ 1 + 1 &= 2 \\ 2 + 0 &= 2 \text{ No puede ser} \end{aligned}$$

Así, el único caso posible es que  $gr(f) = 1$  y que  $gr(f - x) = 1$

Sea  $f = ax + b$ ,

$$\begin{aligned} f(f - x) = -x^2 + 1 &\iff (ax + b)(ax + b - x) = -x^2 + 1 \\ &\iff (ax + b)((a - 1)x + b) = -x^2 + 1 \\ &\iff a(a - 1)x^2 + abx + b(a - 1)x + b^2 = -x^2 + 1 \\ &\iff a(a - 1)x^2 + (ab + b(a - 1))x + b^2 = -x^2 + 1 \\ &\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a(a - 1) = -1 \\ ab + b(a - 1) = 0 \\ b^2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Busco soluciones para el sistema de tres ecuaciones que resultó.

De la tercera, se que  $b = \pm 1$

$$b = 1 \implies a + a + 1 = 0 \iff 2a = -1 \iff a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pero con } a = -\frac{1}{2} \wedge b = 1 \implies \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq -1$$

Luego  $b = 1$  NO sirve.

$$b = -1 \implies -a - a + 1 = 0 \implies -2a = -1 \implies a = \frac{1}{2}$$

Se llega al mismo valor de  $a$  que con  $b=1$  y ya se probó que no sirve.

Por lo tanto,  $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$  que cumpla lo pedido.

### 7.3.C. Pregunta iii

Reescribo el polinomio que me dan,

$$\begin{aligned} (x + 1)f^2 = x^6 + xf &\iff (x + 1)f^2 - xf = x^6 \\ &\iff f((x + 1)f - x) = x^6 \end{aligned}$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} gr(f) + gr((x + 1)f - x) &= gr(x^6) \\ 0 + 6 &= 6 \\ 1 + 5 &= 6 \\ 2 + 4 &= 6 \\ 3 + 3 &= 6 \\ 4 + 2 &= 6 \\ 5 + 1 &= 6 \\ 6 + 0 &= 6 \end{aligned}$$

Luego de dar todos los posibles valores a  $gr(f)$ , se puede ver que no existe  $gr((x+1)f-x)$  que cumpla lo pedido. Por lo tanto,  $\nexists f \in \mathbb{C}[x]$  que cumpla lo pedido.

### 7.3.D. Pregunta iv

Dado que por enunciado se que  $f \neq 0$ , puedo reescribir la igualdad como,

$$f^3 = gr(f) \cdot x^2 f \iff f^2 = gr(f) \cdot x^2$$

Aplico grado a ambos lados de la igualdad.

$$gr(f^2) = gr(gr(f) \cdot x^2)$$

$$gr(f^2) = 2$$

$$gr(f \cdot f) = 2$$

$$2gr(f) = 2$$

$$gr(f) = 1$$

Luego, con  $f = ax + b$ ,

$$f^2 = gr(f) \cdot x^2 \iff (ax + b)^2 = x^2$$

$$\iff a^2 x^2 + 2abx + b^2 = x^2$$

$$\iff \text{Por igualdad de polinomios} \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Entonces,  $a = \pm 1$  y  $b = 0$  son las soluciones del sistema.

Rta.:  $f_1 = x$  y  $f_2 = -x$  son los únicos polinomios que cumplen lo pedido.

## 7.4. Ejercicio 4

En estos ejercicios hay que hacer la división con la caja. Yo voy a dejar los resultados de cada paso de la división.

### 7.4.A. Pregunta i

1.  $C = 5x^2$ ;  $R = 2x^3 - 10x^2 - x + 4$
2.  $C = 2x$ ;  $R = -10x^2 - 5x + 4$
3.  $C = -10$ ;  $R = -5x - 16$

Rta:

- $C = 5x^2 + 2x - 10$
- $R = -5x - 16$

### 7.4.B. Pregunta ii

1.  $C = 2x^2$ ;  $R = x^3 - 2x^2 - 4$
2.  $C = \frac{1}{2}x$ ;  $R = -2x^2 - \frac{1}{2}x - 4$
3.  $C = -1$ ;  $R = -\frac{1}{2}x - 3$

Rta:

- $C = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
- $R = -\frac{1}{2}x - 3$

### 7.4.C. Pregunta iii

1.  $C = x^{n-1}$ ;  $R = x^{n-1} - 1$
2.  $C = x^{n-2}$ ;  $R = x^{n-2} - 1$
3.  $C = \dots$ ;  $R = \dots$
4.  $C = 1$ ;  $R = 0$

Rta:

- $C = \sum_{i=1}^n x^{n-i}(x-1)$
- $R = 0$

## 7.5. Ejercicio 5

### 7.5.A. Pregunta i

Haciendo  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  dividido  $x^2 + ax + 1$  llego a:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x + 2 - a) + (1 - 2a + a^2)x - 1 + a$$

Luego busco que el resto  $(1 - 2a + a^2)x - 1 + a$  sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$(1 - 2a + a^2)x - 1 + a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2a + a^2 = 0 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se que  $-1 + a = 0 \iff a = 1$ .

Reemplazando en la primera y verifico que  $a = 1$  cumple lo pedido,  $1 - 2a + a^2 = 1 - 2 + 1 = 0$

Rta.:  $a = 1$

### 7.5.B. Pregunta ii

Haciendo  $x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1$  dividido  $x^2 + x + 1$  llego a:

$$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 + (-a - 1)x + 2 + a) + 1 - 2 - a$$

Luego busco que el resto  $1 - 2 - a$  sea igual a cero, por igualdad de polinomios,

$$1 - 2 - a = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2 - a = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto  $a = -1$  es el único que lo cumple.

### 7.5.C. Pregunta iii

(Esta división es larga y pesada) Haciendo  $x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$  dividido  $x^2 + ax + 1$  llego a:

$$x^5 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 - ax^2 + (-4a^2)x + (-1 + 5a - a^3)) + [(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)]$$

Luego busco que el resto sea igual a  $-8x + 4$ ,

$$[(2 - a^2 + a - 5a^2 + a^4)x + (2 - 5a + a^3)] = -8x + 4 \iff \begin{cases} a^4 - 6a^2 + a + 2 = -8 \\ a^3 - 5a + 2 = 4 \end{cases}$$

De la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} a^3 - 5a + 2 = 4 &\iff a^3 - 5a - 2 = 0 \\ &\iff a(a^2 - 5) - 2 = 0 \end{aligned}$$

A simple vista veo que  $a = -2$  es solución, luego usando Ruffini,

$$a^3 - 5a - 2 = (a^2 - 2a - 1)(a + 2)$$

Por lo tanto busco soluciones para  $a^2 - 2a - 1 = 0 \iff a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Queda ver cuales de estos valores de  $a$  hallados cumple la primer ecuación.

- $a = -2 \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 = 16 - 24 - 2 + 2 = -8$
- $a = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$  (Wolfram)
- $a = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \implies a^4 - 6a^2 + a + 2 \neq -8$  (Wolfram)

## 7.6. Ejercicio 6

TODO

## 7.7. Ejercicio 7

### 7.7.A. Pregunta i

Por definición de congruencias se que  $x^{31} - 2 \equiv 0(x^{31} - 2) \implies x^{31} \equiv 2(x^{31} - 2)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{353} - x - 1 &\equiv (x^{31})^{11} \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2^{11} \cdot x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \\ &\equiv 2048x^{12} - x - 1(x^{31} - 2) \end{aligned}$$

Rta.:  $r_{x^{31}-2}(x^{353} - x - 1) = 2048x^{12} - x - 1$

### 7.7.B. Pregunta ii

Se que  $x^6 + 1 | x^6 + 1 \iff x^6 + 1 \equiv 0(x^6 + 1) \iff x^6 \equiv -1(x^6 + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1 &\equiv (x^6)^{166} \cdot x^4 + (x^6)^6 \cdot x^4 + (x^6)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot x^4 + (-1)^6 \cdot x^4 + (-1)^3 \cdot x^2 + 1 \\ &\equiv x^4 + x^4 - x^2 + 1 \\ &\equiv 2x^4 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

Rta.:  $r_{x^6+1}(x^{1000} + x^{40} + x^{20} + 1) = 2x^4 - x^2 + 1$

### 7.7.C. Pregunta ii

Se que  $x^{100} - x + 1 \equiv 0(x^{100} - x + 1) \iff x^{100} \equiv x - 1(x^{100} - x + 1)$

Luego,

$$\begin{aligned} x^{200} - 3x^{101} + 2 &\equiv (x^{100})^2 - 3(x^{100})x + 2 \\ &\equiv (x - 1)^2 - 3(x - 1)x + 2 \\ &\equiv x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \\ &\equiv -2x^2 + x + 3(x^{100} - x + 1) \end{aligned}$$

Rta.:  $r_{x^{100}-x+1}(x^{200} - 3x^{101} + 2) = -2x^2 + x + 3$



## 7.8. Ejercicio 8

TODO

## 7.9. Ejercicio 9

Se resuelve con el algoritmo de Euclides en polinomios. Calculadora de MCD de polinomios <https://planetcalc.com/7760/>

1.   ■  $MCD = -x + 1$
2.   ■  $MCD = x^2 + 1$   
      ■  $x^2 + 1 = f + (-x^3)g$
3.   ■  $MCD = 3$   
      ■  $3 = (-x + 2)f + (1 + 2x^2 - 4x)g$

## 7.10. Ejercicio 10

Se que el resto tiene que tener grado menor al divisor, luego  $gr(r) \leq 2$

Por algoritmo de división de polinomios existen  $q$  cociente y  $r$  resto tales que:

$$f = q(x^3 - 2x^2 - x + 2) + r$$

El enunciado me da las evaluaciones de  $f$  en 1; 2; -1, luego

$$\begin{aligned} f(1) &= q(1)(1 - 2 - 1 + 2) + r(1) \implies f(1) = r(1) = -2 \\ f(2) &= q(1)(8 - 8 - 2 + 2) + r(2) \implies f(2) = r(2) = 1 \\ f(-1) &= q(1)(-1 - 2 + 1 + 2) + r(-1) \implies f(-1) = r(-1) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto se que  $r$  es de la forma  $ax^2 + bx + c$ , con  $a; b; c \in \mathbb{Q}$ , luego

$$\begin{cases} r(1) = a + b + c = -2 \\ r(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ r(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}$$

Restando la tercera a la primera,  $2b = -2 \iff b = -1$

Rearmando el sistema con lo hallado,

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = 3 \\ a + c = -1 \end{cases}$$

La tercera es igual a la primera así que la puedo eliminar y restando la primera a la segunda:

$$3a = 4 \iff a = \frac{4}{3}$$

$$\text{Luego } a + c = -1 \iff \frac{4}{3} + c = -1 \iff c = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Así, } r_{x^3-2x^2-x+2}(f) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}$$

## 7.11. Ejercicio 11

$$\text{Sea } f = x^{2n} + 3x^{n+1} + 3x^n - 5x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Sea } g = x^3 - x$$

Se que  $f = q.g + r$  con  $gr(r) \leq 2 \implies r = ax^2 + bx + c$

Busco raíces de g,

$$\begin{aligned}x^3 - x = 0 &\iff x(x^2 - 1) = 0 \\&\iff x \in \{-1, 0, 1\}\end{aligned}$$

Evalúo f para las raíces halladas,

$$\begin{aligned}f(0) &= q(0)g(0) + r(0) \implies r(0) = 1 \\f(1) &= q(1)g(1) + r(1) \implies r(1) = 1 + 3 + 3 - 5 + 2 + 1 = 5 \\f(-1) &= q(-1)g(-1) + r(-1) \implies r(-1) = 1 + 3(-1)^{n+1} + 3(-1)^n - 5 - 2 - 1 = -5\end{aligned}$$

Por lo tanto, sabiendo que  $r(x) = ax^2 + bx + c$  
$$\begin{cases} r(0) = 1 = c \\ r(1) = 5 = a + b + c \\ r(-1) = -5 = 25a - 5b + c \end{cases}$$

Sabiendo  $c = 1 \implies \begin{cases} a + b = 4 \implies a = 4 - b \\ 25a - 5b = -6 \end{cases}$

Sabiendo  $a = 4 - b \implies$

$$\begin{aligned}25(4 - b) - 5b &= -6 \\100 - 25b - 5b &= -6 \\-30b &= -106 \\b &= \frac{53}{15}\end{aligned}$$

Luego  $a = 4 - b \implies a = 4 - \frac{53}{15} = \frac{7}{15}$

Así,  $r_f(g) = \frac{7}{15}x^2 + \frac{53}{15}x + 1$

## 7.12. Ejercicio 12

Sea  $w = x^3$

Sea  $g = w^2 + w - 2$

Busco raíces de g

$$g(w) = 0 \iff w = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -2}}{2} \iff \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, recordando que  $w = x^3$ ,

$$w_1 = x^3 = 1 \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Y,

$$w_2 = x^3 = -2 \iff \begin{cases} x_4 = -\sqrt[3]{2} \\ x_5 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

## 7.13. Ejercicio 13

Por definición de raíz,  $w + w^2 + w^4$  es raíz de f  $\iff f(w + w^2 + w^4) = 0$

Luego se que,

- $w = e^{\frac{2}{7}\pi i}$
- $w^2 = e^{\frac{4}{7}\pi i}$
- $w^4 = e^{\frac{8}{7}\pi i}$

Luego defino,

- $r = \operatorname{Re}(w + w^2 + w^4) = \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{8}{7}\pi = -\frac{1}{2}$
- $m = \operatorname{Im}(w + w^2 + w^4) = \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Luego evalúo  $f$  en  $k = r + m.i$

$$\begin{aligned}
 f(k) &= (r + m.i)^2 + (r + m.i) + 2 \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i\right) + 2 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}.i - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}.i + 2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

## 7.14. Ejercicio 14

### 7.14.A. Pregunta i

Me piden probar que  $(w + w^{-1})$  y  $(w^2 + w^{-2})$  son raíces de  $f$ .

$$\begin{aligned}
 w + w^{-1} &= e^{\frac{2}{5}\pi i} + e^{-\frac{2}{5}\pi i} \\
 &= \cos \frac{2}{5}\pi + \cos -\frac{2}{5}\pi + i \left( \sin \frac{2}{5}\pi + \sin -\frac{2}{5}\pi \right) \\
 &= \cos \left( \frac{2}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{2}{5}\pi \right)
 \end{aligned}$$

Luego sea  $A = \cos \left( \frac{2}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{2}{5}\pi \right) \implies f(A) = A^2 + A - 1 = 0$

Así,  $(w + w^{-1})$  es raíz de  $f$ .

$$\begin{aligned}
 w^2 + w^{-2} &= e^{\frac{4}{5}\pi i} + e^{-\frac{4}{5}\pi i} \\
 &= \cos \frac{4}{5}\pi + \cos -\frac{4}{5}\pi + i \left( \sin \frac{4}{5}\pi + \sin -\frac{4}{5}\pi \right) \\
 &= \cos \left( \frac{4}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{4}{5}\pi \right)
 \end{aligned}$$

Luego sea  $B = \cos \left( \frac{4}{5}\pi \right) + \cos \left( -\frac{4}{5}\pi \right) \implies f(B) = B^2 + B - 1 = 0$

Así,  $(w^2 + w^{-2})$  es raíz de  $f$ .

### 7.14.B. Pregunta ii

TODO

## 7.15. Ejercicio 15

### 7.15.A. Pregunta i

$a$  es raíz de  $f \iff (x-a)|f \iff f = n(x-a)$

$a$  es raíz de  $g \iff (x-a)|g \iff g = m(x-a)$

Por propiedades del MCD se que existen  $s, t$  tales que,

$$\begin{aligned}(f : g) = sf + tg &\iff (f : g) = sn(x-a) + tm(x-a) \\ &\iff (f : g) = (x-a) \cdot (sn + tm) \\ &\iff (x-a)|(f : g)\end{aligned}$$

Luego  $(x-a)|(f : g) \iff (x-a)$  es raíz de  $(f : g)$  como se quería probar.

### 7.15.B. Pregunta ii

Primero busco el MCD entre  $x^4 + 3x - 2$  y  $x^4 + 3x^3 - 3x + 1$

(Acá van las cuentas del algo de Euclides)

Luego  $MCD = x^2 + x - 1$

Busco raíces del MCD,

$$\begin{aligned}x^2 + x - 1 = 0 &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} \\ &\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Luego que  $f$  teng auna raíz común con  $g \implies (f : g)|f$

$$x^2 + x - 1 | x^4 + 3x^3 - 3x + 1 \iff x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = q(x^2 + x - 1)$$

(Acá va la división)

Obtengo que,  $x^4 + 3x^3 - 3x + 1 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1)$

Ahora busco raíces de  $x^2 - x + 2$

$$\begin{aligned}x^2 - x + 2 = 0 &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \\ &\iff x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

Luego las raíces de  $f$  son:

- $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- $x_3 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$
- $x_4 = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$