Segundo parcial 30/11/2021

2do cuatrimestre 2021 Álgebra I

Integrante	LU	Correo electrónico
Yago Pajariño	546/21	ypajarino@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

Índice

2. Segundo parcial Álgebra I

2.1. Ejercicio 1

Busco $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 51a + 33b = 21 \wedge 8a \equiv b(49)$

Primero busco soluciones para la ecuación diofántica $51a + 33b = 21$

1) verificar que existe solución

Existe solución $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \iff (51 : 33)|21$

Luego,

$$\begin{aligned}(51 : 33) &= (3.17 : 3.11)\\ &= 3\end{aligned}$$

Como $3|21$ existe solución a la ecuación.

2) coprimizar

$$\begin{aligned}51a + 33b = 21 &\iff 3.17.a + 3.11.b = 3.7\\ &\iff 17a + 11b = 7\end{aligned}$$

3) busco solución particular

Por propiedades del MCD, se que existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2 : (17 : 11) = s.17 + t.11$

Dado que 17 y 11 son ambos primos, en particular $(17 : 11) = 1 \implies \exists (s, t) \in \mathbb{Z}^2 : 1 = s.17 + t.11$

A ojo veo que $2.17 + (-3).11 = 34 - 33 = 1$

Por lo tanto, $1 = 2.17 + (-3).11 \iff 7 = 14.17 + (-21).11$

Así encuentro que $S_p = (14, -21)$ es solución particular de la ecuación.

4) busco solución del homogeneo asociado

$$17a + 11b = 0 \iff a = 11k \wedge b = -17k; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Luego $S_0 = (11k, -17k)$ es solución al homogeneo asociado.

5) busco todas las soluciones

Con lo hallado obtengo que,

$$\begin{aligned}S &= S_0 + S_p\\ &= (11k; -17k) + (14; -21)\\ &= (11k + 14; -17k - 21); k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Y así, S es el conjunto de soluciones a la ecuación diofántica.

6) verifico el conjunto solución

$$\begin{aligned}51a + 33b = 21 &\iff 51(11k + 14) + 33(-17k - 21) = 21\\ &\iff 561k + 714 - 561k - 693 = 21\\ &\iff 714 - 693 = 21\\ &\iff 21 = 21\end{aligned}$$

Como se quería verificar.

Ahora utilizo la otra restricción. Sabiendo que $(a,b) = (11k+14; -17k-21)$ son soluciones de la ecuación diofántica, busco los (a,b) tales que $8a \equiv b(49)$

$$\begin{aligned} 8a \equiv b(49) &\iff 8(11k+14) \equiv -17k-21(49) \\ &\iff 88k+112 \equiv -17k-21(49) \\ &\iff 88k+17k \equiv -21-112(49) \\ &\iff 105k \equiv -133(49) \\ &\iff 7k \equiv 14(49) \\ &\iff k \equiv 2(7) \end{aligned}$$

Entonces para que se cumpla la segunda restricción, necesito que $k = 7h+2; h \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto si $k = 7h+2$,

$$\begin{aligned} (a,b) &= (11k+14; -17k-21) \\ &= (11(7h+2)+14; -17(7h+2)-21) \\ &= (77h+36; -119h-55) \end{aligned}$$

Rta.: $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 / a = 77h+36 \wedge b = -119h-55 \wedge h \in \mathbb{Z}\}$

2.2. Ejercicio 2

Busco el resto de dividir a 8^{3^n-2} por 20

Usando congruencia, $8^{3^n-2} \equiv a(20)$

Por el teorema chino del resto, se que existe una única solución mod 20 que satisface $\begin{cases} 8^{3^n-2} = x(4) \\ 8^{3^n-2} = y(5) \end{cases}$ pues $(4:5) = 1$

Busco x

Se que $8 \equiv 0(4)$ pero,

$$8^{3^n-2} \equiv 0(4) \iff 3^n - 2 \geq 1$$

Y $3^n - 2 \geq 1; \forall n \in \mathbb{N}$

Luego $x = 0$

Busco y

Por el Pequeño Teorema de Fermat, dados $a \in \mathbb{Z}; p$ primo ; $a \perp p \implies a^{p-1} \equiv 1(p)$

En particular, $8 \perp 5 \wedge 5$ primo $\implies 8^4 \equiv 1(5)$

Usando el algoritmo de división se que, $3^n - 2 = 4j + r_4(3^n-2); j \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 8^{3^n-2} &= 8^{4j+r_4(3^n-2)} \\ &= (8^4)^j \cdot 8^{r_4(3^n-2)} \\ &\equiv 8^{r_4(3^n-2)}(5) \end{aligned}$$

Luego, $r_4(3^n-2) \implies 3^n - 2 \equiv (-1)^n + 2(4)$

- n par $\implies r_4(3^n-2) = 3$
- n impar $\implies r_4(3^n-2) = 1$

Y por lo tanto

- n par $\implies 8^{r_4(3^n-2)} \equiv 8^3 \equiv 3^3 \equiv 2(5)$
- n impar $\implies 8^{r_4(3^n-2)} \equiv 8^1 \equiv 3(5)$

Así, $y = \begin{cases} 2 & n \equiv 0(2) \\ 3 & n \equiv 1(2) \end{cases}$

Volviendo al sistema de ecuaciones con x e y hallados me quedan dos sistemas,:

$S_1 = \begin{cases} 8^{3^n-2} \equiv 0(4) \\ 8^{3^n-2} \equiv 2(5) \end{cases} \quad n \equiv 0(2)$

$S_2 = \begin{cases} 8^{3^n-2} \equiv 0(4) \\ 8^{3^n-2} \equiv 3(5) \end{cases} \quad n \equiv 1(2)$

Por TCR ya enunciado existe una única solución de S_1. A ojo veo que $8^{3^n-2} \equiv 12(20)$ es solución de S_1

Por TCR ya enunciado existe una única solución de S_2. A ojo veo que $8^{3^n-2} \equiv 8(20)$ es solución de S_2

Rta.: $r_{20}(8^{3^n-2}) = \begin{cases} 12 & n \equiv 0(2) \\ 8 & n \equiv 1(2) \end{cases}$