

ФГБОУ ВО «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»  
Институт Информационных Технологий, Математики и Механики  
Фундаментальная информатика и информационные технологии

---

## ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

«Алгоритм Дейкстры: На метках и на d-куче»

---

**Выполнил:**

Студент 3 курса, группы 3821Б1ФИЗ:  
Дурандин Владимир Евгеньевич

**Проверил:**

Уткин Герман Владимирович  
кафедра: АГДМ

Нижний Новгород  
2023

# Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Постановка задачи</b>                                    | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Руководство пользователя</b>                             | <b>4</b>  |
| <b>4</b> | <b>Руководство программиста</b>                             | <b>5</b>  |
| 4.1      | Описание структуры программы . . . . .                      | 5         |
| 4.2      | Описания модулей и структур данных . . . . .                | 6         |
| 4.2.1    | Описание класса D-HEAP . . . . .                            | 6         |
| 4.2.2    | Описание класса generator . . . . .                         | 7         |
| 4.2.3    | Описание класса Graph . . . . .                             | 8         |
| 4.2.4    | Описание модуля Test (Проверка на корректность) . . . . .   | 9         |
| 4.2.5    | Описание модуля Perfomance Tests (Замеры времени) . . . . . | 10        |
| 4.3      | Алгоритмическая сложность алгоритмов Дейкстры . . . . .     | 11        |
| 4.3.1    | Алгоритм Дейкстры на метках . . . . .                       | 11        |
| 4.3.2    | Алгоритм Дейкстры на d-куче . . . . .                       | 11        |
| <b>5</b> | <b>Заключение</b>   | <b>12</b> |
| <b>6</b> | <b>Литература</b>   | <b>20</b> |

# 1 Введение

Алгоритм Дейкстры - это алгоритм на графах, который находит кратчайший путь от одной вершины графа к другой. Граф - это структура из точек-вершин, соединенных ребрами-отрезками. Его можно представить как схему дорог или как компьютерную сеть. Ребра - это связи, по ним можно двигаться от одной вершины к другой. Алгоритм Дейкстры работает для графов, у которых нет ребер с отрицательным весом, т.е. таких, при прохождении через которые длина пути как бы уменьшается. Поиск кратчайшего пути в графе является важной задачей в различных областях, таких как:

1. Разработка поведения неигровых персонажей, создание игрового ИИ в геймдеве;
2. Автоматическая обработка транспортных потоков;
3. Маршрутизация движения данных в компьютерной сети;
4. Расчёт движения тока по электрическим цепям.

Алгоритм Дейкстры может быть реализован с помощью различных структур данных, таких как куча, очередь с приоритетом или список. Время работы алгоритма зависит от выбранной структуры данных и от различных начальных условий. В данной лабораторной работе будут рассмотрены два алгоритма: на метках и на 3-куче, и в результате будут определены случаи, когда и в какой ситуации будет эффективен один из перечисленных алгоритмов.

## 2 Постановка задачи

Пусть  $G = (V, E, W)$  – ориентированный граф без петель со взвешенными ребрами, где множество вершин  $V = \{1, \dots, n\}$ , множество ребер  $E \subseteq V \times V$ ,  $|E| = m$ , и весовая функция  $W(u, v)$  каждому ребру  $(u, v) \in E$  ставит в соответствие его вес – неотрицательное число. Требуется найти кратчайшие пути от заданной вершины  $s \in V$  до всех остальных вершин.

Если исходный граф не является ориентированным, то для использования описанных алгоритмов следует превратить его в ориентированный, заменив каждое его ребро  $(u, v)$  на два ребра  $(u, v)$  и  $(v, u)$  того же веса.

Решением задачи будем считать два массива:

- массив  $dist[1..n]$ , ( $dist[i]$  – кратчайшее расстояние от вершины  $s$  до вершины  $i$ ).
- массив  $all\_path[1..n]$ , ( $all\_path[i]$  – предпоследняя вершина в построенном кратчайшем пути из вершины  $s$  в вершину  $i$ ).

В описываемых алгоритмах  $+\infty$  может быть заменено на любое число, превосходящее длину любого кратчайшего пути из вершины  $s$  в любую другую вершину графа  $G$ .

В данной лабораторной работе необходимо определить эффективность алгоритмов и их особенности работы.

### 3 Руководство пользователя

Весь проект состоит из двух исполняемых файлов. Первый отвечает за проверку корректности работы обоих алгоритмов, а второй файл производит замеры на различных начальных условиях и записывает время работы в текстовые файлы.

При запуске, программа автоматически проводит набор из *семи* тестов, результаты которых записываются в текстовые файлы (1.txt, ..., 7.txt), находящиеся вместе с исходными файлами в подпапке *Perfomance\_Tests* корневого каталога с приложением.

## 4 Руководство программиста

### 4.1 Описание структуры программы

Программа состоит из нескольких модулей и вспомогательных директорий с файлами:

- **boost\_1\_82\_0** – библиотека *boost* с исходными файлами. Нужна для проверки корректности самостоятельно реализованных алгоритмов Дейкстры.
- **GTestLib** – библиотека *google test* с исходными файлами.
- **include** – директория с исходными файлами реализации алгоритмов.
  - **d\_heap.hpp** – исходный файл с шаблонной реализацией структуры данных - *D-HEAP*.
  - **generator.hpp** – исходный файл с шаблонной реализацией генератора целых случайных чисел (*mersenne twister engine*).
  - **graph.hpp, graph.cpp** – исходные файлы с реализацией основной части программы, а именно: алгоритм Дейкстры с метками и на d-куче, хранение графа, чтение графа из файла и его вывод в текстовые файлы, случайная генерация графа в файл и непосредственно в саму структуру хранения графа.
- **input\_output** – директория с текстовыми файлами для ввода-вывода графа.
- **Perfomance\_Tests** – директория с исходными файлами реализации замеров работы алгоритмов при заданных начальных условиях, текстовыми файлами, в которые записывается время работы в clock'ах. Данные в текстовых файлах расположены в таком порядке: первый столбец - время работы алгоритма Дейкстры на d-куче (в нашем случае 3-куча), второй столбец - время работы алгоритма Дейкстры на метках.
- **REPORT** – директория с отчётом о проделанной работе.
- **tests** – директория с исходными файлами реализации проверки корректности работы обоих алгоритмов Дейкстры, где используется библиотеки *boost* и *google tests*.

## 4.2 Описания модулей и структур данных

### 4.2.1 Описание класса D-HEAP

```
namespace heap {  
  
    template <typename T, size_t dimension>  
    class d_Heap {  
    public:  
        d_Heap(void) = default;  
        d_Heap(const std::vector<T>& vector);  
        d_Heap(const T* vector, const size_t size);  
  
        ~d_Heap() = default;  
  
        size_t Get_size(void);  
        size_t Get_capacity(void);  
        bool isEmpty(void);  
  
        size_t first_child(const size_t i);  
        size_t last_child(const size_t i);  
        size_t father(const size_t i);  
        size_t min_child(const size_t i);  
  
        T extract_min(void);  
        void push(const T& value);  
        T pop(const size_t i);  
        void sift_up(size_t i); // Всплытие  
        void sift_down(size_t i); // Погружение  
        void make_heap(void);  
        void make_heap(const std::vector<T>& vector);  
        void make_heap(const T* vector, const size_t size);  
  
        template <typename Tp, size_t d>  
        friend std::ostream& operator<<(std::ostream& cout,  
            const d_Heap<Tp, d>& heap_);  
  
    private:  
        std::vector<T> heap;  
    };  
};
```

## 4.2.2 Описание класса generator

```
namespace gen {  
template <typename T>  
class Random_Generator {  
public:  
    Random_Generator();  
    Random_Generator(T _min, T _max, size_t seed = std::mt19937::default_seed);  
  
    T generate();  
    T generate(T _min, T _max);  
  
private:  
    std::mt19937 gen;  
    std::uniform_int_distribution<T> distance;  
};  
  
template <typename T>  
inline gen::Random_Generator<T>::Random_Generator()  
    : distance((T)0, (T)0), gen(std::mt19937::default_seed) {}  
  
template <typename T>  
inline Random_Generator<T>::Random_Generator(T _min, T _max, size_t seed)  
    : distance(_min, _max), gen(seed) {}  
  
template <typename T>  
inline T Random_Generator<T>::generate() {  
    return distance(gen);  
}  
  
template <typename T>  
inline T Random_Generator<T>::generate(T _min, T _max) {  
    distance = std::uniform_int_distribution<T>(_min, _max);  
    return distance(gen);  
}  
} // namespace gen
```



### 4.2.3 Описание класса Graph

```
namespace graph {

    struct Edge {
        size_t to, weight;

        bool operator<(const Edge& other) const {
            return this->weight < other.weight;
        }

        bool operator>(const Edge& other) const {
            return this->weight > other.weight;
        }

        bool operator==(const Edge& other) const {
            return this->weight == other.weight;
        }
    };

    using graph_t = std::vector<std::vector<Edge>>;

    class Graph {
    public:
        Graph() = default;
        ~Graph() = default;

        void init_from_file(const char* path);

        void generate_to_file(const char* path, const size_t num_vertices,
            const size_t num_edges, const size_t min_weight,
            const size_t max_weight);
        void generate_to_graph(const size_t num_vertices, const size_t num_edges,
            const size_t min_weight, const size_t max_weight);
        void write_to_file(const char* path,
            const size_t finish_vertex = RESERVE_SIZE_MAX);

        std::vector<size_t>& Dijkstra_Mark();
        std::vector<size_t>& Dijkstra_3Heap();

        std::vector<size_t>& Get_path(const size_t finish_vertex);
        size_t Get_vertexCount() const;
        size_t Get_edgeCount() const;
        size_t Get_startVertex() const;
        void Set_startVertex(const size_t node);
        void clear_paths_and_dist();

        std::vector<Edge>& operator[] (const size_t index);
        const std::vector<Edge>& operator[] (const size_t index) const;

    private:
        graph_t graph;
        std::vector<size_t> all_paths;
        std::vector<size_t> path;
        std::vector<size_t> dist;
        size_t vertexCount = (size_t)0, edgeCount = (size_t)0;
        size_t start_vertex;
    };
} // namespace graph
```

#### 4.2.4 Описание модуля Test (Проверка на корректность)

```
const char* input_file_path = "..\\..\\input_output\\input.txt";
const char* input_file_path_2 = "..\\..\\input_output\\input_2.txt";
const char* input_file_path_3 = "..\\..\\input_output\\input_3.txt";
const char* output_file_path = "..\\..\\input_output\\output.txt";

using boost_Graph =
boost::adjacency_list<boost::listS, boost::vecS, boost::directedS,
    boost::no_property,
    boost::property<boost::edge_weight_t, size_t>>;
using Vertex = boost::graph_traits<boost_Graph>::vertex_descriptor;
using Edge = std::pair<size_t, size_t>;

TEST(TEST_NATIVE_DIJKSTRA, The_First_TEST) {...}
TEST(TEST_NATIVE_DIJKSTRA, The_Second_TEST) {...}
TEST(TEST_NATIVE_DIJKSTRA, BOOST_ONE_TEST) {...}
TEST(TEST_NATIVE_DIJKSTRA, BOOST_ONE_RANDOM_GENERATE_TO_GRAPH_TEST) {...}
TEST(TEST_NATIVE_DIJKSTRA, BOOST_LOT_RANDOM_TESTS) {...}
```

#### 4.2.5 Описание модуля Performance Tests (Замеры времени)

```
using time_type = std::chrono::steady_clock::time_point;
using time_n = std::chrono::nanoseconds;
using time_ml = std::chrono::milliseconds;
using time_mc = std::chrono::microseconds;
using time_s = std::chrono::seconds;

namespace perf {
    const char* path1 = "..\\..\\Performance_Tests\\1.txt";
    const char* path2 = "..\\..\\Performance_Tests\\2.txt";
    const char* path3 = "..\\..\\Performance_Tests\\3.txt";
    const char* path4 = "..\\..\\Performance_Tests\\4.txt";
    const char* path5 = "..\\..\\Performance_Tests\\5.txt";
    const char* path6 = "..\\..\\Performance_Tests\\6.txt";
    const char* path7 = "..\\..\\Performance_Tests\\7.txt";

    void test_measurement_1();
    void test_measurement_2();
    void test_measurement_3();
    void test_measurement_4();
    void test_measurement_5();
    void test_measurement_6();
    void test_measurement_7();
} // namespace perf
```

## 4.3 Алгоритмическая сложность алгоритмов Дейкстры

### 4.3.1 Алгоритм Дейкстры на метках

Повторить  $V$  раз:

- Из всех вершин, расстояния до которых ещё не являются окончательными, выбрать ближайшую и пометить расстояние до неё как окончательное.
- Затем посмотреть рёбра из этой вершины и попробовать улучшить расстояния до вершин-соседей.

В алгоритме Дейкстры требуется  $V$  раз определять ближайшую вершину и не более  $2E$  раз (в сумме по всем вершинам) производить релаксации (уменьшение расстояния до вершины).

Если мы используем только массив расстояний, то:

- Сложность определения ближайшей вершины равна  $O(V)$ .
- Сложность одной релаксации равна  $O(1)$ .

Таким образом, общая сложность алгоритма Дейкстры на метках составляет  $O(V^2 + E)$ .

### 4.3.2 Алгоритм Дейкстры на d-куче

*В данной лабораторной работе подразумевается использование только 3-кучи.*

Алгоритмическая сложность основных методов d-кучи:

- Добавление:  $O(\log_d(n))$ ;
- Удаление:  $O(d * \log_d(n))$ ;
- Погружение:  $O(d * \log_d(n))$ ;
- Всплытие:  $O(\log_d(n))$ ;
- Взятие минимума:  $O(\log_d(n))$ .

Если мы храним необработанные вершины в d-куче, то:

- Сложность определения ближайшей вершины равна  $O(\log(V))$ .
- Сложность одной релаксации также равна  $O(\log(V))$ .

Таким образом, общая сложность алгоритма составляет  $O((V + E) \log(V))$ .

Первый вариант на метках более эффективен для плотных графов, второй вариант на d-куче более эффективен для разреженных графов.

## 5 Заключение

*Все замеры проводились на данной рабочей машине:*

- **ОС:** Windows 10 Pro x64 (2009 build 19044)
- **Процессор:** Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1270 v3 @ 3.50GHz
- **ОЗУ:** 16 ГБ DDR3

Далее представлены семь графиков с замерами работы алгоритмов Дейкстры на метках и на d-куче.

### **Тест №1 Начальные условия:**

- Количество вершин –  $n$ :  $1, \dots, 10^4 + 1$ , шаг – 100
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра:  $10^6$
- Количество рёбер –  $m$ :  $\frac{n^2}{10}$

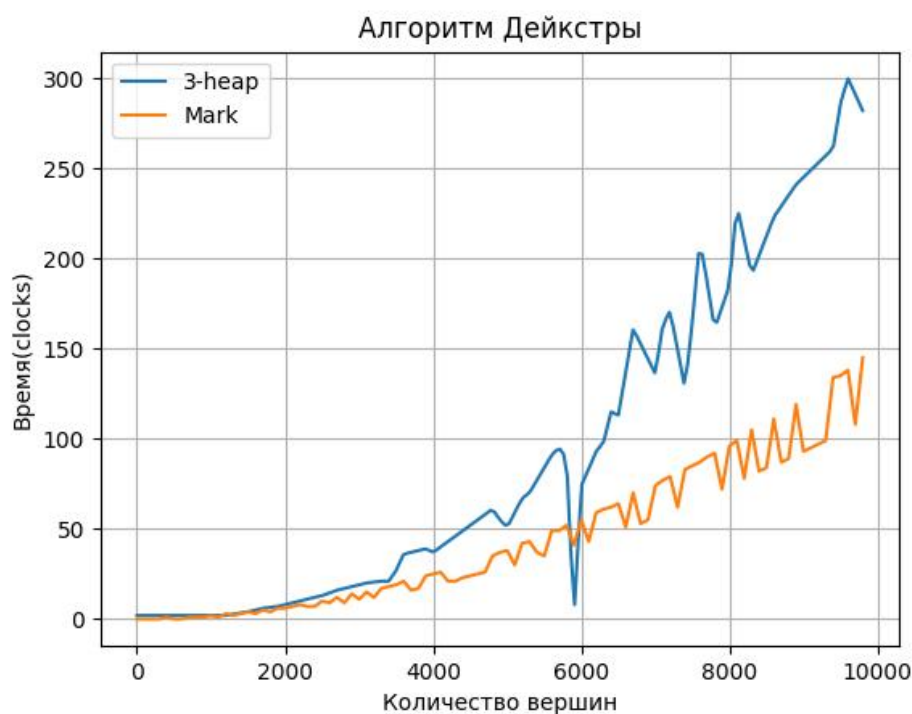


Рис. 1: Тест №1

На данном примере явно видно, что алгоритм на d-куче медленнее, так как у нас большое количество рёбер. И как говорилось ранее, алгоритм на d-куче будет эффективен только на разреженном графе. Поэтому на данных начальных условиях по всем параметрам выигрывает алгоритм на метках.

**Тест №2 Начальные условия:**

- Количество вершин –  $n$ :  $1, \dots, 10^4 + 1$ , шаг – 100
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра:  $10^6$
- Количество рёбер –  $m$ :  $n^2$

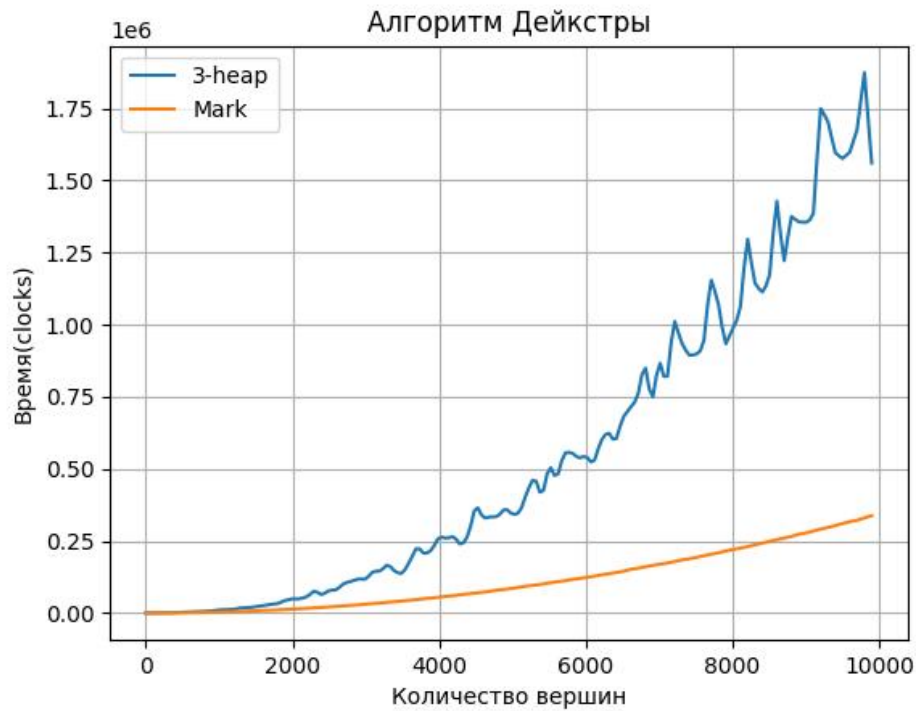


Рис. 2: Тест №2

На данном примере граф является и вовсе полным, поэтому здесь выигрывает алгоритм на метках, так же как и в первом тесте.

### Тест №3 Начальные условия:

- Количество вершин –  $n$ : 101, ...,  $10^4 + 1$ , шаг – 100
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра:  $10^6$
- Количество рёбер –  $m$ :  $100 * n$

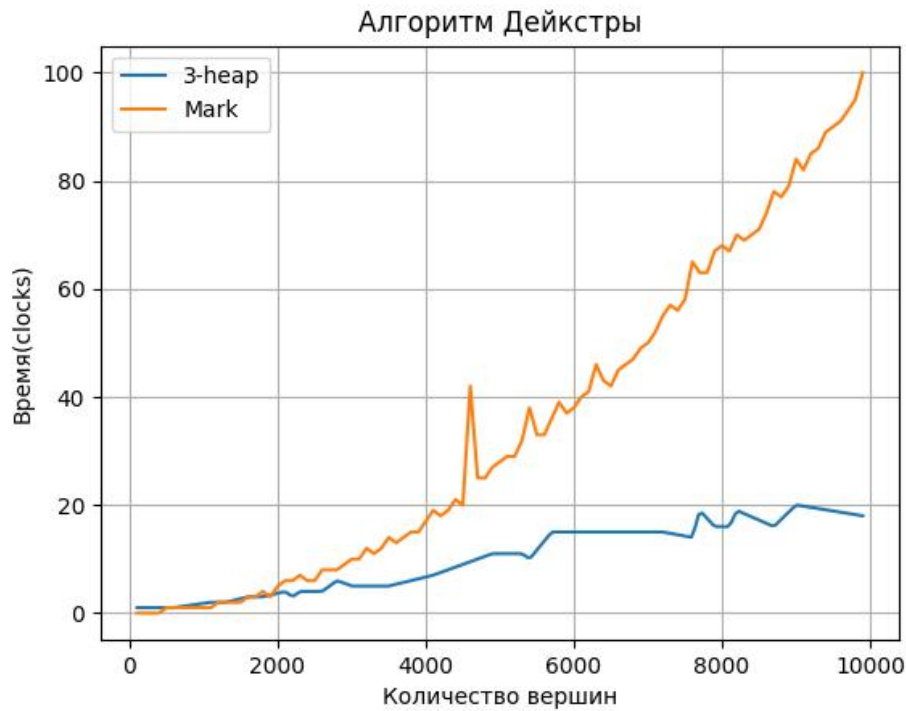


Рис. 3: Тест №3

На данном примере графики ведут уже себя по-другому. Так как количество рёбер  $m = 100 * n$ , то чем больше количество вершин - тем более эффективен будет алгоритм на d-куче. Только на начальных итерациях, когда количество вершин меньше 2000 граф является плотным, поэтому скорость работы обоих алгоритмов практически одинаковая.

#### Тест №4 Начальные условия:

- Количество вершин –  $n$ :  $101, \dots, 10^4 + 1$ , шаг – 100
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра:  $10^6$
- Количество рёбер –  $m$ :  $1000 * n$

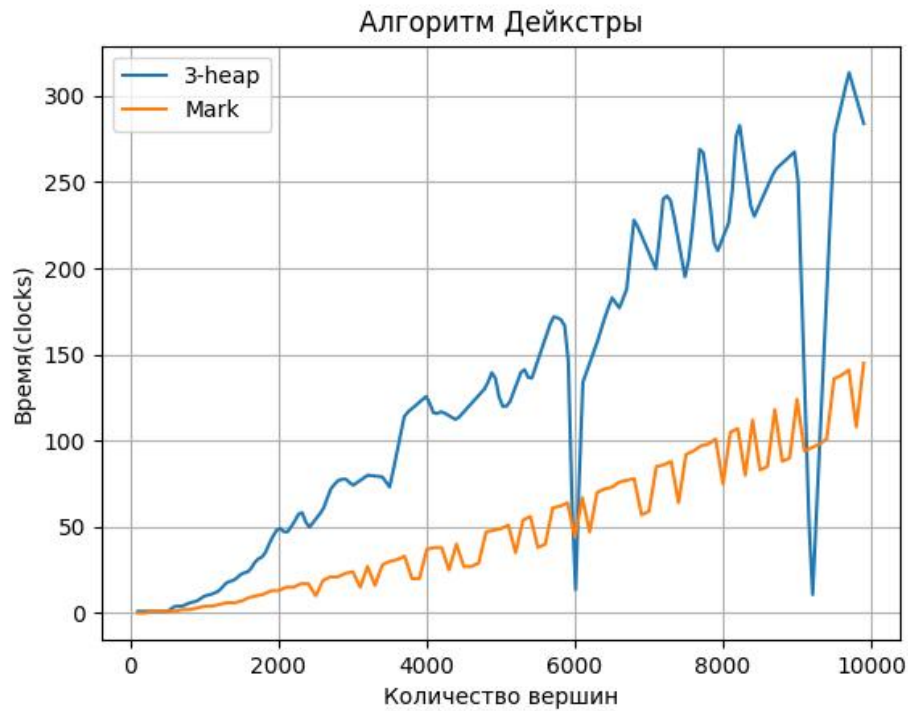


Рис. 4: Тест №4

По сравнению с предыдущим тестом, количество рёбер увеличилось на порядок. Поэтому алгоритм на d-куче вновь стал проигрывать алгоритму на метках, так как граф стал опять плотным.



### Тест №5 Начальные условия:

- Количество вершин –  $n$ :  $10^4 + 1$
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра:  $10^6$
- Количество рёбер –  $m$ :  $0, \dots, 10^7$ , шаг –  $10^5$

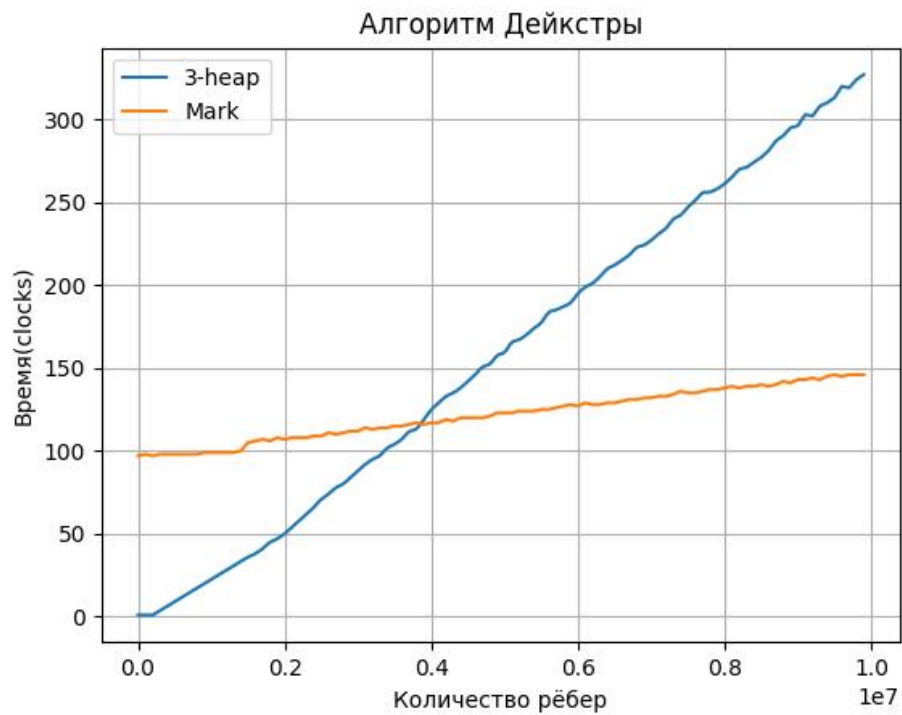


Рис. 5: Тест №5

Данный пример является самым показательным и наглядным. Видно, что переходя граничную точку по количеству рёбер, алгоритм на d-куче будет работать медленнее, потому что граф становится плотным.

### Тест №6 Начальные условия:

- Количество вершин –  $n$ :  $10^4 + 1$
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра: 1, ..., 200, шаг – 1
- Количество рёбер –  $m$ :  $n^2$

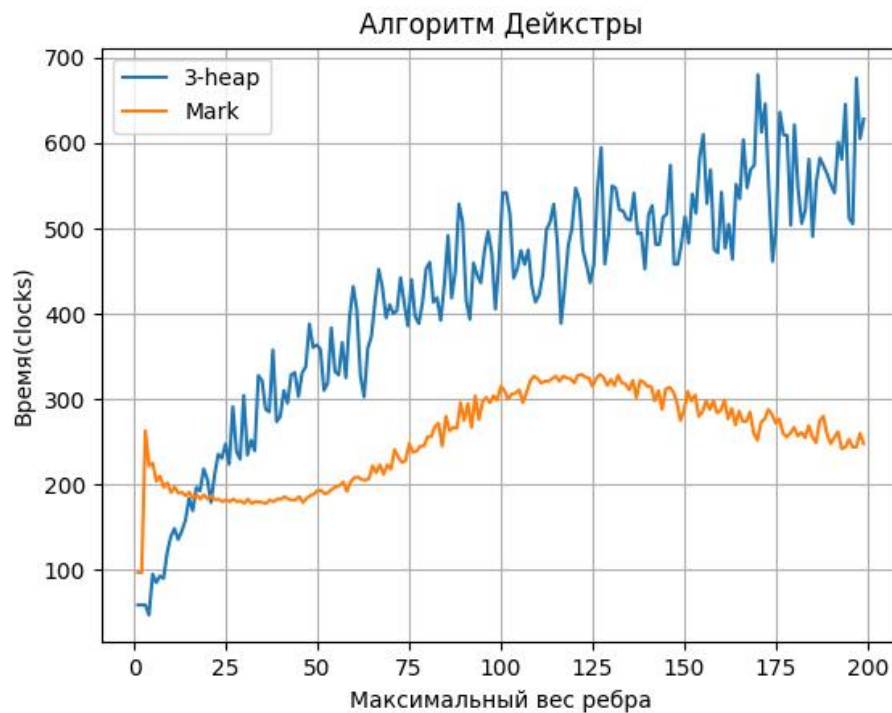


Рис. 6: Тест №6

Так как количество рёбер  $n^2$ , можно определить, что граф является полным. Но судя по графику на маленьких значениях правой границы веса ребра алгоритм на d-куче всё же выигрывает. Это объясняется тем, что при увеличении максимального веса ребра, в методе d-кучи - «Всплытие», может происходить больше итераций, чем когда разброс значений маленький. То есть вся разница в константе, которая не пишется при определении алгоритмической сложности алгоритма.

### Тест №5 Начальные условия:

- Количество вершин –  $n$ :  $10^4 + 1$
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра:  $10^6$
- Количество рёбер –  $m$ : 0, ...,  $10^7$ , шаг –  $10^5$

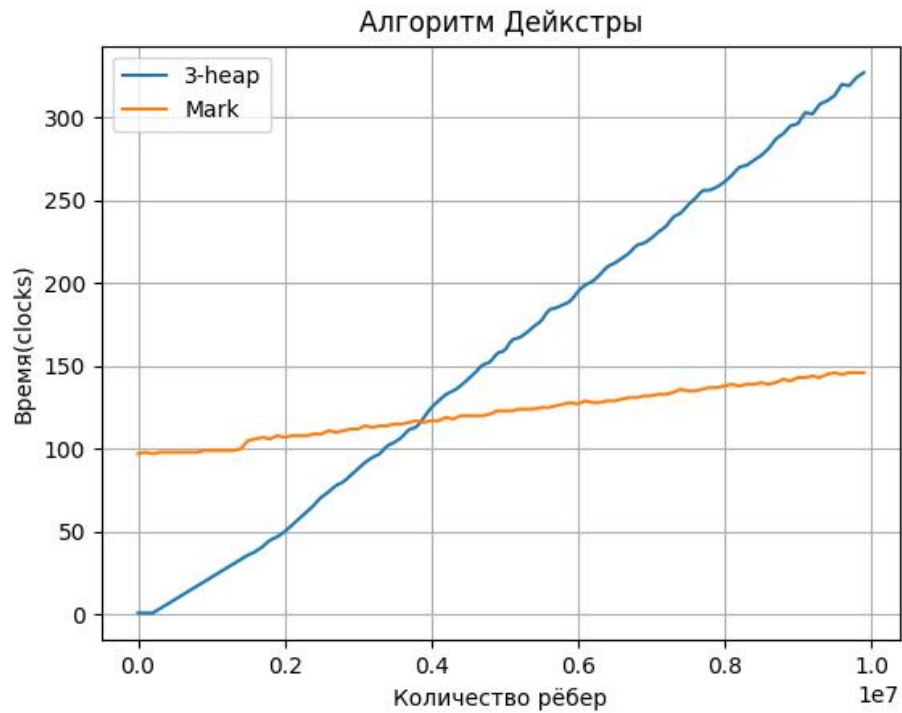


Рис. 7: Тест №5

Данный пример является самым показательным и наглядным. Видно, что переходя граничную точку по количеству рёбер, алгоритм на d-куче будет работать медленнее, потому что граф становится плотным.

### Тест №7 Начальные условия:

- Количество вершин –  $n$ :  $10^4 + 1$
- Левая граница веса ребра: 1
- Правая граница веса ребра: 1, ..., 200, шаг – 1
- Количество рёбер –  $m$ :  $1000 * n$

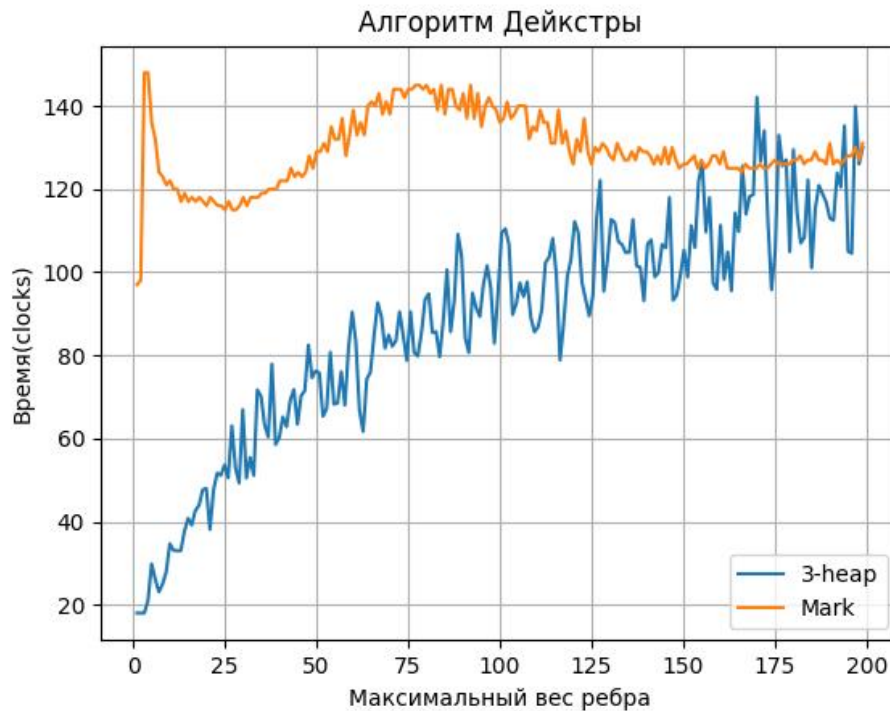


Рис. 8: Тест №7

На данном примере похожая ситуация, как и в предыдущем случае. Разница лишь в том, что граф не настолько плотный, чем в тесте №6. Но при увеличении максимального веса ребра алгоритм на d-куче становится медленнее. Поэтому уже при максимальном весе около 200 время работы алгоритмов практически одинаковое. Если ещё увеличивать максимальную границу веса ребра, то выигрывать конечно же алгоритм на метках.

### Вывод:

В результате проделанной работы все поставленные задачи выполнены. Оба алгоритма эффективны при определённых начальных условиях. Поэтому, в зависимости от требований, следует выбирать тот алгоритм, который будет иметь преимущество именно в этой ситуации.

## 6 Литература

1. Мой GitHub. [https://github.com/Sturmannn/Lab\\_Dijkstra\\_algorithm](https://github.com/Sturmannn/Lab_Dijkstra_algorithm)
2. Википедия. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм\\_Дейкстры](https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Дейкстры)
3. YouTube. [Алгоритм Дейкстры: два варианта реализации](#)
4. Университет ИТМО. [Алгоритм Дейкстры – Викиконспекты](#)