

# Элементы теории линейных операторов в гильбертовых пространствах и её приложение к линейным операторным уравнениям в гильбертовом пространстве.

Пусть  $H$  — гильбертово пространство, то есть полное евклидово пространство со скалярным произведением. Скалярное произведение определим в комплексном пространстве:  $(f, g) \in \mathbb{C}$ . Тогда  $\|f\| = \sqrt{(f, g)}$  — евклидова норма. В этом пространстве выполняется неравенство треугольника:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

которое следует из неравенства Коши-Буняковского  $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$ .

Полнота по определению: из

$$\forall \{f_n\} \subset H \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow \infty$$

следует, что

$$\exists h \in H \quad \|f_n - h\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

$$G \subset \mathbb{R}^m \text{ — открытое множество. } CL_2(G) = \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ непрерывная, } \int_G |f|^2 dx < +\infty\}.$$

Введём скалярное произведение как

$$(f, g) = \int_G f(x) \overline{g(x)} dx$$

Тогда такое множество неполное.  $L_2(G)$  — пополнение  $CL_2(G)$ , или по-другому  $f: G \mapsto \mathbb{C}$  измерима по Лебегу и  $\int_G |f|^2 dx < +\infty$ .

## Геометрия гильбертового пространства

**Теорема 1 (Риса о расстоянии).** Пусть  $L \subset H$ , где  $L$  — замкнутое подпространство. Следовательно

$$\forall f \in H \quad \exists! g \in L: \|g - f\| = \rho(f, L)$$

или по-другому

$$\inf \|f - h\|, \quad h \in L$$

Обозначим  $g_f$  — проекция  $f$ . Тогда отображение  $P: H \mapsto L$  такое, что  $Pf = g_f$ , называется ортопроектором из  $L$  на  $H$ .

**Доказательство.** Покажем существование.

$$\forall f \in H \quad \exists \{g_n\} \subset L: \rho(f, L) \leq \|f - g_n\| \leq \rho(f, L) + \frac{1}{n}$$

Тогда

$$\|f - g\| \rightarrow \rho(f, L) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Установим факт фундаментальности. Наблюдение: из равенства параллелограмма следует:

$$f, g \in H \quad \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

Тогда

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|(g_n - f) - (g_m - f)\|^2 = 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - \|g_n + g_m - 2f\|^2$$

Теперь учтём, что

$$\|g_n + g_m - 2f\|^2 = 4\left\|\frac{g_n + g_m}{2} - f\right\|^2 \geq 4\rho^2(f, L)$$

где  $\frac{g_n + g_m}{2} \in L$ ,  $\|g_{n,m} - f\|^2 = \rho^2(f, L)$  Тогда получаем

$$\|g_n - g_m\|^2 \leq 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\rho^2(f, L) \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow 0$$

$\exists g \in H: g_n \rightarrow g$ , по этому  $\|f - g_n\| \rightarrow \rho$ , а так как  $L$  — замкнутое, то  $g \in L$ . Получаем

$$\|f - g\| - \|f - g_n\| \leq \|g - g_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|f - g\| = \rho(f, L)$$

Отсюда следует существование.

Покажем единственность. Пусть

$$\|f - g_1\| = \|f - g_2\| = \rho(f, L) \quad g_1, g_2 \in L$$

Рассмотрим  $\|g_1 - g_2\|$ :

$$0 \leq \|g_1 - g_2\|^2 = \|(g_1 - f) - (g_2 - f)\|^2 = 2\|g_1 - f\|^2 + 2\|g_2 - f\|^2 - \left\|\frac{g_1 + g_2}{2} - f\right\|^2 \leq 4\rho^2 - 4\rho^2 = 0$$

Следовательно  $g_1 = g_2$ . Доказательство закончено

Таким образом мы доказали теорему Риса о расстоянии. Пусть  $P_L : H \mapsto L$ ,  $P_L f = g_f$ . Тогда  $\|P_L f - f\| = \rho(f, L)$ .  $P_L$  — линейный оператор.

**Наблюдение 1.**  $\|g - f\| = \rho(f, L) \quad g \in L$  равносильно тому, что

$$\begin{cases} f - g \in L^+ \\ g \in L \end{cases}$$

Где  $L^+ = \{h \in H \mid (h, f) = 0 \quad \forall f \in L\}$  — замкнутое подпространство. Это следует из неравенства Коши-Буняковского: пусть  $h_n \rightarrow h$  и  $h_n \in L^+$ . Тогда

$$|(h, f) - (h_n, f)| = |(h - h_n, f)| \leq \|h - h_n\| \|f\| \rightarrow 0$$

Поэтому  $(h, f) = 0$ , а значит  $h \in L$ . Докажем теперь наше наблюдение

**Доказательство.** В прямую сторону.

$$\|g - f\| = \rho(f, L)$$

Прибавим к  $g$   $th$  так, чтобы  $g + th \in L$ .

$$\|g - f\| \leq \|(g + th) - f\| \quad \forall h \in L$$

Возведём в квадрат и разложим выражение на компоненты

$$\begin{aligned} \|g - f\|^2 &\leq \|(g - f) + th\|^2 \\ \|g - f\|^2 &\leq ((g - f) + th, (g - f) + th) \\ \|g - f\|^2 &\leq \|g - f\|^2 + (g - f, th) + (th, g - f) + |t|^2 \|h\|^2 \end{aligned}$$

Перенесём левую часть вправо и учтём, что по определению скалярного произведения  $(a, b) = \overline{(b, a)}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (g - f, th) + \overline{(g - f, th)} + |t|^2 \|h\|^2 \\ 0 &\leq 2 \operatorname{Re}(g - f, th) + |t|^2 \|h\|^2 \\ 0 &\leq 2 \operatorname{Re}(g - f, \frac{t}{|t|} h) + O(|t|) \end{aligned}$$

Пусть  $t \in \mathbb{R}$ .

$$0 \leq 2 \operatorname{Re}(g - f, h)$$

подставляя  $\pm h$  имеем

$$\operatorname{Re}(g - f, h) = 0$$

Пусть теперь  $t = i\tau$   $\tau \in \mathbb{R}$ .

$$2 \operatorname{Re}(g - f, ih) = 2 \operatorname{Im}(g - f, h) \geq 0 \quad \forall h \in L$$

Возмём  $\pm h$  и получаем

$$(g - f, h) = 0$$

Таким образом для любого  $h$  мы доказали в прямую сторону.

В обратную сторону.

$$\begin{aligned} \forall h \in L \quad \|f - (g + h)\|^2 &= \|(f - g) + h\|^2 = \\ &= (f - g, f - g) + (h, h) + (f - g, h) + (h, f - g) = \\ &= \|f - g\|^2 + \|h\|^2 \geq \|f - g\|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall h \quad \|f - (g + h)\|^2 \geq \|f - g\|^2 \Rightarrow \|f - g\| = \rho(f, L) \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Покажем линейность оператора  $P_L$ .

$$\begin{aligned} P_L(f_1 + f_2) &= g \\ P_L f_1 = g_1 &\Leftrightarrow (f_1 - g_1, h) = 0 \\ P_L f_2 = g_2 &\Leftrightarrow (f_2 - g_2, h) = 0 \end{aligned}$$

Сложим правые выражения и получим

$$(f_1 + f_2 - (g_1 + g_2), h) = 0 \Rightarrow g_1 + g_2 = P_L(f_1 + f_2)$$

Аналогично доказывается однородность  $P_L(\alpha f) = \alpha P_L(f)$ :

$$P_L(f) = g \Leftrightarrow (f - g, h) = 0 \Rightarrow (\alpha f - \alpha g, h) = 0 \Rightarrow P_L(\alpha f) = \alpha g$$

### Проблема выпуклости в $H$

Пусть  $A \subset H$  — назовём выпуклым, если  $\forall f, g \in A \quad \forall t \in [0; 1] \quad tf + (1 - t)g \in A$ . Мы уже доказали, что для любого выпуклого и замкнутого  $A \subset H \quad \forall f \in H \quad \exists! g \in A: \|f - g\| = \rho(f, A)$ . Такое множество ещё называют чебышевским. Верно ли обратное? Пусть  $A \subset H$  — чебышевское, то есть  $\forall f \in H \quad \exists! g \in A: \|f - g\| = \rho(f, A)$ . Следует ли отсюда, что  $A$  — выпуклое и замкнутое? Замкнутость была доказана в 1936 году для конечномерных  $H$ .

Интересные подвижки были получены на мехмате Бородиным Петром Анатольевичем. Он ввёл 2-чебышевские множества.  $\forall f, h \in H$  пусть  $\rho_2(f, h, A) = \inf\{\|f - g\| + \|h - g\| : g \in A\}$ ,  $2\rho(f, A) = \rho_2(f, A)$ . Из 2-чебышевости следует выпуклость и замкнутость. Но получаем вопрос: верно ли что из чебышевости следует 2-чебышевость?

**Теорема 1 (Риса об ортогональном дополнении).**  $L \subset H$  — замкнутое подпространство  $\Rightarrow L \oplus L^\perp = H$  и  $L \cap L^\perp = \emptyset$ . Последнее очевидно.  $\forall f \in H \exists! g \in L$  и  $h \in L^\perp : f = g + h$ .

$$\begin{cases} f - g \in L^\perp \\ g \in L \end{cases}$$

Это равносильно  $P_L f = g$ .

**Доказательство.**  $f \in H$ , смотрим на  $g = P_L f \Leftrightarrow h = f - g \in L^\perp \Rightarrow f = g + h$ . Доказательство закончено.

Пусть  $f = g_1 + h_1$  и  $f = g_2 + h_2$ , и  $g_{1,2} \in L$ . Тогда  $g_1 - g_2 = h_2 - h_1 \in L^\perp$ , но  $L \cap L^\perp \Rightarrow g_1 = g_2$  и  $h_1 = h_2$ .

**Теорема 1 (Рис, Фреше).**  $\Phi : H \mapsto \mathbb{C}$  — линейный и непрерывный функционал ( $f_n \rightarrow f$  в  $H$  по норме,  $\Phi(f_n) \rightarrow \Phi(f)$  в  $\mathbb{C}$ ). Тогда  $\exists! h \in H : \Phi(f) = (f, h)$ .

**Доказательство.**  $L = \ker \Phi$  — замкнутое подпространство в  $H$ . Первое в связи непрерывности, второе в силу линейности.  $L \oplus L^\perp = H$ . Случай  $\Phi = 0$  очевиден:  $h = 0$ . Пусть теперь  $\Phi \neq 0 \Rightarrow (\ker \Phi)^\perp \neq \{0\}$ . Пусть  $h_0 \in (\ker \Phi)^\perp \setminus \{0\}$ , тогда отсюда следует  $f \in H \quad f = g + \alpha h_0$ , где  $g \in \ker \Phi$  и  $\alpha = \frac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)}$ . Следовательно

$$g = f - \frac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)} h_0 \Rightarrow (f, h_0) = (g, h_0) + \frac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)} \|h_0\|^2$$

Тогда

$$\Phi(f) = (f, \frac{\overline{\Phi(h_0)}}{\|h_0\|} h_0)$$

где  $\frac{\overline{\Phi(h_0)}}{\|h_0\|} h_0 = h$ . Пусть

$$\Phi(f) = (f, h_1) = (f, h_2) \quad \forall f \in H$$

Тогда

$$f = h_1 - h_2 \Rightarrow \|h_1 - h_2\|^2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$$