Свойства самосопряжённых линейных операторов в гильбертовом пространств

Пусть H — гильбертово пространство. Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор. Пусть A — самосопряжённый оператор, то есть $A = A^*$.

Утверждение 1. *Если A — самосопряжённый оператор, тогда выполняются следующие свойства:*

1. $\|A^n\| = \|A\|^n \; \forall n \in \mathbb{N}$
2. $r(A) = \|A\|$
3. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
4. *пусть* $m_+ = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, *где* $(Af, f) \in \mathbb{R}$ *для самосопряжённого оператора, пусть* $m_- = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, *тогда* $m_{+-} \in \sigma(A)$ *и* $\sigma(A) \subset [m_-(A), m_+(A)]$ *(доказать в качестве упражнения)*

Доказательство. Докажем первое утверждение. $\|A^n\| \le \|A\|^n$ по определению операторной нормы. Надо показать, что $\|A^n\| \ge \|A\|^n$. Для $n = 1$ очевидно верно. Если для $k = 1 \dots n$ имеем $\|A^k\| = \|A\|^k$ и $A \ne 0$, тогда без ограничения общности $\forall f : \|f\| = 1$

$$\|A^n f\|^2 = (A^n f, A^n f)$$

В силу того, что A — самосопряжённый оператор

$$(A^n f, A^n f) = (A^{n-1} f, A^{n+1} f)$$

Последнее в силу неравенства Коши-Буняковского

$$(A^{n-1} f, A^{n+1} f) \le \|A^{n-1} f\| \|A^{n+1} f\| \le \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Получаем, что

$$\|A^n f\|^2 \le \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Из индукции $\|A^{n-1}\| \le \|A\|^{n-1}$ и $\|A^n\| = \|A\|^n$ Возмём теперь супремум $\forall \|f\| = 1$

$$\|A^n\|^2 = \|A\|^{2n} \le \|A\|^{n-1} \|A^{n+1}\|$$

Отсюда при $A \ne 0$ получаем

$$\|A\|^{n+1} \le \|A^{n+1}\|$$

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение очевидно следует из первого для самосопряжённого оператора:

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$$

Перейдём к третьему утверждению. Воспоминание: пусть A — самосопряжённый оператор. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, то есть $\ker A_\lambda \ne 0$, следовательно $\exists f \ne 0 \in \ker A_\lambda \colon Af = \lambda f$. Тогда

$$(Af, f) = \lambda (f, f)$$

С другой стороны, в силу самосопряжённости

$$(Af, f) = (f, Af) = \overline{\lambda}(f, f)$$

И так как $f \neq 0$, то $\lambda = \overline{\lambda}$. Перейдём теперь непосредственно к доказательству. Рассмотрим $\lambda = \mu + \imath\nu$, $\nu \neq 0$ и докажем, что $\lambda \in \rho(A)$ и тогда, очевидно, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \subset \mathbb{R}$. $\forall f \in H$

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f - \imath\nu f\|^2 = (A_\mu f - \imath\nu f, A_\mu f - \imath\nu f) = \|A_\nu f\|^2 + \nu^2\|f\|^2 - \imath\nu(f, A_\mu) + \imath\nu(A_\mu f, f)$$

где $A_\lambda f = Af - \lambda f$. Раз $\mu \in \mathbb{R}$, то

$$(A_\mu)^* = A^*_{\overline{\mu}} = A^*_\mu = A_\mu$$

так как $A^* = A$. Следовательно

$$(f, A_\mu f) = (A_\mu f, f)$$

Отсюда получаем, что

$$(A_\mu f - \imath\nu f, A_\mu f - \imath\nu f) = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2\|f\|^2$$

Тогда

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2\|f\|^2 \geq \nu^2\|f\|^2$$

Получили оценку снизу:

$$\|A_\lambda f\| \geq |\nu|\|f\| \quad \forall f \in H$$

Пусть теперь $f \in \ker A_\lambda$. Это равносильно $A_\lambda f = 0 \Rightarrow 0 \geq |\nu|\|f\| \geq 0$,отсюда $f = 0$. По теореме Фредгольма

$$\overline{(\operatorname{Im} A_\lambda)} = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp = (\ker A_{\overline{\lambda}})^\perp = 0^\perp = H$$

так как в силу самосопряжённости $(A_\lambda)^* = A^*_{\overline{\lambda}} = A_{\overline{\lambda}}$. Аналогично как для A_λ

$$\|A_{\overline{\lambda}}\| \geq |\nu|\|f\| \Rightarrow \ker A_{\overline{\lambda}} = 0$$

Покажем теперь, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут. Пусть $\|A_\lambda\|f = g$, тогда $(A_\lambda)^{-1}g = f$, тогда

$$\|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \frac{\|g\|}{\nu} \quad \forall g \in \operatorname{Im} A_\lambda$$

Поэтому

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\nu}$$

Возмём $\forall g \in \overline{\operatorname{Im} A_\lambda}$, тогда $\exists \{g_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda \colon g_n \to g$ в H. $g_n = A_\lambda f_n$

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\nu}\|g_n - g_m\|$$

где $\|g_n - g_m\| \to 0$ $n, m \to \infty$, отсюда $f_n - f_m \to 0$ $n, m \to \infty$. Так как $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в полном пространстве H, то $\exists f \in H \colon f_n \to f$ в H. Так $g_n \to g$ $n \to \infty$ и так как A_λ — непрерывный оператор, то $g = A_\lambda f$ и $g \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Таким образом получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} A_\lambda = H \\ \ker A_\lambda = 0 \end{cases}$$

поэтому $\exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H$ такой, что $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\nu|}$ и $\nu = \operatorname{Im}\lambda \neq 0$.

Пример 1. *Пусть $H = L_2[0,1]$. Пусть задан оператор $A : H \mapsto H$ такой, что*

$$(Af)(x) = xf(x) \quad 0 \leq x \leq 1, f \in H$$

Норма этого оператора будет

$$\|Af\| = \sqrt{\int\limits_0^1 x^2 |f|^2 dx} \leq \|f\|_{L_2}$$

так как $x^2 \leq 1$. Отсюда следует, что $\|A\| \leq 1$. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon \in H$ такую:

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Тогда получаем, что

$$1 \geq \|A\| \geq \frac{\|Af_\varepsilon\|_{L_2}\|}{\|f_\varepsilon\|_{L_2}}$$

Выписываем явный вид нормы

$$\|A\| \geq \frac{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^1 x^2 dx}}{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^1 dx}} \geq (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^1 dx}}{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^1 dx}}$$

В итоге мы получили

$$1 \geq \|A\| \geq 1 - \varepsilon \to 1 \quad \varepsilon \to +0$$

Покажем теперь, что этот оператор самосопряжённый

$$(Af, g) = \int\limits_0^1 xf\overline{g}dx = \int\limits_0^1 f\overline{xg}dx = (f, xg) = (f, A^*g)$$

Поэтому $A^*g = xg = Ag\ \forall g \in H$. Рассмотрим теперь $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $\lambda \neq [0,1] \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$A_\lambda f = g = (x - \lambda) f$$

И тогда

$$(A_\lambda)^{-1} g = f(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda} \in L_2[0,1] \quad x \in [0,1]$$

Найдём норму f:

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_0^1 \frac{|g|^2}{|x-\lambda|^2} dx} \leq \rho(\lambda, [0,1]\|g\|$$

где $0 \leq \rho(\lambda, [0,1]) \leq |x - \lambda|\ \forall x \in [0,1]$ — расстояние, причём $\rho(\lambda, [0,1]) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0,1]$. Таким образом

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho(\lambda, [0,1])}$$

И образ естественно всё пространство так как g — любой объект из H. Таким образом непрерывность очевидна, определена на всём пространстве и поэтому за пределами этого отрезка спектра нет. $\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$, причём $\lambda \notin \sigma_P(A)$ так как иначе $Af = \lambda f, f \neq 0$ в H. $xf(x) = \lambda f(x)$ для почти всех $x \in [0,1]$, $\|f\| > 0$ на множестве положительной меры S. Получаем $x = \lambda$ почти всюду на S. Но мера $S > 0$, то есть не одно число, поэтому $x = \lambda$ невозможно.

Покажем, что $\forall\lambda \in [0,1]$ *выполняется* $\lambda \in \sigma(A)$ *тогда* $\ker A_\lambda = 0$ *и* $g \in \operatorname{Im} A_\lambda \Leftrightarrow (x-\lambda)f(x) = g(x)$*, то есть* $x \in [0,1]$*. Тогда* $f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0,1]$ *для почти всех* $x \in [0,1] \setminus \{\lambda\}$*. Но это справедливо не для всякой* g*. Пусть* $g(x) = 1$*, тогда* $\frac{1}{x-\lambda} \notin L_2[0,1]$*, поэтому* $1 \notin \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq H$*, Значит это элемент спектра* $\sigma(A) = \sigma_C(A)$*. Так как оператор самосопряженный, то для* $\lambda \in \mathbb{R}$ $\ker A_\lambda^* = \ker A_\lambda = 0$ *и получается, что* $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = (\ker A_\lambda)^\perp = 0^\perp = H$*. Таким образом для* $\lambda \in [0,1]$ *оператор* $(A_\lambda)^{-1} : \operatorname{Im} A_\lambda \mapsto L_2[0,1]$*, где* $\operatorname{Im} A_\lambda = \{g \in L_2[0,1] \mid \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0,1]\}$*.* $(A_\lambda)^{-1}g = \frac{g}{x-\lambda}$*. Но норма такого оператора* $\|(A_\lambda)^{-1}\| = +\infty$ *(доказать в качестве упражнения): надо подобрать функции такие, что* $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists g_n \in \operatorname{Im} A_\lambda$

$$\frac{(A_\lambda)^{-1}g_n\|}{\|g_n\|} \geq n$$

Если бы $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq +\infty$*, то получили ту же самую оценку:*

$$\|f\| = \|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \|(A_\lambda)^{-1}\|\|g\|$$

для любого f *из* H*, причём* $g = A_\lambda f$*. Отсюда*

$$k\|f\| = \frac{\|f\|}{\|(A_\lambda)^{-1}\|} \leq \|A_\lambda f\|$$

где $k = \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$*. И отсюда можно доказать, если норма образа больше или равна константы на норму прообраза, то мгновенно доказывается, что* $\operatorname{Im} A_\lambda$ *замкнут, что не так, так как замыкание образа совпадает с* H*, сам образ не совпадает.*

Ещё одно свойство самосопряжённого оператора:

Утверждение 2. *Если* $A : H \mapsto H$ *— линейный и непрерывный самосопрежённый оператор и* $\lambda, \mu \in \sigma(A)$*:* $\lambda \neq \mu$*, тогда* $\ker A_\lambda \perp \ker A_\mu$

Доказательство. Утверждение нетривиально для $\lambda, \mu \in \sigma_P(A)$ так как если одно из них из непрерывного спектра, то соответствующее ядро тривиально, а нулевое подпространство перпендикулярно чему угодно. Пусть $f \neq 0 \in \ker A_\lambda \neq 0$ и $g \neq 0 \in \ker A_\mu \neq 0$, тогда надо доказать, что $f \perp g$, то есть $(f,g) = 0$. В силу пункта 3 предыдущего утверждения $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $Af = \lambda f$ и $Ag = \mu g$. Получается

$$(Af, g) = \lambda(f, g)$$

с другой стороны

$$(Af, g) = (f, Ag) = (f, \mu g) = \overline{\mu}(f, g) = \mu(f, g)$$

Отсюда получаем, что

$$(\lambda - \mu)(f, g) = 0$$

И отсюда $(f,g) = 0$. Утверждение доказано.

Упражнение 1 (решается, например, с помощью теоремы Банаха-Штейнгаусса, (теорема Хеллингера, Теплица)). *Пусть* $A : H \mapsto H$ *— линейный и симметричный оператор, то есть* $(Af, g) = (f, AG)\ \forall f, g \in H$*. Тогда* A *— непрерывный оператор* $(\|A\| < +\infty)$*.*

Теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.

Опреление 1. $A : H \mapsto H$ *— линейный оператор называется компактным (или вполне непрерывным), если* $\forall \{f_n\} \subset H$ $\{f_n\}$ *ограничена в* H*. Иначе говоря* $\forall n$ $\|f_n\| \leq R \Rightarrow \exists \{Af_{n_k}\}$ *— фундаментальная подпоследовательность в* H*, где* $n_1 < n_2 < \ldots$

Утверждение 3. *A — компактный, тогда A — непрерывный. Обратное не верно.*

Пример 2. *Пусть U — унитарный оператор, то есть $U : H \mapsto H$ и $\|Uf\| = \|f\| \ \forall f \in H$ в бесконечномерном гильбертовом пространстве H. Очевидно, что $\|U\| = 1$, он он не компактный. Так как $\dim H = +\infty$, то существует линейно независимая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ортагонализируем её по Грамму-Шмитду и получим $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$,тогда*

$$(Ue_n, Ue_m) = (e_n, e_m) = 0$$

$\|Ue_n\| = 1$, тогда

$$\|Ue_n - Ue_m\| = \sqrt{\|Ue_n\|^2 + \|Ue_m\|^2} = \sqrt{2}$$

для любых $n \neq m$, поэтому нет фундаментальной подпоследовательности и U не компактный.

Упражнение 2. *Пусть оператор $Af(x) = xf(x)$ в $L_2[0,1]$. A — самосопряжённный оператор. Показать, что A — не компактный оператор.*

Докажем теперь утверждение

Доказательство. Если вдруг A — компактный и $\|A\| = +\infty$, тогда $\exists\{f_n\}$ с единичной сферы такая, что $\|Af_n\| \to +\infty$. Из компактности следует, что $\exists Af_{n_k}$ фундаментальная, то есть $Af_{n_k} \le R$, а с другой стороны $\|Af_{n_k}\| \to +\infty$. Получаем противоречие.

Утверждение 4. *Пусть A_1 и A_2 — компактные операторы. Тогда их линейная комбинация также компактна (доказательство очевидно). Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность компактных операторов и $A_n \to T$ по операторной норме, тогда T также компактный.*

Доказательство. Возмём последовательность f_n ограниченную в H и $\|f_n\| \le R$. Рассмотрим $\{A_1 f_n\}$ — это действие компактного оператора на ограниченную последовательность, тогда по определению $\exists\{n_k(1)\}_{k=1}^{\infty} \colon n_1(1) < n_2(1) < \cdots \Rightarrow A_1 f_{n_k(1)}$ — фундаментальная. Дальше действуем оператором A_2, тогда $\exists\{n_k(2)\} \subset \{n_k(1)\} \colon n_1(2) < n_2(2) < \cdots \Rightarrow A_2 f_{n_k(2)}$ — фундаментальная, причём $A_1 f_{n_k(2)}$ осталась фундаментальной как подпоследовательность фундаментальной. Будем действовать так дальше. Реализуем Канторов диагональный процесс. Если для $m \in \mathbb{N}$ имеем $\{n_k(m)\} \subset \{n_k(m-1)\} \subset \cdots \subset \{n_k(1)\} \subset \mathbb{N}$ так что $\{A_s f_{n_k(m)}\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная $\forall s = 1 \ldots m$. Тогда рассмотрим $\{A_{m+1} f_{n_k(m)}\}$, тогда, используя компактность, $\exists\{n_k(m{+}1)\} \subset \{n_k(m)\}$ такой, что $n_1(m{+}1) < n_2(m{+}1) < \ldots$ такая, что $\{A_{m+1} f_{n_k(m+1)}\}$ фундаментальная. Остальные же сохранили фундаментальность, так как мы перешли к подпоследовательности фундаментальной последовательности, которая также фундаментальна. Таким образом мы по индукции реализовали счётный набор последовательностей натуральных чисел. Рассмотрим $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$. $n_{k+1} \ge n_{k+1}(k)$ по построению и $n_{k+1}(k) > n_k(k)$ по определению, тогда $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$ строго возрастающая последовательность чисел. Тогда $\{f_{n_k(k)}\}$ — фундаментальная подпоследовательность. Рассмотрим действие оператора T на эту подпоследовательность. Надо доказать, что малло при большом p

$$\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)}\|$$

должно быть мало. Добавим умный ноль

$$\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)} \pm A_s f_{n_k(k)} \pm A_s f_{n_{k+p}(k+P}\|$$

Какое s надо взять? $\|f_n\| \le R$ по условию, тогда

$$\|f_n\| \le R \ \forall n \colon \forall \varepsilon > 0 \ \exists S(\varepsilon) \colon \forall s \ge S(\varepsilon) \ \|T - A_s\| \le \frac{\varepsilon}{R+1}$$

$A_s f_{n_k(m)}$ — фундаментальна по k если $s \ge m$