Линейные непрерывные операторы в евклидовом пространстве.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — два евклидовых пространства. $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ — линейный оператор. Иначе говоря $\forall \alpha_{1,2}\ \forall f_{1,2} \in \varepsilon_1\ A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A(f_1) + \alpha A(f_2)$.

Определение: A непрерывна в $f_0 \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0(\varepsilon)\ \forall f \in \varepsilon_1$: $\|f - f_0\| \le \delta_0(\varepsilon) \Rightarrow \|Af - Af_0\| \le \varepsilon$.

Из непрерывность в f_0 следует непрерывность $A\ \forall g \in \varepsilon_1$. Так как $\forall f \in \varepsilon_1\ \|f - g\| \le \delta_0(\varepsilon)$, то $\|Af - Ag\| = \|A(f-g) + A(f_0) - A(f_0)\| = \|A(f_0 + (f-g) - A(f_0)\| \le \delta_0(\varepsilon) \Rightarrow$ непрерывна в g. В частности при $g = 0$ $\|Af\| \le \varepsilon\ \forall \|f\| \le \delta_0(\varepsilon)$. Поэтому δ_0 — универсальное число.

Пусть $\varepsilon_1 = 1$, $\delta_0(1)$. $\forall f \neq 0$ $\left\|\frac{f}{\|f\|}\delta_0(1)\right\| = \delta_0(1)$. Подставим это выражение под знак оператора. $\|A(\frac{f}{\|f\|}\delta_0(1))\| \le 1 \Leftrightarrow \frac{\delta_0(1)}{\|f\|}\|Af\| \le 1 \Rightarrow$ оцениваем норму образа через норму прообраза: $\forall f \in \varepsilon_1\ \|A(f)\| \le \frac{\|f\|}{\delta_0(1)} \Rightarrow \forall f, g \in \varepsilon_1\ \|A(f-g)\| \le \frac{1}{\delta_0(1)}\|f - g\|$. Это липшецевость оператора A на ε_1 с $L = \frac{1}{\delta_0(1)}$. Рассмотрим наименьшую константу Липшеца и назовём её нормой.

Определение: $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $A \neq 0$ — линейный и непрерывный оператор, то $\|A\| = \inf\{L > 0 \mid \|Af\| \le L\|f\| \quad \forall f \in \varepsilon_1\}$. Очевидно, что это так же равно $\sup\limits_{f \in \varepsilon_1, f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = L_0$, $L_0 \le L$.

Пример линейного разрывного оператора:

$\varepsilon_1 = \{f \in C^1[0,1]\}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, $\varepsilon_2 = \mathbb{C}$. Пусть $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $A(f) = f'(0)\ \forall f \in \varepsilon_1$. Конечность нормы — критерий непрерывности. У этого оператора норма бесконечность: возмём, например, $f_n(x) = \sin nx \in \varepsilon_1$

$$A(f_n) = n$$
$$\|A(f_n)\| = |n|$$
$$\|f_n\| = \sqrt{\int\limits_0^1 \sin^2 nx dx} \le 1 \Rightarrow \|A\| = \infty \text{ иначе говоря}$$
$$\|A\| \ge \frac{|n|}{\|f_n\|} \ge n \to \infty$$

Или по-другому

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{n}} f_n \underbrace{\to}_{\text{по норме в } \varepsilon} 0$$
$$\|g_n\|_{\varepsilon_1} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$A(g_n) = \sqrt{n}$$
$$\|Ag_n\| = \sqrt{n} \to \infty$$

Дадим теперь два других определения операторной нормы. $\|A\| = \underbrace{\sup\limits_{f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|}}_{1} = \underbrace{\sup\limits_{\|f\|=0} \|Af\|}_{2} = \underbrace{\sup\limits_{\|f\| \le 1} \|Af\|}_{3}$. Покажем их равенство. $\boxed{1} \ge \boxed{2}$, так как $\|f\| = 1$ является сужением. С другой стороны $\sup \left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\| \leq \boxed{2} \Rightarrow \boxed{1} = \boxed{2}$. $\boxed{3} \leq \boxed{2}$ так как $f \neq 0$, $\|f\| \leq 1$ $\|Af\| = \underbrace{\|f\|}_{\leq 1} \underbrace{\left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\|}_{\leq \sup\limits_{\|\phi\|=1} \|A\phi\|}$.

Но $\boxed{2} \leq \boxed{3}$ так как является сужением, поэтому $\boxed{2} = \boxed{3}$.

Пример:

Пусть $\varepsilon_1 = \mathbb{C}^n$, $\varepsilon_2 = \mathbb{C}^m$. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ задаётся комплексной матрицей $m \times n$. $Af \in \mathbb{C}^m$ $\forall f \in \mathbb{C}^n$ есть умножение матрицы на столбец. $\|Af\|^2_{\mathbb{C}^m} = \overline{Af}^T Af = \overline{f}^T \underbrace{\overline{A}^T A}_{M} f$. $M^* = \overline{M}^T = M$ $\Rightarrow M \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно $\exists U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — унитарная матрица, то есть сохраняющая норму. $U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\overline{f}^T Mf = \|Af\|^2 \geq 0$. $\|Uf\| = \|f\|$, поэтому можно перейти к базису из собственных векторов. $f = Ug$, тогда $\|Af\|^2 = \overline{Ug}^T MUg = \overline{g}^T \overline{U}^T MUg$, но U — унитарная, следовательно $U^{-1} = U^* = \overline{U}^T \Rightarrow \overline{U}^T MU = U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\overline{g}^T \overline{U}^T MUg = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i |g_i|^2$. Обозначим теперь $\lambda_{max} = \max \lambda_i$, тогда $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i |g_i|^2 \leq \lambda_{max} \sum\limits_{i=1}^n |g_i|^2 =$ $\lambda_{max}\|f\|^2$. Тогда $\|Af\| \leq \sqrt{\lambda_{max}}\|f\|$ Обозначим $\tilde{g}_k = \delta_{kk_*}$, $\lambda_{max} = \lambda_{k_*}$, $\tilde{f} = U\tilde{g}$ и $\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = 1$. $\sqrt{\lambda_{max}} = \|A\tilde{f}\| \leq \|A\| \leq \sqrt{\lambda_{max}} \Rightarrow \|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(\overline{A}^T A)}$.