Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

# Теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.

**Напоминание .** *Пусть $H$ — гильбертово пространство, $A : H \mapsto H$ линейный непрерывный оператор. $A$ называется компактным, если $\forall \{f_n\} \subset H$ такой, что $\|f_n\| \leq R$ $\forall n$ следует $\exists Af_{n_k}$ — фундаментальная в $H$ подпоследовательность или, что равносильно $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon : H \mapsto H$ линейный и непрерывный и $\dim \operatorname{Im} A_\varepsilon < +\infty$, тогда $\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.*

Для прикладных целей пусть $A$ — компактный оператор и $\lambda \in \mathbb{C}$, и $f \in H$.

$$(I - \lambda A)u = f$$

где $u \in H$ и нужно найти $u$.

Из компактности $\forall \varepsilon > 0\colon \varepsilon|\lambda| < 1$ $\exists A_\varepsilon : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор, $\dim \operatorname{Im} A_\varepsilon < +\infty$ и $\|A_\varepsilon - A\| < \varepsilon$. Тогда

$$(I - \lambda A) = (I - \lambda A \pm \lambda A_\varepsilon) = (I - \lambda(A - A_\varepsilon) - \lambda A_\varepsilon)$$

Обозначим $\lambda(A - A_\varepsilon)$ как $T_\varepsilon(\lambda)$.

$$\|T_\varepsilon(\lambda)\| = \|\lambda\|\|A - A_\varepsilon\| \leq |\lambda|\varepsilon < 1$$

А значит по теореме Неймана $\exists (I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} : H \mapsto H$ линейный и непрерывный и

$$(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varepsilon(\lambda))^n$$

ряд сходящийся по операторной норме. Уравнение

$$(I - \lambda A)u = f$$

называется уравнением Фредгольма 2-го рода. Оно равносильно выражению

$$(I - T_\varepsilon(\lambda) - \lambda A_\varepsilon)u = f$$

Разобьём полученное выражение

$$(I - T_\varepsilon(\lambda))(I - \lambda(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} A_\varepsilon))u = f$$

Обозначим $(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1}$ как $L_\varepsilon(\lambda)$ Получаем

$$(I - \lambda L_\varepsilon(\lambda) A_\varepsilon)u = f_\varepsilon(\lambda) = L_\varepsilon(\lambda) f$$

Обозначим $C_\varepsilon(\lambda) = L_\varepsilon(\lambda)A_\varepsilon$. Этот оператор линейно непрерывный и его образ изоморфен образу $A_\varepsilon$ . Отсюда $\dim C_\varepsilon = \dim A_\varepsilon$.

**Утверждение 1.** *$A$ — компактный оператор в $H$, тогда $A^*$ также компактный оператор в $H$.*

**Доказательство.** Рассмотрим оператор такой, что

$$\forall \varepsilon\ \exists A_\varepsilon\colon A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^{N} (f, h_k) g_k \quad h_k, g_k \in H$$

Тогда $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$.

$$\|A^* - A_\varepsilon^*\| = \|(A - A_\varepsilon)^*\| = \|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$$

Надо показать, что $A_\varepsilon^*$ — компактный оператор. Покажем, что

$$A_\varepsilon^* g = \sum_{k=1}^{N} (g, g_k) h_k$$

так как

$$(f, A_\varepsilon^* g) = (A_\varepsilon f, g) = \sum_{k=1}^{N} (f, h_k)(g_k, g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (f, (g, g_k) h_k) = (f, \sum_{k=1}^{N} (g, g_k) h_k) = (f, A_\varepsilon^* g)$$

Получаем, что $\dim A_\varepsilon^* \leq N \subset \mathrm{Lin}(h_1, \ldots, h_N)$. Следовательно $A_\varepsilon^*$ — компактный оператор.

**Теорема 1 (первая теорема Фредгольма).** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$ и $\lambda \neq 0$, тогда $\dim\ker A_\lambda < +\infty$, где $A_\lambda = A - \lambda I$)*

**Доказательство.** Заметим, что, во-первых, если $L \subset H$ подпространство и $\dim\ker L < +\infty$, то это равносильно тому, что для любой ограниченной последовательность из $L$ имеет фундаментальную подпоследовательность. В прямую сторону это следует из теоремы Больцано — Вейерштрасса. Покажем справедливость в обратную сторону. Если вдруг $\dim L = +\infty$, то $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность линейно независимых векторов. Подвергнем её процедуре ортогонализации Грамма — Шмидта и получим $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L$, и $g_m \perp g_m$ $n \neq m$, и $g_n = \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\}$ так как

$$0 \neq g_1 = f_1$$
$$0 \neq g_2 = f_2 + \alpha g_1 \perp g_1$$
$$\vdots$$
$$0 \neq g_n = f_n + p_1 g_1 + \cdots + p_{n-1} g_{n-1} \perp g_1, \ldots, g_{n-1}$$

Строим $h_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|}$. Тогда $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная последовательность в $L$, а значит не имеет фундаментальной подпоследовательности, так как

$$\|h_n - h_m\|^2 = \|h_n\| + \|h_m\|^2 = \sqrt{2} \quad n \neq m$$

получили противоречие с условием, что $\forall \{f_n\} \subset \ker A_\lambda$ — ограниченная последовательность. $Af_{n_k}$ — фундаментальная последовательность образов в силу компактности $A$.

$$A_\lambda f_{n_k} = Af_{n_k} - \lambda f_{n_k} \equiv 0$$

Следовательно $f_{n_k} = \dfrac{1}{\lambda} Af_{n_k}$ — автоматически фундаментальная.

**Лемма 1.** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$ и $\lambda \neq 0$. Тогда $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнуто в $H$.*

**Доказательство.** Имеем, что $\ker A_\lambda \oplus (\ker A_\lambda)^\perp = H$. Образ $\operatorname{Im} A_\lambda$ символически равен

$$A_\lambda(H) = A_\lambda(\ker A_\lambda) + A_\lambda((\ker A_\lambda)^\perp) = A_\lambda((\ker A_\lambda)^\perp)$$

Покажем, что $\exists k > 0\colon \forall f \in (\ker A_\lambda)^\perp$ выполняется $\|A_\lambda\| \geq k\|f\|$. Отсюда вытекает, что $\exists A_\lambda : \dfrac{1}{k}(\ker A_\lambda)^\perp \mapsto \operatorname{Im} A_\lambda$ такой что

$$\|f\| = \|(A_\lambda)^{-1} A_\lambda f\| \leq \frac{1}{k}\|A_\lambda f\|$$

и следовательно

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{k}$$

Если показать существование такого $k$, то получим, что $\forall g \in \overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \overline{A_\lambda (\ker A_\lambda)^\perp}$ $\exists f_n \in (\ker A_\lambda)^\perp\colon g = \lim\limits_{n\to\infty} A_\lambda f_n$ в $H$. Тогда

$$\|A_\lambda f_n - A_\lambda f_m\| \to 0 \quad n, m \to \infty$$

С другой стороны

$$\|A_\lambda f_n - A_\lambda f_m\| = \|A_\lambda(f_n - f_m)\| \geq k\|f_n - f_m\|$$

Поэтому

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad n, m \to \infty$$

Следовательно, так как $H$ — полное

$$f_n \to h \in H$$

Следовательно
$$g = \lim_{n\to\infty} A_\lambda f_n = A_\lambda h \in \operatorname{Im} A_\lambda$$

Теперь увидим, что $k > 0$ действительно существует. Если вдруг такого $k > 0$ нет, то $\forall k > 0\ \exists f_k \in (\ker A_\lambda)^\perp\colon \|A_\lambda f_k\| < k\|f_k\| \quad f_k \neq 0$. Пусть $k = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, тогда $f_k = f_{\frac{1}{n}}$ и
$$\|A_\lambda \frac{f_{\frac{1}{n}}}{\|f_{\frac{1}{n}}\|}\| \leq \frac{1}{n}$$

Введём $g_n = \dfrac{f_{\frac{1}{n}}}{\|f_{\frac{1}{n}}\|} \in H$ и $\|g_n\| = 1$. Тогда
$$\begin{cases} \|A_\lambda g_n\| < \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \|g_n\| = 1 \end{cases}$$

Следовательно $A_\lambda g_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $A$ — компактный оператор, то $\exists A g_{n_m}$ – фундаментальная подпоследовательность в $H$, а значит сходится $A g_{n_m} \to h \in H$. Тогда
$$\begin{cases} A_\lambda g_{n_m} \to 0 \\ A g_{n_m} \to h \end{cases}$$

И тогда
$$g_{n_m} = \frac{A g_{n_m} - A_\lambda g_{n_m}}{\lambda} \to \frac{h}{\lambda}$$

С другой стороны в $H$ $A_\lambda g_{n_m} \to A_\lambda \dfrac{h}{\lambda}$ следовательно $A_\lambda h = 0$ и $h$ лежит в ядре $\ker A_\lambda$. Но $g_{n_m} \in (\ker A_\lambda)^\perp$ — замкнутое подпространство в $H$. И $g_{n_m} \to \dfrac{h}{\lambda} \Rightarrow \dfrac{h}{\lambda} \in (\ker A_\lambda)^\perp \Rightarrow h \in (\ker A_\lambda)^\perp$. Таким образом $h = 0$, $\|g_{n_m}\| = 1$ и
$$\left|\|\frac{h}{\lambda}\| - \|g_{n_m}\|\right| \leq \|\frac{h}{\lambda} - g_{n_m}\| \to 0$$

Значит $\dfrac{\|h\|}{|\lambda|} = 1 \Rightarrow \|h\| = |\lambda| > 0$. Противоречие.

Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

**Вопрос .** *$A$ — компактный оператор в $H$; $\dim H = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$*
Если вдруг $0 \notin \sigma(A)$ то есть $0 \in \rho(A)$. Это равносильно $\exists A^{-1} : H \mapsto H$. Суперпозиция непрерывного и компактного оператора также компактный оператор.

$$A^{-1}A = I : H \mapsto H$$

Значит $I$ также компактный оператор, а значит $\forall f_n \in H$ ограниченной $If_n = f_n$ существует $\exists If_{n_k} = f_{n_k}$ фундаментальная подпоследовательность, значит $H$ конечномерный — противоречие с $\dim H = \infty$

**Теорема 2 (третья теорема Фредгольма).** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$, $\lambda \neq 0$, тогда $\operatorname{Im} A_\lambda = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp = (\ker A^*_{\overline{\lambda}})^\perp$, где $(A_\lambda)^* = A^* - (\lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$. То есть равнение $A_\lambda u = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f \in (\ker(A_\lambda)^*)^\perp$, иначе говоря $(f, v) = 0$ $\forall v \in H\colon (A_\lambda)^* v = 0 \Leftrightarrow A^*v - \overline{\lambda} v = 0$ — однородное союзное уравнение. Раскроем подробней. $\lambda \neq 0$ и $(I - \lambda A)u = f$*

$$\operatorname{Im}(I - \lambda A) = \operatorname{Im}(-\lambda)(A - \frac{I}{\lambda}) = \operatorname{Im} A_{\frac{1}{\overline{\lambda}}} = (\ker(A_{\frac{1}{\overline{\lambda}}})^*)^\perp = (\ker(I - \overline{\lambda} A^*)^\perp)$$

*$f \in (I - \lambda A) \Leftrightarrow f \in (\ker(I - \overline{\lambda} A^*)^\perp)$, тогда $(f, v) = 0$ $\forall f \in H$ и $v = \overline{\lambda} A^* v$ — однородное союзное уравнение.*

**Доказательство.** Как было уже показано $\ker(A_\lambda)^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$, что равносильно $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp$. А по лемме 1 $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \operatorname{Im} A_\lambda$, что и требовалось доказать.

**Следствие (альтернатива Фредгольма).** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$; $\lambda \neq 0$, то $\forall f \in H$ $\exists u \in H\colon A_\lambda u = f$, либо $\exists v \in H$ $v \neq 0\colon (A_\lambda)^* v = 0$*
**Доказательство.** Либо $\ker(A_\lambda)^* = 0$ и тогда по теореме Фредгольма $\operatorname{Im} A_\lambda = H$, а по второй теореме Фредгольма тогда $\ker A_\lambda = 0$ следовательно $\forall f \in H$ $\exists! u \in H\colon A_\lambda u = f$

Либо $\ker(A_\lambda)^* \neq 0$ (и по второй теореме Фредгольма $\ker A_\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \sigma_P(A)$), тогда $v \in \ker(A_\lambda)^*$ $v \neq 0$.

**Теорема 3 (вторая теорема Фредгольма).** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$ и $\lambda \neq 0$, тогда $\dim\ker A_\lambda = \dim\ker(A_\lambda)^*$, где $\dim\ker A_\lambda$ конечномерен по 1-ой теореме Фредгольма.*

**Лемма 2.** *$A$ — компактный оператор в $H$ и $\lambda \neq 0 \in \sigma_P(A)$, тогда $\operatorname{Im} A_\lambda \neq H$.*

**Пример 1.** $A : H \mapsto H$ — линейный непрерывный и не компактный оператор. $\lambda \in \sigma_P(A)$, $\lambda \neq 0$ и $\ker A_\lambda \neq 0$, тогда может быть, что $\operatorname{Im} A_\lambda = H$.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $H$ ($H = L_2[0, 1]$ и $e_k(x) =$

$\sqrt{2}\sin \pi kx, k \in \mathbb{N}$). Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) e_k, \quad \alpha_k(f) = (f, e_k)$$

По равенству Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f)|^2$$

Пусть оператор $T$ действует как

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k+1}(f) e_k$$

Тогда

$$\|T_f\| = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k(f)|^2} \leq= \|f\|$$

Норма $\|T\| \leq 1$. $Te_2 =_1$, тогда

$$\|T\| \geq \|Te_2\| = \|e_1\| = 1$$

Отсюда $\|T\| = 1$. Пусть $f \in \ker T$, что равносильно $\alpha_k(f) = 0\ \forall \alpha \geq 2$, значит $f = \mathrm{Lin}\{e_1\}$. Тогда $\forall g \in H$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(f) e_k$$

и $\|g\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k(f)|^2 < \infty$.

$$\exists f = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{k-1}(f) e_k \in H$$

что $Tf = g$, значит $\mathrm{Im}\, T = H$. Пусть $A = T + I$, $\lambda = 1$. Тогда $A_\lambda = T + I - I = T$. Отсюда $\ker A_\lambda = \ker T \neq 0$, но $\mathrm{Im}\, A_\lambda = H = \mathrm{Im}\, T = H$.

Докажем теперь лемму.

**Доказательство.** Если вдруг $\mathrm{Im}\, A_\lambda = H$, тогда можно показать последовательность замкнутых подпространств.

$$0 \neq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq L_3 \subsetneq \dots \subsetneq L_n \subsetneq \dots$$

и $A_\lambda L_n \subset L_{n-1} \quad \forall n \geq 2$. Если указать, то тогда существует последовательность $\{f_n\}$:

$$0 \neq f_1 \in L_1$$
$$0 \neq f_2 \in L_2 \cap L_1^\perp$$
$$0 \neq f_n \in L_n \cap L_{n-1}^\perp \quad n \geq 2$$

Пусть теперь $g_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|}$, $g_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|}$, $g_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|}$. $\{g_n\}$ также ограниченная последовательность в $H$. $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\|Ag_n - Ag_{n+p} \pm \lambda g_n \pm \lambda g_{n+p}\| = \\
&\qquad = \|A_\lambda g_n - A_\lambda g_{n+p} + \lambda g_n - \lambda g_{n+p}\| = \\
&\qquad = |\lambda| \left\| \frac{A_\lambda g_n - A_\lambda g_{n+p} + \lambda g_n}{\lambda} - g_{n+p} \right\| \geq \\
&\qquad\qquad \geq |\lambda| \|g_{n+p}\| = |\lambda|
\end{aligned}$$

Следовательно
$$\|Ag_n - Ag_{n+p}\| > |\lambda| > 0$$
Следовательно $Ag_n$ не содержит фундаментальную подпоследовательность.

Рассмотрим $L_n = \ker (A_\lambda)^n$, тогда $L_1 = \ker A_\lambda \neq 0$ по условию так как $\lambda \in \sigma_P(A)$. Верно ли, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $L_n \subsetneq L_{n+1}$? Пусть $f \in L_n$, тогда $(A_\lambda)^n f = 0$, значит $A_\lambda (A_\lambda)^n f = (A_\lambda)^{n+1} f = 0$, следовательно $f \in L_{n+1}$. По условию $\exists f_1 = L_1 \setminus \{0\}$, тогда по предположению $\exists f_2 \in H$:

$$A_\lambda f_2 = f_1 \neq 0$$

$\Rightarrow f_2 \notin L_1$, но
$$(A_\lambda)^2 f_2 = A_\lambda f_1 = 0$$
отсюда $f_2 \in L_2 \setminus L_1$. $f_n \neq 0$ $f_n \in L_n$, тогда $\exists f_{n+1} \in H$:

$$A_\lambda f_{n+1} = f_n \neq 0$$

Следует ли $f_{n+1} \notin L_n$?

$$(A_\lambda)^n A_\lambda f_{n+1} = (A_\lambda)^{n+1} f_{n+1} = 0$$

Тогда $f_{n+1} \in L_{n+1} \setminus L_n$. $f \in L_n \Leftrightarrow (A_\lambda)^n f = 0$, $g = A_\lambda f$, тогда

$$(A_\lambda)^{n-1} g = (A_\lambda)^n f = 0$$

значит $g \in L_{n-1}$. Таким образом получили противоречие с тем, что $A$ компактный оператор.

Перейдём теперь к доказательству второй теоремы Фредгольма.

**Доказательство.** По теореме Фредгольма для произвольного непрерывного оператора

$$\ker A_\lambda = (\operatorname{Im}(A_\lambda)^*)^\perp$$
$$\ker(A_\lambda)^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$$

Если увидем, что $\dim\ker A_\lambda \le \dim(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$, то это аналогично для сопряжённого оператора $\dim\ker(A_\lambda)^* \le \dim(\operatorname{Im}(A_\lambda)^*)^\perp = \dim(\operatorname{Im} A^*_{\overline{\lambda}})^\perp$ и $\overline{\lambda} \ne 0$ и $A^*$ — компактный оператор. Тогда $\dim\ker A_\lambda \le \dim\ker(A_\lambda)^*$ и $\dim\ker(A_\lambda)^* \le \dim\ker A_\lambda$ и доказательство будет завершено.

Если вдруг $\dim\ker A_\lambda \dim(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \ge 0$, тогда $\lambda \in \sigma_P(A)\backslash\{0\}$. Из первой теоремы Фредгольма $\ker A_\lambda$ конечномерен и $(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$ также конечномерен и меньшей размерности. $\exists \Phi : \ker A_\lambda \mapsto (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$ линейный конечномерный $\ker \Phi \ne 0$. Оператор $\Phi$ будет компактный в конечномерном гильбертовом пространстве так как по теореме Больцано — Вейерштрасса все линейные операторы являются компактными. Рассмотрим $P : H \mapsto \ker A_\lambda$, где $\ker A_\lambda \ne 0$, ортопроектор. $\ker A_\lambda \oplus (\ker A_\lambda)^\perp = H$ и $\|P\| = 1$. Смотрим на

$$T = A + \Phi P$$

так как $A$ компактен, $\Phi$ также компактен и $P$ линеен, то $T$ компактный оператор. Рассмотрим

$$T_\lambda = A_\lambda + \Phi P$$

так как $\ker \Phi \ne 0$, то $\exists f_0 \ne 0 \in \ker A_\lambda$ такой, что $\Phi f_0 = 0$ и $P f_0 = f_0$. Тогда

$$T_\lambda f_0 = A_\lambda f_0 + \Phi P f_0 = 0$$

Таким образом $0 \ne f_0 \in \ker T_\lambda$, значит $0 \ne \lambda \in \sigma_P(T)$.

$$\operatorname{Im} T_\lambda = T_\lambda(H) = A_\lambda(H) + \Phi P(\ker A_\lambda)$$

$A_\lambda(H) = \operatorname{Im} A_\lambda$, которое замкнуто по лемме 1, и

$$\Phi P(\ker A_\lambda) = \Phi \ker A_\lambda = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$$

Также $H = \ker A_\lambda + (\ker A_\lambda)^\perp$ и по теореме Рисса об ортогональном разложении

$$\operatorname{Im} T_\lambda = \operatorname{Im} A_\lambda + (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = H$$

Следовательно $\operatorname{Im} T_\lambda = H$. Получили противоречие с леммой 2.

**Теорема 4 (4-ая теорема Фредгольма).** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ множество*

$$\Lambda_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \lambda \in \sigma_P(A) \\ |\lambda| > \varepsilon \end{array} \}$$

*содержит конечное число элементов или пусто.*

**Доказательство.** Если $\exists \varepsilon > 0$: $\Lambda_{\varepsilon_0}$ содержит счётное и больше элементов, тогда $\exists \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda_{\varepsilon_0}$ и $\lambda_n \neq \lambda_m$ при $n \neq m$, $\lambda_n \in \sigma_P(A)$. Из курса линейной алгебры известно, что если $f_k \in \ker A_{\lambda_k}, k = 1 \dots N$, то $\{f_1, \dots f_N\}$ линейно независимы. Рассмотрим $L_n = \operatorname{Lin}\{f_1 \dots f_N\}$. Оператор $A : L_n \mapsto L_n$. Рассмотри последовательность $L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq L_3 \subsetneq \dots$ и $L_N$ — замкнутое конечномерное подпространство в $H$. Покажем, что $A_{\lambda_N} L_N \subset L_{N-1}$ при $N \geq 2$

$$A_{\lambda_N}(\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i) = (A - \lambda_N I)\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_N f_i = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_N) f_i \in L_{N-1}$$

Теперь как в доказательстве леммы 2 для подпространств $\{L_n\}_{N=1}^\infty$ строим ортонормированную систему $g_N \in L_N \cap (L_{N-1})^\perp$, где $g_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \in L_1$ и $\|g_N\| = 1, N \geq 2$.

$$\|Ag_N - Ag_{N+p} \pm \lambda_N g_N \pm \lambda_{N+p} g_{N+p}\| = |\lambda_{N+p}| \| \frac{A_{\lambda_N} g_N - A_{\lambda_{N+p}} g_{N+p} + \lambda_N g_N}{\lambda_{N+}} - g_{N+p}\| \geq |\lambda_{N+p}|$$

Отсюда

$$\|Ag_N - Ag_{N+p}\| \geq \varepsilon_0$$

Следовательно $\{Ag_N\}$ не содержит фундаментальную подпоследовательность — противоречие с тем, что $A$ — компактный оператор.

**Следствие (теорема о спектре компактного оператора).** *Пусть $A$ — компактный оператор в $H$, то $\sigma(A)$ — не более, чем счётное множество. $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_P(A)$. $\sigma(A)$ имеет не более одной предельной точки и эта точка — ноль.*

**Доказательство.** $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ и если вдруг $\lambda \notin \sigma_P(A)$, то есть $\ker A_\lambda = 0$, тогда по 2-ой теореме Фредгольма $\ker(A_\lambda)^* = 0$, тогда по 3-ей теореме Фредгольма $\operatorname{Im} A_\lambda = (\ker A_\lambda^*)^\perp = H$, следовательно $\lambda \in \rho(A)$ — противоречие. Следовательно $\lambda \in \sigma_P(A)$. По 4-ой теореме Фредгольма $\sigma_P(A)$ не более чем счётно, следовательно $\sigma(A)$ не более чем счётно если $\dim H = +\infty$, следовательно $0 \in \sigma(A)$. Если $\sigma_P(A)$ счётно, то $\exists \{\lambda\}_{n=1}^\infty = \sigma_P(A) \setminus \{0\}$, а по 4-ой теореме Фредгольма $\lambda_n \to 0$ при $n \to 0$, следовательно $\lambda = 0$ — предельная точка спектра.