

Воспоминание (об ортогональном базисе в гильбертовом пространстве). Пусть H — гильбертово пространство и $\dim H = +\infty$, тогда $\exists \{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$, что $\forall N \{e_1, \dots, e_N\}$ — линейно независимый набор.

Определение 1. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ называют базисом в H , если $\forall f \in H \exists \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}$:

$$\|f - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k\| \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty$$

Что по определению равносильно

$$f = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k$$

Определение 2. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ называют полной в H , если $\forall f \in H \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, f) \exists \{\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon, f)\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$: $\|f - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k\| \leq \varepsilon$. Это равносильно тому, что линейная оболочка $\text{Lin}\{e_k\}_{k=1}^\infty = \{\sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k \mid \alpha_1 \dots \alpha_N \in \mathbb{C} \forall N \in \mathbb{N}\}$ всюду плотна в H , что равносильно $\rho(f, L_N) \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty$, где $L_N = \text{Lin}\{e_k\}_{k=1}^N$ и $L_N \subset L_{N+1}$. $\rho(f, L_{N+1}) \leq \rho(f, L_N) \leq \rho(f, L_{N(\varepsilon, f)}) \leq \varepsilon$, поэтому $\rho(f, L_N)$ уменьшается при увеличении N и $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho(f, L_N) = 0$ по теореме Больцано — Вейерштрасса.

Пример 1. есть полнота, но нет базиса. $\{e_k(x) = x^k\}_{k=0}^\infty, e_0(x) = 1, x \in [0, 1]$ в $H = L_2[0, 1]$ является полной по теореме Вейерштрасса о равномерном приближении многочленом, но это не базис (доказать в качестве упражнения)

Утверждение . Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональная полная система в H , тогда $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — базис в H

Доказательство. Пусть $L_N = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_N\}$. Тогда по минимальному свойству коэффициентов Фурье по ортогональной системе

$$P_{L_N}(f) = S_N(f) = \sum_{n=1}^N \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

Причём

$$P_n(f) = \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

это ортопроекция f на $\text{Lin}\{e_n\}$ и $\|P_n\| = 1$, тогда

$$P_{L_N} = \sum_{n=1}^N P_n$$

Так как $\rho(f, L_N) \rightarrow 0$ и $\rho(f, L_N) = \|f - P_{L_N}(f)\|$, то

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} P_n f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

сходимость по норме в H . $\exists \alpha_n = \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)}$ — коэффициент фурье f в системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Если существует другое разложение

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$$

тогда

$$(f, e_n) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \beta_n e_n, e_m \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \beta_n e_n, e_m \right)$$

тогда при $N > m$ это равно $\beta_m(e_m, e_m)$, а значит $\beta_m = \alpha_m = \frac{(f, e_m)}{(e_m, e_m)}$

Определение 3. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называют замкнутой, если из $(f, e_k) = 0 \forall k$ следует, что $f = 0$, что равносильно по определению $(\text{Lin}\{e_k\})^{\perp} = 0$, что равносильно $\overline{\text{Lin}\{e_k\}} = H \Leftrightarrow \{e_k\}$ — полная система.

Наблюдение . $\{e_k\}$ — полная система, тогда ортогонализуем её по Гильберту — Шмитду.

$$\begin{aligned} 0 &\neq g_1 = e_1 \\ 0 &\neq g_2 = e_2 + \alpha_{21}g_1 \perp g_1 \\ &\vdots \\ 0 &\neq g_n = e_n + \alpha_{n1}g_1 + \dots + \alpha_{nn-1}g_{nn-1} \perp g_1 \dots g_{n-1} \end{aligned}$$

Тогда $\text{Lin}\{g_1, \dots, g_N\} = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_N\}$, $g_n \in L_n$ и $e_n \in \text{Lin}\{g_1, \dots, g_N\}$. $\rho(f, L_N) \rightarrow 0 \forall f \in H$ в силу полноты, тогда $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ осталась полной, но стала ортогональной, поэтому это базис.

Ортогональные базисы в декартовом и тензорном произведении двух гильбертовых пространств

Пусть H_1 и H_2 — два гильбертова пространства. Декартовым произведением H_1 и H_2 обозначается линейное пространство такое, что

$$H_1 \times H_2 = \left\{ u_1 \times u_2 \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} u_1 \in H_1 \\ u_2 \in H_2 \end{matrix} \right\}$$

Тогда $\forall u_k, \tilde{u}_k, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + \tilde{u}_1 \\ u_2 + \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = H_1 \times H_2, 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0.$$

$$(u_1 \times u_2, \tilde{u}_1 \times \tilde{u}_2) = (u_1, \tilde{u}_1)_{H_1} + (u_2, \tilde{u}_2)_{H_2} \geq 0$$

тогда

$$(u_1 \times u_2, u_1 \times u_2) = \|u_1\|_{H_1}^2 + \|u_2\|_{H_2}^2 \geq 0$$

Посмотрим, когда скалярное произведение в таком случае будет ноль. Тогда $u_1 = 0 \in H_1$ и $u_2 = 0 \in H_2$, а значит $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \in H_1 \times H_2$. Очевидно

$$\|u_1 \times u_2\|_{H_1 \times H_2} = \sqrt{\|u_1\|_{H_1}^2 + \|u_2\|_{H_2}^2}.$$

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — базис в H_1 и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ — базис в H_2 . Рассмотрим систему ортогональных векторов в $H_1 \times H_2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} k \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$$

$u_1 \times u_2 \in H_1 \times H_2$, и $\|u_1 - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k\|_{H_1} \leq \varepsilon$, и $\|u_2 - \sum_{k=1}^N \beta_k g_k\|_{H_2} \leq \varepsilon$, тогда

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \\ \sum_{k=1}^N \beta_k g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^N \alpha_k \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^N \beta_k \begin{pmatrix} 0 \\ g_k \end{pmatrix} \in \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix} \right\}$$

Пусть

$$u = \begin{pmatrix} u_1 - \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \\ u_2 - \sum_{k=1}^N \beta_k g_k \end{pmatrix}$$

тогда $\|u\|_{H_1 \times H_2} \leq \sqrt{2}\varepsilon$, а значит $\left\{\begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix}\right\}$ полная в $H_1 \times H_2$, поэтому базис в $H_1 \times H_2$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix}$$

Тензорное произведение H_1 и H_2 $H_1 \otimes H_2$. $\forall u_1 \in H_1$ и $\forall u_2 \in H_2$ $u_1 \otimes u_2 = w \in H_1 \otimes H_2$ — пара. Введём сложение и умножение на скаляр этих пар $u_1 \otimes u_2$ $u_1 \otimes u_2 + \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2$ и $\alpha(u_1 \otimes u_2)$, $u_k, \tilde{u}_k \in H_k, k = 1, 2$ так, чтобы $\alpha(u_1 \otimes u_2) = (\alpha u_1) \otimes u_2 = u_1 \otimes (\alpha u_2)$, $(u_1 + \tilde{u}_1) \otimes u_2 = u_1 \otimes u_2 + \tilde{u}_1 \otimes u_2$ и $u_1 \otimes (u_2 + \tilde{u}_2) = u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes \tilde{u}_2$. Вводим

$M = \{\text{всевозможные конечные линейные комбинации пар } u_1 \otimes u_2, u_k \in H_k, k = 1, 2\}$
 $u_1 \otimes 0$ или $0 \otimes u_2$ — нули в H — линейное пространство. Тогда

$$\begin{aligned} u_1 \otimes 0 + u_1 \otimes u_2 &= u_1 \otimes u_2 \\ u_1 \otimes (0 + u_2) &= u_1 \otimes u_2 = 0 \in M \end{aligned}$$

Введём скалярное произведение как

$$(u_1 \otimes u_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2)_M = (u_1, \tilde{u}_1)_{H_1} (u_2, \tilde{u}_2)_{H_2}$$

Тогда

$$(u_1 \otimes u_2, u_1 \otimes u_2) = \|u_1\|_{H_1}^2 \|u_2\|_{H_2}^2 \geq 0$$

Оно равно нулю тогда и только тогда, когда $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$, следовательно $u_1 \otimes u_2 = 0$. Потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes u_2 + \hat{u}_1 \otimes \hat{u}_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2) &= \\ &= (u_1 \otimes u_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2) + (\hat{u}_1 \otimes \hat{u}_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2) = \\ &= (u_1, \tilde{u}_1)(u_2, \tilde{u}_2) + (\hat{u}_1, \tilde{u}_1)(\hat{u}_2, \tilde{u}_2) \end{aligned}$$

Наделим $(M, \| \cdot \|)$ нормой, порождённой скалярным произведением. Пополняя $(M, \| \cdot \|)$ получим $H_1 \otimes H_2$. M всюду плотно в $H_1 \otimes H_2$ по построению. В смысле евклидовой нормы

$$\|u_1 \otimes u_2\| = \sqrt{(u_1 \otimes u_2)(u_1 \otimes u_2)} = \|u_1\| + \|u_2\|$$

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H_1 и $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в H_2 . Пусть $h_{km} = e_k \otimes g_m \in M \subset H_1 \otimes H_2$, тогда

$$(h_{km}, h_{\tilde{k}\tilde{m}})_{H_1 \otimes H_2} = (e_k, e_{\tilde{k}})_{H_1} (g_m, g_{\tilde{m}})_{H_2}$$

Если $h_{km} \neq h_{\tilde{k}\tilde{m}}$, тогда либо $k \neq \tilde{k}$, либо $m \neq \tilde{m}$, тогда $(e_k, e_{\tilde{k}}) = 0$, либо $(h_m, h_{\tilde{m}}) = 0$, а значит $(h_{km}, h_{\tilde{k}\tilde{m}}) = 0$, отсюда система h_{km} ортогональная в $H_1 \otimes H_2$

Берём $w \in H_1 \otimes H_2$, тогда $\forall \varepsilon \exists v \in H: \|w - v\|_{H_1 \otimes H_2} \leq \varepsilon$. Пусть

$$v = \sum_{k=1}^N \alpha_k u_{1k} \otimes u_{2k}$$

где $u_{1k} \in H_1, u_{2k} \in H_2$.

$$\|u_{1k} - \sum_{j=1}^M \beta_{jk} e_j\|_{H_1} \leq \delta$$

Обозначим как S_1 частичную сумму $\sum_{j=1}^M \beta_{jk} e_j$. Аналогично

$$\|u_{2k} - \sum_{s=1}^M \gamma_{sk} g_s\|_{H_2} \leq \delta$$

и $S_2 = \sum_{s=1}^M \gamma_{sk} g_s$. Тогда рассмотрим

$$\|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_1 \otimes S_2\|_{H_1 \otimes H_2}$$

Так суммы сходятся, то $u_{1k} - S_1 = \xi_1$ и $u_{1k} = \xi_1 + S_1$, аналогично $u_{2k} = \xi_2 + S_2$. Тогда

$$\|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_1 \otimes S_2\|_{H_1 \otimes H_2} = \|(S_1 + \xi_1) \otimes (S_2 + \xi_2) - S_1 \otimes S_2\|$$

Из наложенного требования на скалярное произведение

$$(S_1 + \xi_1) \otimes (S_2 + \xi_2) = S_1 \otimes S_2 + S_1 \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes S_2 + \xi_1 \otimes \xi_2$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_1 \otimes S_2\|_{H_1 \otimes H_2} &= \\ &= \|S_1 \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes S_2 + \xi_1 \otimes \xi_2\| \leq \\ &\leq \|S_1 \otimes \xi_2\| + \|\xi_1 \otimes S_2\| + \|\xi_1 \otimes \xi_2\| \leq \\ &\leq (\|u_{1k}\| + \delta)\delta + (\|u_{2k}\| + \delta)\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

подерём δ , чтобы полученное выражение было бы меньше ,чем

$$\frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^N |\alpha_k| + 1}$$

тогда

$$\|v - \sum_{k=1}^N \alpha_k S_{1k} \otimes S_{2k}\| \leq \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_{1k} \otimes S_{2k}\| \leq \varepsilon$$

Отсюда $\{h_{km}\}_{km=1}^\infty$ полная ортогональная система в $H_1 \otimes H_2$ — ортогональный базис.

В качестве приложения пусть $L_2[0, 1] = H_1 = H_2$, $g, f \in L_2[0, 1]$, тогда определим

$$f(x) \otimes g(y) = f(x)g(y) \subset L_2([0, 1]^2)$$

тогда

$$f_1 \otimes g_2 + \tilde{f}_1 \otimes \tilde{g}_1 = f(x)g(y) + \tilde{f}(x)\tilde{g}(y)$$

Скалярное произведение

$$(f \otimes g, \tilde{f} \otimes \tilde{g}) = (f, \tilde{f})_{L_2[0,1]}(g, \tilde{g})_{L_2[0,1]} = \int_0^1 f \tilde{f} dx \int_0^1 g \tilde{g} dy$$

и

$$(f \otimes g + \hat{f} \otimes \hat{g}, \tilde{f} \otimes \tilde{g}) = (f, \tilde{f})(g, \tilde{g}) + (\hat{f}, \tilde{f})(\hat{g}, \tilde{g})$$

также

$$\|f \otimes g\| = \|f\|_{L_2[0,1]} \|g\|_{L_2[0,1]}$$

Множество всех конечных линейных комбинаций

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(x) g_k(y) \mid \alpha_k \in \mathbb{C}; N \in \mathbb{N}; f_k, g_k \in L_2[0, 1] \right\}$$

Утверждение . Пополнение M — это $L_2([0, 1]^2)$. $L_2([0, 1] \times [0, 1]) = L_2[0, 1] \otimes L_2[0, 1] = H$

Доказательство. $\forall w \in L_2([0, 1]^2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in C([0, 1]^2)$, где $C([0, 1]^2)$ — пополнение L_2 , такой, что $\|w - v\|_{L_2([0, 1]^2)} \leq \varepsilon$. По теореме Стоуна — Вейерштрасса $\exists P(x, y)$ многочлен $\max_{[0, 1]^2} |P - v| \leq \varepsilon$ и $P \in M$. Тогда $\|v - P\|_{L_2([0, 1]^2)} \leq$

$$\max_{[0, 1]} |P - v| \leq \varepsilon, \text{ а значит } \|w - P\|_{L_2([0, 1]^2)} \leq 2\varepsilon$$

Построим базис. $\sin \pi k x = e_k(x)$, $\sin \pi m y = g_m(y)$ — ортогональный базис в $L_2[0, 1]$. Тогда $h_{km}(x, y) = \sin \pi k x \sin \pi m y$ — ортогональный базис в $L_2([0, 1]^2)$

Пример 2. электрон со спином $L_2[0, 1] \otimes \mathbb{C}^2$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис в \mathbb{C}^2 . Пусть $f(x) \in L_2[0, 1]: f: [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$ и $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, тогда $f(x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f(x) \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Пусть $\{e_k\}$ — базис в $L_2[0, 1]$, тогда $e_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $e_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ базис в $L_2[0, 1] \otimes \mathbb{C}^2$. Но это также и базис в $L_2[0, 1] \times L_2[0, 1]$. Отсюда $L_2[0, 1] \times L_2[0, 1] = L_2[0, 1] \otimes \mathbb{C}^2$ и

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} = \Psi_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_2(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k e_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_k e_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Теорема 1 (Гильберта, Шмидта). Пусть H — гильбертово пространство и $A: H \mapsto H$ — компактный самосопряжённый оператор. Тогда в $(\ker A)^\perp \neq 0$ есть базис из собственных функций A .

Доказательство. $A \neq 0 \Leftrightarrow \|A\| > 0$, так как A — самосопряжённый, то спектральный радиус $r(A) = \|A\|$, а значит $\exists \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, что $|\lambda| = r(A) = \|A\| > 0$. По теореме о спектре компактного оператора для любого нетривиального элемента его спектра, являющийся собственным значением следует, что $\sigma_P(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Пусть $\lambda \in \sigma_P(A) \setminus \{0\}$, тогда $f \neq 0$ такой, что $f \in \ker A_\lambda$ следует, что $f \in (\ker A)^\perp$ так как $\forall g \in \ker A$

$$(Af, g) = \lambda(f, g) = (f, Ag) = 0 \Rightarrow (f, g) = 0$$

По 4-ой теореме Фредгольма $\sigma_P(A) \setminus \{0\}$ не более чем счётное с быть может единственной предельной точкой 0. Поэтому занумеруем $\{\lambda_k\}_{k=1}^N = \sigma_P(A) \setminus \{0\}$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Если $N = +\infty$, то $\lambda_n \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$. По 1-ой теореме Фредгольма $\ker A_{\lambda_n}$ конечномерно. Отсюда $\forall n \in 1 \dots N \exists h_{n_1} \dots h_{n_m} \in \ker A_{\lambda_n}$ ортогональный базис в $\ker A_{\lambda_n}$, где $m_n = \dim \ker A_{\lambda_n}$. Так как A — самосопряжённый, то $\ker A_{\lambda_n} \perp \ker A_{\lambda_m}$ при $n \neq m$.

$$M = \bigoplus_{n=1}^N \ker(A_{\lambda_n})$$

Это линейная оболочка, то есть

$$M = \text{Lin}\{h_{n_k}\}_{k=1 \dots m_n}^{n=1 \dots N}$$

Замыкание $\overline{M} = L$ является замкнутым подпространством в $(\ker A)^\perp$, тогда

$$\{h_{n_k}\}_{k=1 \dots m_n}^{n=1 \dots N}$$

полная ортогональная система в L и значит $\{h_{n,k}\}$ — ортогональный базис в L . Таким образом $L \subset (\ker A)^\perp$ — замкнутое подпространство с ортогональным базисом $\{h_{n,k}\}$ из собственных функция A . Хотелось бы доказать, что $L = (\ker A)^\perp$.

Если вдруг $L \neq (\ker A)^\perp$, тогда по теореме Рисса об ортогональном разложении $\exists K \subset (\ker A)^\perp$ — замкнутое подпространство, $K \perp L$ и $K \oplus L = (\ker A)^\perp$ и $K \neq 0$. По построению видно, что $A(L) \subset L$ (L — инвариантное подпространство). Действительно, пусть $f \in L$, тогда

$$f = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n,k} h_{n,k}$$

В случае $N = \infty$ ряд сходится в H . Тогда из непрерывности Af получаем

$$Af = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n,k} Ah_{n,k} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n,k} \lambda_{n,k} h_{n,k} \in L$$

Так как A — самосопряжённый оператор, то $A(K) \subset K$ так как $\forall g \in K \forall f \in L$ так как $Af \in L$, то $Af \perp g$ и

$$(Af, g) = (f, Ag) = 0$$

A значит $Ag \perp f$ и $Ag \in (\ker A)^\perp$, что равносильно $Ag \in K$. Если вдруг $A \neq 0$ на K , то A наследует свои свойства из H то есть является компактным самосопряжённым оператором из K в K . Тогда по свойствам компактного самосопряжённого оператора существует собственное значение $\lambda \neq 0$ для $A : K \mapsto K$ и существует $g \in K : Ag = \lambda g, \lambda \neq 0$, тогда $\lambda \in \sigma_P(A) \setminus \{0\}$. Но тогда $\lambda = \lambda_n$ и $g \in \ker A_{\lambda_n}$, но это ядро по построению ортогонально K , поэтому получаем $g \perp g$, значит $g = 0$ противоречие, следовательно $A = 0$ на K , значит $K \subset \ker A$, но $K \subset (\ker A)^\perp$ следовательно $K = 0$.

Если H — сепарабельное гильбертово пространство, то есть содержит счётное всюду плотное множество, то если $\ker A \neq 0$, то оно тоже сепарабельное (доказать в качестве упражнения), тогда в $\ker A$ существует полная система $\{g_k\}_{k=1}^S$, где $S = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Ортогонализуем её и получим ортогональный базис $\{e_k\}$ в $\ker A$.