

# Свойства самосопряжённых линейных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть  $H$  — гильбертово пространство. Пусть  $A : H \mapsto H$  — линейный и непрерывный оператор. Пусть  $A$  — самосопряжённый оператор, то есть  $A = A^*$ .

**Утверждение 1.** Если  $A$  — самосопряжённый оператор, тогда выполняются следующие свойства:

1.  $\|A^n\| = \|A\|^n \forall n \in \mathbb{N}$
2.  $r(A) = \|A\|$
3.  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
4. пусть  $m_+ = \sup_{\|f\|=1} (Af, f)$ , где  $(Af, f) \in \mathbb{R}$  для самосопряжённого оператора, пусть  $m_- = \inf_{\|f\|=1} (Af, f)$ , тогда  $m_{+-} \in \sigma(A)$  и  $\sigma(A) \subset [m_-(A), m_+(A)]$  (доказать в качестве упражнения)

**Доказательство.** Докажем первое утверждение.  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$  по определению операторной нормы. Надо показать, что  $\|A^n\| \geq \|A\|^n$ . Для  $n = 1$  очевидно верно. Если для  $k = 1 \dots n$  имеем  $\|A^k\| = \|A\|^k$  и  $A \neq 0$ , тогда без ограничения общности  $\forall f : \|f\| = 1$

$$\|A^n f\|^2 = (A^n f, A^n f)$$

В силу того, что  $A$  — самосопряжённый оператор

$$(A^n f, A^n f) = (A^{n-1} f, A^{n+1} f)$$

Последнее в силу неравенства Коши-Буняковского

$$(A^{n-1} f, A^{n+1} f) \leq \|A^{n-1} f\| \|A^{n+1} f\| \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Получаем, что

$$\|A^n f\|^2 \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Из индукции  $\|A^{n-1}\| \leq \|A\|^{n-1}$  и  $\|A^n\| = \|A\|^n$  Возмём теперь супремум  $\forall \|f\| = 1$

$$\|A^n\|^2 = \|A\|^{2n} \leq \|A\|^{n-1} \|A^{n+1}\|$$

Отсюда при  $A \neq 0$  получаем

$$\|A\|^{n+1} \leq \|A^{n+1}\|$$

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение очевидно следует из первого для самосопряжённого оператора:

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$$

Перейдём к третьему утверждению. Воспоминание: пусть  $A$  — самосопряжённый оператор. Пусть  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , то есть  $\ker A_\lambda \neq 0$ , следовательно  $\exists f \neq 0 \in \ker A_\lambda : Af = \lambda f$ . Тогда

$$(Af, f) = \lambda(f, f)$$

С другой стороны, в силу самосопряжённости

$$(Af, f) = (f, Af) = \bar{\lambda}(f, f)$$

И так как  $f \neq 0$ , то  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Перейдём теперь непосредственно к доказательству. Рассмотрим  $\lambda = \mu + i\nu$ ,  $\nu \neq 0$  и докажем, что  $\lambda \in \rho(A)$  и тогда, очевидно,  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \subset \mathbb{R}$ .  $\forall f \in H$

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f - i\nu f\|^2 = (A_\mu f - i\nu f, A_\mu f - i\nu f) = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2 - i\nu(f, A_\mu) + i\nu(A_\mu f, f)$$

где  $A_\lambda f = Af - \lambda f$ . Раз  $\mu \in \mathbb{R}$ , то

$$(A_\mu)^* = A_\mu^* = A_\mu^* = A_\mu$$

так как  $A^* = A$ . Следовательно

$$(f, A_\mu f) = (A_\mu f, f)$$

Отсюда получаем, что

$$(A_\mu f - i\nu f, A_\mu f - i\nu f) = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2$$

Тогда

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2 \geq \nu^2 \|f\|^2$$

Получили оценку снизу:

$$\|A_\lambda f\| \geq |\nu| \|f\| \quad \forall f \in H$$

Пусть теперь  $f \in \ker A_\lambda$ . Это равносильно  $A_\lambda f = 0 \Rightarrow 0 \geq |\nu| \|f\| \geq 0$ , отсюда  $f = 0$ . По теореме Фредгольма

$$\overline{(\operatorname{Im} A_\lambda)} = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp = (\ker A_{\bar{\lambda}})^\perp = 0^\perp = H$$

так как в силу самосопряжённости  $(A_\lambda)^* = A_{\bar{\lambda}}^* = A_{\bar{\lambda}}$ . Аналогично как для  $A_\lambda$

$$\|A_{\bar{\lambda}}\| \geq |\nu| \|f\| \Rightarrow \ker A_{\bar{\lambda}} = 0$$

Покажем теперь, что  $\operatorname{Im} A_\lambda$  замкнут. Пусть  $\|A_\lambda\|f = g$ , тогда  $(A_\lambda)^{-1}g = f$ , тогда

$$\|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \frac{\|g\|}{\nu} \quad \forall g \in \operatorname{Im} A_\lambda$$

Поэтому

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\nu}$$

Возьмём  $\forall g \in \overline{\operatorname{Im} A_\lambda}$ , тогда  $\exists \{g_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda$ :  $g_n \rightarrow g$  в  $H$ .  $g_n = A_\lambda f_n$

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|g_n - g_m\|$$

где  $\|g_n - g_m\| \rightarrow 0$   $n, m \rightarrow \infty$ , отсюда  $f_n - f_m \rightarrow 0$   $n, m \rightarrow \infty$ . Так как  $\{f_n\}$  — фундаментальная последовательность в полном пространстве  $H$ , то  $\exists f \in H$ :  $f_n \rightarrow f$  в  $H$ . Так  $g_n \rightarrow g$   $n \rightarrow \infty$  и так как  $A_\lambda$  — непрерывный оператор, то  $g = A_\lambda f$  и  $g \in \operatorname{Im} A_\lambda$ . Таким образом получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} A_\lambda = H \\ \ker A_\lambda = 0 \end{cases}$$

поэтому  $\exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H$  такой, что  $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\nu|}$  и  $\nu = \text{Im } \lambda \neq 0$ .

**Пример 1.** Пусть  $H = L_2[0, 1]$ . Пусть задан оператор  $A : H \mapsto H$  такой, что

$$(Af)(x) = xf(x) \quad 0 \leq x \leq 1, f \in H$$

Норма этого оператора будет

$$\|Af\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 |f|^2 dx} \leq \|f\|_{L_2}$$

так как  $x^2 \leq 1$ . Отсюда следует, что  $\|A\| \leq 1$ . Рассмотрим функцию  $f_\varepsilon \in H$  такую:

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Тогда получаем, что

$$1 \geq \|A\| \geq \frac{\|Af_\varepsilon\|_{L_2}}{\|f_\varepsilon\|_{L_2}}$$

Выписываем явный вид нормы

$$\|A\| \geq \frac{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 x^2 dx}}{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 dx}} \geq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 dx}}{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 dx}}$$

В итоге мы получили

$$1 \geq \|A\| \geq 1 - \varepsilon \rightarrow 1 \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

Покажем теперь, что этот оператор самосопряжённый

$$(Af, g) = \int_0^1 xf\bar{g}dx = \int_0^1 f\bar{xg}dx = (f, xg) = (f, A^*g)$$

Поэтому  $A^*g = xg = Ag \quad \forall g \in H$ . Рассмотрим теперь  $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Тогда

$$A_\lambda f = g = (x - \lambda)f$$

И тогда

$$(A_\lambda)^{-1}g = f(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda} \in L_2[0, 1] \quad x \in [0, 1]$$

Найдём норму  $f$ :

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{|g|^2}{|x - \lambda|^2} dx} \leq \rho(\lambda, [0, 1]) \|g\|$$

где  $0 \leq \rho(\lambda, [0, 1]) \leq |x - \lambda| \quad \forall x \in [0, 1]$  — расстояние, причём  $\rho(\lambda, [0, 1]) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 1]$ . Таким образом

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho(\lambda, [0, 1])}$$

И образ естественно всё пространство так как  $g$  — любой объект из  $H$ . Таким образом непрерывность очевидна, определена на всём пространстве и поэтому за пределами этого отрезка спектра нет.  $\forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$ , причём  $\lambda \notin \sigma_p(A)$  так как иначе  $Af = \lambda f, f \neq 0$  в  $H$ .  $xf(x) = \lambda f(x)$  для почти всех  $x \in [0, 1]$ ,  $\|f\| > 0$  на множестве положительной меры  $S$ . Получаем  $x = \lambda$  почти всюду на  $S$ . Но мера  $\mathfrak{z}S > 0$ , то есть не одно число, поэтому  $x = \lambda$  невозможно.

Покажем, что  $\forall \lambda \in [0, 1]$  выполняется  $\lambda \in \sigma(A)$  тогда  $\ker A_\lambda = 0$  и  $g \in \operatorname{Im} A_\lambda \Leftrightarrow (x - \lambda)f(x) = g(x)$ , то есть  $x \in [0, 1]$ . Тогда  $f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0, 1]$  для почти всех  $x \in [0, 1] \setminus \{\lambda\}$ . Но это справедливо не для всякой  $g$ . Пусть  $g(x) = 1$ , тогда  $\frac{1}{x-\lambda} \notin L_2[0, 1]$ , поэтому  $1 \notin \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq H$ , Значит это элемент спектра  $\sigma(A) = \sigma_C(A)$ . Так как оператор самосопряженный, то для  $\lambda \in \mathbb{R}$   $\ker A_\lambda^* = \ker A_\lambda = 0$  и получается, что  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = (\ker A_\lambda)^\perp = 0^\perp = H$ . Таким образом для  $\lambda \in [0, 1]$  оператор  $(A_\lambda)^{-1} : \operatorname{Im} A_\lambda \mapsto L_2[0, 1]$ , где  $\operatorname{Im} A_\lambda = \{g \in L_2[0, 1] \mid \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0, 1]\}$ .  $(A_\lambda)^{-1}g = \frac{g}{x-\lambda}$ . Но норма такого оператора  $\|(A_\lambda)^{-1}\| = +\infty$  (доказать в качестве упражнения): надо подобрать функции такие, что  $\forall n \in \mathbb{N} \exists g_n \in \operatorname{Im} A_\lambda$

$$\frac{\|(A_\lambda)^{-1}g_n\|}{\|g_n\|} \geq n$$

Если бы  $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq +\infty$ , то получили ту же самую оценку:

$$\|f\| = \|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \|(A_\lambda)^{-1}\|\|g\|$$

для любого  $f$  из  $H$ , причём  $g = A_\lambda f$ . Отсюда

$$k\|f\| = \frac{\|f\|}{\|(A_\lambda)^{-1}\|} \leq \|A_\lambda f\|$$

где  $k = \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$ . И отсюда можно доказать, если норма образа больше или равна константы на норму прообраза, то мгновенно доказываем, что  $\operatorname{Im} A_\lambda$  замкнут, что не так, так как замыкание образа совпадает с  $H$ , сам образ не совпадает.

Ещё одно свойство самосопряжённого оператора:

**Утверждение 2.** Если  $A : H \mapsto H$  — линейный и непрерывный самосопряжённый оператор и  $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ :  $\lambda \neq \mu$ , тогда  $\ker A_\lambda \perp \ker A_\mu$

**Доказательство.** Утверждение нетривиально для  $\lambda, \mu \in \sigma_P(A)$  так как если одно из них из непрерывного спектра, то соответствующее ядро тривиально, а нулевое подпространство перпендикулярно чему угодно. Пусть  $f \neq 0 \in \ker A_\lambda \neq 0$  и  $g \neq 0 \in \ker A_\mu \neq 0$ , тогда надо доказать, что  $f \perp g$ , то есть  $(f, g) = 0$ . В силу пункта 3 предыдущего утверждения  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Тогда  $Af = \lambda f$  и  $Ag = \mu g$ . Получается

$$(Af, g) = \lambda(f, g)$$

с другой стороны

$$(Af, g) = (f, Ag) = (f, \mu g) = \bar{\mu}(f, g) = \mu(f, g)$$

Отсюда получаем, что

$$(\lambda - \mu)(f, g) = 0$$

И отсюда  $(f, g) = 0$ . Утверждение доказано.

**Упражнение 1** (решается, например, с помощью теоремы Банаха-Штейнгаусса, (теорема Хеллингера, Теплица)). Пусть  $A : H \mapsto H$  — линейный и симметричный оператор, то есть  $(Af, g) = (f, Ag) \forall f, g \in H$ . Тогда  $A$  — непрерывный оператор ( $\|A\| < +\infty$ ).

## Теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.

**Определение 1.**  $A : H \mapsto H$  — линейный оператор называется компактным (или вполне непрерывным), если  $\forall \{f_n\} \subset H$   $\{f_n\}$  ограничена в  $H$ . Иначе говоря  $\forall n \|f_n\| \leq R \Rightarrow \exists \{Af_{n_k}\}$  — фундаментальная подпоследовательность в  $H$ , где  $n_1 < n_2 < \dots$

**Утверждение 3.**  $A$  — компактный, тогда  $A$  — непрерывный. Обратное не верно.

**Пример 2.** Пусть  $U$  — унитарный оператор, то есть  $U : H \mapsto H$  и  $\|Uf\| = \|f\| \forall f \in H$  в бесконечномерном гильбертовом пространстве  $H$ . Очевидно, что  $\|U\| = 1$ , он не компактный. Так как  $\dim H = +\infty$ , то существует линейно независимая последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ . Ортогонализируем её по Грамму-Шмитду и получим  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ , тогда

$$(Ue_n, Ue_m) = (e_n, e_m) = 0$$

$\|Ue_n\| = 1$ , тогда

$$\|Ue_n - Ue_m\| = \sqrt{\|Ue_n\|^2 + \|Ue_m\|^2} = \sqrt{2}$$

для любых  $n \neq m$ , поэтому нет фундаментальной подпоследовательности и  $U$  не компактный.

**Упражнение 2.** Пусть оператор  $Af(x) = xf(x)$  в  $L_2[0, 1]$ .  $A$  — самосопряжённый оператор. Показать, что  $A$  — не компактный оператор.

Докажем теперь утверждение

**Доказательство.** Если вдруг  $A$  — компактный и  $\|A\| = +\infty$ , тогда  $\exists \{f_n\}$  с единичной сферы такая, что  $\|Af_n\| \rightarrow +\infty$ . Из компактности следует, что  $\exists Af_{n_k}$  фундаментальная, то есть  $Af_{n_k} \leq R$ , а с другой стороны  $\|Af_{n_k}\| \rightarrow +\infty$ . Получаем противоречие.

**Утверждение 4.** Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — компактные операторы. Тогда их линейная комбинация также компактна (доказательство очевидно). Если  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность компактных операторов и  $A_n \rightarrow T$  по операторной норме, тогда  $T$  также компактный.

**Доказательство.** Возьмём последовательность  $f_n$  ограниченную в  $H$  и  $\|f_n\| \leq R$ . Рассмотрим  $\{A_1 f_n\}$  — это действие компактного оператора на ограниченную последовательность, тогда по определению  $\exists \{n_k(1)\}_{k=1}^\infty : n_1(1) < n_2(1) < \dots \Rightarrow A_1 f_{n_k(1)}$  — фундаментальная. Далее действуем оператором  $A_2$ , тогда  $\exists \{n_k(2)\} \subset \{n_k(1)\} : n_1(2) < n_2(2) < \dots \Rightarrow A_2 f_{n_k(2)}$  — фундаментальная, причём  $A_1 f_{n_k(2)}$  осталась фундаментальной как подпоследовательность фундаментальной. Будем действовать так дальше. Реализуем Канторов диагональный процесс. Если для  $m \in \mathbb{N}$  имеем  $\{n_k(m)\} \subset \{n_k(m-1)\} \subset \dots \subset \{n_k(1)\} \subset \mathbb{N}$  так что  $\{A_s f_{n_k(m)}\}_{k=1}^\infty$  — фундаментальная  $\forall s = 1 \dots m$ . Тогда рассмотрим  $\{A_{m+1} f_{n_k(m)}\}$ , тогда, используя компактность,  $\exists \{n_k(m+1)\} \subset \{n_k(m)\}$  такой, что  $n_1(m+1) < n_2(m+1) < \dots$  такая, что  $\{A_{m+1} f_{n_k(m+1)}\}$  фундаментальная. Остальные же сохранили фундаментальность, так как мы перешли к подпоследовательности фундаментальной последовательности, которая также фундаментальна. Таким образом мы по индукции реализовали счётный набор последовательностей натуральных чисел. Рассмотрим  $\{n_k(k)\}_{k=1}^\infty$ .  $n_{k+1} \geq n_{k+1}(k)$  по построению и  $n_{k+1}(k) > n_k(k)$  по определению, тогда  $\{n_k(k)\}_{k=1}^\infty$  строго возрастающая последовательность чисел. Тогда  $\{f_{n_k(k)}\}$  — фундаментальная подпоследовательность. Рассмотрим действие оператора  $T$  на эту подпоследовательность. Надо доказать, что мало при большом  $p$

$$\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)}\|$$

Добавим умный ноль

$$\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)} \pm A_s f_{n_k(k)} \pm A_s f_{n_{k+p}(k+p)}\|$$

Какое  $s$  надо взять?  $\|f_n\| \leq R$  по условию, тогда

$$\|f_n\| \leq R \forall n : \forall \varepsilon > 0 \exists S(\varepsilon) : \forall s \geq S(\varepsilon) \|T - A_s\| \leq \frac{\varepsilon}{R+1}$$

$A_s f_{n_k(m)}$  — фундаментальна по  $k$  если  $s \geq m$ . Возмём  $s = S(\varepsilon)$  и  $k \geq S(\varepsilon)$ . Следовательно получается, что  $A_s f_{n_k(k)}$ , если  $k \geq S(\varepsilon)$  — подпоследовательность  $A_s f_{n_k(S(\varepsilon))}$ , которая фундаментальная и значит наша подпоследовательность также фундаментальна. Получаем, что

$$\|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_k(k)}\| \leq \frac{\varepsilon}{R+1}$$

Аналогично

$$\|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \frac{\varepsilon}{R+1}$$

А из фундаментальности

$$\|A_{S(\varepsilon)}f_{n_k(k)} - A_{S(\varepsilon)}f_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \varepsilon$$

Итого имеем

$$\begin{aligned} \|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)}\| &\leq \\ &\leq \|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_k(k)}\| + \|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_{k+p}(k+p)}\| + \|A_{S(\varepsilon)}f_{n_k(k)} - A_{S(\varepsilon)}f_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{R+1} + \frac{\varepsilon}{R+1} + \varepsilon \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Отсюда образ  $\|T\|$  содержит фундаментальную подпоследовательность и  $\|T\|$  компактен.

Докажем ещё одно свойство компактного оператора.

**Утверждение 5.** Пусть  $A : H \mapsto H$  — компактный оператор и  $T : H \mapsto H$  — непрерывный оператор, тогда  $TA$  и  $AT$  — тоже компактный оператор.

**Доказательство.** Пусть  $\{f_n\}$  — ограниченная последовательность, тогда  $Af_{n_k}$  — фундаментальная подпоследовательность. Смотрим на  $TAf_{n_k}$  и получаем

$$\|TAf_{n_k} - TAf_{n_{k+p}}\| \leq \|T\| \|Af_{n_k} - Af_{n_{k+p}}\|$$

стремиться к нулю, так как  $T$  непрерывный следовательно  $TAf_{n_k}$  тоже фундаментальная. Рассмотрим теперь  $ATf_n$ .  $T$  — непрерывный оператор,  $\|f_n\| \leq R$  — ограниченная в  $H$ , то  $Tf_n$  тоже ограниченная

$$\|Tf_n\| \leq \|T\| \|f_n\| \leq \|T\| R$$

Отсюда  $Tf_n$  ограниченная и по определению  $\exists n_k A(Tf_{n_k})$  фундаментальная.

**Пример 3.** Если  $A : H \mapsto H$  линейный и непрерывный. Пусть  $\dim \operatorname{Im} A < +\infty$  (такой  $A$  называется конечномерным). Тогда  $A$  — компактный оператор.

Действительно, пусть  $f_n$  — ограниченная последовательность, тогда  $Af_n$  также ограничен в конечном  $\operatorname{Im} A$ . Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists Af_{n_k}$  фундаментальная в  $\operatorname{Im} A$ .

Покажем вид этих операторов. Если  $A$  — линейный и непрерывный и его образ конечномерный, тогда возьмём базис  $g_1, \dots, g_N$  в  $\text{Im } A$ , где  $N = \dim \text{Im } A$ . Тогда  $Af$  раскладывается

$$Af = \sum_{k=1}^N \alpha_k(f) g_k$$

где  $\alpha_k$  линейный и непрерывный функционал. Если мы будем скалярно умножать

$$(Af, g_m) = \sum \alpha_k(f) (g_k, g_m)$$

И если мы введём матрицу Грамма

$$\Gamma = ((g_k, g_m))_{k,m=1}^N$$

Тогда получается, что это всё равно, что

$$\begin{pmatrix} (Af, g_1) \\ \dots \\ (Af, g_N) \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \dots \\ \alpha_N(f) \end{pmatrix}$$

Матрица  $\Gamma$  не вырождена в силу линейной независимости  $g_1, \dots, g_N$  и тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \dots \\ \alpha_N(f) \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} (Af, g_1) \\ \dots \\ (Af, g_N) \end{pmatrix}$$

где правая часть непрерывна по  $f$  в  $H$ . Отсюда  $\alpha_k(f) : H \mapsto \mathbb{C}$  линеен и непрерывен, а значит по теореме Риса-Фреше

$$\alpha_k(f) = (f, h_k) \quad \exists! h_k \in H$$

Отсюда

$$Af = \sum_{k=1}^N (f, h_k) g_k$$

где  $h_k, g_k \in H$  и  $k = 1 \dots N$

**Пример 4.** В случае  $H = L_2(G)$ , тогда  $h_k(x), g_k(x) \in L_2(G)$  и

$$Af = \sum_{k=1}^N \int_G f(y) \overline{h_k(y)} dy g_k(x)$$

Иначе

$$Af = \int_G \left( \sum_{k=1}^N \overline{h_k(y)} g_k(x) \right) f(y) dy$$

Если взять предел последовательности конечномерных операторов  $\{A_n\}$  такие, что  $A_n \rightarrow T$  по операторной норме, тогда  $T$  также будет компактным.

**Утверждение 6.**  $T$  — компактный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$  — конечномерные операторы и  $\|T - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$

В 1972 году датский математик Энфло доказал, что существуют  $X$  — полные линейные непрерывные пространства и  $A : X \mapsto X$  компактный оператор, не аппроксимирующийся конечномерным.

**Доказательство.** Посмотрим на множество  $TB_1(0)$  — образ шара,  $B_1(0) = \{f \in H \mid \|f\| \leq 1\}$ . Любая последовательность  $Tf_n$ , где  $f_n \in B_1(0)$  имеет фундаментальную подпоследовательность  $Tf_{n_k}$ , тогда утверждается, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists g_1, \dots, g_N \in TB_1(0) : TB_1(0) \subset \bigcup_{k=1}^N B_\varepsilon(g_k)$ , где  $B_\varepsilon(g_k)$  называют эпсилон-сетью.

Если вдруг  $\exists \varepsilon_0 : \forall g_1, \dots, g_N \in TB_1(0) : TB_1(0) \not\subset \bigcup_{k=1}^N B_{\varepsilon_0}(g_k)$ . Пусть  $f_1 \in B_1(0)$  и  $g_1 = Tf_1$ , тогда  $B_{\varepsilon_0}(g_1) \not\supset TB_1(0)$ , следовательно  $\exists g_2 \in TB_1(0) \setminus B_{\varepsilon_0}(g_1)$ , а значит  $\exists f_2 \in B_1(0) : g_2 = Tf_2$  и так далее. Если есть  $f_1 \dots f_n \in B_1(0)$ , таких, что

$$\|Tf_k - Tf_s\| \geq \varepsilon_0$$

где  $1 \leq k \neq s \leq n$ . То эти функции порождают набор  $g_k = Tf_k$  и эти функции после объединения шаров не вместят образ шара, а значит существует  $f_{n+1} \in B_1(0) : Tf_{n+1} \notin B_{\varepsilon_0}(g_k)$ . Таким образом

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^\infty \subset B_1(0) : \|Tf_k - Tf_s\| \geq \varepsilon_0$$

а значит нет фундаментальной подпоследовательности в  $\{Tf_k\}_{k=1}^\infty$ , хотя  $f_k$  ограничена. Получаем противоречие.

Пользуясь этой эпсилон-сетью займёмся аппроксимацией. Пусть  $L_N = \text{Lin}\{g_1, \dots, g_N\}$  — конечномерное пространство, а значит замкнутое в  $H$ . Следовательно  $\exists P_N$  — ортопроектор из  $H$  на  $L_N$  и  $L_N \oplus L_N^\perp = H$  и соответственно  $P_N h = h_N \in L_N$ . Норма  $\|P_N\| = 1$ . Рассмотрим теперь оператор  $A_\varepsilon = P_N T$ . Образ  $\text{Im } A_\varepsilon \subset L_N$  и

$$A_\varepsilon h = P_N T h \quad \forall h \in H$$

поэтому  $A_\varepsilon$  конечномерен и непрерывен как суперпозиция непрерывных. Возьмём  $\forall f : \|f\| = 1$ ,  $Tf \in TB_1(0)$ , значит  $\exists g_k : \|Tf - g_k\| \leq \varepsilon$  и отсюда

$$\begin{aligned} \|Tf - A_\varepsilon f\| &= \|Tf + g_k - g_k - A_\varepsilon f\| \leq \\ &\leq \varepsilon + \|g_k - A_\varepsilon f\| = \varepsilon + \|P_N g_k - P_N T f\| \leq \\ &\leq \varepsilon \|P_N(g_k - T f)\| \leq \varepsilon + \|g_k - T f\| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

**Пример 5.** Пусть  $H = L_2(G)$ , где  $G$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$  и  $A : L_2(G) \mapsto L_2(G)$  имеет вид

$$(Af)(x) = \int_G K(t, x) f(t) dt$$

где  $K \in L_2(G \times G)$ . Ранее получено, что  $\|A\| \leq \|K\|_{L_2(G \times G)}$ . Утверждается, что  $A$  компактен.  $L_2(G \times G)$  — пополнение  $C(G \times G)$ ,  $C$  — компакт с нормой  $L_2$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists F_\varepsilon(t, x) \in C(G \times G) : \|K - F_\varepsilon\|_{L_2(G \times G)} \leq \varepsilon$ .

**Теорема 1 (Стоун, Вейерштрасс (см. Рудин «Основы математического анализа»)).** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^N$  — компакт функция  $F \in C(D)$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists P : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{C}$  комплексный многочлен  $n$  переменных такой, что  $\|F - P\|_C = \max_{x \in D} |F(x) - P(x)| \leq \varepsilon$



Применяем теорему Стоуна-Вейерштрасса:  $\exists P$  многочлен

$$\max_{G \times G} |F_\varepsilon - P| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(G \times G) + 1}$$

следовательно

$$\|F_\varepsilon - P\|_{L_2(G \times G)} \leq \max_{G \times G} |F_\varepsilon - P| \sqrt{\mu(G \times G)} \leq \varepsilon$$

Таким образом мы строим оператор

$$A_\varepsilon f = \int_G P(t, x) f(t) dt$$

Тогда  $\text{Im } A_\varepsilon$  конечномерен и

$$\|A_\varepsilon - A\| \leq \|K - P \pm F_\varepsilon\|_{L_2 G \times G} \leq 2\varepsilon$$

**Упражнение 3.** Пусть  $A : L_2(G) \mapsto L_2(\mathbb{R})$  имеет вид

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-x)^2} f(t) dt = (e^{-x^2} * f)(x)$$

Тогда  $\|A\| \leq \|e^{-x^2}\|_{L_2(\mathbb{R})}$ . Показать, что  $A$  не компактный оператор.