

Пусть $A : H \rightarrow H$ — линейный и непрерывный оператор. Тожественный оператор $I : H \rightarrow H$ ($If = f \forall f \in H$). $\forall \lambda \in \mathbb{C} A_\lambda = A - \lambda I$. Резольвентное множество $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid$
по теореме Банаха об обратном операторе
 $\exists \underbrace{(A_\lambda)^{-1}}_{\text{линейный и непрерывный}} : H \rightarrow H\} \stackrel{=}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda =$

$H\}$. Тогда $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — спектр, $\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \ker A_\lambda \neq 0 \\ \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \right\}$. Точечный спектр

A $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$ называют собственными значениями A . Непрерывный спектр в свою очередь $\sigma_C(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \right\}$. Очевидно $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_C(A)$.

Резольвента $R_A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1} : H \rightarrow H$, также используется определение $\forall \lambda \neq 0: \frac{1}{\lambda} \in \rho(A)$
 $-\frac{1}{\lambda}(A - \frac{I}{\lambda})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(A_\lambda)^{-1}$

Теорема

Пусть $A : H \rightarrow H$ — линейный и непрерывный, тогда

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ такой, что $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. При этом $(A_\lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$, причём ряд сходится по операторной норме.
2. $\rho(A)$ — открыто в \mathbb{C} (очевидно следует, что спектр — замкнутое множество, а так же $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$, поэтому спектр — компакт).
3. Функция от λ $(A_\lambda)^{-1}$ непрерывна на $\rho(A)$ по операторной норме
4. $\forall \lambda \in \rho(A) \exists \lim_{\text{по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = ((A_\lambda)^{-1})^2$

Доказательство

1. $|\lambda| > \|A\|$, то $A_\lambda = -\lambda \underbrace{(I - \frac{A}{\lambda})}_{=T}$, $\|T\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$, следовательно по теореме Неймана

\exists оператор непрерывный в H $(A_\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ ряд сходится по операторной норме.

2. $\forall \lambda \in \rho(A)$ рассмотрим $A_{\lambda+\Delta\lambda} = A_\lambda - \Delta\lambda I = A_\lambda \underbrace{(I - \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1})}_T$.

т. к. существует $\exists(A_\lambda)^{-1}$ линейный и непрерывный
 $\exists \Delta\lambda: \|T\| = |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\| < 1$. Тогда $\Delta\lambda < \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$, следовательно $\exists(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} : H \rightarrow H$ линейный и непрерывный, следовательно $\lambda + \Delta\lambda \in \rho(A)$.

3. $\lambda \in \rho(A): \lambda \rightarrow (A_\lambda)^{-1}$. $(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = (I - \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1})(A_\lambda)^{-1} - (A_\lambda)^{-1} \stackrel{=}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta\lambda)^n ((A_\lambda)^{-1})^{n+1}}_{\leq \|(A_\lambda)^{-1}\|^{n+1}}$. Отсюда $\|(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\lambda|^n \underbrace{\|((A_\lambda)^{-1})^{n+1}\|}_{O(|\Delta\lambda| \rightarrow 0, \Delta\lambda \rightarrow 0)} \leq |\Delta\lambda| \frac{\|(A_\lambda)^{-1}\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\|}$. Следовательно непрерывен по операторной норме

$$4. \lambda \in \rho(A) \mid \Delta\lambda \mid < \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}, \text{ тогда } (A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} \stackrel{\text{тождество Гильберта}}{=} (A_\lambda)^{-1} \underbrace{(A_\lambda - A_{\lambda+\Delta\lambda})}_{\Delta\lambda} (A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} =$$

$$\frac{\Delta\lambda (A_\lambda)^{-1} (A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}}{(A_\lambda)^{-1} \underbrace{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}}_{\rightarrow (A_\lambda)^{-1} \text{ по п. 3}}} \stackrel{\Delta\lambda \rightarrow 0 \text{ по операторной норме}}{=} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = \stackrel{\Delta\lambda \rightarrow 0 \text{ по операторной норме}}{\lim} =$$

Следствие

$\sigma(A) \neq \emptyset$, иначе говоря спектр — непустой компакт в \mathbb{C} и спектральный радиус $r(A) = \max |\lambda| \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} \leq \|A\|$.

Доказательство:

1) Если вдруг спектр пуст $\sigma(A) = \emptyset$, тогда $\forall f, g \in H \forall \lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}$. Рассмотрим $F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1}f, g) \stackrel{?}{=} \text{при } |\lambda| > \|A\| \stackrel{?}{=} \underbrace{\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{\lambda^{n+1}}, g\right)}_{\substack{\text{сходится в } H \\ \text{непрерывно в } H}} \stackrel{?}{=} \text{по непрерывности скалярного произведе-}$

ния в $H \stackrel{?}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \rightarrow \infty$, но в силу п. 4 $F(\lambda)$ регулярная. Действительно, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \Delta\lambda \neq 0 \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda+\Delta\lambda) - F(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}f - (A_\lambda)^{-1}f}{\Delta\lambda}}_{\text{сходится по операторной норме к } ((A_\lambda)^{-1})^2 f}, g \right). F'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \dots =$

$((A_\lambda)^{-1})^2 f, g) — непрерывно в \mathbb{C} . Следовательно $F(\lambda) — целая функция, далее $F(\lambda) \rightarrow 0$ $\lambda \rightarrow \infty$, тогда по теореме Лиувилля из ТФКП $F(\lambda) \equiv 0$, следовательно $\ker(A_\lambda)^{-1} = H$, с другой стороны $\ker(A_\lambda)^{-1} = 0$ так как $(A_\lambda)^{-1}$ имеет обратный A_λ на H , следовательно $H = 0$, полу-$$

чили противоречие. 2) По определению $r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ существует в \mathbb{R} . Шаг

1. $\forall \lambda \in \sigma(A) \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda^n \in \sigma(A^n)$. Если вдруг это не так, тогда $\lambda^n \in \rho(A^n) \Rightarrow \exists \underbrace{((A^n)_{\lambda^n})^{-1}}_B : H \rightarrow H$ линейный непрерывный оператор. $(A^n - \lambda^n I) = (A - \lambda I) \underbrace{(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-2} A + \lambda^{n-1} I)}_{C: H \rightarrow H}.$

$B = C(A - \lambda I), A^n - \lambda^n I = A_\lambda C \Rightarrow (A^n - \lambda^n I)B = I = A_\lambda C B \Rightarrow \text{Im } A_\lambda = H$. Далее $A_\lambda C B f = f \in H, \forall f \in H, A^n - \lambda^n I = C A_\lambda$, тогда $B(A^n - \lambda^n I) = I = B C A_\lambda \Rightarrow \ker A_\lambda = 0. F \in \ker A_\lambda \Rightarrow f = B C A_\lambda f = B C(0) = 0$. Из $\text{Im } A_\lambda = H$ и $\ker A_\lambda = 0$ следует по определению, что $\lambda \in \rho(A)$. Получили противоречие условию, что λ в спектре. Отсюда $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$ так как $\rho(A^n) \supset \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| > \|A^n\|\}$. Очевидно тогда, что $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} \Rightarrow |\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \Rightarrow r(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Шаг 2. Утверждаем, что $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}} \leq r(A)$. $\forall f, g \in H$ рассмотрим $F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1}f, g), F(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$, регулярная во внешности круга $|\lambda| < r(A)$. $|\lambda| > r(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. Так как $|\lambda| > \|A\| \geq r(A)$, то по теореме Неймана $F(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}}$. $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda^{n+1}}, |\lambda| > r(A) \Rightarrow$ по теореме единственности разложения в ряд Лорана $c_n = -(A^n f, g) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом $\forall |\lambda| > r(A)$ получаем $\frac{A^n f, g}{\lambda^n} — член сходящегося$ ряда, следовательно $\frac{(A^n f, g)}{\lambda^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, что равносильно $\forall g \in H (g, \underbrace{\frac{A^n f}{\lambda^n}}_{=\Phi_n(g)}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

$\Phi_n : H \rightarrow C$ линейный и непрерывный оператор. $\|\Phi_n\| = \frac{\|A^n f\|}{|\lambda^n|}$ сходится к 0 поточечно

на H . Отсюда по теореме Банаха-Штейнгаусса $\|\Phi_n\|$ — ограниченная числа последовательность. $\forall f \in H \exists M_f > 0: \|\frac{A_n f}{\lambda^n}\| \leq M_f \Rightarrow \{\frac{A_n}{\lambda^n}\}$ — поточечно сходящаяся на H ограниченная последовательность операторов, следовательно по теореме Банаха-Штейнгаусса $\|\frac{A^n}{\lambda^n}\|$ ограниченная числовая последовательность. Следовательно $\exists M > 0: \|\frac{A^n}{\lambda^n}\| \leq M \Rightarrow \forall |\lambda| > r(A) \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \sqrt[n]{M}|\lambda|$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda| \rightarrow r(A) + 0$. Получаем $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, что и требовалось.