Элементы теории линейных операторов в гильбертовых пространствах и её приложение к линейным операторным уравнениям в гильбертовом пространстве.

Пусть H — гильбертово пространство, то есть полное евклидово пространство со скалярным произведением. Скалярное произведение определим в комплексном пространстве: $(f,g) \in \mathbb{C}$. Тогда $\|f\| = \sqrt{(f,g)}$ — евклидова норма. В этом пространстве выполняется неравенство треугольника: $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$, которое следует из неравенства Коши-Буняковского $|(f,g)| \le \|f\|\|g\|$.

Полнота по определению: $\forall \{f_n\} \subset H$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$ $\|f_n - f_m\| \to 0$ при $n,m \to \infty$ следует, что $\exists h \in H$: $\|f_n - h\| \to 0$ при $n \to \infty$.

$G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество. $CL_2(G) = \{f \colon G \to \mathbb{C} \mid f$ непрерывная, $\int\limits_G |f|^2 dx < +\infty\}$. Введём скалярное произведение как $(f,g) = \int\limits_G f(x)\overline{g(x)}dx$. Тогда такое множество неполное. $L_2(G)$ — пополнение $CL_2(G)$, или по-другому $f : G \to \mathbb{C}$ измерима по Лебегу и $\int\limits_G |f|^2 dx < +\infty$.

Геометрия гильбертого пространства

1) Пусть $L \subset H$, где L — замкнутое подпространство. Следовательно $\forall f \in H$ $\exists! g \in L$: $\|g - f\| = \rho(f, L)$ или по-другому $\inf \|f - h\|$, $h \in L$. Обозначим g_f — проекция f. Тогда отображение $P : H \to L$ такое, что $Pf = g_f$, называется ортопроектором из L на H.

Доказательство

Покажем существование. $\forall f \in H$ $\exists \{g_n\} \subset L$: $\rho(f,L) \le \|f - g_n\| \le \rho(f,L) + \frac{1}{n}$. Тогда $\|f - g\| \to \rho(f,L)$ $n \to \infty$. Установим факт фундаментальности. Наблюдение: из равенства параллелограмма следует: $f,g \in H$ $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$. Тогда

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|(g_n - f) - (g_m - f)\|^2 = 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - \|g_n + g_m - 2f\|^2 \boxed{\le}$$

$$\|g_m + g_m - 2f\|^2 = 4\|\underbrace{\frac{g_n + g_m}{2}}_{\in L} - f\|^2 \ge 4\,\rho^2(f,L)$$

$$\boxed{\le} 2\underbrace{\|g_n - f\|^2}_{\rho^2(f,L)} + 2\underbrace{\|g_m - f\|^2}_{\rho^2(f,L)} - 4\,\rho^2(f,L) \to 0 \qquad n,m \to 0$$

$\exists g \in H$: $g_n \to g$ по норме, а так как L — замкнутое, то $g \in L$. Получаем

$$|\|f - g\| - \underbrace{\|f - g_n\|}_{\text{стремится к } \rho}| \le \|g - g_n\| \to 0 \Rightarrow \|f - g\| = \rho(f,L)$$

Отсюда следует существование.

Покажем единственность. Пусть $\|f - g_1\| = \|f - g_2\| = \rho(f,L)$, $g_1, g_2 \in L$.

$$0 \le \|g_1 - g_2\|^2 = \|(g_1 - f) - (g_2 - f)\|^2 = 2\|g_1 - f\|^2 + 2\|g_2 - f\|^2 - \|\frac{g_1 + g_2}{2} - f\|^2 \le 4\rho^2 - 4\rho^2 = 0$$

Следовательно $g_1 = g_2$. Доказательство закончено

Таким образом мы доказали теорему Рисса о расстоянии. Пусть $P_L : H \to L$, $P_L f = g_f$. Тогда $\|P_L f - f\| = \rho(f,L)$. P_L — линейный оператор. Наблюдение: $\|g - f\| = \rho(f,L)$; $g \in L$ равносильно тому, что

$$\begin{cases} f - g \in L^+ \\ g \in L \end{cases}$$

Где $L^+ = \{h \in H \mid (h,f) = 0 \quad \forall f \in L\}$ — замкнутое подпространство. Это следует из неравенства Коши-Буняковского: пусть $h_n \to h$ и $h_n \in L^+$. Тогда

$$|(h,f) - (h_n,f)| = |(h-h_n,f)| \le \|h-h_n\|\|f\| \ to 0$$

Поэтому $(h,f) = 0$, а значит $h \in L$. Докажем теперь наше наблюдение

Доказательство

В прямую сторону.

$$\|g-f\| = \rho(f,L)$$
$$\|g-f\| \le \|\underbrace{(g+th)}_{\in L} - f\| \qquad \forall h \in L$$
$$\|g-f\|^2 \le \|(g-f)+th\|^2$$
$$\|g-f\|^2 \le ((g-f)+th,(g-f)+th)^2$$
$$\|g-f\|^2 \le \|g-f\|^2 + 2(g-f,th) + |t|^2\|h\|^2$$
$$0 \le 2(g-f,th) + |t|^2\|h\|^2$$
$$0 \le 2\operatorname{Re}(g-f,th) + |t|^2\|h\|^2$$
$$0 \le 2\operatorname{Re}(g-f,\frac{t}{|t|}h) + \underbrace{O(|t|)}_{\text{стремиться к 0}}$$

Пусть $t \in \mathbb{R}$. $0 \le 2\operatorname{Re}(g-f,h)$, подставляя $\pm h$ имеем $\operatorname{Re}(g-f,h) = 0$. Пусть теперь $t = \imath\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. $2\operatorname{Re}(g-f,\imath h) = 2\operatorname{Im}(g-f,h) \ge 0$ $\forall h \in L$. Возмём $\pm h$ и получаем $(g-f,h) = 0$. Таким образом для любого h мы доказали в прямую сторону.

В обратную сторону. $\forall h \in L$ $\|f-(g+h)\|^2 = \|(f-g)+h\|^2 = (f-g,f-g)+(h,h)+(f-g,h)+(h,f-g) = \|f-g\|^2+\|h\|^2 \ge \|f-g\|^2 \Rightarrow \forall h$ $\|f-(g+h)\|^2 \ge \|f-g\|^2 \Rightarrow \|f-g\| = \rho(f,L)$. Что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Докажем линейность оператора P_L.

$$P_L(f_1+f_2) = g$$
$$P_L f_1 = g_1 \Leftrightarrow (f_1 - g_1, h) = 0$$
$$P_L f_2 = g_2 \Leftrightarrow (f_2 - g_2, h) = 0$$

Сложим правые выражения и получим $(f_1+f_2-(g_1+g_2),h) = 0 \Rightarrow g_1+g_2 = P_L(f_1+f_2)$. Аналогично доказывается однородность $P_L(\alpha f) = \alpha P_L(f)$: $P_L(f) = g \Leftrightarrow (f-g,h) = 0 \Rightarrow (\alpha f - \alpha g, h) = 0 \Rightarrow P_L(\alpha f) = \alpha g$.

Проблема выпуклости в H

Пусть $A \subset H$ — назовём выпуклым, если $\forall f,g \in A$ $\forall t \in [0;1]$ $tf+(1-t)g \in A$. Мы уже доказали, что для любого выпуклого и замкнутого $A \subset H$ $\forall f \in H$ $\exists! g \in A$: $\|f-g\| = \rho(f,A)$. Такое множество ещё называют чебышевским. Верно ли обратное? Пусть $A \subset H$ — чебышевское, то есть $\forall f \in H$ $\exists! g \in A$: $\|f-g\| = \rho(f,A)$. Следует ли отсюда, что A — выпуклое и замкнутое? Замкнутость была доказана в 1936 году для конечномерных H. Интересные подвижки были получены на мехмате Бородиным Петром Анатольевичем. Он ввёл 2-чебышевские множества. $\forall f,h \in H$ пусть $\rho_2(f,h,A) = \inf\{\|f-g\|+\|h-g\|) : g \in A\}$, $2\,\rho(f,A) = \rho_2(f,A)$. Из 2-чебышевости следует выпуклость и замкнутость. Но получаем вопрос: верно ли что из чебышевости следует 2-чебышевость?

2) **Теорема** (Рисса об ортогональном дополнении) $L \subset H$ — замкнутое подпространство $\Rightarrow L \oplus L^+ = H$ и $L \cap L^+ = \varnothing$. Последнее очевидно. $\forall f \in H\ \exists! g \in L$ и $h \in L^+$: $f = g + h$.

$$\begin{cases} f - g \in L^+ \\ g \in L \end{cases}$$

Это равносильно $P_L f = g$.

Доказательство

$f \in H$, смотрим на $g = P_L f \Leftrightarrow h = f - g \in L^+ \Rightarrow f = g + h$ Доказательство закончено.

Пусть $g_1, g_2 \in L$, $h_1, h_2 \in L^+$, $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$. Тогда $\underbrace{g_1 - g_2}_{\in L} = h_2 - h_1 \in L^+$, но $L \cap L^+$ $\Rightarrow g_1 = g_2$ и $h_1 = h_2$.

Теорема (Рисс, Фреше)

$\Phi : H \to \mathbb{C}$ — линейный и непрерывный функционал ($f_n \to f$ в H по норме, $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ в $\mathbb{C}$). Тогда $\exists! h \in H$: $\Phi(f) = (f, h)$.

Доказательство

$L = \ker \Phi$ — замкнутое подпространство в H. Первое в связи непрерывности, второе в силу линейности. $L \oplus L^+$. Случай $\Phi = 0$ очевиден: $h = 0$. Пусть теперь $\Phi \neq 0 \Rightarrow (\ker \Phi)^+ \neq \{0\}$ Пусть $h_0 \in (\ker \Phi)^+ \backslash \{0\}$, тогда отсюда следует $f \in H$ $f = \underbrace{g}_{\in \ker \Phi} + \alpha h_0$, где $\alpha = \dfrac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)}$. Следовательно $g = f - \dfrac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)} h_0 \Rightarrow (f, h_0) = \underbrace{(g, h_0)}_{0} + \dfrac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)} \|h_0\|^2$. Тогда $\Phi(f) = (f, \underbrace{\dfrac{\overline{\Phi(h_0)}}{\|h_0\|} h_0}_{\text{равно } h})$.

Пусть $\Phi(f) = (f, h_1) = (f, h_2)\ \forall f \in H$. $f = h_1 - h_2 \Rightarrow \|h_1 - h_2\|^2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$.