Пусть $A : H \to H$ — линейный и непрерывный оператор. Тождественный оператор $I : H \to H$ $(If = f\ \forall f \in H)$. $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ A_\lambda = A - \lambda I$. Резольвентное множество $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \underbrace{(A_\lambda)^{-1}}_{\text{линейный и непрерывный}} : H \to H\} \overset{\text{по теореме Банаха об обратном операторе}}{\overbrace{=}} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = H\}$. Тогда $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — спектр, $\sigma(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \left[\begin{array}{l} \ker A_\lambda \neq 0 \\ \begin{cases} \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \end{array}\right.\right\}$. Точечный спектр A $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$ называют собственными значениями A. Непрерывный спектр в свою очередь $\sigma_C(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases}\right\}$. Очевидно $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_C(A)$. Рзольвента $R_A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1} : H \to H$, также используется определение $\forall \lambda \neq 0$: $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A)$ $-\frac{1}{\lambda}(A - \frac{I}{\lambda})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(A_{\frac{1}{\lambda}})^{-1}$

Теорема

Пусть $A : H \to H$ — линейный и непрерывный, тогда

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ такой, что $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. При этом $(A_\lambda)^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$, причём ряд сходиться по операторной норме.
2. $\rho(A)$ — открыто в $\mathbb{C}$ (очевидно следует, что спект — замкнутое множество, а так же $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda \leq \|A\|\}$, поэтому спектр — компакт).
3. Функция от λ $(A_\lambda)^{-1}$ непрерывна на $\rho(A)$ по операторной норме
4. $\forall \lambda \in \rho(A)\ \exists \lim\limits_{\text{по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = ((A_\lambda)^{-1})^2$

Доказательство

1. $|\lambda| > \|A\|$, то $A_\lambda = -\lambda(I - \underbrace{\frac{A}{\lambda}}_{=T}$, $\|T\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$, следовательно по теореме Неймана $\exists$ оператор непрерывный в H $(A_\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ ряд сходится по операторной норме.
2. $\forall \lambda \in \rho(A)$ рассмотрим $A_{\lambda+\Delta\lambda} = A_\lambda - \Delta\lambda I = A_\lambda \underbrace{(I - \overbrace{\Delta\lambda(A_\lambda)^{-1}}^{T})}_{\text{т. к. существует } \exists (A_\lambda)^{-1} \text{ линейный и непрерывный}}$. $\exists \Delta\lambda$: $\|T\| = |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\| < 1$. Тогда $\Delta\lambda < \frac{1}{(A_\lambda)^{-1}}$, следовательно $\exists (A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} : H \to H$ линейный и непрерывный, следовательно $\lambda + \Delta\lambda \in \rho(A)$.
3. $\lambda \in \rho(A)$: $\lambda \to (A_\lambda)^{-1}$. $(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = (I - \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1})(A_\lambda)^{-1} - (A_\lambda)^{-1} \boxed{=}$ расскладываем по Нейману $\boxed{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta\lambda)^n ((A_\lambda)^{-1})^{n+1}$. Отсюда $\|(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\lambda|^n \underbrace{\|((A_\lambda)^{-1})^{n+1}\|}_{\leq \|(A_\lambda)^{-1}\|^{n+1}} \leq |\Delta\lambda| \underbrace{\frac{\|(A_\lambda)^{-1}\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\|}}_{O(|\Delta\lambda|) \to 0, \Delta\lambda \to 0}$. Следовательно непрерывен по операторной норме

4. $\lambda \in \rho(A)$ $|\Delta\lambda| < \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$, тогда $(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} \overbrace{=}^{\text{тождество Гильберта}} (A_\lambda)^{-1} \underbrace{(A_\lambda - A_{\lambda+\Delta\lambda})}_{\Delta\lambda I}(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} = \Delta\lambda (A_\lambda)^{-1}(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}$. $\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0 \text{ по операторной норме}} = \dfrac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = \lim\limits_{\Delta\lambda\to 0 \text{ по операторной норме}} = (A_\lambda)^{-1} \underbrace{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}}_{\to (A_\lambda)^{-1} \text{ по п. 3}} = (A_\lambda)^{-1}(A_\lambda)^{-1}$.

Следствие

$\sigma(A) \neq \varnothing$, иначе говоря спектр — непустой компакт в $\mathbb{C}$ и спектральный радиус $r(A) = \max|\lambda| \overbrace{=}^{?} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} \leq \|A\|$.

Доказательство:

1) Если вдруг спектр пуст $\sigma(A) = \varnothing$, тогда $\forall f, g \in H$ $\forall \lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}$. Рассмотрим $F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1} f, g) \boxed{=}$ при $|\lambda| > \|A\| \boxed{=} \underbrace{(-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{\lambda^{n+1}}}_{\text{сходится в } H}, g)}_{\text{непрерывно в } H} \boxed{=}$ по непрерывности скалярного произведения в $H \boxed{=} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}} = O(\frac{1}{\lambda}, \lambda \to \infty$, но в силу п. 4 $F(\lambda)$ регулярная. Действительно, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \Delta\lambda \neq 0$ $\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} \frac{F(\lambda+\Delta\lambda) - F(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} (\underbrace{\dfrac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} f - (A_\lambda)^{-1} f}{\Delta\lambda}}_{\text{сходится по операторной норме к } ((A_\lambda)^{-1})^2 f}, g)$. $F'(\lambda) = \lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} \dots = (((A_\lambda)^{-1})^2 f, g)$ — непрерывно в $\mathbb{C}$. Следовательно $F(\lambda)$ — целая функция, далее $F(\lambda) \to 0$ $\lambda \to \infty$, тогда по теореме Лиувиля из ТФКП $F(\lambda) \equiv 0$, следовательно $\ker(A_\lambda)^{-1} = H$, с другой стороны $\ker(A_\lambda)^{-1} = 0$ так как $(A_\lambda)^{-1}$ имеет обратный A_λ на H, следовательно $H = 0$, получили противоречие. 2) По определению $r(A) = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \overbrace{=}^{?} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ существует в $\mathbb{R}$. Шаг 1. $\forall \lambda \in \sigma(A) \overbrace{\Rightarrow}^{?} \lambda^n \in \sigma(A^n)$. Если вдруг это не так, тогда $\lambda^n \in \rho(A^n) \Rightarrow \exists \underbrace{((A^n)_{\lambda^n})^{-1}}_{B} : H \to H$ линейный непрерывный оператор. $(A^n - \lambda^n I) = (A - \lambda I) \underbrace{(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-2} A + \lambda^{n-1} I)}_{C: H \to H}$. $B = C(A - \lambda I)$, $A^n - \lambda^n I = A_\lambda C \Rightarrow)A^n - \lambda^n I)B = I = A_\lambda C B \Rightarrow \operatorname{Im} A_\lambda = H$. Далее $A_\lambda C B f = f \in H, \forall f \in H$, $A^n - \lambda^n I = C A_\lambda$, тогда $B(A^n - \lambda^n I) = I = B C A_\lambda \Rightarrow \ker A_\lambda = 0$. $F \in \ker A_\lambda \Rightarrow f = B C A_\lambda f = BC(0) = 0$. Из $\operatorname{Im} A_\lambda = H$ и $\ker A_\lambda = 0$ следует по определению, что $\lambda \in \rho(A)$. Получили противоречие условию, что λ в спектре. Отсюда $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$ так как $\rho(A^n) \supset \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| > \|A^n\|\}$. Очевидно тогда, что $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} \Rightarrow |\lambda| \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \Rightarrow r(A) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Шаг 2. Утверждаем, что $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A\|^n} \leq r(A)$. $\forall f, g \in H$ рассмотрим $F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1} f, g)$, $F(\lambda) \to 0, \lambda \to \infty$, регулярная во внешности круга $|\lambda| < r(A)$. $|\lambda| > r(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. Так как $|\lambda| > \|A\| \geq r(A)$, то по теореме Неймана $F(\lambda) = -\sum_0^\infty \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}}$. $F(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{\lambda^{n+1}}$, $|\lambda| > r(A) \Rightarrow$ по теореме единственности разложения в ряд Лорана $c_n = -(A^n f, g)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом $\forall |\lambda| > r(A)$ получаем $\frac{A^n f, g}{\lambda^n}$ — член сходящегося ряда, следовательно $\frac{(A^n f, g)}{\lambda^n} \to 0, n \to \infty$, что равносильно $\forall g \in H$ $(g, \underbrace{\dfrac{A^n f}{\lambda^n}}_{=\Phi_n(g)}) \to 0, n \to \infty$. $\Phi_n : H \to C$ линейный и непрерывный оператор. $\|\Phi_n\| = \frac{\|A^n f\|}{|\lambda^n|}$ сходится к 0 поточечно

на H. Отсюда по теореме Банаха-Штейнгаусса $\|\Phi_n\|$ — ограниченная числа последовательность. $\forall f \in H$ $\exists M_f > 0$: $\|\frac{A_n f}{\lambda^n}\| \leq M_f \Rightarrow \{\frac{A_n}{\lambda_n}\}$ — поточечно сходящаяся на H ограниченная последовательность операторов, следовательно по теореме Банаха-Штейнгаусса $\|\frac{A^n}{\lambda^n}\|$ ограниченная числовая последовательность. Следовательно $\exists M > 0$: $\|\frac{A^n}{\lambda^n}\| \leq M \Rightarrow \forall |\lambda| > r(A)$ $\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \sqrt[n]{M}|\lambda|$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda| \to r(A) + 0$. Получаем $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, что и требовалось доказать.

Определение: $A : H \to H$ линейно непрерывный оператор, то $A^* : H \to H$ называется сопряжённым к A (эрмитов оператор), если $(Af, g) = (f, A^* g)$ $\forall f, g \in H$.

Утверждение

$\forall A : H \to H$ линейный непрерывный оператор $\exists! A^* = T$: $(Af, g) = (f, Tg)$ $\forall f, g \in H$ и $\|T\| = \|A\|$.

Доказательство

$\forall g \in H$ рассмотрим $f \in H$ $f \to (Af, g) = \Phi_g(f)$. $\Phi_g : H \to \mathbb{C}$ линейный и непрерывный. Тогда по теореме Риса-Фреше $\exists! h \in H$: $\Phi_g(f) = (f, h) \Rightarrow \exists! T : H \to H$: $\forall g \in H$ $Tg = h_g$ и $(Af, g) = (f, h_g) = (f, Tg)$. Далее $(Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = (f, T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)) = \overline{\alpha}_1(Af, g_1) + \overline{\alpha}_2(Af, g2) = (f, \alpha_1 T g_1) + (f, \alpha_2 T g_2), \forall f \in H$. Следовательно $T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T(g_1) + \alpha_2 T(g_2)$, T — линейный оператор.

$\|Tg\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |(f, Tg)| = \sup\limits_{\|f\|=1} |(Af, g)| \leq \sup\limits_{\|f\|=1} \|Af\|\|g\| \leq \|A\|\|g\|$. С другой стороны $\|Af\| = \sup\limits_{\|g\|=1} |(Af, g)| = \sup\limits_{\|g\|=1} |(f, Tg)| \leq \sup\limits_{\|g\|=1} \|f\|\|Tg\| \leq \|f\|\|T\|$. Получаем, что T — линейный и непрерывный оператор и $\|T\| = \|A\|$.

Упражнение $A^{**} = A$ $\forall A : H \to H$.

Теорема (Фредгольма)

Пусть $A : H \to H$ линейный и непрерывный оператор. Тогда $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ и $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$.

Доказательство:

Пусть $f \in \ker A \Leftrightarrow Af = 0 \Leftrightarrow \forall g \in H$ $(Af, g) = 0 \Leftrightarrow (f, A^* g) = 0$. $\forall h \in \operatorname{Im} A^*$ $(f, h) = 0 \Leftrightarrow f \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. Второе утверждение доказывается аналогично.

Утверждение

$L \subset H$ — подпространство, тогда $L \subseteq L^{\perp\perp} = \overline{L}$. **Доказательство**

$\forall f \in L^{\perp\perp}$ $\overline{L} \oplus (\overline{L})^\perp = H$ по теореме Риса об ортогональном дополнении. Пусть последовательность $h_n \in L$ такая, что $h_n \to \Phi \in \overline{L}$. Пусть $g \in L^\perp$, тогда $(h_n, g) = 0$, $h_n \to \Phi$, поэтому $(\Phi, g) = 0$ по непрерывности скалярного произведения. Тогда пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \overline{L}$, $f_2 \in L^\perp$ и f перпендикулярен f_2. $0 = (f, f_2) = (f_1, f_2) + \|f_2\|^2$ следовательно $\|f_2\| = 0\|$, следовательно $f = f_1 = \overline{L} \Rightarrow L^{\perp\perp} \subset \overline{L}$.