

# Резольвента компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве

Пусть  $A : H \mapsto H$ ,  $A \neq 0$  — компактный самосопряжённый оператор.  $H$  — гильбертово пространство. Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ,  $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  — все нетривиальные собственные значения  $A$ . Пусть  $\{e_{k,1} \dots e_{k,m_k}\} \in \ker A_{\lambda_k}$  — ортогональный базис в  $\ker A_{\lambda_k} \forall n \in 1 \dots N$ . Тогда по теореме Гильберта-Шмидта  $\{e_{k,j}\}_{j=1 \dots m_k}^{k=1 \dots N}$  образует ортогональный базис в  $(\ker A)^\perp$ . Тогда  $\forall f \in H$  мы можем разложить её на

$$f = f_{\parallel} + f_{\perp}$$

где  $f_{\parallel} \in \ker A$ ,  $f_{\perp} \in (\ker A)^\perp$ . Очевидно

$$\begin{aligned} f_{\parallel} &= P_{\ker A} f \\ f_{\perp} &= P_{(\ker A)^\perp} f \end{aligned}$$

с другой стороны, так как в  $(\ker A)^\perp$  существует базис, то

$$f_{\perp} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} e_{kj}$$

Эта сумма сходится в  $H$  и

$$\alpha_{kj} = \frac{(f_{\perp}, e_{kj})}{(e_{kj}, e_{kj})}$$

причём  $(f_{\perp}, e_{kj}) \equiv (f, e_{kj})$  так как  $f_{\parallel} \perp e_{kj}$ . Таким образом

$$P_{kj} g = \frac{(g_{\perp}, e_{kj})}{(e_{kj}, e_{kj})} e_{kj} \quad \forall g \in H$$

$P_{kj} : H \mapsto \text{Lin}\{e_{kj}\}$  — ортопроектор. Можно интерпретировать

$$f_{\perp} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f = P_{(\ker A)^\perp} f$$

Оператор  $A$  — непрерывный, так как является компактным оператором.

$$Af = Af_{\parallel} + Af_{\perp}$$

причём  $Af_{\parallel} = 0$  так как  $f_{\parallel} \in \ker A$ , поэтому

$$Af = Af_{\perp} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} A e_{kj} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} \lambda_k e_{kj}$$

где  $\lambda_k \rightarrow 0$   $k \rightarrow +\infty$  когда  $N = +\infty$  по 4-ой теореме Фредгольма. В итоге можно переписать получившиеся выражение как

$$Af = \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f$$

этот ряд сходится поточечно при  $N = +\infty$ . Формулу

$$A = \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}$$

называют спектральным разложением оператора  $A$ . Если  $N = +\infty$ , то указанный ряд сходится по операторной норме в силу того, что  $\lambda_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  если  $N = +\infty$ . Действительно

$$\|Af - \sum_{k=1}^S \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| = \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f - \sum_{k=1}^S \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f \right\| = \left\| \sum_{k=S+1}^{+\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} e_{kj} \right\|$$

и далее по равенству Парсеваля

$$\|Af - \sum_{k=1}^S \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| = \sqrt{\sum_{k=S+1}^{+\infty} \lambda_k^2 \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2} \leq \sup_{k>S} |\lambda_k| \sqrt{\sum_{k=S+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2}$$

причём

$$\sqrt{\sum_{k=S+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2} = \|f\|$$

Таким образом

$$\|Af - \sum_{k=1}^S \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| \leq \sup_{k>S} |\lambda_k| \|f\|$$

и

$$\|A - \sum_{k=1}^S \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}\| \leq \sup_{k>S} |\lambda_k| \rightarrow 0 \quad s \rightarrow +\infty$$

Построим теперь резольвенту.

$$R_A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1} : H \mapsto H$$

если  $\lambda \neq \frac{1}{\lambda_k} \forall k = 1 \dots N$ , то есть  $\lambda$  — не характеристическое число  $A$ . С одной стороны

$$(I - \lambda A)f = f - \lambda Af = f_{\parallel} + f_{\perp} - \lambda Af = P_{\ker A}f + P_{(\ker A)^{\perp}}f - \lambda Af$$

Воспользуемся спектральным разложением оператора  $A$  и определением  $P_{(\ker A)^{\perp}}$  получим

$$(I - \lambda A)f = P_{\ker A}f + P_{(\ker A)^{\perp}}f - \lambda \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}f = P_{\ker A}f + \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} (1 - \lambda \lambda_k) P_{kj}f$$

С другой стороны пусть

$$(I - \lambda A)f = g = P_{\ker A}g + \sum_{k=1}^N \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}g$$

Тогда

$$\begin{aligned} P_{\ker A}f &= P_{\ker A}g \quad (f_{\parallel} = g_{\parallel}) \\ (1 - \lambda \lambda_k)P_{kj}f &= P_{kj}g \end{aligned}$$

где  $P_{kj}f = \alpha_{kj}e_{kj}$  и  $P_{kj}g = \beta_{kj}e_{kj}$  и

$$\beta_{kj} = \frac{(g, e_{kj})}{(e_{kj}, e_{kj})}$$

Так как  $(1 - \lambda \lambda_k) \neq 0$ , то

$$(1 - \lambda \lambda_k)\alpha_{kj} = \beta_{kj}$$

и

$$\alpha_{kj} = \frac{\beta_{kj}}{1 - \lambda \lambda_k}$$

Таким образом

$$f = R_A(\lambda)g = P_{\ker A}g + \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 - \lambda \lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}g$$

и

$$R_A(\lambda) = P_{\ker A} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 - \lambda \lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}$$

Если  $N = +\infty$ , то ряд сходится поточечно, но не операторной нормой. Действительно  $\forall g \in H$

$$\|R_A(\lambda)g - P_{\ker A}g - \sum_{k=1}^S \frac{1}{1 - \lambda\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}g\| = \sqrt{\sum_{k=S+1}^{\infty} \left| \frac{1}{1 - \lambda\lambda_k} \right|^2 \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2}$$

Пусть  $g = \frac{e_{S+1,1}}{\|e_{S+1,1}\|}$ , тогда  $\|P_{kj}g\| = 1$  только при  $k = S+1$  и  $j = 1$ , а в остальных случаях ноль. Тогда

$$\|R_A(\lambda)g - P_{\ker A}g - \sum_{k=1}^S \frac{1}{1 - \lambda\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}g\| = \frac{1}{|1 - \lambda\lambda_{S+1}|}$$

Тогда

$$\|P_A(\lambda) - P_{\ker A} - \sum_{k=1}^S \frac{1}{1 - \lambda\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}\| \geq \frac{1}{1 - \lambda\lambda_{S+1}}$$

и так как  $\lambda_{S+1} \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow +\infty$ , то  $\exists S_\lambda: |\lambda_{S+1}\lambda| \leq \frac{1}{2} \quad \forall S \geq S_\lambda$ , тогда  $\frac{1}{|1 - \lambda\lambda_{S+1}|} \geq \frac{1}{2}$  и ближе не приблизиться.

Найдём теперь норму резольвенты.  $\forall g \in H$

$$\|R_A(\lambda)g\| = \sqrt{\|g\|^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{|1 - \lambda\lambda_k|^2} \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2}$$

Введём  $d(\lambda) = \sup_{k=1 \dots N} \frac{1}{|1 - \lambda\lambda_k|}$ . Так как при  $N = +\infty$   $\lambda_k \rightarrow 0$ , то  $\frac{1}{|1 - \lambda\lambda_k|} \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow +\infty$ , поэтому  $d(\lambda)$  ограничено.

$$\|R_A(\lambda)g\| \leq \sqrt{\|g\|^2 + \sum_{k=1}^N d(\lambda)^2 \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2} \leq \max\{1, d(\lambda)\} \|g\|$$

где

$$\|g\| = \sqrt{\|g\|^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2}$$

Таким образом  $\|R_A(\lambda)\| \leq \max\{1, d(\lambda)\}$

**Упражнение .** Доказать, что  $\|R_A(\lambda)\| = \max\{1, d(\lambda)\}$ .

Если  $d(\lambda) > 1$ , то  $\exists k_l: d(\lambda) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \lambda \lambda_{k_l}}$ . Пусть  $g = \frac{e_{k_l,1}}{\|e_{k_l,1}\|}$ . Так как  $d(\lambda) > 1$ , то

$$d(\lambda) \geq \|R_A(\lambda)\| \geq \|R_A(\lambda)g_{k_l}\| = \frac{1}{|1 - \lambda \lambda_{k_l}|} \rightarrow d(\lambda)$$

следовательно  $\|R_A(\lambda)\| = d(\lambda)$ .

## Применение теоремы Гильберта-Шмидта для исследования базисности системы собственных функций дифференциальных операторов

**Пример 1.** Пусть  $A = -i \frac{d}{dx}$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .  $H = L_2[0, 2\pi]$  (оператор  $L_z$  в квантовой механике).  $A : D(A) \mapsto H$ , где  $D(A)$  — область определения  $A$ , являющиеся подпространством в  $H$ .

$$D(A) = \{f \in C'[0, 2\pi] \mid f(0) = e^{i\phi} f(2\pi)\}$$

где  $\phi \in (0, 2\pi)$  — заданный параметр и  $e^{i\phi} \neq 1$ . Эта область определения соответствует области определения оператора проекции момента импульса при эффекте Ааронова — Бома. Мы ищем

$$Af = \lambda f, \quad f \neq 0 \in D(A), \lambda \in \mathbb{C}$$

Оператор  $A$  симметричный на  $D(A)$ , то есть  $(Af, g) = (f, Ag) \quad \forall f, g \in D(A)$ . Действительно

$$\int_0^{2\pi} i f' \bar{g} dx = -i f \bar{g} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} i f \bar{g}' dx$$

Из условий на  $f, g$ :

$$\begin{aligned} -i f \bar{g} \Big|_0^{2\pi} &= -i f(2\pi) \bar{g}(2\pi) + i f(0) \bar{g}(0) = \\ &= -i f(2\pi) \bar{g}(2\pi) + i f(2\pi) e^{i\phi} \bar{g}(2\pi) e^{-i\phi} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом  $A$  действительно симметричен.

**Утверждение .** Пусть  $T : D(T) \mapsto H$  — линейный и непрерывный оператор на  $D(T)$  — подпространство в  $H$ , тогда все собственные значения  $T$  действительны и собственные функции для различных собственных значений ортогональны в  $H$ .

**Доказательство.** Пусть  $Tf = \lambda f$  и  $f \in D(T) \setminus \{0\}$ , тогда

$$(Tf, f) = \lambda(f, f) = (f, Tf) = \bar{\lambda}(f, f)$$

таким образом  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Пусть теперь  $Tg = \mu g$  и  $\lambda \neq \mu$

$$(Tf, g) = \lambda(f, g) = (f, Tg) = (f, g)\mu$$

Так как  $\lambda \neq \mu$ , то  $(f, g) = 0$ , то есть  $f \perp g$  в  $H$ . Доказательство закончено.

Вернёмся к нашему оператору  $A$ . Ищем решение  $Af = \lambda f$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -if' &= \lambda f \\ f(x) &= Ce^{i\lambda x}, \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

Используем условия на  $f$  и получаем

$$1 = e^{i\phi} e^{i\lambda 2\pi}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \phi + 2\pi\lambda_k &= 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \lambda_k &= k - \frac{\phi}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Получили собственные значения  $A$ . Тогда собственные функции  $f_k(x) \in D(A)$  имеют вид

$$f_k(x) = e^{ix(k - \frac{\phi}{2\pi})}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$\ker A = 0$  так как  $\lambda = 0$  не собственное значение. Тогда  $\exists A^{-1} : \text{Im } A \mapsto D(A)$ . Исследуем базисность  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — ортогональная система собственных функций  $A$  с помощью теоремы Гильберта-Шмита.  $\text{Im } A \subset C[0, 2\pi]$ ,  $\forall g \in C[0, 2\pi]$

$$\begin{cases} f \in D(A) \\ Af = -if' = g \end{cases}$$

справедливо, что

$$\exists! f = i \int_0^x g(t) dt + C$$

Получаем, что  $\text{Im } A = C[0, 2\pi]$ . Из условия на  $f$

$$C = e^{i\phi} \left( i \int_0^{2\pi} g(t) dt + C \right)$$

Отсюда выражаем константу

$$C = \frac{e^{i\phi}}{1 - e^{i\phi}} \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

Таким образом

$$\begin{aligned} (A^{-1}g)(x) &= \\ &= \left( i + \frac{ie^{i\phi}}{1 - e^{i\phi}} \right) \int_0^x g dt + \frac{ie^{i\phi}}{1 - e^{i\phi}} \int_x^{2\pi} g dt = \\ &= \frac{i}{1 - e^{i\phi}} \int_0^x g dt - \frac{i}{1 - e^{-i\phi}} \int_x^{2\pi} g dt = \\ &= \int_0^{2\pi} K(t, x) g(t) dt \end{aligned}$$

где

$$K(t, x) = \begin{cases} \frac{i}{1 - e^{i\phi}}, & 0 \leq t < x \leq 2\pi \\ \frac{-i}{1 - e^{-i\phi}}, & 0 \leq x < t \leq 2\pi \end{cases}, \quad \phi \in (0, 2\pi)$$

$\overline{K(t, x)} = K(x, t)$  для почти всех  $t, x \in [0, 2\pi]$ . Очевидно  $K \in L_2([0, 2\pi]^2)$  тогда построим

$$(Tg)(x) = \int_0^{2\pi} K(t, x) g(t) dt$$

$T : L_2[0, 2\pi] \mapsto L_2[0, 2\pi]$ ,  $\text{Im } T \subset C[0, 2\pi] = \text{Im } A$  и  $T|_{C[0, 2\pi]} = A^{-1}$ . По теореме Гильберта-Шмидта в  $H = L_2[0, 1]$  существует ортогональный базис из собственных функций  $T$ .

$\ker T = 0$  так как  $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$  по теореме Фредгольма, а так как  $T = T^*$  то  $\ker T = (\text{Im } T)^\perp$ . Так как  $T|_{C[0, 2\pi]} = A^{-1}$ , то  $\text{Im } T \supset A^{-1}(C[0, 2\pi]) = D(A)$ . Тогда  $(\text{Im } T)^\perp \subset (D(A))^\perp = \left( \overline{D(A)} \right)^\perp$ . Покажем, что  $\overline{D(A)} = (A - \text{плотно определённый оператор})$ . Введём

$$D_0 = \{f \in C^1[0, 2\pi] \mid f(0) = 0, f(2\pi) = 0\} \subset D(A)$$

$\overline{D_0} = H$  так как  $\forall g \in L_2[0, 2\pi] \forall \varepsilon > 0 \exists h \in C[0, 2\pi]: \|g - h\|_{L_2} \leq \varepsilon$ . Действительно, по теореме Вейерштрасса  $\exists P$  — многочлен такой, что

$$\max_{[0, 2\pi]} |h - P| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

тогда

$$\|h - P\|_{L_2} \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{2\pi} dx} = \varepsilon$$

Пусть  $|P| \leq R$  на  $[0, 2\pi]$ . Пусть  $f \in D_0$ ,  $|f| \leq R$  на  $[0, 2\pi]$ . Пусть также нули многочлена отдалены от 0 и  $2\pi$  на  $0 \leq \delta \leq 2\pi$ , тогда

$$\|f - P\|_{L_2} \leq \sqrt{\delta 4R^2 + \delta 4R^2} = \sqrt{8R\delta} \leq \varepsilon$$

Тогда подберём  $\delta \leq \frac{\varepsilon^2}{8R^2}$ . В итоге получаем

$$\|f - g\|_{L_2} \leq \|f - P\|_{L_2} + \|h - P\|_{L_2} + \|g - h\|_{L_2} \leq 3\varepsilon$$

В итоге  $\overline{D_0} = H$ , значит  $\left(\overline{D(A)}\right)^\perp = H^\perp = 0$ , следовательно  $0 \in \ker T \subset 0 \Rightarrow \ker T = 0$ .

Пусть  $\mu \neq 0$  и  $Tg = \mu g$ ,  $g \in H \setminus \{0\}$ . Это равносильно  $g = \frac{1}{\mu}Tg$ ,  $Tg \in C[0, 2\pi]$ , следовательно  $g \in C[0, 2\pi]$ , следовательно  $Tg = A^{-1}g \in D(A)$ , отсюда  $g \in D(A)$ . В итоге  $g \in D(A)$  и

$$g = \frac{1}{\mu}A^{-1}g \Rightarrow Ag = \frac{1}{\mu}g$$

то есть  $\frac{1}{\mu}$  — собственное значение  $A$ ,  $g$  — собственная функция  $A$  из  $D(A)$ .

Отсюда  $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$  и  $g_k = f_k$ . По теореме Гильберта-Шмидта все  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  образует ортогональный базис.

Просуммируем теперь общие свойства.

**Замечание .** Оператор  $A : D(A) \mapsto H$  — симметричный оператор на  $D(A)$ ,  $D(A)$  — подпространство в  $H$ ;  $\overline{D(A)} = H$ ;  $\ker A = 0$  и  $A^{-1} : \text{Im } A \mapsto D(A)$  — непрерывный оператор и  $\overline{\text{Im } A} = H$ . Тогда  $\exists!$  продолжение по непрерывности оператора  $A^{-1}$  до  $T : H \mapsto H$  — линейный и непрерывный.

**Доказательство.** Так как  $\|A^{-1}\| < +\infty$ , то берём  $g \in H$  и  $g_n \in \text{Im } A: g_n \rightarrow g$

$$\|A^{-1}g_n - A^{-1}g_m\| \leq \|A^{-1}\| \|g_n - g_m\| \rightarrow 0$$



Тогда  $A^{-1}g_n \rightarrow h$  и определим  $h = Tg$ . Такое определение корректно, если  $\tilde{g}_n \rightarrow g, \tilde{g} \in \text{Im } A$

$$\|A^{-1}\tilde{g}_n - A^{-1}g_n\| \leq \|A^{-1}\|\|\tilde{g}_n - g_n\|$$

где  $g_n \rightarrow g$  и  $\tilde{g}_n \rightarrow g$ , поэтому

$$\|A^{-1}\|\|\tilde{g}_n - g_n\| \rightarrow 0$$

Оператор  $T : H \mapsto H$  линейный и непрерывный,  $T|_{\text{Im } A} = A^{-1}$ , поэтому  $\|T\| \geq \|A^{-1}\|$ . Пусть снова  $g_n \in \text{Im } A, g_n \rightarrow g$

$$\|Tg\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{-1}g_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{-1}g_n\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^{-1}\|\|g_n\| \rightarrow \|A^{-1}\|\|g\|$$

Таким образом  $\|T\| \leq \|A^{-1}\|$ , значит  $\|T\| = \|A^{-1}\|$ .

**Утверждение .**  $T$  — самосопряжённый оператор в силу симметричности  $A$  на  $D(A)$

**Доказательство.** Рассмотрим  $(Tg, h), g, h \in H$ . Тогда  $\exists g_n, h_n \in \text{Im } A: g_n \rightarrow g, h_n \rightarrow h$  и

$$\begin{aligned} |(Tg, h) - (Tg_n, h_n)| &= \\ &= |(Tg, h) \pm (Tg_n, h) - (Tg_n, h_n)| = \\ &= |(Tg - Tg_n, h) + (Tg_n, h - h_n)| \leq \\ &\leq \|h\|\|T\|\|g - g_n\| + \|Tg_n\|\|h - h_n\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

отсюда и в силу того, что  $Tg_n = A^{-1}g_n$  так  $g_n \in \text{Im } A$

$$(Tg, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Tg_n, h_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (A^{-1}g_n, h_n)$$

Пусть  $f_n = A^{-1}g_n$  и  $\psi_n = A^{-1}h_n$ . Это равносильно  $Af_n = g_n, A\psi_n = h_n, \psi_n, f_n \in D(A)$ . Тогда

$$(Tg, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, A\psi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Af_n, \psi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n, A^{-1}h_n) = (g, Th)$$

аналогично

$$(g, Th) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n, Th_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n, A^{-1}h_n) = (Tg, h)$$

В итоге

$$(Tg, h) = (g, Th) \quad \forall g, h \in H$$

Потребуем компактность оператора  $T$  (например, если  $A^{-1}$  компактен на  $\text{Im } A$ , то  $T$  — компактен на  $H$  (доказать в качестве упражнения)). Тогда по

теореме Гильберта-Шмидта у  $T$  есть в  $H$  ортогональный базис из собственных функций.

$T$  и  $A$  обладают общей системой собственных функций.

$$\begin{cases} Af = \lambda f \\ f \in D(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \lambda A^{-1}f = \lambda Tf \\ f \in D(A) \end{cases}$$

$\ker A = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow Tf = \frac{1}{\lambda}f, f \in D(A)$ . И наоборот,  $\ker T = (\operatorname{Im} T)^\perp$  так как  $T = T^*$

$$(\operatorname{Im} T)^\perp \subset (D(A))^\perp = \left(\overline{D(A)}\right)^\perp = H^\perp = 0$$

значит  $\ker T = 0$ .  $Tf = \mu f, f \in H$  и  $\mu \neq 0$ , следовательно  $f = \frac{1}{\mu}Tf$ .

Потребуем  $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Im} A$ . Тогда  $\frac{1}{\mu}Tf \in \operatorname{Im} A$ , тогда  $f = \frac{1}{\mu}Tf \in \operatorname{Im} A$ , тогда, учитывая  $T|_{\operatorname{Im} A} = A^{-1}$ , получаем  $Tf = A^{-1}f \in D(A)$ , следовательно  $f \in D(A)$ , значит  $f = \frac{1}{\mu}A^{-1}f \Rightarrow Af = \frac{1}{\mu}f$ .

В итоге получили, что ортогональная система всех собственных функций  $A$  образует в  $H$  ортогональный базис.

Рассмотрим теперь в качестве приложения задачу Штурма-Лиувилля.

$$\begin{aligned} A &= a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)I, \quad x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ a, b, c &\in C[\alpha, \beta], a \not\equiv 0 \\ a, b, c &: [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im} A \subset C[\alpha, \beta]$ . Пусть  $H = L_2[\alpha, \beta]$  и

$$D(A) = \left\{ f \in C^2[\alpha, \beta] \left| \begin{array}{l} \mu_1 f'(\alpha) + \nu_1 f(\alpha) = 0 \quad (1) \\ \mu_2 f'(\beta) + \nu_2 f(\beta) = 0 \quad (2) \end{array} \right. \right\}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k, \nu_k &\in \mathbb{R} \\ |\mu_1| + |\nu_1| &> 0 \\ |\mu_2| + |\nu_2| &> 0 \end{aligned}$$

Поставим теперь задачу:  $\forall f \in C[\alpha, \beta] \forall \lambda \in \mathbb{C}$  исследовать решение уравнения

$$\begin{cases} Au(x) = \lambda u(x) + f(x), & x \in [\alpha, \beta] \\ u \in D(A) \end{cases}$$

Исследуем, когда  $\ker A = 0$ . Если  $\ker A = 0$ , то рассмотрим 2 задачи Коши:

$$\begin{cases} Av_1 = 0, & v_1 \in C^2[\alpha, \beta] \\ v_1(\alpha) = \mu_1 \\ v_1'(\alpha) = -\nu_1 \end{cases}$$

$\exists! v_1 \not\equiv 0$  удовлетворяет (1). Аналогично

$$\begin{cases} Av_2 = 0, & v_2 \in C^2[\alpha, \beta] \\ v_2(\alpha) = \mu_2 \\ v_2'(\alpha) = -\nu_2 \end{cases}$$

и  $\exists! v_2 \not\equiv 0$  удовлетворяет (2). Пусть  $\ker A = 0$ , тогда  $v_2$  не удовлетворяет (1) и  $v_1$  не удовлетворяет (2). Следовательно  $v_1$  и  $v_2$  линейно независимы в  $C^2[\alpha, \beta]$ . Следовательно  $\{v_1, v_2\}$  — фундаментальная система решений для  $A$ .

**Утверждение .** Если  $\exists$  специальная фундаментальная система решений  $v_1, v_2 \in C^2[\alpha, \beta]$  и  $Av_k = 0$   $k = 1, 2$  на  $[\alpha, \beta]$  и  $v_1$  удовлетворяет (1), но не удовлетворяет (2) и  $v_2$  удовлетворяет (2), но не удовлетворяет (1), тогда  $\ker A = 0$

**Доказательство.** Если  $v \in \ker A$ , то

$$\begin{cases} v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ v \in D(A) \end{cases}$$

из условия (1)

$$\alpha_1(\mu_1 v_1'(\alpha) + \nu_1 v_1(\alpha)) + \alpha_2(\mu_1 v_2'(\alpha) + \nu_1 v_2(\alpha)) = \alpha_2(\mu_1 v_2'(\alpha) + \nu_1 v_2(\alpha)) = 0$$

И так как  $v_2$  не удовлетворяет (1), то  $\alpha_2 = 0$ . Аналогично  $\alpha_1 = 0$ . Следовательно  $v \equiv 0$ .

**Утверждение .** Пусть  $\ker A = 0$  (то есть существует специальная фундаментальная система решений  $v_1$  и  $v_2$ ). Тогда

$$A^{-1} : C[\alpha, \beta] \mapsto D(A)$$

$\forall f \in C[\alpha, \beta]$  и можно указать единственную функцию  $u \in D(A)$ :  $u = A^{-1}f \Rightarrow Au = f$

**Доказательство.**

$$u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$$

Поставим требование

$$C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0$$

тогда

$$v' = C_1 v_1' + C_2 v_2'$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} Au &= a(C_1' v_1' + C_2' v_2') + a(C_1 v_1'' + C_2 v_2'') + \\ &\quad + b(C_1 v_1' + C_2 v_2') + c(C_1 v_1 + C_2 v_2) = \\ &= a(C_1' v_1' + C_2' v_2') + C_1 A v_1 + C_2 A v_2 = f \end{aligned}$$

где  $C_1 A v_1 = C_2 A v_2 = 0$ . В итоге можно записать:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix}$$

где  $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$  — фундаментальная система решений.

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = w = \text{const} e^{-\int \frac{b}{a} dx}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{wa} f \\ \frac{v_1}{wa} f \end{pmatrix}$$

В итоге

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int_x^\beta \frac{v_2(t)}{w(t)a(t)} f(t) dt + D_1 \\ C_2(x) &= \int_\alpha^x \frac{v_1(t)}{w(t)a(t)} f(t) dt + D_2 \end{aligned}$$

Осталось  $u = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$  подставить в (1) и (2) и найти  $D_1$  и  $D_2$ .

**Утверждение .**  $D_1 = D_2$