Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

**Воспоминание (об ортогональном базисе в гильбертовом пространстве).** *Пусть $H$ — гильбертово пространств и $\dim H = +\infty$, тогда $\exists\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$, что $\forall N$ $\{e_1, \ldots, e_M\}$ — линейно независимый набор.*

**Определение 1.** *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называют базисом в $H$, если $\forall f \in H$ $\exists!\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$:*

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k\| \to 0 \quad N \to \infty$$

*Что по определению равносильно*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

**Определение 2.** *$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называют полной в $H$, если $\forall f \in H$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon, g)$ $\exists\{\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon, f)\}_{k=1}^{N} \subset \mathbb{C}$: $\|f - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n\| \leq \varepsilon$. Это равносильно тому, что линейная оболочка $\mathrm{Lin}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \mid \alpha_1 \ldots \alpha_N \in \mathbb{C}\ \forall N \in \mathbb{N}\}$ всюду плотна в $H$, что равносильно $\rho(f, L_N) \to 0$ $N \to 0$, где $L_N = \mathrm{Lin}\{e_k\}_{k=1}^{N}$ и $L_N \subset L_{N+1}$. $\rho(f, L_{N+1}) \leq \rho(f, L_N) \leq \rho(f, L_{N(\varepsilon,f)}) \leq \varepsilon$, поэтому $\rho(f, L_N)$ уменьшается при увеличении $N$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \rho(f, L_N) = 0$ по теореме Больцано-Вейерштрасса.*

**Пример 1.** *есть полнота, но нет базиса.* $\{e_k(x) = x^k\}_{k=0}^{\infty}, e_0(x) = 1, x \in [0, 1]$ в $H = L_2[0, 1]$ является полной по теореме Вейерштрасса о равномерно приближении многочленом, но это не базис (доказать в качестве упражнения)

**Утверждение .** *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная полная система в $H$, тогда $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $H$*

**Доказательство.** Пусть $L_N = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}$. Тогда по минимальному свойству коэффициентов фурье по ортогональной системе

$$P_{L_N}(f) = S_N(f) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

Причём

$$P_n(f) = \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

это ортопроекция $f$ на $\mathrm{Lin}\{e_n\}$ и $\|P_n\| = 1$, тогда

$$P_{L_N} = \sum_{n=1}^{N} P_n$$

Так как $\rho(f, L_N) \to 0$ и $\rho(f, L_N) = \|f - P_{L_N}(f)\|$, то

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} P_n f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$$

сходимость по норме в $H$. $\exists \alpha_n = \dfrac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)}$ — коэффициент фурье $f$ в системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Если существует другое разложение

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$$

тогда

$$(f, e_n) = (\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n, e_m) = \lim_{N \to \infty} (\sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n, e_m)$$

тогда при $N > m$ это равно $\beta_m(e_m, e_m)$, а значит $\beta_m = \alpha_m = \dfrac{(f, e_m)}{(e_m, e_m)}$

**Определение 3.** $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *называют замкнутой, если из* $(f, e_k) = 0\ \forall k$ *следует, что* $f = 0$, *что равносильно по определению* $(\mathrm{Lin}\{e_k\})^{\perp} = 0$, *что равносильно* $\overline{\mathrm{Lin}\{e_k\}} = H \Leftrightarrow \{e_k\}$ *— полная система.*

**Наблюдение .** $\{e_k\}$ *— полная система, тогда ортогонализуем её по Гильберту-Шмитду.*

$$0 \neq g_1 = e_1$$
$$0 \neq g_2 = e_2 + \alpha_{21} g_1 \perp g_1$$
$$\vdots$$
$$0 \neq g_n = e_n + \alpha_{n1} g_1 + \dots + \alpha_{nn-1} g_{nn-1} \perp g_1 \dots g_{n-1}$$

*Тогда* $\mathrm{Lin}\{g_1, \dots, g_N\} = \mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_N\}$, $g_n = L_n$ *и* $e_n \in \mathrm{Lin}\{g_1, \dots, g_N\}$. $\rho(f, L_N) \to 0\ \forall f \in H$ *в силу полноты, тогда* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *осталась полной, но стала ортогональной, поэтому это базис.*

# Ортогональные базисы в декартовом и тензорном произведении двух гильбертовых пространств

Пусть $H_1$ и $H_2$ — два гильбертова пространства. Декартовым произведением $H_1$ и $H_2$ обозначается линейной пространство такое, что

$$H_1 \times H_2 = \left\{ u_1 \times u_2 \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} u_1 \in H_1 \\ u_2 \in H_2 \end{array} \right\}$$

Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по [ссылке]

Тогда $\forall u_k, \tilde{u}_k$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + \tilde{u}_1 \\ u_2 + \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

$0 = H_1 \times H_2$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times 0.$

$$(u_1 \times u_2, \tilde{u}_1 \times \tilde{u}_2) = (u_1, \tilde{u}_1)_{H_1} + (u_2, \tilde{u}_2)_{H_2} \geq 0$$

тогда

$$(u_1 \times u_2, u_1 \times u_2) = \|u_1\|^2_{H_1} + \|u_2\|^2_{H_2} \geq 0$$

Посмотрим, когда скалярное произведение в таком случае будет ноль. Тогда $u_1 = 0 \in H_1$ и $u_2 = 0 \in H_2$, а значит $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \in H_1 \times H_2$. Очевидно $\|u_1 \times u_2\|_{H_1 \times H_2} = \sqrt{\|u_1\|^2_{H_1} + \|u_2\|^2_{H_2}}$.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $H_1$ и $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в $H_2$. Рассмотрим систему ортогональных векторов в $H_1 \times H_2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} k \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$$

$u_1 \times u_2 \in H_1 \times H_2$, и $\|u_1 - \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k\|_{H_1} \leq \varepsilon$ , и $\|u_2 = \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k g_k\|_{H_2} \leq \varepsilon$, тогда

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \\ \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{N} \beta_k \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Lin}\{ \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix} \}$$

Пусть

$$u = \begin{pmatrix} u_1 - \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \\ u_2 - \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k g_k \end{pmatrix}$$

тогда $\|u\|_{H_1\times H_2} \leq \sqrt{2}\varepsilon$, а значит $\{\begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix}\}$ полная в $H_1 \times H_2$, поэтому базис в $H_1 \times H_2$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \begin{pmatrix} 0 \\ g_m \end{pmatrix}$$

Тензорное произведение $H_1$ и $H_2$ $H_1 \otimes H_2$. $\forall u_1 \in H_1$ и $\forall u_2 \in H_2$ $u_1 \otimes u_2 = w \in H_1 \otimes H_2$ — пара. Введём сложение и умножение на скаляр этих пар $u_1 \otimes u_2$ $u_1 \otimes u_2 + \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2$ и $\alpha(u_1 \otimes u_2)$, $u_k, \tilde{u}_k \in H_k, k = 1, 2$ так, чтобы $\alpha(u_1 \otimes u_2) = (\alpha u_1) \otimes u_2 = u_1 \otimes (\alpha u_2)$, $(u_1 + \tilde{u}_1) \otimes u_2 = u_1 \otimes u_2 + \tilde{u}_1 \otimes u_2$ и $u_1 \otimes (u_2 + \tilde{u}_2) = u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes \tilde{u}_2$. Вводим

$M = \{$всевозможные конечные линейные комбинации пар $u_1 \otimes u_2$, $u_k \in H_k, k = 1, 2\}$

$u_1 \otimes 0$ или $0 \otimes u_2$ — нули в $H$ — линейное пространство. Тогда

$$u_1 \otimes 0 + u_1 \otimes u_2 = u_1 \otimes u_2$$
$$u_1 \otimes (0 * u_2) = 0(u_1 \otimes u_2) = 0 \in M$$

Введём скалярное произведение как

$$(u_1 \otimes u_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2)_M = (u_1, \tilde{u}_1)_{H_1} (u_2, \tilde{u}_2)_{H_2}$$

Тогда

$$(u_1 \otimes u_2, u_1 \otimes u_2) = \|u_1\|^2_{H_1} \|u_2\|^2_{H_2} \geq 0$$

Оно равно нулю тогда и только тогда, когда $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$, следовательно $u_1 \otimes u_2 = 0$. Потребуем, чтобы

$$(u_1 \otimes u_2 + \hat{u}_1 \otimes \hat{u}_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2) = \\ = (u_1 \otimes u_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2) + (\hat{u}_1 \otimes \hat{u}_2, \tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2) = \\ = (u_1, \tilde{u}_1)(u_2, \tilde{u}_2) + (\hat{u}_1, \tilde{u}_1)(\hat{u}_2, \tilde{u}_2)$$

Наделим $(M, \| \ \|)$ нормой, порождённой скалярным произведением. Пополняя $(M, \| \ \|)$ получим $H_1 \otimes H_2$. $M$ всюду плотно в $H_1 \otimes H_2$ по построению. В смысле евклидовой нормы

$$\|u_1 \otimes u_2\| = \sqrt{(u_1 \otimes u_2)(u_1 \otimes u_2)} = \|u_1\| + \|u_2\|$$

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в $H_1$ и $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в $H_2$. Пусть $h_{km} = e_k \otimes g_m \in M \subset H_1 \otimes H_2$, тогда

$$(h_{km}, h_{\tilde{k}\tilde{m}})_{H_1 \otimes H_2} = (e_k, e_{\tilde{k}})_{H_1} (g_m, g_{\tilde{m}})_{H_2}$$

Если $h_{km} \neq h_{\tilde{k}\tilde{m}}$, тогда либо $k \neq \tilde{k}$, либо $m \neq \tilde{m}$, тогда $(e_k, e_{\tilde{k}}) = 0$, либо $(h_m, h_{\tilde{m}}) = 0$, а значит $(h_{km}, h_{\tilde{k}\tilde{m}}) = 0$, отсюда система $h_{km}$ ортогональная в $H_1 \otimes H_2$

Берём $w \in H_1 \otimes H_2$, тогда $\forall \varepsilon\ \exists v \in H\colon \|w - v\|_{H_1 \otimes H_2} \leq \varepsilon$. Пусть

$$v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_{1k} \otimes u_{2k}$$

где $u_{1k} \in H_1, u_{2k} \in H_2$.

$$\|u_{1k} - \sum_{j=1}^{M} \beta_{jk} e_j\|_{H_1} \leq \delta$$

Обозначим как $S_1$ частичную сумму $\sum\limits_{j=1}^{M} \beta_{jk} e_j$. Аналогично

$$\|u_{2k} - \sum_{s=1}^{M} \gamma_{sk} g_s\|_{H_2} \leq \delta$$

и $S_2 = \sum\limits_{s=1}^{M} \gamma_{sk} g_s$. Тогда рассмотрим

$$\|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_1 \otimes S_2\|_{H_1 \otimes H_2}$$

Так суммы сходятся, то $u_{1k} - S_1 = \xi_1$ и $u_{1k} = \xi_1 + S_1$, аналогично $u_{2k} = \xi_2 + S_2$. Тогда

$$\|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_1 \otimes S_2\|_{H_1 \otimes H_2} = \|(S_1 + \xi_1) \otimes (S_2 + \xi_2) - S_1 \otimes S_2\|$$

Из наложенного требования на скалярное произведение

$$(S_1 + \xi_1) \otimes (S_2 + \xi_2) = S_1 \otimes S_2 + S_1 \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes S_2 + \xi_1 \otimes \xi_2$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\|u_{1k} \otimes u_{2k} - S_1 \otimes S_2\|_{H_1 \otimes H_2} = \\ &= \|S_1 \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes S_2 + \xi_1 \otimes S_2\| \leq \\ &\leq \|S_1 \otimes \xi_2\| + \|\xi_1 \otimes S_2\| + \|\xi_1 \otimes \xi_2\| \leq \\ &\leq (\|u_{1k}\| + \delta)\delta + (\|u_{2k}\| + \delta)\delta + \delta^2 \end{aligned}$$

подерём $\delta$, чтобы полученное выражение было бы меньше ,чем

$$\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{N}|\alpha_k|+1}$$

тогда

$$\|v-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k S_{1k}\otimes S_{2k}\|\le\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k|\|u_{1k}\otimes u_{2k}-S_{1k}\otimes S_{2k}\|\le\varepsilon$$

Отсюда $\{h_{km}\}_{km=1}^{\infty}$ полная ортогональная система в $H_1\otimes H_2$ — ортогональный базис.

В качестве приложения пусть $L_2[0,1]=H_1=H_2$, $g,f\in L_2[0,1]$, тогда определим

$$f(x)\otimes g(y)=f(x)g(y)\subset L_2([0,1]^2)$$

тогда

$$f_1\otimes g_2+\tilde{f}_1\otimes\tilde{g}_1=f(x)g(y)+\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)$$

Скалярное произведение

$$(f\otimes g,\tilde{f}\otimes\tilde{g})=(f,\tilde{f})_{L_2[0,1]}(g,\tilde{g})_{L_2[0,1]}=\int_0^1 f\tilde{f}dx\int_0^1 g\tilde{g}dy$$

и

$$(f\otimes g+\hat{f}\otimes\hat{g},\tilde{f}\otimes\tilde{g})=(f,\tilde{f})(g,\tilde{g})+(\hat{f},\tilde{f})(\hat{g}\tilde{g})$$

также

$$\|f\otimes g\|=\|f\|_{L_2[0,1]}\|g\|_{L_2[0,1]}$$

Множество всех конечных линейных комбинаций

$$M=\{\sum_{k=1}^{N}\alpha_k f_k(x)g_k(y)\mid\alpha_k\in\mathbb{C};N\in\mathbb{N};f_k,g_k\in L_2[0,1]\}$$

**Утверждение .** *Пополнение $M$ — это $L_2([0,1]^2)$. $L_2([0,1]\times[0,1])=L_2[0,1]\otimes L_2[0,1]=H$*

**Доказательство.** $\forall w\in L_2([0,1]^2)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists v\in C([0,1]^2)$, где $C([0,1]^2)$ — пополнение $L_2$, такой, что $\|w-v\|_{L_2([0,1]^2)}\le\varepsilon$. По теореме Стоуна-Вейерштрасса $\exists P(x,y)$ многочлен $\max\limits_{[0,1]^2}|P-v|\le\varepsilon$ и $P\in M$. Тогда $\|v-P\|_{L_2([0,1]^2)}\le\max\limits_{[0,1]}|P-v|\le\varepsilon$, а значит $\|w-P\|_{L_2([0,1]^2)}\le 2\varepsilon$

Построим базис. $\sin\pi kx=e_k(x)$, $\sin\pi my=g_m(y)$ — ортогональный базис в $L_2[0,1]$. Тогда $h_{km}(x,y)=\sin\pi kx\sin\pi my$ — ортогональный базис в $L_2([0,1]^2)$

**Пример 2.** *электрон со спином* $L_2[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют базис в $\mathbb{C}^2$. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$: $f : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ и $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, тогда $f(x)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f(x) \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Пусть $\{e_k\}$ — базис в $L_2[0,1]$, тогда $e_k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $e_k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ базис в $L_2[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$. Но это также и базис в $L_2[0,1]\times L_2[0,1]$. Отсюда $L_2[0,1]\times L_2[0,1] = L_2[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$ и

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} = \Psi_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_2(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k e_k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_k e_k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

**Теорема 1 (Гильберта, Шмидта).** *Пусть $H$ — гильбертово пространство и $A : H \mapsto H$ — компактный самосопряжённый оператор. Тогда в $(\ker A)^{\perp} \neq 0$ есть базис из собственных функций $A$.*

**Доказательство.** $A \neq 0 \Leftrightarrow \|A\| >)$, так как $A$ — самосопряжённый, то спектральный радиус $r(A) = \|A\|$, а значит $\exists\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, что $|\lambda| = r(A) = \|A\| > 0$. По теореме о спектре компактного оператора для любого нетривиального элемента его спектра, являющийся собственным значением следует, что $\sigma_P(A) \setminus \{0\} \neq \varnothing$. Пусть $\lambda \in \sigma_P(A) \setminus \{0\}$, тогда $f \neq 0$ такой, что $f \in \ker A_\lambda$ следует, что $f \in (\ker A)^{\perp}$ так как $\forall g \in \ker A$

$$(Af, g) = \lambda(f, g) = (f, Ag) = 0 \Rightarrow (f, g) = 0$$

По 4-ой теореме Фредгольма $\sigma_P(A)\setminus\{0\}$ не более чем счётное с быть может единственной предельной точкой 0. Поэтому занумеруем $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N} = \sigma_P(A) \setminus \{0\}$, где $N \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Если $N = +\infty$, то $\lambda_n \to 0$ $n \to \infty$. По 1-ой теореме Фредгольма $\ker A_{\lambda_n}$ конечномерно. Отсюда $\forall n \in 1\ldots N$ $\exists h_{n_1}\ldots h_{n_m} \in \ker A_{\lambda_n}$ ортогональный базис в $\ker A_{\lambda_n}$, где $m_n = \dim\ker A_{\lambda_n}$. Так как $A$ — самосопряжённый, то $\ker A_{\lambda_n} \perp \ker A_{\lambda_m}$ при $n \neq m$.