Теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.

Напоминание. *Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \mapsto H$ линейный непрерывный оператор. A называется компактным, если $\forall \{f_n\} \subset H$ такой, что $\|f_n\| \leq R$ $\forall n$ следует $\exists A f_{n_k}$ — фундаментальная в H подпоследовательность или, что равносильно $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon :$ $H \mapsto H$ линейный и непрерывный и $\dim \operatorname{Im} A_\varepsilon < +\infty$, тогда $\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.*

Для прикладных целей пусть A — компактный оператор и $\lambda \in \mathbb{C}$, и $f \in H$.

$$(I - \lambda A)u = f$$

где $u \in H$ и нужно найти u.

Из компактности $\forall \varepsilon > 0$: $\varepsilon|\lambda| < 1$ $\exists A_\varepsilon : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор, $\dim \operatorname{Im} A_\varepsilon < +\infty$ и $\|A_\varepsilon - A\| < \varepsilon$. Тогда

$$(I - \lambda A) = (I - \lambda A \pm \lambda A_\varepsilon) = (I - \lambda(A - A_\varepsilon) - \lambda A_\varepsilon)$$

Обозначим $\lambda(A - A_\varepsilon)$ как $T_\varepsilon(\lambda)$.

$$\|T_\varepsilon(\lambda)\| = \|\lambda\| \|A - A_\varepsilon\| \leq |\lambda|\varepsilon < 1$$

А значит по теореме Неймана $\exists (I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} : H \mapsto H$ линейный и непрерывный и

$$(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varepsilon(\lambda))^n$$

ряд сходящийся по операторной норме. Уравнение

$$(I - \lambda A)u = f$$

называется уравнением Фредгольма 2-го рода. Оно равносильно выражению

$$(I - T_\varepsilon(\lambda) - \lambda A_\varepsilon)u = f$$

Разобьём полученное выражение

$$(I - T_\varepsilon(\lambda))(I - \lambda(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} A_\varepsilon))u = f$$

Обозначим $(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1}$ как $L_\varepsilon(\lambda)$ Получаем

$$(I - \lambda L_\varepsilon(\lambda) A_\varepsilon)u = f_\varepsilon(\lambda) = L_\varepsilon(\lambda) f$$

Обозначим $C_\varepsilon(\lambda) = L_\varepsilon(\lambda) A_\varepsilon$. Этот оператор линейно непрерывный и его образ изоморфен образу A_ε . Отсюда $\dim C_\varepsilon = \dim A_\varepsilon$.

Утверждение 1. *A — компактный оператор в H, тогда A^* также компактный оператор в H.*

Доказательство. Рассмотрим оператор такой, что

$$\forall \varepsilon\ \exists A_\varepsilon \colon A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^{N} (f, h_k) g_k \quad h_k, g_k \in H$$

Тогда $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$.

$$\|A^* - A_\varepsilon^*\| = \|(A - A_\varepsilon)^*\| = \|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$$

Надо показать, что A_ε^* — компактный оператор. Покажем, что

$$A_\varepsilon^* g = \sum_{k=1}^{N} (g, g_k) h_k$$

так как

$$(f, A_\varepsilon^* g) = (A_\varepsilon f, g) = \sum_{k=1}^{N} (f, h_k)(g_k, g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (f, (g, g_k) h_k) = (f, \sum_{k=1}^{N} (g, g_k) h_k) = (f, A_\varepsilon^* g)$$

Получаем, что $\dim A_\varepsilon^* \leq N \subset \mathrm{Lin}(h_1, \ldots, h_N)$. Следовательно A_ε^* — компактный оператор.

Теорема 1 (первая теорема Фредгольма). *Пусть A — компактный оператор в H и $\lambda \neq 0$, тогда $\dim \ker A_\lambda < +\infty$, где $A_\lambda = A - \lambda I$)*

Доказательство. Заметим, что, во-первых, если $L \subset H$ подпространство и $\dim \ker L < +\infty$, то это равносильно тому, что для любой ограниченной последовательность из L имеет фундаментальную подпоследовательность. В прямую сторону это следует из теоремы Больцано-Вейерштрасса. Покажем справедливость в обратную сторону. Если вдруг $\dim L = +\infty$, то $\exists \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность линейно независимых векторов. Подвергнем её процедуре ортогонализации Грама-Шмитда и получим $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\ subset L$, и $g_m \perp g_m$ $n \neq m$, и $g_n = \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_n\}$ так как

$$0 \neq g_1 = f_1$$

$$0 \neq g_2 = f_2 + \alpha g_1 \perp g_1$$

$$\vdots$$

$$0 \neq g_n = f_n + p_1 g_1 + \cdots + p_{n-1} g_{n-1} \perp g_1, \ldots, g_{n-1}$$

Строим $h_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$. Тогда $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная последовательность в L, а значит не имеет фундаментальной подпоследовательности, так как

$$\|h_n - h_m\|^2 = \|h_n\| + \|h_m\|^2 = \sqrt{2} \quad n \neq m$$

получили противоречие с условием, что $\forall \{f_n\} \subset \ker A_\lambda$ — ограниченная последовательность. Af_{n_k} — фундаментальная последовательность образов в силу компактности A.

$$A_\lambda f_{n_k} = A f_{n_k} - \lambda f_{n_k} \equiv 0$$

Следовательно $f_{n_k} = \frac{1}{\lambda} A f_{n_k}$ — автоматически фундаментальная