

Свойства самосопряжённых линейных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть H — гильбертово пространство. Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор. Пусть A — самосопряжённый оператор, то есть $A = A^*$.

Утверждение 1. Если A — самосопряжённый оператор, тогда выполняются следующие свойства:

1. $\|A^n\| = \|A\|^n \forall n \in \mathbb{N}$
2. $r(A) = \|A\|$
3. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
4. пусть $m_+ = \sup_{\|f\|=1} (Af, f)$, где $(Af, f) \in \mathbb{R}$ для самосопряжённого оператора, пусть $m_- = \inf_{\|f\|=1} (Af, f)$, тогда $m_{+-} \in \sigma(A)$ и $\sigma(A) \subset [m_-(A), m_+(A)]$ (доказать в качестве упражнения)

Доказательство. Докажем первое утверждение. $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ по определению операторной нормы. Надо показать, что $\|A^n\| \geq \|A\|^n$. Для $n = 1$ очевидно верно. Если для $k = 1 \dots n$ имеем $\|A^k\| = \|A\|^k$ и $A \neq 0$, тогда без ограничения общности $\forall f : \|f\| = 1$

$$\|A^n f\|^2 = (A^n f, A^n f)$$

В силу того, что A — самосопряжённый оператор

$$(A^n f, A^n f) = (A^{n-1} f, A^{n+1} f)$$

Последнее в силу неравенства Коши-Буняковского

$$(A^{n-1} f, A^{n+1} f) \leq \|A^{n-1} f\| \|A^{n+1} f\| \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Получаем, что

$$\|A^n f\|^2 \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Из индукции $\|A^{n-1}\| \leq \|A\|^{n-1}$ и $\|A^n\| = \|A\|^n$ Возьмём теперь супремум $\forall \|f\| = 1$

$$\|A^n\|^2 = \|A\|^{2n} \leq \|A\|^{n-1} \|A^{n+1}\|$$

Отсюда при $A \neq 0$ получаем

$$\|A\|^{n+1} \leq \|A^{n+1}\|$$

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение очевидно следует из первого для самосопряжённого оператора:

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$$

Перейдём к третьему утверждению. Воспоминание: пусть A — самосопряжённый оператор. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, то есть $\ker A_\lambda \neq 0$, следовательно $\exists f \neq 0 \in \ker A_\lambda : Af = \lambda f$. Тогда

$$(Af, f) = \lambda(f, f)$$

С другой стороны, в силу самосопряжённости

$$(Af, f) = (f, Af) = \bar{\lambda}(f, f)$$

И так как $f \neq 0$, то $\lambda = \bar{\lambda}$. Перейдём теперь непосредственно к доказательству. Рассмотрим $\lambda = \mu + i\nu$, $\nu \neq 0$ и докажем, что $\lambda \in \rho(A)$ и тогда, очевидно, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \subset \mathbb{R}$. $\forall f \in H$

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f - i\nu f\|^2 = (A_\mu f - i\nu f, A_\mu f - i\nu f) = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2 - i\nu(f, A_\mu) + i\nu(A_\mu f, f)$$

где $A_\lambda f = Af - \lambda f$. Раз $\mu \in \mathbb{R}$, то

$$(A_\mu)^* = A_\mu^* = A_\mu^* = A_\mu$$

так как $A^* = A$. Следовательно

$$(f, A_\mu f) = (A_\mu f, f)$$

Отсюда получаем, что

$$(A_\mu f - i\nu f, A_\mu f - i\nu f) = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2$$

Тогда

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2 \|f\|^2 \geq \nu^2 \|f\|^2$$

Получили оценку снизу:

$$\|A_\lambda f\| \geq |\nu| \|f\| \quad \forall f \in H$$

Пусть теперь $f \in \ker A_\lambda$. Это равносильно $A_\lambda f = 0 \Rightarrow 0 \geq |\nu| \|f\| \geq 0$, отсюда $f = 0$. По теореме Фредгольма

$$\overline{(\operatorname{Im} A_\lambda)} = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp = (\ker A_{\bar{\lambda}})^\perp = 0^\perp = H$$

так как в силу самосопряжённости $(A_\lambda)^* = A_{\bar{\lambda}}^* = A_{\bar{\lambda}}$. Аналогично как для A_λ

$$\|A_{\bar{\lambda}}\| \geq |\nu| \|f\| \Rightarrow \ker A_{\bar{\lambda}} = 0$$

Покажем теперь, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут. Пусть $\|A_\lambda\|f = g$, тогда $(A_\lambda)^{-1}g = f$, тогда

$$\|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \frac{\|g\|}{\nu} \quad \forall g \in \operatorname{Im} A_\lambda$$

Поэтому

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\nu}$$

Возьмём $\forall g \in \overline{\operatorname{Im} A_\lambda}$, тогда $\exists \{g_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda$: $g_n \rightarrow g$ в H . $g_n = A_\lambda f_n$

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|g_n - g_m\|$$

где $\|g_n - g_m\| \rightarrow 0$ $n, m \rightarrow \infty$, отсюда $f_n - f_m \rightarrow 0$ $n, m \rightarrow \infty$. Так как $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в полном пространстве H , то $\exists f \in H$: $f_n \rightarrow f$ в H . Так $g_n \rightarrow g$ $n \rightarrow \infty$ и так как A_λ — непрерывный оператор, то $g = A_\lambda f$ и $g \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Таким образом получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} A_\lambda = H \\ \ker A_\lambda = 0 \end{cases}$$

поэтому $\exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H$ такой, что $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\nu|}$ и $\nu = \text{Im } \lambda \neq 0$.

Пример 1. Пусть $H = L_2[0, 1]$. Пусть задан оператор $A : H \mapsto H$ такой, что

$$(Af)(x) = xf(x) \quad 0 \leq x \leq 1, f \in H$$

Норма этого оператора будет

$$\|Af\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 |f|^2 dx} \leq \|f\|_{L_2}$$

так как $x^2 \leq 1$. Отсюда следует, что $\|A\| \leq 1$. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon \in H$ такую:

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Тогда получаем, что

$$1 \geq \|A\| \geq \frac{\|Af_\varepsilon\|_{L_2}}{\|f_\varepsilon\|_{L_2}}$$

Выписываем явный вид нормы

$$\|A\| \geq \frac{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 x^2 dx}}{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 dx}} \geq (1-\varepsilon) \frac{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 dx}}{\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^1 dx}}$$

В итоге мы получили

$$1 \geq \|A\| \geq 1-\varepsilon \rightarrow 1 \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

Покажем теперь, что этот оператор самосопряжённый

$$(Af, g) = \int_0^1 xf\bar{g}dx = \int_0^1 f\bar{xg}dx = (f, xg) = (f, A^*g)$$

Поэтому $A^*g = xg = Ag \quad \forall g \in H$. Рассмотрим теперь $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$A_\lambda f = g = (x - \lambda)f$$

И тогда

$$(A_\lambda)^{-1}g = f(x) = \frac{g(x)}{x - \lambda} \in L_2[0, 1] \quad x \in [0, 1]$$

Найдём норму f :

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{|g|^2}{|x - \lambda|^2} dx} \leq \rho(\lambda, [0, 1]) \|g\|$$

где $0 \leq \rho(\lambda, [0, 1]) \leq |x - \lambda| \quad \forall x \in [0, 1]$ — расстояние, причём $\rho(\lambda, [0, 1]) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 1]$. Таким образом

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho(\lambda, [0, 1])}$$

И образ естественно всё пространство так как g — любой объект из H . Таким образом непрерывность очевидна, определена на всём пространстве и поэтому за пределами этого отрезка спектра нет. $\forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$, причём $\lambda \notin \sigma_p(A)$ так как иначе $Af = \lambda f, f \neq 0$ в H . $xf(x) = \lambda f(x)$ для почти всех $x \in [0, 1]$, $\|f\| > 0$ на множестве положительной меры S . Получаем $x = \lambda$ почти всюду на S . Но мера $\mathfrak{z}S > 0$, то есть не одно число, поэтому $x = \lambda$ невозможно.

Покажем, что $\forall \lambda \in [0, 1]$ выполняется $\lambda \in \sigma(A)$ тогда $\ker A_\lambda = 0$ и $g \in \operatorname{Im} A_\lambda \Leftrightarrow (x - \lambda)f(x) = g(x)$, то есть $x \in [0, 1]$. Тогда $f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0, 1]$ для почти всех $x \in [0, 1] \setminus \{\lambda\}$. Но это справедливо не для всякой g . Пусть $g(x) = 1$, тогда $\frac{1}{x-\lambda} \notin L_2[0, 1]$, поэтому $1 \notin \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq H$. Значит это элемент спектра $\sigma(A) = \sigma_C(A)$. Так как оператор самосопряженный, то для $\lambda \in \mathbb{R}$ $\ker A_\lambda^* = \ker A_\lambda = 0$ и получается, что $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = (\ker A_\lambda)^\perp = 0^\perp = H$. Таким образом для $\lambda \in [0, 1]$ оператор $(A_\lambda)^{-1} : \operatorname{Im} A_\lambda \mapsto L_2[0, 1]$, где $\operatorname{Im} A_\lambda = \{g \in L_2[0, 1] \mid \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0, 1]\}$. $(A_\lambda)^{-1}g = \frac{g}{x-\lambda}$. Но норма такого оператора $\|(A_\lambda)^{-1}\| = +\infty$ (доказать в качестве упражнения): надо подобрать функции такие, что $\forall n \in \mathbb{N} \exists g_n \in \operatorname{Im} A_\lambda$

$$\frac{\|(A_\lambda)^{-1}g_n\|}{\|g_n\|} \geq n$$

Если бы $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq +\infty$, то получили ту же самую оценку:

$$\|f\| = \|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \|(A_\lambda)^{-1}\|\|g\|$$

для любого f из H , причём $g = A_\lambda f$. Отсюда

$$k\|f\| = \frac{\|f\|}{\|(A_\lambda)^{-1}\|} \leq \|A_\lambda f\|$$

где $k = \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$. И отсюда можно доказать, если норма образа больше или равна константы на норму прообраза, то мгновенно доказывается, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут, что не так, так как замыкание образа совпадает с H , сам образ не совпадает.

Ещё одно свойство самосопряжённого оператора:

Утверждение 2. Если $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный самосопряжённый оператор и $\lambda, \mu \in \sigma(A)$: $\lambda \neq \mu$, тогда $\ker A_\lambda \perp \ker A_\mu$

Доказательство. Утверждение нетривиально для $\lambda, \mu \in \sigma_P(A)$ так как если одно из них из непрерывного спектра, то соответствующее ядро тривиально, а нулевое подпространство перпендикулярно чему угодно. Пусть $f \neq 0 \in \ker A_\lambda \neq 0$ и $g \neq 0 \in \ker A_\mu \neq 0$, тогда надо доказать, что $f \perp g$, то есть $(f, g) = 0$. В силу пункта 3 предыдущего утверждения $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $Af = \lambda f$ и $Ag = \mu g$. Получается

$$(Af, g) = \lambda(f, g)$$

с другой стороны

$$(Af, g) = (f, Ag) = (f, \mu g) = \bar{\mu}(f, g) = \mu(f, g)$$

Отсюда получаем, что

$$(\lambda - \mu)(f, g) = 0$$

И отсюда $(f, g) = 0$. Утверждение доказано.

Упражнение 1 (решается, например, с помощью теоремы Банаха-Штейнгаусса).