

# Спектр и резольвентное множество линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве $A : H \mapsto H$ .

Пусть  $A : H \mapsto H$  — линейный и непрерывный оператор. Тожественный оператор  $I : H \mapsto H$  ( $If = f \forall f \in H$ ). Далее  $\forall \lambda \in \mathbb{C} A_\lambda = A - \lambda I$ . Резольвентное множество

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H\}$$

где  $(A_\lambda)^{-1}$  — линейный и непрерывный и по теореме Банаха об обратном операторе

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = H\}$$

Тогда  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  — спектр,

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \ker A_\lambda \neq 0 \\ \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \right\}$$

Точечный спектр оператора  $A$ ; это  $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$  называют собственными значениями  $A$ . Непрерывный спектр в свою очередь

$$\sigma_C(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \right\}$$

Очевидно  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_C(A)$ . Резольвента  $R_A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1} : H \mapsto H$ , также используется определение  $\forall \lambda \neq 0: \frac{1}{\lambda} \in \rho(A) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(A - \frac{I}{\lambda})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(A - \frac{I}{\lambda})^{-1}$

**Теорема 1.** Пусть  $A : H \mapsto H$  — линейный и непрерывный, тогда

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  такой, что  $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ . При этом  $(A_\lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ , причём ряд сходится по операторной норме.

2.  $\rho(A)$  — открыто в  $\mathbb{C}$  (очевидно следует, что спектр — замкнутое множество, а так же  $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$ , поэтому спектр — компакт).

3. Функция от  $\lambda$   $(A_\lambda)^{-1}$  непрерывна на  $\rho(A)$  по операторной норме

4.  $\forall \lambda \in \rho(A) \exists \lim_{\text{по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = ((A_\lambda)^{-1})^2$

**Доказательство.**

1.  $|\lambda| > \|A\|$ , то

$$A_\lambda = -\lambda(I - \frac{A}{\lambda})$$

где  $\frac{A}{\lambda}$  обозначим  $T$ ,  $\|T\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$  По теореме Неймана  $\exists$  оператор непрерывный в  $H$

$$(A_\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

ряд сходится по операторной норме.

2. Так как существует  $\exists(A_\lambda)^{-1}$  линейный и непрерывный.  $\forall \lambda \in \rho(A)$  рассмотрим

$$A_{\lambda+\Delta\lambda} = A_\lambda - \Delta\lambda I = A_\lambda(I - \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1})$$

. Обозначим  $T = \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1}$ , тогда

$$\exists \Delta\lambda: \|T\| = |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\| < 1$$

Тогда

$$\Delta\lambda < \frac{1}{(A_\lambda)^{-1}}$$

следовательно  $\exists(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} : H \mapsto H$  линейный и непрерывный, следовательно  $\lambda + \Delta\lambda \in \rho(A)$ .

3.  $\lambda \in \rho(A): \lambda \rightarrow (A_\lambda)^{-1}$ . Рассмотрим

$$(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = (I - \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1})(A_\lambda)^{-1} - (A_\lambda)^{-1}$$

раскладываем по Нейману

$$A_{\lambda+\Delta\lambda}^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta\lambda)^n ((A_\lambda)^{-1})^{n+1}$$

Учтём, что  $\|((A_\lambda)^{-1})^{n+1}\| \leq \|(A_\lambda)^{-1}\|^{n+1}$ . Отсюда

$$\|(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\lambda|^n \|((A_\lambda)^{-1})^{n+1}\| \leq |\Delta\lambda| \frac{\|(A_\lambda)^{-1}\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\|}$$

где  $|\Delta\lambda| \frac{\|(A_\lambda)^{-1}\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\|} \rightarrow 0$   $\Delta\lambda \rightarrow 0$ . Следовательно непрерывен по операторной норме

4.  $\lambda \in \rho(A)$   $|\Delta\lambda| < \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$ , тогда получим тождество Гильберта

$$(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = (A_\lambda)^{-1}(A_\lambda - A_{\lambda+\Delta\lambda})(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}$$

где очевидным образом  $A_\lambda - A_{\lambda+\Delta\lambda} = \Delta\lambda I$ . По этому

$$(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = \Delta\lambda(A_\lambda)^{-1}(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}$$

Рассмотрим теперь предел

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0 \text{ по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} &= \\ &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0 \text{ по операторной норме}} (A_\lambda)^{-1}(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} \end{aligned}$$

А по п.3  $(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} \rightarrow (A_\lambda)^{-1}$  поэтому

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0 \text{ по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = (A_\lambda)^{-1}(A_\lambda)^{-1}$$

**Следствие .**  $\sigma(A) \neq \emptyset$ , иначе говоря спектр — непустой компакт в  $\mathbb{C}$ . Определим спектральный радиус  $r(A) = \max |\lambda|$ . Тогда  $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} \leq \|A\|$ .

**Доказательство.** 1) Если вдруг спектр пуст  $\sigma(A) = \emptyset$ , тогда  $\forall f, g \in H \forall \lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}$ . Рассмотрим  $F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1}f, g)$  при  $|\lambda| > \|A\|$

$$F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1}f, g) = (-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{\lambda^{n+1}}, g)$$

где сумма сходится в  $H$ , а скалярное произведение непрерывно  $H$ .

$$F(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \lambda \rightarrow \infty$$

но в силу п. 4  $F(\lambda)$  регулярная. Действительно,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \Delta\lambda \neq 0$

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{F(\lambda + \Delta\lambda) - F(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}f - (A_\lambda)^{-1}f}{\Delta\lambda}, g \right)$$

где первая компонента скалярного произведения сходится по операторной норме к  $((A_\lambda)^{-1})^2 f$ . По определению  $F'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \dots = (((A_\lambda)^{-1})^2 f, g)$  — непрерывно

в  $\mathbb{C}$ . Следовательно  $F(\lambda)$  — целая функция, далее  $F(\lambda) \rightarrow 0$   $\lambda \rightarrow \infty$ , тогда по теореме Лиувилля из ТФКП  $F(\lambda) \equiv 0$ , следовательно  $\ker(A_\lambda)^{-1} = H$ , с другой стороны  $\ker(A_\lambda)^{-1} = 0$  так как  $(A_\lambda)^{-1}$  имеет обратный  $A_\lambda$  на  $H$ , следовательно  $H = 0$ , получили противоречие.

2) По определению  $r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$  существует в  $\mathbb{R}$ . **Шаг 1.** Докажем  $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(A^n)$ . Если вдруг это не так, тогда  $\lambda^n \in \rho(A^n) \Rightarrow \exists ((A^n)_{\lambda^n})^{-1} : H \mapsto H$  линейный непрерывный оператор. Обозначим его  $B$ . Тогда

$$(A^n - \lambda^n I) = (A - \lambda I)(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-2} A + \lambda^{n-1} I)$$

Обозначим скобку как  $C : H \mapsto H$ .

$$B = C(A - \lambda I)$$

Также

$$A^n - \lambda^n I = A_\lambda C$$

следовательно

$$(A^n - \lambda^n I)B = I = A_\lambda CB \Rightarrow \text{Im } A_\lambda = H$$

Далее

$$A_\lambda C B f = f \in H \quad \forall f \in H$$

Следовательно

$$A^n - \lambda^n I = C A_\lambda$$

тогда

$$B(A^n - \lambda^n I) = I = B C A_\lambda \Rightarrow \ker A_\lambda = 0$$

Пусть  $f \in \ker A_\lambda \Rightarrow f = B C A_\lambda f = B C(0) = 0$ . Из  $\text{Im } A_\lambda = H$  и  $\ker A_\lambda = 0$  следует по определению, что  $\lambda \in \rho(A)$ . Получили противоречие условию, что  $\lambda$  в спектре. Отсюда  $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$  так как  $\rho(A^n) \supset \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| > \|A^n\|\}$ . Очевидно тогда, что  $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|A^n\|}$ . Следовательно

$$|\lambda| \leq \varliminf \sqrt[n]{\|A^n\|} \Rightarrow r(A) \leq \varliminf \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

. **Шаг 2.** Утверждаем, что  $\varlimsup \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A)$ . Для  $\forall f, g \in H$  рассмотрим

$$F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1} f, g)$$

$F(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$ , регулярная во внешности круга  $|\lambda| < r(A)$ .  $|\lambda| > r(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ . Так как  $|\lambda| > \|A\| \geq r(A)$ , то по теореме Неймана

$$F(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}}$$

С другой стороны

$$F(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{\lambda^{n+1}} \quad |\lambda| > r(A)$$

$\Rightarrow$  по теореме единственности разложения в ряд Лорана  $c_n = -(A^n f, g) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Таким образом  $\forall |\lambda| > r(A)$  получаем  $\frac{A^n f, g}{\lambda^n}$  — член сходящегося ряда, следовательно

$$\frac{(A^n f, g)}{\lambda^n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

что равносильно  $\forall g \in H \quad (g, \frac{A^n f}{\lambda^n}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .  $\Phi_n : H \rightarrow \mathbb{C}$  линейный и непрерывный оператор, где  $\Phi_n(g) = \frac{A^n f}{\lambda^n}$ . Норма оператора  $\|\Phi_n\| = \frac{\|A^n f\|}{|\lambda^n|}$  сходится к 0 поточечно на  $H$ . Отсюда по теореме Банаха — Штейнгаусса  $\|\Phi_n\|$  — ограниченная числа последовательность.  $\forall f \in H \exists M_f > 0 : \|\frac{A^n f}{\lambda^n}\| \leq M_f \Rightarrow \{\frac{A_n}{\lambda_n}\}$  — поточечно сходящаяся на  $H$  ограниченная последовательность операторов, следовательно по теореме Банаха — Штейнгаусса  $\|\frac{A^n}{\lambda^n}\|$  ограниченная числовая последовательность. Следовательно  $\exists M > 0 : \|\frac{A^n}{\lambda^n}\| \leq M \Rightarrow \forall |\lambda| > r(A) \quad \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \sqrt[n]{M} |\lambda|$ .  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda| \rightarrow r(A) + 0$ . Получаем  $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ , что и требовалось доказать.

**Определение 1.**  $A : H \mapsto H$  линейно непрерывный оператор, то  $A^* : H \mapsto H$  называется сопряжённым к  $A$  (эрмитов оператор), если  $(Af, g) = (f, A^*g) \quad \forall f, g \in H$ .

**Утверждение 1.**  $\forall A : H \mapsto H$  линейный непрерывный оператор  $\exists! A^* = T : (Af, g) = (f, Tg) \quad \forall f, g \in H$  и  $\|T\| = \|A\|$ .

**Доказательство.**  $\forall g \in H$  рассмотрим  $f \in H \quad f \rightarrow (Af, g) = \Phi_g(f)$ .  $\Phi_g : H \rightarrow \mathbb{C}$  линейный и непрерывный. Тогда по теореме Рисса — Фреше  $\exists! h \in H : \Phi_g(f) = (f, h) \Rightarrow \exists! T : H \mapsto H : \forall g \in H \quad Tg = h_g$  и

$$(Af, g) = (f, h_g) = (f, Tg)$$

Далее

$$\begin{aligned} (Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) &= (f, T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)) = \\ &= \bar{\alpha}_1 (Af, g_1) + \bar{\alpha}_2 (Af, g_2) = \\ &= (f, \alpha_1 Tg_1) + (f, \alpha_2 Tg_2) \quad \forall f \in H \end{aligned}$$

Следовательно  $T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T(g_1) + \alpha_2 T(g_2)$ ,  $T$  — линейный оператор.

$$\|Tg\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tg)| = \sup_{\|f\|=1} |(Af, g)| \leq \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \|g\| \leq \|A\| \|g\|$$

С другой стороны

$$\|Af\| = \sup_{\|g\|=1} |(Af, g)| = \sup_{\|g\|=1} |(f, Tg)| \leq \sup_{\|g\|=1} \|f\| \|Tg\| \leq \|f\| \|T\|$$

. Получаем, что  $T$  — линейный и непрерывный оператор и  $\|T\| = \|A\|$ .

**Упражнение 1.**  $A^{**} = A \forall A : H \mapsto H$ .

**Теорема 2 (Фредгольма).** Пусть  $A : H \mapsto H$  линейный и непрерывный оператор. Тогда  $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$  и  $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in \ker A \Leftrightarrow Af = 0 \Leftrightarrow \forall g \in H (Af, g) = 0 \Leftrightarrow (f, A^*g) = 0$ .  $\forall h \in \operatorname{Im} A^* (f, h) = 0 \Leftrightarrow f \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ . Второе утверждение доказывается аналогично.

**Утверждение 2.**  $L \subset H$  — подпространство, тогда  $L \subseteq L^{\perp\perp} = \overline{L}$ .

**Доказательство.**  $L^{\perp\perp} \supset L$ . С другой стороны из непрерывности скалярного произведения в  $H$  имеем  $L^{\perp\perp} \subset \overline{L}$ . Рассмотрим  $\forall f \in L^{\perp\perp}$ , тогда  $f \in \overline{L}$  и

$$\overline{L} \oplus \overline{L}^\perp = H$$

по теореме Рисса об ортогональном дополнении. Покажем, что  $\overline{L}^\perp \subset L^\perp$ . Пусть последовательность  $h_n \in L$  такая, что  $h_n \rightarrow \Phi \in \overline{L}$ . Пусть  $g \in L^\perp$ , тогда  $(h_n, g) = 0$ ,  $h_n \rightarrow \Phi$ , поэтому  $(\Phi, g) = 0 \forall \Phi \in \overline{L}$  по непрерывности скалярного произведения. Получаем, что

$$\overline{L} \oplus L^\perp = H$$

Теперь разложим  $f = f_1 + f_2$ ,  $f_1 \in \overline{L}$ ,  $f_2 \in L^\perp$  и  $f$  перпендикулярен  $f_2$ .

$$0 = (f, f_2) = (f_1, f_2) + \|f_2\|^2$$

следовательно  $\|f_2\| = 0$ , следовательно  $f = f_1 \in \overline{L} \Rightarrow L^{\perp\perp} \supset \overline{L}$ .

**Следствие .**  $\overline{\operatorname{Im} A} = (\ker A^*)^\perp$

**Пример 1.** Рассмотрим оператор  $A : L_2(G) \mapsto L_2(G)$ , действующий следующим образом:

$$(Af)(x) = \int_G K(t, x) f(t) dt$$

где  $K(t, x) \in L_2(G \times G)$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(Af, g)$

$$(Af, g) = \int_G dx \int_G dt K(t, x) f(t) \overline{g(x)} = \int_G dt f(t) \int_G dx \overline{K(t, x)} g(x)$$

где  $\int_G dx \overline{K(t, x)} g(x) = (A^*g)(t)$ .

Рассмотрим частный случай. Пусть  $A : L_2[0, 1] \mapsto L_2[0, 1]$ ,

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Тогда сопряжённый оператор будет иметь вид:

$$(A^*g)(t) = \int_t^1 g(x) dx$$

Образ этого оператора  $\text{Im } A^* \supset \{h \in C^1[0, 1], h(1) = 0\}$  — всюду плотно в  $L_2[0, 1]$ . Очевидно, что  $\overline{\text{Im } A^*}^\perp = H^\perp = 0$

Введём уравнение Фредгольма.  $(I - \lambda A)u = f$   $f \in H$   $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Пусть  $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A) \Rightarrow \exists! u = (I - \lambda A)^{-1}f$  и  $\overline{\text{Im}(I - \lambda A)} = (\ker(I - \lambda A)^*)^\perp$