Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

# Элементы теории линейных операторов в гильбертовых пространствах и её приложение к линейным операторным уравнениям в гильбертовом пространстве.

Пусть $H$ — гильбертово пространство, то есть полное евклидово пространство со скалярным произведением. Скалярное произведение определим в комплексном пространстве: $(f, g) \in \mathbb{C}$. Тогда $\|f\| = \sqrt{(f, g)}$ — евклидова норма. В этом пространстве выполняется неравенство треугольника:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

которое следует из неравенства Коши-Буняковского $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$.

Полнота по определению: из

$$\forall \{f_n\} \subset H \; \forall n, m \in \mathbb{N} \; \|f_n - f_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty$$

следует, что

$$\exists h \in H \; \|f_n - h\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

$G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество. $CL_2(G) = \{f \colon G \to \mathbb{C} \mid f$ непрерывная, $\int\limits_G |f|^2 dx < +\infty\}$. Введём скалярное произведение как

$$(f, g) = \int\limits_G f(x)\overline{g(x)} dx$$

Тогда такое множество неполное. $L_2(G)$ — пополнение $CL_2(G)$, или по-другому $f : G \mapsto \mathbb{C}$ измерима по Лебегу и $\int\limits_G |f|^2 dx < +\infty$.

## Геометрия гильбертого пространства

**Теорема 1 (Риса о расстоянии).** *Пусть $L \subset H$, где $L$ — замкнутое подпространство. Следовательно*

$$\forall f \in H \; \exists! g \in L \colon \|g - f\| = \rho(f, L)$$

*или по-другому*

$$\inf \|f - h\|, \; h \in L$$

*Обозначим $g_f$ — проекция $f$. Тогда отображение $P : H \mapsto L$ такое, что $Pf = g_f$, называется ортопроектором из $L$ на $H$.*

**Доказательство.** Покажем существование.

$$\forall f \in H\ \exists \{g_n\} \subset L\colon\ \rho(f, L) \le \|f - g_n\| \le \rho(f, L) + \frac{1}{n}$$

Тогда

$$\|f - g\| \to \rho(f, L) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Установим факт фундаментальности. Наблюдение: из равенства параллелограмма следует:

$$f, g \in H\ \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

Тогда

$$\|g_n - g_m\|^2 = \|(g_n - f) - (g_m - f)\|^2 = 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - \|g_n + g_m - 2f\|^2$$

Теперь учтём, что

$$\|g_m + g_m - 2f\|^2 = 4\|\frac{g_n + g_m}{2} - f\|^2 \ge 4\,\rho^2(f, L)$$

где $\dfrac{g_n + g_m}{2} \in L$, $\|g_{n,m} - f\|^2 = \rho^2(f, L)$ Тогда получаем

$$\|g_n - g_m\|^2 \le 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\,\rho^2(f, L) \to 0 \quad n, m \to 0$$

$\exists g \in H\colon g_n \to g$, по этому $\|f - g_n\| \to \rho$, а так как $L$ — замкнутое, то $g \in L$. Получаем

$$|\|f - g\| - \|f - g_n\|| \le \|g - g_n\| \to 0 \Rightarrow \|f - g\| = \rho(f, L)$$

Отсюда следует существование.

Покажем единственность. Пусть

$$\|f - g_1\| = \|f - g_2\| = \rho(f, L) \quad g_1, g_2 \in L$$

Рассмотрим $\|g_1 - g_2\|$:

$$0 \le \|g_1 - g_2\|^2 = \|(g_1 - f) - (g_2 - f)\|^2 = 2\|g_1 - f\|^2 + 2\|g_2 - f\|^2 - \|\frac{g_1 + g_2}{2} - f\|^2 \le 4\rho^2 - 4\rho^2 = 0$$

Следовательно $g_1 = g_2$. Доказательство закончено

Таким образом мы доказали теорему Риса о расстоянии. Пусть $P_L : H \mapsto L$, $P_L f = g_f$. Тогда $\|P_L f - f\| = \rho(f, L)$. $P_L$ — линейный оператор.

**Наблюдение .** $\|g - f\| = \rho(f, L) \quad g \in L$ *равносильно тому, что*

$$\begin{cases} f - g \in L^\perp \\ g \in L \end{cases}$$

*Где* $L^\perp = \{h \in H \mid (h, f) = 0 \quad \forall f \in L\}$ *— замкнутое подпространство. Это следует из неравенства Коши-Буняковского: пусть* $h_n \to h$ *и* $h_n \in L^\perp$*. Тогда*

$$|(h, f) - (h_n, f)| = |(h - h_n, f)| \leq \|h - h_n\| \|f\| \to 0$$

*Поэтому* $(h, f) = 0$*, а значит* $h \in L$*.* Докажем теперь наше наблюдение

**Доказательство.** В прямую сторону.

$$\|g - f\| = \rho(f, L)$$

Прибавим к $g$ $th$ так, чтобы $g + th \in L$.

$$\|g - f\| \leq \|(g + th) - f\| \quad \forall h \in L$$

Возведём в квадрат и разложим выражение на компоненты

$$\|g - f\|^2 \leq \|(g - f) + th\|^2$$
$$\|g - f\|^2 \leq ((g - f) + th, (g - f) + th)^2$$
$$\|g - f\|^2 \leq \|g - f\|^2 + (g - f, th) + (th, g - f) + |t|^2 \|h\|^2$$

Перенесём левую часть вправо и учтём, что по определению скалярного произведения $(a, b) = \overline{(b, a)}$

$$0 \leq (g - f, th) + \overline{(g - f, th)} + |t|^2 \|h\|^2$$
$$0 \leq 2\Re(g - f, th) + |t|^2 \|h\|^2$$
$$0 \leq 2\Re(g - f, \frac{t}{|t|} h) + O(|t|)$$

Пусть $t \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq 2\Re(g - f, h)$$

подставляя $\pm h$ имеем

$$\Re(g - f, h) = 0$$

Пусть теперь $t = \imath\tau$ $\tau \in \mathbb{R}$.

$$2\Re(g - f, \imath h) = 2\operatorname{Im}(g - f, h) \geq 0 \quad \forall h \in L$$

Возмём $\pm h$ и получаем

$$(g - f, h) = 0$$

Таким образом для любого $h$ мы доказали в прямую сторону.

В обратную сторону.

$$\begin{aligned}\forall h \in L\ \|f-(g+h)\|^2 = \|(f-g)+h\|^2 = \\ = (f-g, f-g) + (h,h) + (f-g,h) + (h, f-g) = \\ = \|f-g\|^2 + \|h\|^2 \geq \|f-g\|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall h\ \|f-(g+h)\|^2 \geq \|f-g\|^2 \Rightarrow \|f-g\| = \rho(f,L)\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Покажем линейность оператора $P_L$.

$$P_L(f_1+f_2) = g$$
$$P_L f_1 = g_1 \Leftrightarrow (f_1 - g_1, h) = 0$$
$$P_L f_2 = g_2 \Leftrightarrow (f_2 - g_2, h) = 0$$

Сложим правые выражения и получим

$$(f_1 + f_2 - (g_1+g_2), h) = 0 \Rightarrow g_1 + g_2 = P_L(f_1+f_2)$$

Аналогично доказывается однородность $P_L(\alpha f) = \alpha P_L(f)$:

$$P_L(f) = g \Leftrightarrow (f-g,h) = 0 \Rightarrow (\alpha f - \alpha g, h) = 0 \Rightarrow P_L(\alpha f) = \alpha g$$

**Проблема выпуклости в $H$**

Пусть $A \subset H$ — назовём выпуклым, если $\forall f, g \in A\ \forall t \in [0;1]\ tf + (1-t)g \in A$. Мы уже доказали, что для любого выпуклого и замкнутого $A \subset H\ \forall f \in H\ \exists! g \in A\colon \|f-g\| = \rho(f,A)$. Такое множество ещё называют чебышевским. Верно ли обратное? Пусть $A \subset H$ — чебышевское, то есть $\forall f \in H\ \exists! g \in A\colon \|f-g\| = \rho(f,A)$. Следует ли отсюда, что $A$ — выпуклое и замкнутое? Замкнутость была доказана в 1936 году для конечномерных $H$. Интересные подвижки были получены на мехмате Бородиным Петром Анатольевичем. Он ввёл 2-чебышевские множества. $\forall f, h \in H$ пусть $\rho_2(f,h,A) = \inf\{\|f-g\| + \|h-g\|) : g \in A\}$, $2\,\rho(f,A) = \rho_2(f,A)$. Из 2-чебышевости следует выпуклость и замкнутость. Но получаем вопрос: верно ли что из чебышевости следует 2-чебышевость?

**Теорема 2 (Риса об ортогональном дополнении).** *$L \subset H$ — замкнутое подпространство $\Rightarrow L \oplus L^\perp = H$ и $L \cap L^\perp = \varnothing$. Последнее очевидно. $\forall f \in H\ \exists! g \in L$ и $h \in L^\perp\colon f = g + h$.*

$$\begin{cases} f - g \in L^\perp \\ g \in L \end{cases}$$

*Это равносильно $P_L f = g$.*

**Доказательство.** $f \in H$, смотрим на $g = P_L f \Leftrightarrow h = f - g \in L^\perp \Rightarrow f = g + h$. Доказательство закончено.

Пусть $f = g_1 + h_1$ и $f = g_2 + h_2$, и $g_{1,2} \in L$. Тогда $g_1 - g_2 = h_2 - h_1 \in L^\perp$, но $L \cap L^\perp \Rightarrow g_1 = g_2$ и $h_1 = h_2$.

**Теорема 3 (Рис, Фреше).** $\Phi : H \mapsto \mathbb{C}$ — *линейный и непрерывный функционал ($f_n \to f$ в $H$ по норме, $\Phi(f_n) \to \Phi(f)$ в $\mathbb{C}$). Тогда $\exists! h \in H : \Phi(f) = (f, h)$.*

**Доказательство.** $L = \ker \Phi$ — замкнутое подпространство в $H$. Первое в связи непрерывности, второе в силу линейности. $L \oplus L^\perp = H$. Случай $\Phi = 0$ очевиден: $h = 0$. Пусть теперь $\Phi \neq 0 \Rightarrow (\ker \Phi)^\perp \neq \{0\}$. Пусть $h_0 \in (\ker \Phi)^\perp \backslash \{0\}$, тогда отсюда следует $f \in H$ $f = g + \alpha h_0$, где $g \in \ker \Phi$ и $\alpha = \dfrac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)}$. Следовательно

$$g = f - \frac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)} h_0 \Rightarrow (f, h_0) = (g, h_0) + \frac{\Phi(f)}{\Phi(h_0)} \|h_0\|^2$$

Тогда

$$\Phi(f) = (f, \frac{\overline{\Phi(h_0)}}{\|h_0\|} h_0)$$

где $\dfrac{\overline{\Phi(h_0)}}{\|h_0\|} h_0 = h$. Пусть

$$\Phi(f) = (f, h_1) = (f, h_2) \quad \forall f \in H$$

Тогда

$$f = h_1 - h_2 \Rightarrow \|h_1 - h_2\|^2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2$$