Линейные непрерывные операторы в евклидовом пространстве.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — два евклидовых пространства. $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ — линейный оператор. Иначе говоря $\forall \alpha_{1,2}\ \forall f_{1,2} \in \varepsilon_1\ A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A(f_1) + \alpha A(f_2)$.

Определение: A непрерывна в $f_0 \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0(\varepsilon)\ \forall f \in \varepsilon_1$: $\|f - f_0\| \leq \delta_0(\varepsilon) \Rightarrow \|Af - Af_0\| \leq \varepsilon$.

Из непрерывность в f_0 следует непрерывность $A\ \forall g \in \varepsilon_1$. Так как $\forall f \in \varepsilon_1\ \|f - g\| \leq \delta_0(\varepsilon)$, то $\|Af - Ag\| = \|A(f-g) + A(f_0) - A(f_0)\| = \|A(f_0 + (f-g) - A(f_0)\| \leq \delta_0(\varepsilon) \Rightarrow$ непрерывна в g. В частности при $g = 0$ $\|Af\| \leq \varepsilon\ \forall \|f\| \leq \delta_0(\varepsilon)$. Поэтому δ_0 — универсальное число.

Пусть $\varepsilon_1 = 1$, $\delta_0(1)$. $\forall f \neq 0$ $\left\|\frac{f}{\|f\|}\delta_0(1)\right\| = \delta_0(1)$. Подставим это выражение под знак оператора. $\|A(\frac{f}{\|f\|}\delta_0(1))\| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\delta_0(1)}{\|f\|}\|Af\| \leq 1 \Rightarrow$ оцениваем норму образа через норму прообраза: $\forall f \in \varepsilon_1\ \|A(f)\| \leq \frac{\|f\|}{\delta_0(1)} \Rightarrow \forall f, g \in \varepsilon_1\ \|A(f-g)\| \leq \frac{1}{\delta_0(1)}\|f - g\|$. Это липшецевость оператора A на ε_1 с $L = \frac{1}{\delta_0(1)}$. Рассмотрим наименьшую константу Липшеца и назовём её нормой.

Определение: $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $A \neq 0$ — линейный и непрерывный оператор, то $\|A\| = \inf\{L > 0 \mid \|Af\| \leq L\|f\| \quad \forall f \in \varepsilon_1\}$. Очевидно, что это так же равно $\sup\limits_{f \in \varepsilon_1, f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = L_0$, $L_0 \leq L$.

Пример линейного разрывного оператора:

$\varepsilon_1 = \{f \in C^1[0,1]\}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, $\varepsilon_2 = \mathbb{C}$. Пусть $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $A(f) = f'(0)\ \forall f \in \varepsilon_1$. Конечность нормы — критерий непрерывности. У этого оператора норма бесконечность: возмём, например, $f_n(x) = \sin nx \in \varepsilon_1$

$$A(f_n) = n$$
$$\|A(f_n)\| = |n|$$
$$\|f_n\| = \sqrt{\int\limits_0^1 \sin^2 nx dx} \leq 1 \Rightarrow \|A\| = \infty \text{ иначе говоря}$$
$$\|A\| \geq \frac{|n|}{\|f_n\|} \geq n \to \infty$$

Или по-другому

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{n}} f_n \underbrace{\to}_{\text{по норме в } \varepsilon} 0$$
$$\|g_n\|_{\varepsilon_1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$A(g_n) = \sqrt{n}$$
$$\|Ag_n\| = \sqrt{n} \to \infty$$

Дадим теперь два других определения операторной нормы. $\|A\| = \underbrace{\sup\limits_{f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|}}_{1} = \underbrace{\sup\limits_{\|f\| = 0} \|Af\|}_{2} = \underbrace{\sup\limits_{\|f\| \leq 1} \|Af\|}_{3}$. Покажем их равенство. $\boxed{1} \geq \boxed{2}$, так как $\|f\| = 1$ является сужением. С другой стороны $\sup \left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\| \le \boxed{2} \Rightarrow \boxed{1} = \boxed{2}$. $\boxed{3} \le \boxed{2}$ так как $f \neq 0$, $\|f\| \le 1$ $\|Af\| = \underbrace{\|f\|}_{\le 1} \underbrace{\left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\|}_{\le \sup\limits_{\|\phi\|=1} \|A\phi\|}$.

Но $\boxed{2} \le \boxed{3}$ так как является сужением, поэтому $\boxed{2} = \boxed{3}$.

Пример:

Пусть $\varepsilon_1 = \mathbb{C}^n$, $\varepsilon_2 = \mathbb{C}^m$. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ задаётся комплексной матрицей $m \times n$. $Af \in \mathbb{C}^m$ $\forall f \in \mathbb{C}^n$ есть умножение матрицы на столбец. $\|Af\|^2_{\mathbb{C}^m} = \overline{Af}^T Af = \overline{f}^T \underbrace{\overline{A}^T A}_{M} f$. $M^* = \overline{M}^T = M$ $\Rightarrow M \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно $\exists U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — унитарная матрица, то есть сохраняющая норму. $U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $\overline{f}^T Mf = \|Af\|^2 \ge 0$. $\|Uf\| = \|f\|$, поэтому можно перейти к базису из собственных векторов. $f = Ug$, тогда $\|Af\|^2 = \overline{Ug}^T MUg = \overline{g}^T \overline{U}^T MUg$, но U — унитарная, следовательно $U^{-1} = U^* = \overline{U}^T \Rightarrow \overline{U}^T MU = U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\overline{g}^T\overline{U}^T MUg = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i |g_i|^2$. Обозначим теперь $\lambda_{max} = \max \lambda_i$, тогда $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i |g_i|^2 \le \lambda_{max} \sum\limits_{i=1}^n |g_i|^2 =$ $\lambda_{max}\|f\|^2$. Тогда $\|Af\| \le \sqrt{\lambda_{max}}\|f\|$ Обозначим $\tilde{g}_k = \delta_{kk_*}$, $\lambda_{max} = \lambda_{k_*}$, $\tilde{f} = U\tilde{g}$ и $\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = 1$. $\sqrt{\lambda_{max}} = \|A\tilde{f}\| \le \|A\| \le \sqrt{\lambda_{max}} \Rightarrow \|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(\overline{A}^T A)}$.

Пример:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = L_2(G) = H$ — гильбертово пространство, где $G \in \mathbb{R}^m$ — измеримое множество.

$$A : L_2(G) \to L_2(G)$$

$$(Af)(x) = \int_G \underbrace{K(t,x)}_{\text{интегральное ядро}} f(t)dt$$

$$K \in L_2(G\times G) \quad \|K\|^2_{L_2 G\times G} = \iint_{G\times G} |K|^2 dtdx \le +\infty$$

$$\|Af\|^2 = \int_G |(Af)(x)|^2 dx = \int_G dx \underbrace{\left| \int_G dtK(t,x)f(t) \right|^2}_{\le \text{по Коши-Буняковскому в } L_2(G)\ \int_G |K(t,x|^2dt \int_G |f(t)|^2 dt} \le$$

$$\le \left(\iint_{G\times G} dxdt|K|^2 \right) \|f\|^2$$

Итого оценили операторную норму: $\|Af\|_{L_2 G} \le \|K\|_{L_2(G\times G)}\|f\|_{L_2(G)}$ $\forall f \in L_2(G) \Rightarrow \boxed{\|A\| \le \|K\|_{L_2(G\times G)}}$.

Свойства операторной нормы, $A, B : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$

1. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\|A\| \Leftrightarrow Af = 0 \quad \forall \in \varepsilon_1$

Докажем эти свойства.

1. $\|(A+B)f\| \le \|A(f)\| + \|B(f)\| \le (\|A\|+\|B\|)\|f\| \Rightarrow \|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$

2. $\|(\alpha A)f\| = \|\alpha A(f)\| = |\alpha|\|A(f)\|,\ \sup\limits_{\|f\|=1} \|(\alpha A)f\| = |\alpha| \sup\limits_{\|f\|=1} \|Af\|$

3. Очевидно

4. $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $B : \varepsilon_2 \to \varepsilon_3$, $T = B \cdot A$ $T(f) = B(A(f))$ $\forall f \in \varepsilon_1$. Тогда $\|T(f)\| = \|B(A(f))\| \le \|B\|\|A(f)\| \le \|B\|\|A\|\|f\| \Rightarrow \boxed{\|T\| \le \|B\|\|A\|}$. Следствие: $A : \varepsilon \to \varepsilon$, A — линейный непрерывный оператор. Тогда можно формально рассмотреть $A^n f = \underbrace{A(A(\dots A}_{\text{n раз}}(f))\dots)$ — произведение в пространстве линейный операторов. Естественно получается $\|A^n\| \le \|A\|^n$ по индукции из пункта 4.

Наблюдение

$F : H \to \mathbb{C}$ — линейный непрерывный функционал. По теореме Рисса-Фреше $\exists! h \in H$: $F(f) = (f,h)$ $\forall f \in H$. Следовательно $\|F\|_{\text{операторная}} = \|h\|_H$. Получаем изометрический (так как сохраняет норму) изоморфизм между гильбертовым пространством и пространством непрерывных линейных операторов. В квантмехе это называют отождествление гильбертового пространства и наблюдателей над ним. Если ввести $H^* = \{$все $F : H \to \mathbb{C}$ линейные $\times$ и непрерывные функционалы$\}$. То имеется линейная биекция (изоморфизм) сохраняющая норму по теореме Рисса-Фреше. Норма сохраняется так как $\|F\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |(f,h)| = \|h\|$, в прямую сторону по неравенству Коши-Буняковского, а в обратную если взять вектор $f = \frac{h}{\|h\|}$ при $h \ne 0$, то результат будет не меньше $\|h\|$.

Два типа сходимости для последовательности операторов. $\{A_n\} : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $\{T_n\}\varepsilon_2 \to \varepsilon_1$ — линейные непрерывные функционалы.

Говорят, что $\|A_n\| \to T$ по операторной норме, если $\|A_n - T\| \to 0 \quad n \to \infty$. Фактически это равномерная сходимость на сфере или на шаре, при чём на любом. $\|A_n - T\| \to 0 \Leftrightarrow A_n(f) \rightrightarrows T(f)$, $\|f\| < R \quad \forall R$, потому что $\|A_n(f) - T(f)\| \le \underbrace{\|A_n - T\|}_{\to 0}\underbrace{\|f\|}_{\le R}$. И наоборот, если $\forall n \ge N(\varepsilon)$, $\forall \|f\| \le 1$ $\|A_n f - Tf\| \le \varepsilon$, то беря $\sup\limits_{\|f\|\le 1} \|A_n f - Tf\| = \|A_n - T\|$. Сходимость по норме синоним сходимости на произвольном шаре.

$A_n \to T$ сходится поточечно, если $\|A_n f - Tf\| \to 0$ $\forall f \in \varepsilon_1$. Ясно, что если $A_n \to T$ по операторной норме, то очевидно сходится и поточечно. Обратное неверно.

Упражнение:

Придумать пример, когда $A_n : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ линейно непрерывный поточечно сходится к разрывному.

$\|T\| = \lim \|A_n\|$ $\|A_n - A_m\| \le \|A_n - T\| + \|A_m - T\|$. Получается, что $\|T\| - \|A_n\| \le \|T - A_n\| \to 0$ если есть сходимость по операторной норме.

Теорема Банаха-Штейнгаусса

Пусть H — гильбертово пространство, ε — евклидово, $A_n : H \to \varepsilon$, A_n поточечно сходится к T, где $T : H \to \varepsilon$ линейный оператор, тогда T — линейный непрерывный оператор, $\{A_n\}$ — ограниченная числовая последовательность, $\|T\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$.

Доказательство:

Шаг первый. Если $\forall f \in H$ $\{A_n f\}$ ограничена в ε, тогда $\{\|A_n\|\}$ ограничена. Докажем это. Посмотрим на множество $\Gamma_N = \{f \in H \mid \|A_n f\| \le N \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$, $N \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\|A_n f\|\}$ ограничена в ε, то такая последовательность не будет превосходить какого-нибудь числа. Следовательно если взять числа N и смотреть на функции, которые отвечают Γ_N, то перебирая все N можно перебрать все функции. $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\Gamma_N = H$. Теперь воспользуемся полнотой, попытаемся доказать, что хотя бы в одной из этих множеств попадает шарик. Если $\exists f_0 \in H$ и $\exists N_0$ и $r_0 > 0$ так, что $B_{r_0}(f_0) = \{f \in H \mid \|f - f_0\| \leq r_0\} \subset \Gamma_{N_0}$, тогда $\|A_n f\| \leq N_0$ если $\forall f$ $\|f - f_0\| \leq r_0$. Если взять $\|w\| = 1$ и рассмотреть $\|A_n w\|$, то $f_0 + r_0 w \in B_{r_0}(f_0)$ (к f_0 прибавили вектор единичной длина, умноженный на радиус шара и остались в нём), тогда $\frac{1}{r_0}\|A_n(f_0 + r_0 w) - A_n f_0\| \leq \frac{1}{r_0}(N_0 + \overbrace{\|A_n f_0\|}^{\leq R_0}) \leq \frac{N_0+R_0}{r_0}$ для любого вектора на единичной сфере. Следовательно $\|A_n\| \leq \frac{N_0+R_0}{r_0}$. Если удастся в Γ_N впихнуть шарик, то можно оценить любой элемент сферы. Пусть в любое Γ_N нельзя впихнуть никакой шар положительного радиуса. Тогда рассмотрим шар в центре 0 радиуса 1 и рассмотрим Γ_1, в который нельзя впихнуть какой-либо шар. Рассмотрим разность этого открытого шара и Γ_1. Получим открытое множество, в нём любая точка входит вместе с окрестностью, а значит можно выбрать шар радиуса $r_1 < \frac{1}{2}$, непересекающий Γ_1. Рассмотрим теперь этот шар и множество Γ_2, в которое также нельзя запихнуть ни один шар. Опять смотрим их разность (открытое множество) и выбираем шар $r_2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ и так далее. Получаем последовательность вложенных шаров $B_{r_1}(f_1) \supset B_{r_2}(f_2)$ и $\forall k$ $B_{r_k} \cap \Gamma_k = \varnothing$, а радиусы стремяться к нулю. Центры этих шаров образуют фундаментальную последовательность $\|f_k - f_{k+p}\| \leq \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$ $\forall k \geq k(\varepsilon)$. Пользяся полнотой получаем, что ряд сходится в H $f_k \to f_*$. Получаем парадокс: $f_{k+p} \in B_{r_k}(f_k)$, при $p \to \infty$ $f_{k+p} \to f_* \Rightarrow f_* \in B_{r_k}(f_k)$ $\forall k$. Но каждый такой шар построен так, что $B_{r_k} \cap \Gamma_k = \varnothing$, следовательно $f_* \notin \Gamma_k$ $\forall k$, но всё пространство есть объединение в том числе и f_*, получили противоречие с условием.

Следствие шага 1: Если $\sup\limits_{n\in N}\|A_n\| = \infty$, A_n — линейный непрерывный оператор, то $\exists f_* \in H$: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|A_n f_*\| = \infty$.

Шаг второй. Если есть поточечная сходимость из полного пространства, то тогда поточечный предел — непрерывный ограниченный оператор. $A_n f \to Tf$ $\forall f$ в ε, следовательно $\{A_n f\}$ ограниченна в ε $\forall f \Rightarrow$ по шагу один $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|A_n\| < +\infty$. Тогда $\|Tf + A_n f - A_n f\| \leq \underbrace{\|Tf - A_n f\|}_{\leq 1 \text{ при } n \geq N(f)} + \underbrace{\|A_n f\|}_{\leq \|A_n\|\|f\|}$, где $\|f\| = 1$ (f с единичной сферы), а $\|A_n\| \leq R$. Следовательно $\|Tf\| \leq 1 + R$ $\forall \|f\| = 1$ и значит $\|T\| \leq 1 + R$. Поэтому поточечный предел последовательности будет непрерывным. Во-вторых, $\forall \|f\| = 1$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon, f)$: $\forall n \geq N(\varepsilon, f)$ $\|A_n f - Tf\| \leq \varepsilon$ $\Rightarrow \|Tf\| \leq \varepsilon + \|A_n\|\|f\|$. Нижний предел последовательности с добавкой превосходит $\|A_n\|$, начиная с некоторого n: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall M(\varepsilon) > 0$ $\exists n \geq M(\varepsilon)$ $\varliminf\limits_{k\to\infty}\|A_k\| + \varepsilon \geq \|A_n\|$. Если возмём $M = N(\varepsilon, f)$, то $\varepsilon + \|A_n\|\|f\| \leq \varliminf\limits_{k\to\infty}\|A_k\| + 2\varepsilon$. Отсюда взяв супремум по f получаем, что $\|T\| \leq \varliminf\limits_{k\to\infty}\|A_k\| + 2\varepsilon$, $\varepsilon \to +0$. Доказательство закончено.

Пример:

H — гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. $\forall f \in H$ $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f, e_k)e_k$, это ни что иное $P_k(f)$ — ортопроектор на линейную оболочку e_k. Очевидно $\|P_k\| = 1$. Возникает ряд из проекторов $I = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, где $If = f$ — тождественый оператор из H в H, $\|I\| = 1$. Это обозначение символизирует собой ряд Фурье: $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(f)$. Это справедливо для любого f, следовательно получается, что $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k \to I$ поточечно, потому что $S_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} (f, e_k)e_k \to f$ в H при $n \to \infty$. А сходимости по норме здесь нет. Действительно $\|I - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k\| \geq \|(I - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k)e_{n+1}\|$. e_{n+1} с единичной сферы, а супремум по единичной сфере даст норму. Но $Ie_{n+1} = e_{n+1}$, а $P_k e_{n+1} = 0$ при $k < n+1$. Получаем $\|I - \sum\limits_{k=1}^{n} P_k\| = \|e_n\| = 1\ \forall n$. То есть никакой сходимости по норме нет. Но поточечная есть, она дайт факт что последовательность частичных сумм S_n ограничена. Оценит норму суммой норм проекторов плохо, так как оценка стремится к бесконечности, а по теорема Банаха-Штейнгасса S_n по норме меньше некого числа R.

Спектр и резольвентное множество линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве $A : H \to H$.

Введём оператор $A_\lambda = A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Резольвентное множество $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (A_\lambda)^{-1} : H \to H\}$.

Замечание:
Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — два евклидовых пространства и линейный оператор $T : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$. Обратный оператор отображает образ T $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to \varepsilon_1 \Leftrightarrow \ker T = \{0\}$. Тогда существует обратный $T^{-1} : \varepsilon_2 \rho \varepsilon_1 \Leftrightarrow \ker T = \{0\}$ и $\operatorname{Im} T = \varepsilon_2$.

Тогда можно переписать определение резольвентного множества как $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0$ и $\operatorname{Im} A_\lambda = H\}$. Более того в гильбертовом пространстве обратный оператор автоматически непрерывен.

Замечание (Теорема Банаха об обратном операторе)
$T : H_1 \to H_2$ — линейный непрерывный оператор, где $H_{1,2}$ — гильбертовы пространства. Тогда $\exists! T^{-1} : H_2 \to H_1$ линейный и непрерывный если, и только если $\ker T = 0$ и $\operatorname{Im} T = H_2$.

$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists (A_\lambda)^{-1} : H \to H$ — непрерывный оператор. $(I - \mu A) = -\mu A_{\frac{1}{\mu}}$, то $\frac{1}{\mu} \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists \underbrace{(I - \mu A)^{-1}}_{\text{резольвента } \rho_A(\mu)} = -\frac{1}{\mu}(A_{\frac{1}{\mu}})$.

Определение: Спектр оператора $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. $\lambda \in \sigma(A)$ эквивалентно одному из двух случаев: либо $\ker A_\lambda \neq \{0\}$ — точечный спектр, состоящий из собственных значений ($\sigma_P(A)$) (точечный спектр может образовывать множество мощности континум), либо $\ker A_\lambda = \{0\}$, но $\operatorname{Im} A_\lambda \neq H$ — непрерывный спектр ($\sigma_C(A)$) (непрерывный спектр может быть из отдельных точек). В случае непрерывного спектра обратный оператор существует $A_\lambda^{-1} : \operatorname{Im} A_\lambda \to H$ и даже может оказаться непрерывным, если (и только если) образ его замкнут.

Пример когда обратный оператор непрерывный есть, а точка в спектре.
Пусть H с ортонормированным базисом $\{e_k\}$. $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) e_k$, где $\alpha_k(f) = (f, e_k)$. Пусть оператор A производит сдвиг: $Af = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) e_{k+1}$. Естественно $\|f\| = \|Af\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f)|^2}$ — это равенство Парсеваля. $\ker A = \{0\}$, $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Lin} e_1)^\perp$. $A^{-1} : (\operatorname{Lin} e_1)^\perp \to H$, $g \in (\operatorname{Lin} e_1)^\perp$ $g = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \underbrace{\beta_k}_{(g, e_k)} e_k$ отображается в $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_{k+1} e_k$ действием оператора A^{-1}. Получается $A^{-1} g = f \Leftrightarrow Af = g$, естественным образом $\|A^{-1} g\| = \|g\|\ \forall g \in (\operatorname{Lin} e_1)^\perp$, следовательно $\|A^{-1}\| = 1$.

Теорема (фон Неймана)
Если $T : H \to H$ — линейный и непрерывный так, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ сходится, тогда $S_N = \sum_{n=0}^{N} T^n$ сходится по операторной норме к некоторому оператору S — линейный непрерывный оператор $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, причём $S = (I - T)^{-1}$.

Доказательство
Убедимся, что S_N обладает сходимостью. $S_N f$ — фундаментальная последовательность в H $\forall f \in H$, так как $\|S_N f - S_{N+P} f\| = \|\sum_{n=N+1}^{N+P} T^n f\| \le \sum_{n=N+1}^{N+P} \underbrace{\|T^n\|}_{\to 0} \|f\| \Rightarrow \|S_N f - S_{N+P} f\| \to 0$

$N \to \infty$ равномерно по P. Раз фундаментальна в гильбертовом, значит сходится $S_N f \to Sf$. $\|S_f\| = \lim\limits_{N\to\infty} \|S_N f\| \le \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \|T\|^k \|f\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|T^k\| \|f\|$. Следовательно $\|S\| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|T^k\|$, следовательно S — линейный непрерывный оператор.

Теперь покажем, что он обратный. Надо доказать, что $\left\{ \begin{matrix} (I-T)S = I \Rightarrow \operatorname{Im}(I-T) = H \\ S(I-T) = I \Rightarrow \ker(I-T) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ $\exists (I-T)^{-1} : H \to H$. $\forall f \in H$ $(I-T)Sf = \underbrace{(I-T)}_{\text{непрерывный}} (\lim\limits_{N\to\infty} S_N f) = \lim\limits_{N\to\infty} ((I-T) S_N f) =$

$\lim\limits_{N\to\infty} ((I-T) \sum\limits_{n=0}^{N} T^k f) = \lim\limits_{N\to\infty} (f - T^{N+1} f)$. Но $\|T^{N+1} f\| \le \|T^{N+1}\| \|f\| \to 0 \Rightarrow (I-T)S = I$. $S(I-T)f = \lim\limits_{N\to\infty} (S_N (I-T) f) = \lim\limits_{N\to\infty} ((I - T^{N+1}) f) = f$. Таким образом теорема фон Неймана доказана.

Следствия:
Пусть $A : H \to H$ — линейный и непрерывный, тогда

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ такой, что $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. При этом $(A_\lambda)^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$, причём ряд сходиться по операторной норме.
2. $\rho(A)$ — открыто в $\mathbb{C}$
3. Функция от λ $(A_\lambda)^{-1}$ непрерывна на $\rho(A)$ по операторной норме
4. $\forall \lambda \in \rho(A)$ $\exists \lim\limits_{\text{по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = ((A_\lambda)^{-1})^2$

Доказательство

1: Если $|\lambda| > \|A\|$ $A_\lambda = A - \lambda I = -\lambda(I - \overbrace{\frac{A}{\lambda}}^{=T})$, $\|T\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$ следовательно $\|T^n\| \le \|T\|^n = \left(\frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)^n$ — это член сходящегося ряда. Значит по теореме фон Неймана $\exists (A_\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$ сходящегося по операторной норме