Линейные непрерывные операторы в евклидовом пространстве.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — два евклидовых пространства. $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ — линейный оператор. Иначе говоря $\forall \alpha_{1,2}\ \forall f_{1,2} \in \varepsilon_1\ A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 A(f_1) + \alpha A(f_2)$.

Определение 1. *A непрерывна в $f_0 \in \varepsilon_1 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0(\varepsilon)\ \forall f \in \varepsilon_1$: $\|f - f_0\| \leq \delta_0(\varepsilon) \Rightarrow \|Af - Af_0\| \leq \varepsilon$.*

Из непрерывность в f_0 следует непрерывность оператора $A\ \forall g \in \varepsilon_1$. Так как $\forall f \in \varepsilon_1\ \|f - g\| \leq \delta_0(\varepsilon)$, то

$$\|Af - Ag\| = \|A(f-g) + A(f_0) - A(f_0)\| = \|A(f_0 + (f-g) - A(f_0)\| \leq \delta_0(\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ непрерывна в g. В частности при $g = 0$

$$\|Af\| \leq \varepsilon \quad \forall \|f\| \leq \delta_0(\varepsilon)$$

Поэтому δ_0 — универсальное число.

Пусть $\varepsilon_1 = 1$, $\delta_0(1)$. Тогда $\forall f \neq 0$:

$$\left\| \frac{f}{\|f\|} \delta_0(1) \right\| = \delta_0(1)$$

Подставим это выражение под знак оператора.

$$\|A(\frac{f}{\|f\|}\delta_0(1))\| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\delta_0(1)}{\|f\|}\|Af\| \leq 1$$

$\Rightarrow$ оцениваем норму образа через норму прообраза:

$$\forall f \in \varepsilon_1\ \|A(f)\| \leq \frac{\|f\|}{\delta_0(1)} \Rightarrow \forall f, g \in \varepsilon_1 \|A(f-g)\| \leq \frac{1}{\delta_0(1)}\|f - g\|$$

Это липшецевость оператора A на ε_1 с $L = \frac{1}{\delta_0(1)}$. Рассмотрим наименьшую константу Липшеца и назовём её нормой.

Определение 2. *$A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, такой что $A \neq 0$ — линейный и непрерывный оператор, то*

$$\|A\| = \inf\{L > 0 \mid \|Af\| \leq L\|f\| \quad \forall f \in \varepsilon_1\}$$

Очевидно, что это так же равно

$$\sup_{f \in \varepsilon_1, f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = L_0, \quad L_0 \leq L$$

Пример 1. *Линейный разрывный оператор.* $\varepsilon_1 = \{f \in C^1[0,1]\}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

Также $\varepsilon_2 = \mathbb{C}$. Пусть $A : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $A(f) = f'(0)$ $\forall f \in \varepsilon_1$. Конечность нормы — критерий непрерывности. У этого оператора норма бесконечность: возмём, например, $f_n(x) = \sin nx \in \varepsilon_1$

$$A(f_n) = n$$

По норме это будет

$$\|A(f_n)\| = |n|$$

Рассмотрим теперь норму f_n:

$$\|f_n\| = \sqrt{\int\limits_0^1 \sin^2 nx dx} \leq 1 \Rightarrow \|A\| = \infty$$

Иначе говоря

$$\|A\| \geq \frac{|n|}{\|f_n\|} \geq n \to \infty$$

Или по-другому $g_n = \frac{1}{\sqrt{n}} f_n$ по в ε_1 стремится к нулю

$$\|g_n\|_{\varepsilon_1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Тогда $A(g_n) = \sqrt{n}$, поэтому

$$\|Ag_n\| = \sqrt{n} \to \infty$$

Дадим теперь два других определения операторной нормы.

$$\|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} \tag{1}$$

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=0} \|Af\| \tag{2}$$

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\| \tag{3}$$

Покажем их равенство. (1) $\geq$ (2), так как $\|f\| = 1$ является сужением. С другой стороны $\sup \left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\| \leq (2) \Rightarrow (1) = (2)$. (3) $\leq$ (2) так как при $f \neq 0$ и $\|f\| \leq 1$ имеем

$$\|Af\| = \|f\| \left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\|$$

где $\left\| A\frac{f}{\|f\|} \right\| \leq \sup\limits_{\|\phi\|=1} \|A\phi\|$. Но (2) $\leq$ (3) так как является сужением, поэтому (2) = (3).

Пример 2. Пусть $\varepsilon_1 = \mathbb{C}^n$, $\varepsilon_2 = \mathbb{C}^m$. $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ задаётся комплексной матрицей $m \times n$. $Af \in \mathbb{C}^m$ $\forall f \in \mathbb{C}^n$ есть умножение матрицы на столбец.

$$\|Af\|^2_{\mathbb{C}^m} = \overline{Af}^T Af = \overline{f}^T \overline{A}^T Af$$

где обозначили $M = \overline{A}^T A$. $M^* = \overline{M}^T = M \Rightarrow M \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Следовательно $\exists U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — унитарная матрица, то есть сохраняющая норму.

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Заметим, что $\overline{f}^T Mf = \|Af\|^2 \geq 0$. $\|Uf\| = \|f\|$, поэтому можно перейти к базису из собственных векторов. $f = Ug$, тогда

$$\|Af\|^2 = \overline{Ug}^T MUg = \overline{g}^T \overline{U}^T MUg$$

но U — унитарная, следовательно $U^{-1} = U^* = \overline{U}^T \Rightarrow$

$$\overline{U}^T MU = U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overline{g}^T \overline{U}^T MUg = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i |g_i|^2$. Обозначим теперь $\lambda_{max} = \max \lambda_i$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |g_i|^2 \leq \lambda_{max} \sum_{i=1}^{n} |g_i|^2 = \lambda_{max} \|f\|^2$$

Тогда $\|Af\| \leq \sqrt{\lambda_{max}} \|f\|$ Обозначим $\tilde{g}_k = \delta_{kk_*}$, $\lambda_{max} = \lambda_{k_*}$, $\tilde{f} = U\tilde{g}$ и из унитарности U получаем$\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = 1$ и

$$\sqrt{\lambda_{max}} = \|A\tilde{f}\| \leq \|A\| \leq \sqrt{\lambda_{max}} \Rightarrow \|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(\overline{A}^T A)}$$

Пример 3. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = L_2(G) = H$ — гильбертово пространство, где $G \in \mathbb{R}^m$ — измеримое множество. Пусть $A : L_2(G) \to L_2(G)$,

$$(Af)(x) = \int_G K(t,x) f(t) dt$$

где $K(t,x)$ — интегральное ядро. $K \in L_2(G \times G)$

$$\|K\|^2_{L_2 G\times G} = \iint_{G\times G} |K|^2 dtdx \leq +\infty$$

Рассмотрим норму $\|Af\|$

$$\|Af\|^2 = \int_G |(Af)(x)|^2 dx = \int_G dx \left| \int_G dt K(t,x) f(t) \right|^2$$

где модуль интеграла по Коши-Буняковскому в L_2 меньше или равен $\int_G |K(t,x|^2 dt \int_G |f(t)|^2 dt$, поэтому

$$\|Af\|^2 \leq \left(\iint_{G\times G} dxdt |K|^2 \right) \|f\|^2$$

Итого оценили операторную норму:

$$\|Af\|_{L_2G} \le \|K\|_{L_2(G\times G)}\|f\|_{L_2(G)} \quad \forall f \in L_2(G)$$

$\Rightarrow$ получаем важное соотношение

$$\boxed{\|A\| \le \|K\|_{L_2(G\times G)}}$$

Свойства операторной нормы, $A, B : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$

1. $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow Af = 0\ \forall f \in \varepsilon_1$

Докажем эти свойства.

1. $\|(A+B)f\| \le \|A(f)\| + \|B(f)\| \le (\|A\| + \|B\|)\|f\| \Rightarrow \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
2. $\|(\alpha A)f\| = \|\alpha A(f)\| = |\alpha|\|A(f)\|$, $\sup\limits_{\|f\|=1} \|(\alpha A)f\| = |\alpha| \sup\limits_{\|f\|=1} \|Af\|$
3. Очевидно

Также можно выделить как отдельное свойство 4. Пусть заданы два оператора $A : \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$, $B : \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon_3$, Обозначим оператор $T = B \bullet A$, действующий как $T(f) = B(A(f))\ \forall f \in \varepsilon_1$. Тогда

$$\|T(f)\| = \|B(A(f))\| \le \|B\|\|A(f)\| \le \|B\|\|A\|\|f\| \Rightarrow \boxed{\|T\| \le \|B\|\|A\|}$$

Следствие 1. *$A : \varepsilon \to \varepsilon$, A — линейный непрерывный оператор. Тогда можно формально рассмотреть $A^n f = A(A(\dots A(f))\dots)$, где A применён n раз — произведение в пространстве линейный операторов.*

Естественно получается $\|A^n\| \le \|A\|^n$ по индукции из пункта 4.

Наблюдение 1. *$F : H \mapsto \mathbb{C}$ — линейный непрерывный функционал. По теореме Риса-Фреше $\exists! h \in H\colon F(f) = (f, h)\ \forall f \in H$. Следовательно $\|F\|_{\text{операторная}} = \|h\|_H$. Получаем изометрический (так как сохраняет норму) изоморфизм между гильбертовым пространством и пространством непрерывных линейных операторов. В квантмехе это называют отождествление гильбертового пространства и наблюдателей над ним. Если ввести $H^* = \{$все $F : H \mapsto \mathbb{C}$ линейные и непрерывные функционалы$\}$, то имеется линейная биекция (изоморфизм) сохраняющая норму по теореме Риса-Фреше. Норма сохраняется так как*

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |(f,h)| = \|h\|$$

в прямую сторону по неравенству Коши-Буняковского, а в обратную если взять вектор $f = \frac{h}{\|h\|}$ при $h \ne 0$, то результат будет не меньше $\|h\|$.

Два типа сходимости для последовательности операторов. $\{A_n\} : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$, $\{T_n\} : \varepsilon_2 \to \varepsilon_1$ — линейные непрерывные функционалы.

Говорят, что $\|A_n\| \to T$ по операторной норме, если $\|A_n - T\| \to 0$ $n \to \infty$. Фактически это равномерная сходимость на сфере или на шаре, при чём на любом.

$$\|A_n - T\| \to 0 \Leftrightarrow A_n(f) \rightrightarrows T(f) \quad \|f\| < R\,\forall R$$

потому что

$$\|A_n(f) - T(f)\| \le \|A_n - T\|\|f\|$$

где $\|A_n - T\| \to 0$ и $\|f\| \le R$. И наоборот, если

$$\forall n \ge N(\varepsilon)\ \forall \|f\| \le 1\ \|A_n f - Tf\| \le \varepsilon$$

то $\sup\limits_{\|f\|\le 1} \|A_n f - Tf\| = \|A_n - T\|$, получили сходимость по операторной норме. В итоге сходимость по норме синоним сходимости на произвольном шаре.

$A_n \to T$ сходится поточечно, если $\|A_n f - Tf\| \to 0$ $\forall f \in \varepsilon_1$. Ясно, что если $A_n \to T$ по операторной норме, то очевидно сходится и поточечно. Обратное неверно.

Упражнение 1. *Придумать пример, когда $A_n : \varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ линейно непрерывный поточечно сходится к разрывному.*

Пусть $\|T\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$ тогда

$$\|A_n - A_m\| \le \|A_n - T\| + \|A_m - T\|$$

Получается, что

$$\|T\| - \|A_n\| \le \|T - A_n\| \to 0$$

если есть сходимость по операторной норме.

Теорема 1 (Банаха-Штейнгаусса). *Пусть H — гильбертово пространство, ε — евклидово, $A_n : H \mapsto \varepsilon$, A_n поточечно сходится к T, где $T : H \mapsto \varepsilon$ линейный оператор, тогда T — линейный непрерывный оператор, $\{A_n\}$ — ограниченная числовая последовательность, $\|T\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$.*

Доказательство. Шаг первый. Если $\forall f \in H$ $\{A_n f\}$ ограничена в ε, тогда $\{\|A_n\|\}$ ограничена. Докажем это. Посмотрим на множество $\Gamma_N = \{f \in H \mid \|A_n f\| \le N \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$ $N \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\|A_n f\|\}$ ограничена в ε, то такая последовательность не будет превосходить какого-нибудь числа. Следовательно если взять числа N и смотреть на функции, которые отвечают Γ_N, то перебирая все N можно перебрать все функции. $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \Gamma_N = H$. Теперь, воспользуясь полнотой, попытаемся доказать, что хотя бы в одной из этих множеств попадает шарик. Если $\exists f_0 \in H$ и $\exists N_0$ и $r_0 > 0$ так, что $B_{r_0}(f_0) = \{f \in H \mid \|f - f_0\| \le r_0\} \subset \Gamma_{N_0}$, тогда $\|A_n f\| \le N_0$ если $\forall f$ $\|f - f_0\| \le r_0$. Если взять $\|w\| = 1$ и рассмотреть $\|A_n w\|$, то $f_0 + r_0 w \in B_{r_0}(f_0)$ (к f_0 прибавили вектор единичной длины, умноженный на радиус шара и остались в нём), тогда, учитывая $\|A_n f_0\| \le R_0$

$$\frac{1}{r_0}\|A_n(f_0 + r_0 w) - A_n f_0\| \le \frac{1}{r_0}(N_0 + \|A_n f_0\|) \le \frac{N_0 + R_0}{r_0}$$

для любого вектора на единичной сфере. Следовательно

$$\|A_n\| \le \frac{N_0 + R_0}{r_0}$$

Если удастся в Γ_N впихнуть шарик, то можно оценить любой элемент сферы. Пусть в любое Γ_N нельзя впихнуть никакой шар положительного радиуса. Тогда рассмотрим шар в центре 0 радиуса 1 и рассмотрим Γ_1, в который нельзя впихнуть какой-либо шар. Рассмотрим разность этого открытого шара и Γ_1. Получим открытое множество, в нём любая точка входит вместе с окрестностью, а значит можно выбрать шар радиуса $r_1 < \frac{1}{2}$, непересекающий Γ_1. Рассмотрим теперь этот шар и множество Γ_2, в которое также нельзя запихнуть ни один шар. Опять смотрим их разность (открытое множество) и выбираем шар $r_2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ и так далее. Получаем последовательность вложенных шаров $B_{r_1}(f_1) \supset B_{r_2}(f_2)$ и $\forall k\ B_{r_k} \cap \Gamma_k = \varnothing$, а радиусы стремяться к нулю. Центры этих шаров образуют фундаментальную последовательность

$$\|f_k - f_{k+p}\| \leq \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon\ \forall k \geq k(\varepsilon)$$

Пользуяся полнотой получаем, что ряд $f_k \to f_*$. сходится в H. Получаем парадокс: $f_{k+p} \in B_{r_k}(f_k)$, при $p \to \infty$ $f_{k+p} \to f_* \Rightarrow f_* \in B_{r_k}(f_k)\ \forall k$. Но каждый такой шар построен так, что $B_{r_k} \cap \Gamma_k = \varnothing$, следовательно $f_* \notin \Gamma_k\ \forall k$, но всё пространство есть объединение в том числе и f_*, получили противоречие с условием.

Следствие шага 1: Если $\sup\limits_{n \in N} \|A_n\| = \infty$, A_n — линейный непрерывный оператор, то

$$\exists f_* \in H \colon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n f_*\| = \infty$$

Шаг второй. Если есть поточечная сходимость из полного пространства, то тогда поточечный предел — непрерывный ограниченный оператор. $A_n f \to Tf\ \forall f$ в ε, следовательно $\{A_n f\}$ ограниченна в $\varepsilon\ \forall f \ \Rightarrow$ по шагу один $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$. Тогда

$$\|Tf + A_n f - A_n f\| \leq \|Tf - A_n f\| + \|A_n f\|$$

где $\|Tf - A_n f\| \leq 1$ при $n \geq N(f)$ и $\|A_n f\| \leq \|A_n\| \|f\|$. Пусть $\|f\| = 1$ (f с единичной сферы, а $\|A_n\| \leq R$). Следовательно $\|Tf\| \leq 1 + R\ \forall \|f\| = 1$ и значит $\|T\| \leq 1 + R$. Поэтому поточечный предел последовательности будет непрерывным. Во-вторых, $\forall \|f\| = 1$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, f) \colon \forall n \geq N(\varepsilon, f)\ \|A_n f - Tf\| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$$\|Tf\| \leq \varepsilon + \|A_n\| \|f\|$$

Нижний предел последовательности с добавкой превосходит $\|A_n\|$, начиная с некоторого n:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall M(\varepsilon) > 0\ \exists n \geq M(\varepsilon)\ \ \varliminf_{k \to \infty} \|A_k\| + \varepsilon \geq \|A_n\|$$

Если возмём $M = N(\varepsilon, f)$, то

$$\varepsilon + \|A_n\| \|f\| \leq \varliminf_{k \to \infty} \|A_k\| + 2\varepsilon$$

Отсюда взяв супремум по f получаем, что

$$\|T\| \leq \varliminf_{k \to \infty} \|A_k\| + 2\varepsilon \quad \varepsilon \to +0$$

Доказательство закончено.

Пример 4. H — гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. $\forall f \in H$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$$

это ни что иное $P_k(f)$ — ортопроектор на линейную оболочку e_k. Очевидно $\|P_k\| = 1$. Возникает ряд из проекторов

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

где $If = f$ — тождественый оператор из H в H, $\|I\| = 1$. Это обозначение символизирует собой ряд Фурье:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(f)$$

Это справедливо для любого f, следовательно получается, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} P_k \to I$$

поточечно, потому что

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)e_k \to f \quad \text{в } H \text{ при } n \to \infty$$

А сходимости по норме здесь нет. Действительно

$$\|I - \sum_{k=1}^{n} P_k\| \geq \|(I - \sum_{k=1}^{n} P_k)e_{n+1}\|$$

где e_{n+1} с единичной сферы, а супремум по единичной сфере даёт норму. Но $Ie_{n+1} = e_{n+1}$, а $P_k e_{n+1} = 0$ при $k < n + 1$. Получаем

$$\|I - \sum_{k=1}^{n} P_k\| = \|e_n\| = 1 \quad \forall n$$

То есть никакой сходимости по норме нет. Но поточечная есть, она из неё следует факт, что последовательность частичных сумм S_n ограничена. Оценивать норму суммой норм проекторов плохо, так как оценка стремится к бесконечности. Лучше воспользоваться теоремой Банаха-Штейнгаусса: S_n по норме меньше некого числа R.

Спектр и резольвентное множество линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве $A : H \mapsto H$.

Введём оператор $A_\lambda = A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Резольвентное множество

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H\}$$

Замечание 1. *Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — два евклидовых пространства и линейный оператор $T : \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2$. Обратный оператор отображает образ $T^{-1} : \operatorname{Im} T \mapsto \varepsilon_1 \Leftrightarrow \ker T = \{0\}$. Тогда существует обратный $T^{-1} : \varepsilon_2 \rho \varepsilon_1 \;\Leftrightarrow\; \ker T = \{0\}$ и $\operatorname{Im} T = \varepsilon_2$.*

Тогда можно переписать определение резольвентного множества как

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0 \text{ и } \operatorname{Im} A_\lambda = H\}$$

Более того в гильбертовом пространстве обратный оператор автоматически непрерывен.

Замечание 2 (Теорема Банаха об обратном операторе). *$T : H_1 \mapsto H_2$ — линейный непрерывный оператор, где $H_{1,2}$ — гильбертовы пространства. Тогда $\exists! T^{-1} : H_2 \mapsto H_1$ линейный и непрерывный если, и только если $\ker T = 0$ и $\operatorname{Im} T = H_2$.*

$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H$ — непрерывный оператор. $(I - \mu A) = -\mu A_{\frac{1}{\mu}}$, то

$$\frac{1}{\mu} \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists (I - \mu A)^{-1} = -\frac{1}{\mu}(A_{\frac{1}{\mu}})$$

где обозначим $(I - \mu A)^{-1} = \rho_A(\mu)$ — резольвента.

Определение 3. *Спектр оператора $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$. Это эквивалентно одному из двух случаев: либо $\ker A_\lambda \neq \{0\}$ — точечный спектр, состоящий из собственных значений ($\sigma_P(A)$) (точечный спектр может образовывать множество мощности континум), либо $\ker A_\lambda = \{0\}$, но $\operatorname{Im} A_\lambda \neq H$ — непрерывный спектр ($\sigma_C(A)$) (непрерывный спектр может быть из отдельных точек). В случае непрерывного спектра обратный оператор существует $A_\lambda^{-1} : \operatorname{Im} A_\lambda \mapsto H$ и даже может оказаться непрерывным, если (и только если) образ его замкнут.*

Пример 5. *когда обратный оператор непрерывный есть, а точка в спектре.* Пусть H с ортонормированным базисом $\{e_k\}$.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) e_k$$

где $\alpha_k(f) = (f, e_k)$. Пусть оператор A производит сдвиг: $Af = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) e_{k+1}$. Естественно

$$\|f\| = \|Af\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f)|^2}$$

что получается из равенства Парсеваля. Для этого оператора $\ker A = \{0\}$, $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Lin} e_1)^\perp$. Обратный оператор $A^{-1} : (\operatorname{Lin} e_1)^\perp \mapsto H$. Пусть $g \in (\operatorname{Lin} e_1)^\perp$, тогда

$$g = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\beta_k}_{(g, e_k)} e_k$$

отображается в

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k+1} e_k$$

действием оператора A^{-1}. Получается $A^{-1} g = f \Leftrightarrow Af = g$, естественным образом $\|A^{-1} g\| = \|g\| \; \forall g \in (\operatorname{Lin} e_1)^\perp$, следовательно $\|A^{-1}\| = 1$.

Теорема 2 (фон Неймана). *Если $T : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный так, что ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$$

сходится, тогда

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} T^n$$

сходится по операторной норме к некоторому оператору S — линейный непрерывный оператор

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

причём $S = (I - T)^{-1}$.

Доказательство. Убедимся, что S_N обладает сходимостью. $S_N f$ — фундаментальная последовательность в H $\forall f \in H$, так как, учитывая $\|T^n\| \to 0$

$$\|S_N f - S_{N+P} f\| = \|\sum_{n=N+1}^{N+P} T^n f\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+P} \|T^n\| \|f\|$$

$\Rightarrow \|S_N f - S_{N+P} f\| \to 0$ $N \to \infty$ равномерно по P. Раз фундаментальна в гильбертовом, значит сходится

$$S_N f \to Sf$$

Тогда

$$\|S_f\| = \lim_{N\to\infty} \|S_N f\| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \|T\|^k \|f\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|T^k\| \|f\|$$

Следовательно

$$\|S\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|T^k\|$$

отсюда S — линейный непрерывный оператор.

Теперь покажем, что он обратный. Надо доказать, что

$$\left\{ \begin{matrix} (I-T)S = I \Rightarrow \mathrm{Im}(I-T) = H \\ S(I-T) = I \Rightarrow \ker(I-T) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \exists (I-T)^{-1} : H \mapsto H$$

Рассмотрим $\forall f \in H$ действие оператора $(I-T)Sf$, где $I - T$ — непрерывный

$$(I-T)Sf = (I-T)(\lim_{N\to\infty} S_N f) = \\ = \lim_{N\to\infty}((I-T)S_N f) = \lim_{N\to\infty}((I-T)\times \\ \times \sum_{n=0}^{N} T^k f) = \lim_{N\to\infty}(f - T^{N+1} f)$$

Но

$$\|T^{N+1} f\| \leq \|T^{N+1}\| \|f\| \to 0$$

Отсюда

$$(I - T)S = I$$

Рассмотрим теперь действие оператора $S(I - T)f$

$$S(I - T)f = \lim_{N\to\infty}(S_N(I - T)f) = \lim_{N\to\infty}((I - T^{N+1})f) = f$$

Таким образом теорема фон Неймана доказана.

Следствия 1. *Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный, тогда*

1. *$\forall\lambda \in \mathbb{C}$ такой, что $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. При этом*

$$(A_\lambda)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

   причём ряд сходиться по операторной норме.

2. *$\rho(A)$ — открыто в $\mathbb{C}$*

3. *Функция от λ $(A_\lambda)^{-1}$ непрерывна на $\rho(A)$ по операторной норме*

4. *$\forall\lambda \in \rho(A)$ $\exists \lim\limits_{\text{по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = ((A_\lambda)^{-1})^2$*