Свойства самосопряжённых линейных операторов в гильбертовом пространств

Пусть H — гильбертово пространство. Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор. Пусть A — самосопряжённый оператор, то есть $A = A^*$.

Утверждение 1. *Если A — самосопряжённый оператор, тогда выполняются следующие свойства:*

1. $\|A^n\| = \|A\|^n \; \forall n \in \mathbb{N}$
2. $r(A) = \|A\|$
3. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
4. *пусть* $m_+ = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, *где* $(Af, f) \in \mathbb{R}$ *для самосопряжённого оператора, пусть* $m_- = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, *тогда* $m_{+-} \in \sigma(A)$ *и* $\sigma(A) \subset [m_-(A), m_+(A)]$ *(доказать в качестве упражнения)*

Доказательство. Докажем первое утверждение. $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ по определению операторной нормы. Надо показать, что $\|A^n\| \geq \|A\|^n$. Для $n = 1$ очевидно верно. Если для $k = 1 \dots n$ имеем $\|A^k\| = \|A\|^k$ и $A \neq 0$, тогда без ограничения общности $\forall f : \|f\| = 1$

$$\|A^n f\|^2 = (A^n f, A^n f)$$

В силу того, что A — самосопряжённый оператор

$$(A^n f, A^n f) = (A^{n-1} f, A^{n+1} f)$$

Последнее в силу неравенства Коши-Буняковского

$$(A^{n-1} f, A^{n+1} f) \leq \|A^{n-1} f\| \|A^{n+1} f\| \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Получаем, что

$$\|A^n f\|^2 \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Из индукции $\|A^{n-1}\| \leq \|A\|^{n-1}$ и $\|A^n\| = \|A\|^n$ Возьмём теперь супремум $\forall \|f\| = 1$

$$\|A^n\|^2 = \|A\|^{2n} \leq \|A\|^{n-1} \|A^{n+1}\|$$

Отсюда при $A \neq 0$ получаем

$$\|A\|^{n+1} \leq \|A^{n+1}\|$$

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение очевидно следует из первого для самосопряжённого оператора:

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$$

Перейдём к третьему утверждению. Воспоминание: пусть A — самосопряжённый оператор. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, то есть $\ker A_\lambda \neq 0$, следовательно $\exists f \neq 0 \in \ker A_\lambda \colon Af = \lambda f$. Тогда

$$(Af, f) = \lambda (f, f)$$

С другой стороны, в силу самосопряжённости

$$(Af, f) = (f, Af) = \overline{\lambda} (f, f)$$

И так как $f \neq 0$, то $\lambda = \overline{\lambda}$