Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

# Свойства самосопряжённых линейных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть $H$ — гильбертово пространство. Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор. Пусть $A$ — самосопряжённый оператор, то есть $A = A^*$.

**Утверждение 1.** *Если $A$ — самосопряжённый оператор, тогда выполняются следующие свойства:*

1. $\|A^n\| = \|A\|^n \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $r(A) = \|A\|$
3. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
4. *пусть* $m_+ = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, *где* $(Af, f) \in \mathbb{R}$ *для самосопряжённого оператора, пусть* $m_- = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$, *тогда* $m_{+-} \in \sigma(A)$ *и* $\sigma(A) \subset [m_-(A), m_+(A)]$ *(доказать в качестве упражнения)*

**Доказательство.** Докажем первое утверждение. $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ по определению операторной нормы. Надо показать, что $\|A^n\| \geq \|A\|^n$. Для $n = 1$ очевидно верно. Если для $k = 1 \dots n$ имеем $\|A^k\| = \|A\|^k$ и $A \neq 0$, тогда без ограничения общности $\forall f : \|f\| = 1$

$$\|A^n f\|^2 = (A^n f, A^n f)$$

В силу того, что $A$ — самосопряжённый оператор

$$(A^n f, A^n f) = (A^{n-1} f, A^{n+1} f)$$

Последнее в силу неравенства Коши — Буняковского

$$(A^{n-1} f, A^{n+1} f) \leq \|A^{n-1} f\| \|A^{n+1} f\| \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Получаем, что

$$\|A^n f\|^2 \leq \|A^{n-1}\| \|A^{n+1}\|$$

Из индукции $\|A^{n-1}\| \leq \|A\|^{n-1}$ и $\|A^n\| = \|A\|^n$ Возмём теперь супремум $\forall \|f\| = 1$

$$\|A^n\|^2 = \|A\|^{2n} \leq \|A\|^{n-1} \|A^{n+1}\|$$

Отсюда при $A \neq 0$ получаем

$$\|A\|^{n+1} \leq \|A^{n+1}\|$$

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение очевидно следует из первого для самосопряжённого оператора:

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$$

Перейдём к третьему утверждению. Воспоминание: пусть $A$ — самосопряжённый оператор. Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$, то есть $\ker A_\lambda \neq 0$, следовательно $\exists f \neq 0 \in \ker A_\lambda\colon Af = \lambda f$. Тогда

$$(Af, f) = \lambda(f, f)$$

С другой стороны, в силу самосопряжённости

$$(Af, f) = (f, Af) = \overline{\lambda}(f, f)$$

И так как $f \neq 0$, то $\lambda = \overline{\lambda}$. Перейдём теперь непосредственно к доказательству. Рассмотрим $\lambda = \mu + \imath\nu,\ \nu \neq 0$ и докажем, что $\lambda \in \rho(A)$ и тогда, очевидно, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A) \subset \mathbb{R}$. $\forall f \in H$

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f - \imath\nu f\|^2 = (A_\mu f - \imath\nu f, A_\mu f - \imath\nu f) = \|A_\nu f\|^2 + \nu^2\|f\|^2 - \imath\nu(f, A_\mu) + \imath\nu(A_\mu f, f)$$

где $A_\lambda f = Af - \lambda f$. Раз $\mu \in \mathbb{R}$, то

$$(A_\mu)^* = A^*_{\overline{\mu}} = A^*_\mu = A_\mu$$

так как $A^* = A$. Следовательно

$$(f, A_\mu f) = (A_\mu f, f)$$

Отсюда получаем, что

$$(A_\mu f - \imath\nu f, A_\mu f - \imath\nu f) = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2\|f\|^2$$

Тогда

$$\|A_\lambda f\|^2 = \|A_\mu f\|^2 + \nu^2\|f\|^2 \geq \nu^2\|f\|^2$$

Получили оценку снизу:

$$\|A_\lambda f\| \geq |\nu|\|f\| \quad \forall f \in H$$

Пусть теперь $f \in \ker A_\lambda$. Это равносильно $A_\lambda f = 0 \Rightarrow 0 \geq |\nu|\|f\| \geq 0$,отсюда $f = 0$. По теореме Фредгольма

$$\overline{(\operatorname{Im} A_\lambda)} = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp = (\ker A_{\overline{\lambda}})^\perp = 0^\perp = H$$

так как в силу самосопряжённости $(A_\lambda)^* = A^*_{\overline{\lambda}} = A_{\overline{\lambda}}$. Аналогично как для $A_\lambda$

$$\|A_{\overline{\lambda}}\| \geq |\nu| \|f\| \Rightarrow \ker A_{\overline{\lambda}} = 0$$

Покажем теперь, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут. Пусть $\|A_\lambda\| f = g$, тогда $(A_\lambda)^{-1} g = f$, тогда

$$\|(A_\lambda)^{-1} g\| \leq \frac{\|g\|}{\nu} \quad \forall g \in \operatorname{Im} A_\lambda$$

Поэтому

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\nu}$$

Возмём $\forall g \in \overline{\operatorname{Im} A_\lambda}$, тогда $\exists \{g_n\} \in \operatorname{Im} A_\lambda \colon g_n \to g$ в $H$. $g_n = A_\lambda f_n$

$$\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\nu} \|g_n - g_m\|$$

где $\|g_n - g_m\| \to 0$ $n, m \to \infty$, отсюда $f_n - f_m \to 0$ $n, m \to \infty$. Так как $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в полном пространстве $H$, то $\exists f \in H \colon f_n \to f$ в $H$. Так $g_n \to g$ $n \to \infty$ и так как $A_\lambda$ — непрерывный оператор, то $g = A_\lambda f$ и $g \in \operatorname{Im} A_\lambda$. Таким образом получаем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} A_\lambda = H \\ \ker A_\lambda = 0 \end{cases}$$

поэтому $\exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H$ такой, что $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\nu|}$ и $\nu = \operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

**Пример 1.** Пусть $H = L_2[0,1]$. Пусть задан оператор $A : H \mapsto H$ такой, что

$$(Af)(x) = x f(x) \quad 0 \leq x \leq 1, f \in H$$

Норма этого оператора будет

$$\|Af\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 |f|^2 dx} \leq \|f\|_{L_2}$$

так как $x^2 \leq 1$. Отсюда следует, что $\|A\| \leq 1$. Рассмотрим функцию $f_\varepsilon \in H$ такую:

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Тогда получаем, что

$$1 \geq \|A\| \geq \frac{\|Af_\varepsilon\|_{L_2}}{\|f_\varepsilon\|_{L_2}}$$

Выписываем явный вид нормы

$$\|A\| \geq \frac{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} x^2 dx}}{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} dx}} \geq (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} dx}}{\sqrt{\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} dx}}$$

В итоге мы получили

$$1 \geq \|A\| \geq 1-\varepsilon \to 1 \quad \varepsilon \to +0$$

Покажем теперь, что этот оператор самосопряжённый

$$(Af, g) = \int\limits_0^1 xf\overline{g}dx = \int\limits_0^1 f\overline{xg}dx = (f, xg) = (f, A^*g)$$

Поэтому $A^*g = xg = Ag \ \forall g \in H$. Рассмотрим теперь $\forall \lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda \neq [0,1] \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$A_\lambda f = g = (x-\lambda)f$$

И тогда

$$(A_\lambda)^{-1}g = f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0,1] \quad x \in [0,1]$$

Найдём норму $f$:

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_0^1 \frac{|g|^2}{|x-\lambda|^2}dx} \leq \rho(\lambda, [0,1]\|g\|$$

где $0 \leq \rho(\lambda,[0,1]) \leq |x-\lambda| \ \forall x \in [0,1]$ — расстояние, причём $\rho(\lambda,[0,1]) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0,1]$. Таким образом

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\rho(\lambda,[0,1])}$$

И образ естественно всё пространство так как $g$ — любой объект из $H$. Таким образом непрерывность очевидна, определена на всём пространстве и поэтому за пределами этого отрезка спектра нет. $\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$, причём $\lambda \notin \sigma_P(A)$ так как иначе $Af = \lambda f, f \neq 0$ в $H$. $xf(x) = \lambda f(x)$ для почти всех $x \in [0,1]$, $\|f\| > 0$ на множестве положительной меры $S$. Получаем $x = \lambda$ почти всюду на $S$. Но мера $S > 0$, то есть не одно число, поэтому $x = \lambda$ невозможно.

Покажем, что $\forall\lambda \in [0,1]$ выполняется $\lambda \in \sigma(A)$ тогда $\ker A_\lambda = 0$ и $g \in \operatorname{Im} A_\lambda \Leftrightarrow (x-\lambda)f(x) = g(x)$, то есть $x \in [0,1]$. Тогда $f(x) = \dfrac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0,1]$ для почти всех $x \in [0,1] \setminus \{\lambda\}$. Но это справедливо не для всякой $g$. Пусть $g(x) = 1$, тогда $\dfrac{1}{x-\lambda} \notin L_2[0,1]$, поэтому $1 \notin \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A \neq H$, Значит это элемент спектра $\sigma(A) = \sigma_C(A)$. Так как оператор самосопряженный, то для $\lambda \in \mathbb{R}$ $\ker A_\lambda^* = \ker A_\lambda = 0$ и получается, что $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = (\ker A_\lambda)^\perp = 0^\perp = H$. Таким образом для $\lambda \in [0,1]$ оператор $(A_\lambda)^{-1} : \operatorname{Im} A_\lambda \mapsto L_2[0,1]$, где $\operatorname{Im} A_\lambda = \{g \in L_2[0,1] \mid \dfrac{g(x)}{x-\lambda} \in L_2[0,1]\}$. $(A_\lambda)^{-1}g = \dfrac{g}{x-\lambda}$. Но норма такого оператора $\|(A_\lambda)^{-1}\| = +\infty$ (доказать в качестве упражнения): надо подобрать функции такие, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists g_n \in \operatorname{Im} A_\lambda$

$$\frac{\|(A_\lambda)^{-1}g_n\|}{\|g_n\|} \geq n$$

Если бы $\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq +\infty$, то получили ту же самую оценку:

$$\|f\| = \|(A_\lambda)^{-1}g\| \leq \|(A_\lambda)^{-1}\|\|g\|$$

для любого $f$ из $H$, причём $g = A_\lambda f$. Отсюда

$$k\|f\| = \frac{\|f\|}{\|(A_\lambda)^{-1}\|} \leq \|A_\lambda f\|$$

где $k = \dfrac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$. И отсюда можно доказать, если норма образа больше или равна константы на норму прообраза, то мгновенно доказывается, что $\operatorname{Im} A_\lambda$ замкнут, что не так, так как замыкание образа совпадает с $H$, сам образ не совпадает.

Ещё одно свойство самосопряжённого оператора:

**Утверждение 2.** *Если $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный самосопрежённый оператор и $\lambda, \mu \in \sigma(A)$: $\lambda \neq \mu$, тогда $\ker A_\lambda \perp \ker A_\mu$*

**Доказательство.** Утверждение нетривиально для $\lambda, \mu \in \sigma_P(A)$ так как если одно из них из непрерывного спектра, то соответствующее ядро тривиально, а нулевое подпространство перпендикулярно чему угодно. Пусть $f \neq 0 \in \ker A_\lambda \neq 0$ и $g \neq 0 \in \ker A_\mu \neq 0$, тогда надо доказать, что $f \perp g$, то есть $(f,g) = 0$. В силу пункта 3 предыдущего утверждения $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда $Af = \lambda f$ и $Ag = \mu g$. Получается

$$(Af, g) = \lambda(f, g)$$

с другой стороны

$$(Af, g) = (f, Ag) = (f, \mu g) = \overline{\mu}(f, g) = \mu(f, g)$$

Отсюда получаем, что

$$(\lambda - \mu)(f, g) = 0$$

И отсюда $(f, g) = 0$. Утверждение доказано.

**Упражнение 1 (решается, например, с помощью теоремы Банаха — Штейнгаусса, (теорема Хеллингера, Теплица)).** *Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и симметричный оператор, то есть $(Af, g) = (f, Ag)$ $\forall f, g \in H$. Тогда $A$ — непрерывный оператор ($\|A\| < +\infty$).*

# Теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.

**Определение 1.** *$A : H \mapsto H$ — линейный оператор называется компактным (или вполне непрерывным), если $\forall \{f_n\} \subset H$ $\{f_n\}$ ограничена в $H$. Иначе говоря $\forall n$ $\|f_n\| \leq R \Rightarrow \exists \{Af_{n_k}\}$ — фундаментальная подпоследовательность в $H$, где $n_1 < n_2 < \ldots$*

**Утверждение 3.** *$A$ — компактный, тогда $A$ — непрерывный. Обратное не верно.*

**Пример 2.** Пусть $U$ — унитарный оператор, то есть $U : H \mapsto H$ и $\|Uf\| = \|f\|$ $\forall f \in H$ в бесконечномерном гильбертовом пространстве $H$. Очевидно, что $\|U\| = 1$, он он не компактный. Так как $\dim H = +\infty$, то существует линейно независимая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ортагонализируем её по Грамму — Шмитду и получим $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$,тогда

$$(Ue_n, Ue_m) = (e_n, e_m) = 0$$

$\|Ue_n\| = 1$, тогда

$$\|Ue_n - Ue_m\| = \sqrt{\|Ue_n\|^2 + \|Ue_m\|^2} = \sqrt{2}$$

для любых $n \neq m$, поэтому нет фундаментальной подпоследовательности и $U$ не компактный.

**Упражнение 2.** *Пусть оператор $Af(x) = xf(x)$ в $L_2[0, 1]$. $A$ — самосопряжённный оператор. Показать, что $A$ — не компактный оператор.*

Докажем теперь утверждение

**Доказательство.** Если вдруг $A$ — компактный и $\|A\| = +\infty$, тогда $\exists \{f_n\}$ с единичной сферы такая, что $\|Af_n\| \to +\infty$. Из компактности следует, что

$\exists A f_{n_k}$ фундаментальная, то есть $Af_{n_k} \leq R$, а с другой стороны $\|Af_{n_k}\| \to +\infty$. Получаем противоречие.

**Утверждение 4.** *Пусть $A_1$ и $A_2$ — компактные операторы. Тогда их линейная комбинация также компактна (доказательство очевидно). Если $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность компактных операторов и $A_n \to T$ по операторной норме, тогда $T$ также компактный.*

**Доказательство.** Возмём последовательность $f_n$ ограниченную в $H$ и $\|f_n\| \leq R$. Рассмотрим $\{A_1 f_n\}$ — это действие компактного оператора на ограниченную последовательность, тогда по определению $\exists \{n_k(1)\}_{k=1}^{\infty}\colon n_1(1) < n_2(1) < \dots \Rightarrow A_1 f_{n_k(1)}$ — фундаментальная. Дальше действуем оператором $A_2$, тогда $\exists \{n_k(2)\} \subset \{n_k(1)\}\colon n_1(2) < n_2(2) < \dots \Rightarrow A_2 f_{n_k(2)}$ — фундаментальная, причём $A_1 f_{n_k(2)}$ осталась фундаментальной как подпоследовательность фундаментальной. Будем действовать так дальше. Реализуем Канторов диагональный процесс. Если для $m \in \mathbb{N}$ имеем $\{n_k(m)\} \subset \{n_k(m-1)\} \subset \dots \subset \{n_k(1)\} \subset \mathbb{N}$ так что $\{A_s f_{n_k(m)}\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная $\forall s = 1 \dots m$. Тогда рассмотрим $\{A_{m+1} f_{n_k(m)}\}$, тогда, используя компактность, $\exists \{n_k(m+1)\} \subset \{n_k(m)\}$ такой, что $n_1(m+1) < n_2(m+1) < \dots$ такая, что $\{A_{m+1} f_{n_k(m+1)}\}$ фундаментальная. Остальные же сохранили фундаментальность, так как мы перешли к подпоследовательности фундаментальной последовательности, которая также фундаментальна. Таким образом мы по индукции реализовали счётный набор последовательностей натуральных чисел. Рассмотрим $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$. $n_{k+1} \geq n_{k+1}(k)$ по построению и $n_{k+1}(k) > n_k(k)$ по определению, тогда $\{n_k(k)\}_{k=1}^{\infty}$ строго возрастающая последовательность чисел. Тогда $\{f_{n_k(k)}\}$ — фундаментальная подпоследовательность. Рассмотрим действие оператора $T$ на эту подпоследовательность. Надо доказать, что мало при большом $p$

$$\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)}\|$$

Добавим умный ноль

$$\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)} \pm A_s f_{n_k(k)} \pm A_s f_{n_{k+p}(k+P}\|$$

Какое $s$ надо взять? $\|f_n\| \leq R$ по условию, тогда

$$\|f_n\| \leq R \; \forall n\colon \forall \varepsilon > 0 \; \exists S(\varepsilon)\colon \forall s \geq S(\varepsilon) \; \|T - A_s\| \leq \frac{\varepsilon}{R+1}$$

$A_s f_{n_k(m)}$ — фундаментальна по $k$ если $s \geq m$. Возмём $s = S(\varepsilon)$ и $k \geq S(\varepsilon)$. Следовательно получается, что $A_s f_{n_k(k)}$, если $k \geq S(\varepsilon)$ — подпоследовательность $A_s f_{n_k(S(\varepsilon))}$, которая фундаментальная и значит наша подпоследовательность также фундаментальна. Получаем, что

$$\|(T - A_{S(\varepsilon)}) f_{n_k(k)}\| \leq \frac{\varepsilon}{R+1}$$

Аналогично

$$\|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \frac{\varepsilon}{R+1}$$

А из фундаментальности

$$\|A_{S(\varepsilon)}f_{n_k(k)} - A_{S(\varepsilon)}f_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \varepsilon$$

Итого имеем

$$\begin{aligned}
&\|Tf_{n_k(k)} - Tf_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \\
&\leq \|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_k(k)}\| + \|(T - A_{S(\varepsilon)})f_{n_{k+p}(k+p)}\| + \|A_{S(\varepsilon)}f_{n_k(k)} - A_{S(\varepsilon)}f_{n_{k+p}(k+p)}\| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{R+1} + \frac{\varepsilon}{R+1} + \varepsilon \leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Отсюда образ $\|T\|$ содержит фундаментальную подпоследовательность и $\|T\|$ компактен.

Докажем ещё одно свойство компактного оператора.

**Утверждение 5.** *Пусть $A : H \mapsto H$ — компактный оператор и $T : H \mapsto H$ — непрерывный оператор, тогда $TA$ и $AT$ — тоже компактный оператор.*

**Доказательство.** Пусть $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность ,тогда $Af_{n_k}$ — фундаментальная подпоследовательность. Смотрим на $TAf_{n_k}$ и получаем

$$\|TAf_{n_k} - TAf_{n_{k+p}}\| \leq \|T\|\|Af_{n_k} - Af_{n_{k+p}}\|$$

стремиться к нулю, так как $T$ непрерывный следовательно $TAf_{n_k}$ тоже фундаментальная. Расмотрим теперь $ATf_n$. $T$ — непрерывный оператор, $\|f_n\| \leq R$ — ограниченная в $H$, то $Tf_n$ тоже ограниченная

$$\|Tf_n\| \leq \|T\|\|f\| \leq \|T\|\|R\|$$

Отсюда $Tf_n$ ограниченная и по определению $\exists n_k A(Tf_{n_k})$ фундаментальная.

**Пример 3.** Если $A : H \mapsto H$ линейный и непрерывный. Пусть $\dim \operatorname{Im} A < +\infty$ (такой $A$ называется конечномерным). Тогда $A$ — компактный оператор.

Действительно, пусть $f_n$ — ограниченная последовательность, тогда $Af_n$ также ограничен в конечном $\operatorname{Im} A$. Тогда по теореме Больцано — Вейерштрасса $\exists Af_{n_k}$ фундаментальная в $\operatorname{Im} A$.

Покажем вид этих операторов. Если $A$ — линейный и непрерывный и его образ конечномерный, тогда возьмём базис $g_1, \ldots, g_N$ в $\operatorname{Im} A$, где $N = \dim \operatorname{Im} A$. Тогда $Af$ раскладывается

$$Af = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(f) g_k$$

где $\alpha_k$ линейный и непрерывный функционал. Если мы будем скалярно умножать

$$(Af, g_m) = \sum \alpha_k(f)(g_k, g_m)$$

И если мы введём матрицу Грамма

$$\Gamma = ((g_k, g_m))_{k,m=1}^{N}$$

Тогда получается, что это всё равно, что

$$\begin{pmatrix} (Af, g_1) \\ \dots \\ (Af, g_N) \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \dots \\ \alpha_N(f) \end{pmatrix}$$

Матрица $\Gamma$ не вырожденена в силу линейной независимости $g_1, \dots g_N$ и тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(f) \\ \dots \\ \alpha_N(f) \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} (Af, g_1) \\ \dots \\ (Af, g_N) \end{pmatrix}$$

где правая часть непрерывна по $f$ в $H$. Отсюда $\alpha_k(f) : H \mapsto \mathbb{C}$ линеен и непрерывен, а значит по теореме Рисса — Фреше

$$\alpha_k(f) = (f, h_k) \quad \exists! h_k \in H$$

Отсюда

$$Af = \sum_{k=1}^{N} (f, h_k) g_k$$

где $h_k, g_k \in H$ и $k = 1 \dots N$

**Пример 4.** В случае $H = L_2(G)$, тогда $h_k(x), g_k(x) \in L_2(G)$ и

$$Af = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_G f(y)\overline{h_k(y)}\, dy\, g_k(x)$$

Иначе

$$Af = \int\limits_G \left( \sum_{k=1}^{N} \overline{h_k(y)} g_k(x) \right) f(y)\, dy$$

Если взять предел последовательности конечномерных операторов $\{A_n\}$ такие, что $A_n \to T$ по операторной норме, тогда $T$ также будет компактным.

**Утверждение 6.** *$T$ — компактный оператор в гильбертовом пространстве $H$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon$ — конечномерные операторы и $\|T - A_\varepsilon\| \le \varepsilon$*

В 1972 году датский математик Энфло доказал, что существуют $X$ — полные линейные непрерывные пространства и $A: X \mapsto X$ компактный оператор, не апроксимирующийся конечномерым.

**Доказательство.** Посмотрим на множество $TB_1(0)$ — образ шара, $B_1(0) = \{f \in H \mid \|f\| \le 1\}$. Любая последовательность $Tf_n$, где $f_n \in B_1(0)$ имеет фундаментальную подпоследовательность $Tf_{n_k}$, тогда утверждается, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists g_1, \dots, g_N \in TB_1(0)\colon TB_1(0) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_\varepsilon(g_k)$, где $B_\varepsilon(g_k)$ называют эпсилон-сетью.

Если вдруг $\exists \varepsilon_0\colon \forall g_1, \dots, g_N \in TB_1(0)\colon TB_1(0) \not\subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{N} B_\varepsilon(g_k)$. Пусть $f_1 \in B_1(0)$ и $g_1 = Tf_1$, тогда $B_{\varepsilon_0}(g_1) \not\supseteq TB_1(0)$, следовательно $\exists g_2 \in TB_1(0) \setminus B_{\varepsilon_0}(g_1)$, а значит $\exists f_2 \in B_1(0)\colon g_2 = Tf_2$ и так далее. Если есть $f_1 \dots f_n \in B_1(0)$, таких, что

$$\|Tf_k - Tf_s\| \ge \varepsilon_0$$

где $1 \le k \ne s \le n$. То эти функции порождают набор $g_k = Tf_k$ и эти функции после объединения шаров не вместят образ шара, а значит существует $f_{n+1} \in B_1(0)\colon Tf_{n+1} \not\subseteq B_{\varepsilon_0}(g_k)$. Таким образом

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_1(0)\colon \|Tf_k - Tf_s\| \ge \varepsilon_0$$

а значит нет фундаментальной подпоследовательности в $\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$, хотя $f_k$ ограничена. Получаем противоречие.

Пользуясь этой эпсилон-сетью займёмся апроксимацией. Пусть $L_N = \operatorname{Lin}\{g_1, \dots g_N\}$ — конечномерное пространство, а значит замкнутое в $H$. Следовательно $\exists P_N$ — ортопроектор из $H$ на $L_N$ и $L_N \oplus L_N^\perp = H$ и соответственно $P_N h = h_N \in L_N$. Норма $\|P_N\| = 1$. Рассмотрим теперь оператор $A_\varepsilon = P_N T$. Образ $\operatorname{Im} A_\varepsilon \subset L_N$ и

$$A_\varepsilon h = P_N T h \quad \forall n \in H$$

поэтому $A_\varepsilon$ конечномерен и непрерывен как суперпозиция непрерывных. Возьмём $\forall f\colon \|f\| = 1$, $Tf \in TB_1(0)$, значит $\exists g_k\colon \|Tf - g_k\| \le \varepsilon$ и отсюда

$$\begin{aligned}
&\|Tf - A_\varepsilon f\| = \|Tf + g_k - g_k - A_\varepsilon f\| \le \\
&\qquad \le \varepsilon + \|g_k - A_\varepsilon\| = \varepsilon + \|P_N g_k - P_N T f\| \le \\
&\qquad\qquad \le \varepsilon \|P_N(g_k - T_f)\| \le \varepsilon + \|g_k - Tf\| \le 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по [ссылке]

**Пример 5.** Пусть $H = L_2(G)$, где $G$ — компакт в $\mathbb{R}^m$ и $A : L_2(G) \mapsto L_2(G)$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_G K(t,x)f(t)\,dt$$

где $K \in L_2(G \times G)$. Ранее получено, что $\|A\| \le \|K\|_{L_2(G\times G)}$. Утверждается, что $A$ компактен. $L_2(G \times G)$ — пополнение $C(G \times G)$, $C$ — компакт с нормой $L_2$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists F_\varepsilon(t,x) \in C(G \times G)$: $\|K - F_\varepsilon\|_{L_2(G\times G)} \le \varepsilon$.

**Теорема 1 (Стоун, Вейерштрасс (см. Рудин «Основы математического анализа»)).** *Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ — компакт функция $F \in C(D)$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists P : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{C}$ комплексный многочлен $n$ переменных такой, что $\|F - P\|_C = \max\limits_{x\in D} |F(x) - P(x)| \le \varepsilon$*

Применяем теорему Стоуна — Вейерштрасса: $\exists P$ многочлен

$$\max_{G\times G} |F_\varepsilon - P| \le \frac{\varepsilon}{\mu(G\times G) + 1}$$

следовательно

$$\|F_\varepsilon - P\|_{L_2(G\times G)} \le \max_{G\times G} |F_\varepsilon - P| \sqrt{\mu(G\times G)} \le \varepsilon$$

Таким образом мы строим оператор

$$A_\varepsilon f = \int\limits_G P(t,x)f(t)\,dt$$

Тогда $\operatorname{Im} A_\varepsilon$ конечномерен и

$$\|A_\varepsilon - A\| \le \|K - P \pm F_\varepsilon\|_{L_2(G\times G)} \le 2\varepsilon$$

**Упражнение 3.** *Пусть $A : L_2(G) \mapsto L_2(\mathbb{R})$ имеет вид*

$$Af(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(t-x)^2} f(t)\,dt = (e^{-x^2} * f)(x)$$

*Тогда $\|A\| \le \|e^{-x^2}\|_{L_2(\mathbb{R})}$. Показать, что $A$ не компактный оператор.*