Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

Задача Штурма-Лиувиля

Пусть оператор A задан, как:

$$A = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)I, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

где $a(x), b(x), c(x) \in C[\alpha, \beta]$ — вещественнозначные функции, причём $a \neq 0\ \forall x \in [\alpha, \beta]$. Область определения оператора A:

$$D(A) = \left\{ u \in C^2[\alpha, \beta] \;\middle|\; \begin{array}{ll} \mu_1 u'(\alpha) + \nu_1 u(\alpha) = 0 & (1) \\ \mu_2 u'(\beta) + \nu_2 u(\beta) = 0 & (2) \end{array} \right\}$$

где $\mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$ $k = 1, 2$ и

$$|\mu_1| + |\nu_1| > 0$$
$$|\mu_2| + |\nu_2| > 0$$

Оператор A действует $A : D(A) \mapsto L_2[\alpha, \beta]$, где $L_2[\alpha, \beta] = H$ и $D(A) \subset H$, причём $\overline{D(A)} = H$.

Утверждение . $\ker A = 0$ *равносильно тому, что существует фундаментальная система решений уравнения*

$$\begin{cases} Av = 0 \\ v \in C^2[\alpha, \beta] \end{cases}$$

$\{v_1, v_2\} \subset C^2[\alpha, \beta]$, $\forall k$ $Av_k = 0$ *и* v_1 *удовлетворяет (1), но не удовлетворяет (2), и* v_2 *удовлетворяет (2), но не удовлетворяет (1).*

Доказательство. Граничные условия, определяющие v_1 и v_2 эквивалентны заданию задачи для Коши. $v_1 \neq 0$ и $v_1 \in C^2[\alpha, \beta]$

$$\begin{cases} Av_1 = 0 \\ v_1(\alpha) = \mu_1 \\ v_1'(\alpha) = -\nu_1 \end{cases}$$

И соответственно $v_2 \neq 0$ и $v_2 \in C^2[\alpha, \beta]$

$$\begin{cases} Av_2 = 0 \\ v_2(\beta) = \mu_2 \\ v_2'(\beta) = -\nu_2 \end{cases}$$

Так как $\mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$ и a, b, c — вещественнозначные функции, то и v_1 и v_2 вещественнозначные. Тогда решение уравнения

$$\begin{cases} Au = 0 \\ u \in C^2[\alpha, \beta] \end{cases}$$

принимает вид $u = C_1 v_1 + C_2 v_2$ в силу независимости v_1 и v_2. Поэтому ядро $\ker A = 0$.

Когда $\ker A = 0$ надо построить $A^{-1} : \operatorname{Im} A \mapsto D(A)$, верно ли, что $\operatorname{Im} A = C[\alpha, \beta]$? Существует ли $u \in D(A)$: $Au = f \in C[\alpha, \beta]$. Если существует, то единственность автоматически следует из $\ker A = 0$. Ищем решение в виде $u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$, где $C_1, C_2 \in C^2[\alpha, \beta]$.

$$\begin{cases} C_1' v_1 + C_2' v_2 = 0 \\ a(C_1' v_1' + C_2' v_2') = f \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix}$$

на $[\alpha, \beta]$. Тогда определитель Вронского

$$w = \det \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} = \text{const} e^{-\int \frac{b}{a} dx}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{wa} f \\ \frac{v_1}{wa} f \end{pmatrix}$$

В итоге

$$C_1(x) = \int\limits_x^\beta \frac{v_2(t)}{w(t)a(t)} f(t) dt + D_1$$
$$C_2(x) = \int\limits_\alpha^x \frac{v_1(t)}{w(t)a(t)} f(t) dt + D_2$$

Получаем соответственно

$$u(x) = \int\limits_\alpha^x \frac{v_1(t)v_2(x)}{a(t)w(t)} f(t) dt + \int\limits_x^\beta \frac{v_1(x)v_2(t)}{a(t)w(t)} f(t) dt + D_1 + D_2$$

Используем, что $u \in D(A)$. Подставим в первое граничное условие:

$$\mu_1(\frac{v_1(\alpha)v_2(\alpha)}{(aw)(\alpha)}f(\alpha) + \int\limits_\alpha^\alpha \frac{v_1(t)v_2'(\alpha)}{a(t)w(t)}f(t)dt +$$

$$+ (-1)\frac{v_1(\alpha)v_2(\alpha)}{(aw)(\alpha)}f(\alpha) + \int\limits_\alpha^\beta \frac{v_1'(\alpha)v_2(t)}{a(t)w(t)}f(t)dt + D_1v_1'(\alpha) + D_2v_2'(\alpha)) +$$

$$+ \nu_1(\int\limits_\alpha^\beta \frac{v_1(\alpha)v_2(t)}{a(t)w(t)}f(t)dt + D_1v_1(\alpha) + D_2v_2(\alpha)) = 0$$

Упрощаем и получаем

$$(\mu_1v_1'(\alpha) + \nu_1v_1(\alpha))\int\limits_\alpha^\beta \frac{v_1'(\alpha)v_2(t)}{a(t)w(t)}f(t)dt +$$

$$+ D_1(\mu_1v_1'(\alpha) + \nu_1v_1(\alpha)) + D_2(\mu_1v_2'(\alpha)) + \nu_1v_2(\alpha)) = 0$$

Отсюда $D_2 = 0$. Теперь подставим во второе граничное условие

$$\mu_2(\frac{v_1(\beta)v_2(\beta)}{(aw)(\beta)}f(\beta) + \int\limits_\alpha^\beta \frac{v_1(t)v_2'(\beta)}{a(t)w(t)}f(t)dt +$$

$$+ (-1)\frac{v_1(\beta)v_2(\beta}{(aw)(\beta)}f(\beta) + \int\limits_\beta^\beta \frac{v_1'(\beta))v_2(t)}{a(t)w(t)}f(t)dt + D_1v_1'(\alpha)) +$$

$$+ \nu_2(\int\limits_\alpha^\beta \frac{v_1(t)v_2(\beta)}{a(t)w(t)}f(t)dt + D_1v_1(\beta)) = 0$$

Тогда

$$(\mu_2v_2'(\beta) + \nu_2v_2(\beta))\int\limits_\alpha^\beta \frac{v_1(t)}{a(t)w(t)}f(t)dt +$$

$$+ D_1((\mu_2v_1'(\beta) + \nu_2v_1(\beta)) = 0$$

А значит и $D_1 = 0$. Осталось проверить, что $u \in C^2[\alpha,\beta]$. $\forall x \in [\alpha,\beta]$

$$u'(x) = (\frac{v_1 v_2}{aw} f)(x) + \int\limits_\alpha^x \frac{v_1(t)v_2'(x)}{a(t)w(t)} f(t)dt -$$

$$- (\frac{v_1 v_2}{aw} f)(x) + \int\limits_x^\beta \frac{v_2(t)v_1'(x)}{a(t)w(t)} f(t)dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^x \frac{v_1(t)v_2'(x)}{a(t)w(t)} f(t)dt + \int\limits_x^\beta \frac{v_2(t)v_1'(x)}{a(t)w(t)} f(t)dt$$

Так как $v_1', v_2' \in C^1[\alpha,\beta]$ и интеграл от функций в $C[\alpha,\beta]$, то $u' \in C^1[\alpha,\beta]$, а значит $u \in C^2[\alpha,\beta]$. Таким образом для любая непрерывная функция f порождает решение, значит действительно $\operatorname{Im} A = C[\alpha,\beta]$.

Определим теперь $T : L_2[\alpha,\beta] \mapsto L_2[\alpha,\beta]$.

$$(Tf)(x) = \int\limits_\alpha^\beta K(t,x) f(t)dt \quad f \in L_2[\alpha,\beta]$$

где

$$K(t,x) = \frac{1}{(aw)(t)} \begin{cases} v_1(t)v_2(x) & \alpha \le t \le x \le \beta \\ v_1(x)v_2(t) & \alpha \le x \le t \le \beta \end{cases}$$

$K(t,x) \in C^2[\alpha,\beta]^2) \subset L_2([\alpha,\beta]^2)$. Далее $\operatorname{Im} T \subset C[\alpha,\beta] = \operatorname{Im} A$ и $T|_{C[\alpha,\beta]} = A^{-1}$. $\forall f \in C[\alpha,\beta]$:

$$\begin{cases} Au = f \\ u \in D(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = Tf \in D(A) \\ f \in C[\alpha,\beta] \end{cases}$$

Наблюдение (когда T — самосопряжённый оператор). *Так как a, b, c — вещественнозначный и $\mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2$, то v_1, v_2 — вещественнозначные, а значит и K также вещественнозначная. Таким образом условием самоспряжённости для T является $K(t,x) = K(x,t)$ $\forall t,x \in [\alpha,\beta]$.*

Этому условию препятствует $\dfrac{1}{(aw)(t)}$, поэтому нужно, чтобы это была бы константа. $aw = \text{const}$ на $[\alpha,\beta]$, если $a \in C^1[\alpha,\beta]$ и $a'(x) = b(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int \frac{b}{a} dx = \int \frac{a'}{a} dx = \ln|a|$$

тогда

$$w = \text{const} e^{-\ln|a|} = \frac{\text{const}}{|a|}$$

на $[\alpha, \beta]$. Так как $|a| = a \operatorname{sgn}(a)$ и $a \neq 0\ \forall x \in [\alpha, \beta]$ и $a \in C^1[\alpha, \beta]$, то $\operatorname{sgn}(a) \equiv \text{const}$

$$w = \frac{\text{const}}{a}$$

значит $aw = \text{const}$ на $[\alpha, \beta]$. При $a' = b$ оператор A имеет вид

$$(Au)(x) = \frac{d}{dx}(a(x)\frac{d}{dx}u(x)) + c(x)u(x)$$

Такой оператор является симметричным на $D(A)$, а значит и T является самосопряжённым в H.

Пусть $a' = b$ и T — компактный самосопряжённый оператор. Тогда по теореме Гильберта — Шмидта в H существует ортогональный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2[\alpha, \beta]$ из собственных функций T, то есть $Te_k = \lambda_k e_k$, где $\lambda_k \neq 0$ так как $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$, где $(\operatorname{Im} T)^{\perp} \subset (D(A))^{\perp} = \left(\overline{D(A)}\right)^{\perp} = H^{\perp} = 0$. $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ — набор собственных значений, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. $\ker T_{\lambda_k}$ — конечномерный по 1-ой теореме Фредгольма. Пусть $\dim \ker T_{\lambda_k} = m_\lambda$. $e_{1,k} \ldots e_{m_k,k}$ — ортогональный базис в $\ker T_{\lambda_k}$, $Te_{i,k} = \lambda_k e_{i,k}$, $i = 1 \ldots m_k$. $\{e_{i,k}\}_{i=1\ldots m_k}^{k=1\ldots N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Так как $L_2[\alpha, \beta] = H$ бесконечномерно и T_{λ_k} конечномерно, то N должно быть равно $+\infty$. Тогда $\lambda_k \to 0$ $k \to +\infty$ по 4-ой теореме Фредгольма и $\lambda_k \in \mathbb{R}$ так как T — самосопряжённый.

Утверждение . *$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i = 1 \ldots m_k$ $e_{i,k} \in D(A)$ и $Ae_{i,k} = \frac{1}{\lambda_k} e_{i,k}$, то есть $\{e_{i,k}\}_{i=1\ldots m_k}^{k=1\ldots N}$ — ортогональный базис в H из собственных функций A.*

Доказательство. $Te_{i,k} = \lambda_k e_{i,k}$, где $\lambda_k \neq 0$. Тогда $e_{i,k} = \frac{1}{\lambda_k} Te_{i,k}$. $\operatorname{Im} T \subset C[\alpha, \beta] = \operatorname{Im} A \Rightarrow e_{i,k} \in C[\alpha, \beta]$. С учётом того, что $T|_{C[\alpha,\beta]} = A^{-1} : C[\alpha, \beta] \mapsto D(A)$ получаем $Te_{i,k} \in D(A)$, значит $e_{i,k} \in D(A)$. А значит $Ae_{i,k} = \frac{1}{\lambda_k} AA^{-1} e_{i,k} = \frac{1}{\lambda_k} e_{i,k}$.

Конспект набран с рукописных конспектов лекций, поэтому возможны смысловые ошибки и некоторые потери. Актуальная версия по ссылке

Теорема 1 (Стеклова). *Пусть* $a \in C^1[\alpha, \beta]$, $b = a'$, $c \in C[\alpha, \beta]$. *Пусть* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *и* $\mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$ *и пусть существует специальная фундаментальная система решений* A *(то есть* $\ker A = 0$*). Тогда а)* A *обладает в* H *ортогональным базисом из своих собственных функций, отвечающих различным собственным значениям* $\frac{1}{\lambda_k}$, $\lambda_k \to 0$. *б)* $\forall \lambda \neq \frac{1}{\lambda_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}; \forall f \in C[\alpha, \beta]$ $\exists! u \in D(A)$ *уравнения*

$$\left\{\begin{aligned} &Au = \lambda u + f \\ &u \in D(A) \end{aligned}\right\}$$

такое, что

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_{i,k}}{\frac{1}{\lambda_k} - \lambda} e_{i,k}$$

сходящаяся в $H = L_2[\alpha, \beta]$, *где* $f_{i,k} = \dfrac{(f, e_{i,k})}{(e_{i,k}, e_{i,k})}$.

Доказательство. а) уже доказано. Докажем б). Помним, что $\forall g \in C[\alpha, \beta]$ уравнение

$$\begin{cases} Au = g \\ u \in D(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = Tg \in D(A) \\ g \in C[\alpha, \beta] \end{cases}$$

А так как $\lambda u + f \in C[\alpha, \beta]$, то

$$\begin{cases} Au = \lambda u + f \\ u \in D(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \lambda T u + T f \in D(A) \\ f \in C[\alpha, \beta] \\ u \in C[\alpha, \beta] \end{cases}$$

В обратную сторону рассмотрим уравнение

$$u = \lambda T u + T f$$

для $u \in L_2[\alpha, \beta]$. Это уравнение Фредгольма второго рода. $f \in C[\alpha, \beta]$, то помним, что $Tu \in C[\alpha, \beta]$, так как $\operatorname{Im} T \subset C[\alpha, \beta]$, а значит Tu и Tf автоматически из $C[\alpha, \beta]$. Следовательно $u \in C[\alpha, \beta]$, поэтому

$$\begin{cases} u = \lambda T u + T f \in D(A) \\ f \in C[\alpha, \beta] \\ u \in C[\alpha, \beta] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Au = \lambda u + f \\ u \in D(A) \\ f \in C[\alpha, \beta] \end{cases}$$

Таким образом $Au = \lambda u + f$, $u \in D(A)$ и $f \in C[\alpha, \beta]$ равносильно

$$\begin{cases} u = \lambda T u + T f \in D(A) \\ f \in C[\alpha, \beta] \\ u \in H \end{cases}$$

Разложим

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} u_{i,k} e_{i,k}$$
$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} f_{i,k} e_{i,k}$$

и подставим в $u = \lambda T u + T f$. Так как

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} u_{i,k} T e_{i,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} u_{i,k} \lambda_k e_{i,k}$$

сходится в H.

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} f_{i,k} T e_{i,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} f_{i,k} \lambda_k e_{i,k}$$

Получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} u_{i,k} e_{i,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_k (\lambda u_{i,k} + f_{i,k}) e_{i,k}$$

Следовательно

$$u_{i,k}(1 - \lambda\lambda_k) = \lambda_k f_{i,k}$$

значит

$$u_{i,k} = \frac{f_{i,k}}{\frac{1}{\lambda_k} - \lambda}$$

Так как A симметрична на $D(A)$, то

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{(Au, e_{i,k})}{(e_{i,k}, e_{i,k})} e_{i,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{(u, Ae_{i,k})}{(e_{i,k}, e_{i,k})} e_{i,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{\lambda_k} \frac{(u, e_{i,k})}{(e_{i,k}, e_{i,k})} e_{i,k} =$$

а $\dfrac{(u, e_{i,k})}{(e_{i,k}, e_{i,k})} = u_{i,k} = \dfrac{f_{i,k}}{\frac{1}{\lambda_k} - \lambda}$. Значит

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_{i,k}}{1 - \lambda\lambda_k} e_{i,k}$$

сходится в H.

$$\|Au\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{|f_{i,k}|^2}{|1 - \lambda_k \lambda|^2} \le +\infty \|e_{i,k}\|^2$$

$|f_{i,k}|^2\|e_{i,k}\|^2$ член сходящегося ряда, так как $f \in H$. $u \in D(A)$, значит $\exists Au \in C[\alpha, \beta] \in H$ что как будто бы

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_k} u_{i,k} A e_{i,k}$$

Как будто потому что на самом деле A разрывный оператор, а такое свойство появилось в силу симметричности на $D(A)$.

Собственные функции оператора Лапласа в круге с однородными граничными условиями

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей. $H = L_2(G)$, $\Delta : D(A) \mapsto H$, $D(\Delta) \subset H$.

$$D(\Delta) = \left\{u \in C^2(\overline{G}) \mid u|_{\partial G} = 0\right\}$$

Можно также использовать

$$D_1(\Delta) = \left\{u \in C^2(\overline{G}) \mid \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = 0\right\}$$

где n — единичный нормальный вектор на ∂G.

Утверждение . Δ — *симметричный отрицательно определённый оператор на* $D(\Delta)$ *(на* $D_1(\Delta)$ *он симметричный и отрицательно полуопределённый).*

Доказательство. Пусть $u, v \in D(\Delta)$

$$(\Delta u, v) = \int\limits_G \Delta u \overline{v} dxdy = \int\limits_G (u_{xx}\overline{v} + u_{yy}\overline{v})dxdy$$

Используем формулу Грина

$$\oint\limits_{\partial G} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_G (Q_x - P_y)dxdy$$

и получаем

$$\int\limits_G u_{xx}\overline{v}dxdy = \int\limits_G ((u_x\overline{v})'_x - u_x v_x)dxdy$$

Аналогично

$$\int\limits_G u_{yy}\overline{v}dxdy = \int\limits_G ((u_y\overline{v})'_y - u_y v_y)dxdy$$

В итоге

$$(\Delta u, v) = \int\limits_G \Delta u\overline{v}dxdy = \int\limits_G (u_{xx}\overline{v} + u_{yy}\overline{v})dxdy =$$

$$= \int\limits_G ((u_x\overline{v})'_x + (u_{yy}\overline{v})'_y)dxdy - \int\limits_G (u_x v_x + u_y v_y)dxdy =$$

$$= \oint\limits_{\partial G} \overline{v}(u_x\, dy - u_y\, dx) - \int\limits_G (\nabla u, \nabla v)dxydy$$

Пусть $r(t)$ задаёт границу ∂G. Пусть $r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, тогда единичная нормаль имеет вид $n = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial G} \overline{v}(u_x\, dy - u_y\, dx) - \int\limits_G (\nabla u, \nabla v)dxydy =$$

$$= \oint\limits_{\partial G} \overline{v}(\nabla u, n)|r|\, dt - \int\limits_G (\nabla u, \nabla v)dxydy =$$

$$= \oint\limits_{\partial G} \overline{v}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \int\limits_G (\nabla u, \nabla v)dxydy$$

$u, v \in D(\Delta)$, тогда

$$(\Delta u, v) = -\int\limits_G (\nabla u, \nabla v)dxdy$$

с другой стороны

$$(u, \Delta v) = \overline{(\Delta u, v)} = -\int\limits_G \overline{(\nabla u, \nabla v)}dxdy = -\int\limits_G (\nabla u, \nabla v)dxdy$$

Значит

$$(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$$

Аналогично для $u, v \in D_1(\Delta)$:

$$(\Delta u, v) = -\int\limits_G (\nabla u, \nabla v) dxdy$$

$$(u, \Delta v) = \overline{(\Delta u, v)} = -\int\limits_G \overline{(\nabla u, \nabla v)} dxdy = -\int\limits_G (\nabla u, \nabla v) dxdy$$

Значит

$$(\Delta u, v) = (u, \Delta v)$$

Теперь пусть $u \in D(\Delta)$, тогда

$$(\Delta u, u) = -\int\limits_G |\nabla u|^2 dxdy \leq 0$$

Так как $|\nabla u|^2 \geq 0$ и $|\nabla u|^2 \in C(\overline{G})$, значит $|\nabla u|^2 = 0$ равносильно $\nabla u \equiv 0$ в G, значит $u \equiv \mathrm{const}$, а так как $u \in D(\Delta)$, то $u \equiv 0$ в G, значит $(\Delta u, u) < 0 \; \forall u \not\equiv 0 \in D(\Delta)$

Если же $u \in D_1(\Delta)$, то

$$(\Delta u, u) = -\int\limits_G |\nabla u|^2 dxdy \leq 0$$

равно нулю при $u = \mathrm{const} \in D_1(\Delta)$

Следствие . *$\Delta : D(\Delta) \mapsto H$ симметрично отрицательно определённый оператор, значит все его собственные значения вещественные и отрицательные, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям ортогональны в H.*

Доказательство. Пусть $\Delta u = \lambda u$, $u \in \mathbb{C}$, $u \in D(\Delta) \setminus \{0\}$. Тогда

$$(\Delta u, u) = \lambda \|u\|^2 = (u, \Delta u) = \overline{\lambda} \|u\|^2$$

значит $\lambda = \overline{\lambda}$. Далее

$$(\Delta u, u) = \lambda \|u\|^2 < 0$$

значит $\lambda < 0$ так как $\|u\|^2 > 0$. Если $v \in D(\Delta) \setminus \{0\}$ и $\Delta v = \mu v$, $\mu \neq \lambda$, то

$$(\Delta u, v) = \lambda(u, v) = (u, \Delta v) = \mu(u, v)$$

Значит $(u, v) = 0$.

Ищем ортогональный базис в $L_2(G)$, где

$$G = C_R(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \right\}$$

из собственных функций $\Delta : D(\Delta) \mapsto H$

$$D(\Delta) = \{u \in C^2(\overline{C}_R(0)) \mid u|_{x^2+y^2=R^2} = 0\}$$

Сделаем замену координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $0 \le r < R$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ Тогда

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

и

$$C_R(0) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le r < R \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array} \right\}$$

Пусть $f = f(r, \varphi) \in L_2(C_R(0))$

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_0^R r \int\limits_0^{2\pi} |f|^2 d\varphi dr}$$

Если бы $f(r, \varphi) = g(r)h(\varphi)$, где $h \in L_2[0, 2\pi] = H_2$ и $g \in L_{2r}[0, R] = H_1 = \{g : [0, R] \mapsto \mathbb{C} \mid \int\limits_0^R r|g(r)|^2 dr \le +\infty\}$, тогда $\|f\|_H = \|g\|_{H_1}\|h\|_{H_2}$. Пусть $g_1, g_2 \in H_1$, тогда

$$(g_1, g_2) = \int\limits_0^R r g_1 \overline{g_2} dr$$

Тогда

$$|(g_1, g_2)| \le \int\limits_0^R \sqrt{r}|g_1|\sqrt{r}|g_2| dr$$

И $\sqrt{r}|g_1|$, и $\sqrt{r}|g_2|$ принадлежат $L_2[0, R]$. Далее по неравенству Коши — Буняковского

$$\int\limits_0^R \sqrt{r}|g_1|\sqrt{r}|g_2| dr \le \sqrt{\int\limits_0^R r|g_1|^2 dr}\sqrt{\int\limits_0^R r|g_2|^2 dr} = \|g_1\|_{H_1}\|g_2\|_{H_1}$$

H_1 — пополнение $C[0,R]$ по норме

$$\|g\| = \sqrt{\int\limits_0^R |r||g^2|dr}$$

Утверждение . $L_{2,r}[0,R] \otimes L_2[0,\pi] = L_2((C_R(0))$, *то есть* $\|g \otimes h\| = \|g\|_{H_1}\|h\|_{H_2}$, *где* $g \otimes h = g(r)h(\varphi)$.

Доказательство. $\forall f \in L_2(C_R(0))$ $\forall \varepsilon > 0$ — это пополнение $C(\overline{C_R(0)})$ по L_2 норме, то $\exists \Psi \in C(\overline{C_R(0)})$: $\|f - \Psi\|_{L_2(C_R(0))} \le \varepsilon$. Так как $C(\overline{C_R(0)})$ — компакт, Ψ — непрерывная на компакте функция, то по теореме Стоуна — Вейерштрасса $\exists P(x,y)$ — многочлен x, y такой, что

$$\max_{C_R(0)} |P - \Psi| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}R}$$

тогда

$$\|P - \Psi\|_{L_2(C_R(0))} \le \sqrt{\int\limits_{C_R(0)} \frac{\varepsilon^2}{\pi R^2}} = \varepsilon$$

Но

$$P(x,y) = P(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \\ = \sum_{k=1}^N \alpha_k x^{m_k} y^{n_k} = \sum_{k=1}^N \alpha_k r^{n_k+m_k} \cos^{m_k}\varphi \sin^{n_k}\varphi = \\ = \sum_{k=1}^N g_k(r)h_k(\varphi) \in L_{2,r}[0,R] \otimes L_2[0,2\pi]$$

Обозначим $P(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = w$, тогда

$$\|f - w\|_{L_2(C_R(0))} = \|f - \Psi + \Psi - w\|_{L_2(C_R(0))} \le \|f - \Psi\|_{L_2(C_R(0))} + \|\Psi - w\|_{L_2(C_R(0))} \le 2\varepsilon$$

Тогда пусть $M = \{\sum\limits_{k=1}^N \alpha_k g_k \otimes h_k\}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, тогда $\overline{M} = L_2(C_R(0))$, так как любая функция из f приближается сколько угодно мало функцией из M. С другой стороны $\overline{M} = L_{2,r}[0,R] \otimes L_2[0,2\pi]$, значит $L_{2,r}[0,R] \otimes L_2[0,2\pi] = L_2(C_R(0))$.

Нам известно, что в $L_2[0,2\pi]$ есть ортогональный базис

$$\{1, \cos k\varphi, \sin k\varphi \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Можно обозначить базисные функции, как $e_k(\varphi)$, где $e_k(\varphi) = \cos k\varphi, k \geq 0$ и $e_k(\varphi) = \sin k\varphi, k < 0$, или иначе $e_k(\varphi) = e^{\imath k\varphi}, k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} e_k(\varphi) = -k^2 e_k(\varphi)$$

Ищем собственные функции $v(r)e_k(\varphi) \in H, v \in C^2[0,R], v(R) = 0, v(r)e_k(\varphi) \in D(\Delta)$.

$$\Delta v(r)e_k(\varphi) = (v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{k^2}{r^2}v)e_k = \lambda v e_k, \quad \lambda < 0$$

Обозначим A_k

$$A_k = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}$$

$A_k : D(A_k) \mapsto L_{2,r}[0,R]$, где

$$D(A_k) = \left\{ v \in C^2[0,R] \;\middle|\; \begin{matrix} v(R) = 0 \\ A_k(v) \in L_{2,r}[0,R] \end{matrix} \right\}$$

В $D(A_k)$ заведомо выполнено, что $v(0) = 0$, значит $v(r) = O(r), r \to +0$. $A_k v = \lambda v$, $v \in D(A_k) \setminus \{0\}$, $\lambda < 0$.

Существует ли $\{v_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в $L_{2,r}[0,R]$? Если вдруг удастся построить ортогональный базис $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\{v_{k,m}\}_{m=1}^{\infty} \subset D(A_k)$ в $L_{2,r}[0,R]$, $A_k v_{k,m} = \lambda_{k,m} v_{k,m}$, $\lambda_{k,m} < 0$, тогда $u_{k,m} = v_{k,m}(r)e_k(\varphi) \in D(\Delta)$ — это собственные функции Δ отвечающие $\lambda_{k,m}$.

$$(v_{k,m} \otimes e_k, v_{\tilde{k},\tilde{m}} \otimes e_{\tilde{k}})_{L_2(C_R(0))} = (v_{k,m}, v_{\tilde{k},\tilde{m}})_{L_{2,r}[0,R]}(e_k, e_{\tilde{k}})_{L_2[0,2\pi]}$$

равно нулю при $m \neq \tilde{m}$ или $k \neq \tilde{k}$, таким образом $v_{k,m} \perp v_{k,\tilde{m}}$ при $m \neq \tilde{m}$ в $L_{2,r}[0,R]$, значит система действительно ортогональная.

Утверждение . *Пусть H_1 и H_2 — два гильбертовых пространства. Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортогональный базис в H_2 и пусть $\forall k \in \mathbb{Z}$ система $\{v_{k,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ — ортогональный базис в H_1, тогда $\{v_{k,m} \otimes e_k\}$ — ортогональный базис в $H_1 \otimes H_2$.*

Доказательство. Надо доказать полноту ортогональный системы $\{v_{k,m} \otimes e_k\}_{k,m}$ в $H_1 \otimes H_2$ то есть $\forall f \in H_1 \otimes H_2$ $\forall \varepsilon > 0$ по определению $H_1 \otimes H_2$ $\exists g = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \otimes v_k$ то $\|f - g\|_{H_1 \otimes H_2} \leq \varepsilon$. $v_k \in H_2$ приближается с любой заданной точностью $\delta > 0$ линейной комбинацией $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$

$$\|v_k - \sum_{i=1}^{M_k} \beta_{k,i} e_i\|_{H_2} \leq \delta$$

значит

$$\|f-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k u_k\otimes\left(\sum_{i=1}^{M_k}\beta_{k,i}e_i\right)\| =$$

$$= \|f-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k u_k\otimes\left(\sum_{i=1}^{M_k}\beta_{k,i}e_i\right)+g-g\| \le$$

$$\le \varepsilon+\|\sum_{k=1}^{N}\alpha_k u_k\otimes\left(v_k-\sum_{i=1}^{M_k}\beta_{k,i}e_i\right)\| \le$$

$$\le \varepsilon+\delta\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k|\|u_k\|_{H_1}$$

хотим, чтобы было бы меньше, чем 2ε, тогда $\delta>0$ и

$$\delta<\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{N}|\alpha_k|\|u_k\|_{H_1}+1}$$

Таким образом

$$\|f-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M_k}\alpha_k\beta_{k,i}u_k\otimes e_i\|_{H_1\otimes H_2}=\|f-w\|_{H_1\otimes H_2}\le 2\varepsilon$$

С точность $\gamma>0$ для каждого $i=1\dots M_k$, $k=1\dots N$ приблизим u_k конечной линейной комбинацией $\{v_{i,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ — ортогональный базис в H_1, $u_k\in H_1$.

$$\|u_k-\sum_{j=1}^{L_{k,i}}\gamma_{k,i,j}v_{i,j}\|_{H_1}\le\gamma$$

Тогда

$$\|f - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M_k}\sum_{j=1}^{L_{k,i}} \alpha_k \beta_{k,i\gamma_{k,i,j}} v_{i,j} \otimes e_i\| =$$

$$= \|f - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M_k}\sum_{j=1}^{L_{k,i}} \alpha_k \beta_{k,i\gamma_{k,i,j}} v_{i,j} \otimes e_i + w - w\| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M_k} |\alpha||\beta_{k,i}|\|u_k - \sum_{j=1}^{L_{k,i}} \gamma_{k,i,j} v_{i,j}\|_{H_1}\|e_i\|_{H_2} =$$

$$= 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M_k} |\alpha||\beta_{k,i}|\gamma\|e_i\|_{H_2}$$

Пусть

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{M_k} |\alpha||\beta_{k,i}|\|e_i\|_{H_2} + 1}$$

тогда

$$\|f - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{M_k}\sum_{j=1}^{L_{k,i}} \alpha_k \beta_{k,i\gamma_{k,i,j}} v_{i,j} \otimes e_i\| \leq 3\varepsilon$$

таким образом наша система полная, значит образует базис.