

# Теория компактных операторов в гильбертовом пространстве.

**Напоминание .** Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A : H \mapsto H$  линейный непрерывный оператор.  $A$  называется компактным, если  $\forall \{f_n\} \subset H$  такой, что  $\|f_n\| \leq R \forall n$  следует  $\exists A f_{n_k}$  — фундаментальная в  $H$  подпоследовательность или, что равносильно  $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon : H \mapsto H$  линейный и непрерывный и  $\dim \operatorname{Im} A_\varepsilon < +\infty$ , тогда  $\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ .

Для прикладных целей пусть  $A$  — компактный оператор и  $\lambda \in \mathbb{C}$ , и  $f \in H$ .

$$(I - \lambda A)u = f$$

где  $u \in H$  и нужно найти  $u$ .

Из компактности  $\forall \varepsilon > 0 : \varepsilon |\lambda| < 1 \exists A_\varepsilon : H \mapsto H$  — линейный и непрерывный оператор,  $\dim \operatorname{Im} A_\varepsilon < +\infty$  и  $\|A_\varepsilon - A\| < \varepsilon$ . Тогда

$$(I - \lambda A) = (I - \lambda A \pm \lambda A_\varepsilon) = (I - \lambda(A - A_\varepsilon) - \lambda A_\varepsilon)$$

Обозначим  $\lambda(A - A_\varepsilon)$  как  $T_\varepsilon(\lambda)$ .

$$\|T_\varepsilon(\lambda)\| = \|\lambda\| \|A - A_\varepsilon\| \leq |\lambda| \varepsilon < 1$$

$A$  значит по теореме Неймана  $\exists (I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} : H \mapsto H$  линейный и непрерывный и

$$(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varepsilon(\lambda))^n$$

ряд сходящийся по операторной норме. Уравнение

$$(I - \lambda A)u = f$$

называется уравнением Фредгольма 2-го рода. Оно равносильно выражению

$$(I - T_\varepsilon(\lambda) - \lambda A_\varepsilon)u = f$$

Разобьём полученное выражение

$$(I - T_\varepsilon(\lambda))(I - \lambda(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1} A_\varepsilon)u = f$$

Обозначим  $(I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1}$  как  $L_\varepsilon(\lambda)$  Получаем

$$(I - \lambda L_\varepsilon(\lambda) A_\varepsilon)u = f_\varepsilon(\lambda) = L_\varepsilon(\lambda) f$$

Обозначим  $C_\varepsilon(\lambda) = L_\varepsilon(\lambda)A_\varepsilon$ . Этот оператор линейно непрерывный и его образ изоморфен образу  $A_\varepsilon$ . Отсюда  $\dim C_\varepsilon = \dim A_\varepsilon$ .

**Утверждение 1.**  $A$  — компактный оператор в  $H$ , тогда  $A^*$  также компактный оператор в  $H$ .

**Доказательство.** Рассмотрим оператор такой, что

$$\forall \varepsilon \exists A_\varepsilon: A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^N (f, h_k) g_k \quad h_k, g_k \in H$$

Тогда  $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$ .

$$\|A^* - A_\varepsilon^*\| = \|(A - A_\varepsilon)^*\| = \|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$$

Надо показать, что  $A_\varepsilon^*$  — компактный оператор. Покажем, что

$$A_\varepsilon^* g = \sum_{k=1}^N (g, g_k) h_k$$

так как

$$\begin{aligned} (f, A_\varepsilon^* g) &= (A_\varepsilon f, g) = \sum_{k=1}^N (f, h_k) (g_k, g) = \\ &= \sum_{k=1}^N (f, (g, g_k) h_k) = (f, \sum_{k=1}^N (g, g_k) h_k) = (f, A_\varepsilon^* g) \end{aligned}$$

Получаем, что  $\dim A_\varepsilon^* \leq N \subset \text{Lin}(h_1, \dots, h_N)$ . Следовательно  $A_\varepsilon^*$  — компактный оператор.

**Теорема 1 (первая теорема Фредгольма).** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$  и  $\lambda \neq 0$ , тогда  $\dim \ker A_\lambda < +\infty$ , где  $A_\lambda = A - \lambda I$

**Доказательство.** Заметим, что, во-первых, если  $L \subset H$  подпространство и  $\dim \ker L < +\infty$ , то это равносильно тому, что для любой ограниченной последовательности из  $L$  имеет фундаментальную подпоследовательность. В прямую сторону это следует из теоремы Больцано — Вейерштрасса. Покажем справедливость в обратную сторону. Если вдруг  $\dim L = +\infty$ , то  $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty$  последовательность линейно независимых векторов. Подвергнем её процедуре ортогонализации Грамма — Шмидта и получим  $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset L$ , и  $g_m \perp g_n$   $n \neq m$ , и  $g_n = \text{Lin}\{f_1, \dots, f_n\}$  так как

$$\begin{aligned} 0 \neq g_1 &= f_1 \\ 0 \neq g_2 &= f_2 + \alpha g_1 \perp g_1 \\ &\vdots \\ 0 \neq g_n &= f_n + p_1 g_1 + \dots + p_{n-1} g_{n-1} \perp g_1, \dots, g_{n-1} \end{aligned}$$

Строим  $h_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$ . Тогда  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$  — ортонормированная последовательность в  $L$ , а значит не имеет фундаментальной подпоследовательности, так как

$$\|h_n - h_m\|^2 = \|h_n\|^2 + \|h_m\|^2 = 2 \quad n \neq m$$

получили противоречие с условием, что  $\forall \{f_n\} \subset \ker A_\lambda$  — ограниченная последовательность.  $Af_{n_k}$  — фундаментальная последовательность образов в силу компактности  $A$ .

$$A_\lambda f_{n_k} = Af_{n_k} - \lambda f_{n_k} \equiv 0$$

Следовательно  $f_{n_k} = \frac{1}{\lambda} Af_{n_k}$  — автоматически фундаментальная.

**Лемма 1.** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$  и  $\lambda \neq 0$ . Тогда  $\text{Im } A_\lambda$  замкнуто в  $H$ .

**Доказательство.** Имеем, что  $\ker A_\lambda \oplus (\ker A_\lambda)^\perp = H$ . Образ  $\text{Im } A_\lambda$  символически равен

$$A_\lambda(H) = A_\lambda(\ker A_\lambda) + A_\lambda((\ker A_\lambda)^\perp) = A_\lambda((\ker A_\lambda)^\perp)$$

Покажем, что  $\exists k > 0: \forall f \in (\ker A_\lambda)^\perp$  выполняется  $\|A_\lambda f\| \geq k\|f\|$ . Отсюда вытекает, что  $\exists A_\lambda : \frac{1}{k}(\ker A_\lambda)^\perp \mapsto \text{Im } A_\lambda$  такой что

$$\|f\| = \|(A_\lambda)^{-1} A_\lambda f\| \leq \frac{1}{k} \|A_\lambda f\|$$

и следовательно

$$\|(A_\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{k}$$

Если показать существование такого  $k$ , то получим, что  $\forall g \in \overline{\text{Im } A_\lambda} = \overline{A_\lambda((\ker A_\lambda)^\perp)}$   $\exists f_n \in (\ker A_\lambda)^\perp: g = \lim_{n \rightarrow \infty} A_\lambda f_n$  в  $H$ . Тогда

$$\|A_\lambda f_n - A_\lambda f_m\| \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

С другой стороны

$$\|A_\lambda f_n - A_\lambda f_m\| = \|A_\lambda(f_n - f_m)\| \geq k\|f_n - f_m\|$$

Поэтому

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

Следовательно, так как  $H$  — полное

$$f_n \rightarrow h \in H$$

Следовательно

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} A_\lambda f_n = A_\lambda h \in \text{Im } A_\lambda$$

Теперь увидим, что  $k > 0$  действительно существует. Если вдруг такого  $k > 0$  нет, то  $\forall k > 0 \exists f_k \in (\ker A_\lambda)^\perp: \|A_\lambda f_k\| < k\|f_k\| \quad f_k \neq 0$ . Пусть  $k = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , тогда  $f_k = f_{\frac{1}{n}}$  и

$$\|A_\lambda \frac{f_{\frac{1}{n}}}{\|f_{\frac{1}{n}}\|}\| \leq \frac{1}{n}$$

Введём  $g_n = \frac{f_{\frac{1}{n}}}{\|f_{\frac{1}{n}}\|} \in H$  и  $\|g_n\| = 1$ . Тогда

$$\begin{cases} \|A_\lambda g_n\| < \frac{1}{n} & \forall n \in \mathbb{N} \\ \|g_n\| = 1 \end{cases}$$

Следовательно  $A_\lambda g_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $A$  — компактный оператор, то  $\exists Ag_{n_m}$  — фундаментальная подпоследовательность в  $H$ , а значит сходится  $Ag_{n_m} \rightarrow h \in H$ . Тогда

$$\begin{cases} A_\lambda g_{n_m} \rightarrow 0 \\ Ag_{n_m} \rightarrow h \end{cases}$$

И тогда

$$g_{n_m} = \frac{Ag_{n_m} - A_\lambda g_{n_m}}{\lambda} \rightarrow \frac{h}{\lambda}$$

С другой стороны в  $H$   $A_\lambda g_{n_m} \rightarrow A_\lambda \frac{h}{\lambda}$  следовательно  $A_\lambda h = 0$  и  $h$  лежит в ядре  $\ker A_\lambda$ . Но  $g_{n_m} \in (\ker A_\lambda)^\perp$  — замкнутое подпространство в  $H$ . И  $g_{n_m} \rightarrow \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \frac{h}{\lambda} \in (\ker A_\lambda)^\perp \Rightarrow h \in (\ker A_\lambda)^\perp$ . Таким образом  $h = 0$ ,  $\|g_{n_m}\| = 1$  и

$$|\|\frac{h}{\lambda}\| - \|g_{n_m}\|| \leq \|\frac{h}{\lambda} - g_{n_m}\| \rightarrow 0$$

Значит  $\frac{\|h\|}{|\lambda|} = 1 \Rightarrow \|h\| = |\lambda| > 0$ . Противоречие.

**Вопрос .**  $A$  — компактный оператор в  $H$ ;  $\dim H = \infty$ , то  $0 \in \sigma(A)$

Если вдруг  $0 \notin \sigma(A)$  то есть  $0 \in \rho(A)$ . Это равносильно  $\exists A^{-1} : H \mapsto H$ . Суперпозиция непрерывного и компактного оператора также компактный оператор.

$$A^{-1}A = I : H \mapsto H$$

Значит  $I$  также компактный оператор, а значит  $\forall f_n \in H$  ограниченной  $If_n = f_n$  существует  $\exists If_{n_k} = f_{n_k}$  фундаментальная подпоследовательность, значит  $H$  конечномерный — противоречие с  $\dim H = \infty$

**Теорема 2 (третья теорема Фредгольма).** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$ ,  $\lambda \neq 0$ , тогда  $\operatorname{Im} A_\lambda = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp = (\ker A_\lambda^*)^\perp$ , где  $(A_\lambda)^* = A^* - (\lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda}I$ . То есть уравнение  $A_\lambda u = f$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $f \in (\ker(A_\lambda)^*)^\perp$ , иначе говоря  $(f, v) = 0 \forall v \in H: (A_\lambda)^* v = 0 \Leftrightarrow A^* v - \bar{\lambda}v = 0$  — однородное союзное уравнение. Раскроем подробнее.  $\lambda \neq 0$  и  $(I - \lambda A)u = f$

$$\operatorname{Im}(I - \lambda A) = \operatorname{Im}(-\lambda)(A - \frac{I}{\lambda}) = \operatorname{Im} A_{\frac{1}{\lambda}} = (\ker(A_{\frac{1}{\lambda}})^*)^\perp = (\ker(I - \bar{\lambda}A^*))^\perp$$

$f \in (I - \lambda A) \Leftrightarrow f \in (\ker(I - \bar{\lambda}A^*))^\perp$ , тогда  $(f, v) = 0 \forall f \in H$  и  $v = \bar{\lambda}A^*v$  — однородное союзное уравнение.

**Доказательство.** Как было уже показано  $\ker(A_\lambda)^* = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$ , что равносильно  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = (\ker(A_\lambda)^*)^\perp$ . А по лемме 1  $\overline{\operatorname{Im} A_\lambda} = \operatorname{Im} A_\lambda$ , что и требовалось доказать.

**Следствие (альтернатива Фредгольма).** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$ ;  $\lambda \neq 0$ , то  $\forall f \in H \exists u \in H: A_\lambda u = f$ , либо  $\exists v \in H v \neq 0: (A_\lambda)^* v = 0$

**Доказательство.** Либо  $\ker(A_\lambda)^* = 0$  и тогда по теореме Фредгольма  $\operatorname{Im} A_\lambda = H$ , а по второй теореме Фредгольма тогда  $\ker A_\lambda = 0$  следовательно  $\forall f \in H \exists u \in H: A_\lambda u = f$

Либо  $\ker(A_\lambda)^* \neq 0$  (и по второй теореме Фредгольма  $\ker A_\lambda \neq 0$  и  $\lambda \in \sigma_P(A)$ ), тогда  $v \in \ker(A_\lambda)^* v \neq 0$ .

**Теорема 3 (вторая теорема Фредгольма).** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$  и  $\lambda \neq 0$ , тогда  $\dim \ker A_\lambda = \dim \ker(A_\lambda)^*$ , где  $\dim \ker A_\lambda$  конечномерен по 1-ой теореме Фредгольма.

**Лемма 2.**  $A$  — компактный оператор в  $H$  и  $\lambda \neq 0 \in \sigma_P(A)$ , тогда  $\operatorname{Im} A_\lambda \neq H$ .

**Пример 1.**  $A: H \mapsto H$  — линейный непрерывный и не компактный оператор.  $\lambda \in \sigma_P(A)$ ,  $\lambda \neq 0$  и  $\ker A_\lambda \neq 0$ , тогда может быть, что  $\operatorname{Im} A_\lambda = H$ .

Пусть  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  — ортонормированный базис в  $H$  ( $H = L_2[0, 1]$  и  $e_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x, k \in \mathbb{N}$ ). Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(f) e_k, \quad \alpha_k(f) = (f, e_k)$$

По равенству Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(f)|^2$$

Пусть оператор  $T$  действует как

$$Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k+1}(f)e_k$$

Тогда

$$\|Tf\| = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} |\alpha_k(f)|^2} \leq \|f\|$$

Норма  $\|T\| \leq 1$ .  $Te_2 = e_1$ , тогда

$$\|T\| \geq \|Te_2\| = \|e_1\| = 1$$

Отсюда  $\|T\| = 1$ . Пусть  $f \in \ker T$ , что равносильно  $\alpha_k(f) = 0 \forall k \geq 2$ , значит  $f = \text{Lin}\{e_1\}$ . Тогда  $\forall g \in H$

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(f)e_k$$

$$\text{и } \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k(f)|^2 < \infty.$$

$$\exists f = \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{k-1}(f)e_k \in H$$

что  $Tf = g$ , значит  $\text{Im } T = H$ . Пусть  $A = T + I$ ,  $\lambda = 1$ . Тогда  $A_\lambda = T + I - I = T$ . Отсюда  $\ker A_\lambda = \ker T \neq 0$ , но  $\text{Im } A_\lambda = H = \text{Im } T = H$ .

Докажем теперь лемму.

**Доказательство.** Если вдруг  $\text{Im } A_\lambda = H$ , тогда можно показать последовательность замкнутых подпространств.

$$0 \neq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq L_3 \subsetneq \dots \subsetneq L_n \subsetneq \dots$$

и  $A_\lambda L_n \subset L_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ . Если указать, то тогда существует последовательность  $\{f_n\}$ :

$$\begin{aligned} 0 \neq f_1 &\in L_1 \\ 0 \neq f_2 &\in L_2 \cap L_1^\perp \\ 0 \neq f_n &\in L_n \cap L_{n-1}^\perp \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Пусть теперь  $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ ,  $g_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$ ,  $g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$ .  $\{g_n\}$  также ограниченная последовательность в  $H$ .  $\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|Ag_n - Ag_{n+p} \pm \lambda g_n \pm \lambda g_{n+p}\| &= \\ &= \|A_\lambda g_n - A_\lambda g_{n+p} + \lambda g_n - \lambda g_{n+p}\| = \\ &= |\lambda| \left\| \frac{A_\lambda g_n - A_\lambda g_{n+p} + \lambda g_n}{\lambda} - g_{n+p} \right\| \geq \\ &\geq |\lambda| \|g_{n+p}\| = |\lambda| \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|Ag_n - Ag_{n+p}\| > |\lambda| > 0$$

Следовательно  $Ag_n$  не содержит фундаментальную подпоследовательность.

Рассмотрим  $L_n = \ker(A_\lambda)^n$ , тогда  $L_1 = \ker A_\lambda \neq 0$  по условию так как  $\lambda \in \sigma_P(A)$ . Верно ли, что  $\forall n \in \mathbb{N} L_n \subsetneq L_{n+1}$ ? Пусть  $f \in L_n$ , тогда  $(A_\lambda)^n f = 0$ , значит  $A_\lambda(A_\lambda)^n f = (A_\lambda)^{n+1} f = 0$ , следовательно  $f \in L_{n+1}$ . По условию  $\exists f_1 \in L_1 \setminus \{0\}$ , тогда по предположению  $\exists f_2 \in H$ :

$$A_\lambda f_2 = f_1 \neq 0$$

$\Rightarrow f_2 \notin L_1$ , но

$$(A_\lambda)^2 f_2 = A_\lambda f_1 = 0$$

отсюда  $f_2 \in L_2 \setminus L_1$ .  $f_n \neq 0$   $f_n \in L_n$ , тогда  $\exists f_{n+1} \in H$ :

$$A_\lambda f_{n+1} = f_n \neq 0$$

Следует ли  $f_{n+1} \notin L_n$ ?

$$(A_\lambda)^n A_\lambda f_{n+1} = (A_\lambda)^{n+1} f_{n+1} = 0$$

Тогда  $f_{n+1} \in L_{n+1} \setminus L_n$ .  $f \in L_n \Leftrightarrow (A_\lambda)^n f = 0$ ,  $g = A_\lambda f$ , тогда

$$(A_\lambda)^{n-1} g = (A_\lambda)^n f = 0$$

значит  $g \in L_{n-1}$ . Таким образом получили противоречие с тем, что  $A$  компактный оператор.

Перейдём теперь к доказательству второй теоремы Фредгольма.

**Доказательство.** По теореме Фредгольма для произвольного непрерывного оператора

$$\begin{aligned} \ker A_\lambda &= (\operatorname{Im}(A_\lambda)^*)^\perp \\ \ker(A_\lambda)^* &= (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \end{aligned}$$

Если увидим, что  $\dim \ker A_\lambda \leq \dim(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$ , то это аналогично для сопряжённого оператора  $\dim \ker(A_\lambda)^* \leq \dim(\operatorname{Im}(A_\lambda)^*)^\perp = \dim(\operatorname{Im} A_\lambda^*)^\perp$  и  $\bar{\lambda} \neq 0$  и  $A^*$  — компактный оператор. Тогда  $\dim \ker A_\lambda \leq \dim \ker(A_\lambda)^*$  и  $\dim \ker(A_\lambda)^* \leq \dim \ker A_\lambda$  и доказательство будет завершено.

Если вдруг  $\dim \ker A_\lambda \dim(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp \geq 0$ , тогда  $\lambda \in \sigma_P(A) \setminus \{0\}$ . Из первой теоремы Фредгольма  $\ker A_\lambda$  конечномерен и  $(\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$  также конечномерен и меньшей размерности.  $\exists \Phi : \ker A_\lambda \mapsto (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$  линейный конечномерный  $\ker \Phi \neq 0$ . Оператор  $\Phi$  будет компактный в конечномерном гильбертовом пространстве так как по теореме Больцано — Вейерштрасса все линейные операторы являются компактными. Рассмотрим  $P : H \mapsto \ker A_\lambda$ , где  $\ker A_\lambda \neq 0$ , ортопроектор.  $\ker A_\lambda \oplus (\ker A_\lambda)^\perp = H$  и  $\|P\| = 1$ . Смотрим на

$$T = A + \Phi P$$

так как  $A$  компактен,  $\Phi$  также компактен и  $P$  линеен, то  $T$  компактный оператор. Рассмотрим

$$T_\lambda = A_\lambda + \Phi P$$

так как  $\ker \Phi \neq 0$ , то  $\exists f_0 \neq 0 \in \ker A_\lambda$  такой, что  $\Phi f_0 = 0$  и  $P f_0 = f_0$ . Тогда

$$T_\lambda f_0 = A_\lambda f_0 + \Phi P f_0 = 0$$

Таким образом  $0 \neq f_0 \in \ker T_\lambda$ , значит  $0 \neq \lambda \in \sigma_P(T)$ .

$$\operatorname{Im} T_\lambda = T_\lambda(H) = A_\lambda(H) + \Phi P(\ker A_\lambda)$$

$A_\lambda(H) = \operatorname{Im} A_\lambda$ , которое замкнуто по лемме 1, и

$$\Phi P(\ker A_\lambda) = \Phi \ker A_\lambda = (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp$$

Также  $H = \ker A_\lambda + (\ker A_\lambda)^\perp$  и по теореме Рисса об ортогональном разложении

$$\operatorname{Im} T_\lambda = \operatorname{Im} A_\lambda + (\operatorname{Im} A_\lambda)^\perp = H$$

Следовательно  $\operatorname{Im} T_\lambda = H$ . Получили противоречие с леммой 2.

**Теорема 4 (4-ая теорема Фредгольма).** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  множество

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \lambda \in \sigma_P(A) \\ |\lambda| > \varepsilon \end{array} \right\}$$

содержит конечное число элементов или пусто.

**Доказательство.** Если  $\exists \varepsilon > 0$ :  $\Lambda_{\varepsilon_0}$  содержит счётное и больше элементов, тогда  $\exists \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda_{\varepsilon_0}$  и  $\lambda_n \neq \lambda_m$  при  $n \neq m$ ,  $\lambda_n \in \sigma_P(A)$ . Из курса линейной



алгебры известно, что если  $f_k \in \ker A_{\lambda_k}, k = 1 \dots N$ , то  $\{f_1, \dots, f_N\}$  линейно независимы. Рассмотрим  $L_n = \text{Lin}\{f_1 \dots f_N\}$ . Оператор  $A : L_n \mapsto L_n$ . Рассмотрим последовательность  $L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq L_3 \subsetneq \dots$  и  $L_N$  — замкнутое конечномерное подпространство в  $H$ . Покажем, что  $A_{\lambda_N} L_N \subset L_{N-1}$  при  $N \geq 2$

$$A_{\lambda_N} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i \right) = (A - \lambda_N I) \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_N f_i = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_N) f_i \in L_{N-1}$$

Теперь как в доказательстве леммы 2 для подпространств  $\{L_n\}_{n=1}^\infty$  строим ортонормированную систему  $g_N \in L_N \cap (L_{N-1})^\perp$ , где  $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \in L_1$  и  $\|g_N\| = 1, N \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \|Ag_N - Ag_{N+p} \pm \lambda_N g_N \pm \lambda_{N+p} g_{N+p}\| &= \\ &= |\lambda_{N+p}| \left\| \frac{A_{\lambda_N} g_N - A_{\lambda_{N+p}} g_{N+p} + \lambda_N g_N}{\lambda_{N+}} - g_{N+p} \right\| \geq |\lambda_{N+p}| \|g_{N+p}\| \geq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|Ag_N - Ag_{N+p}\| \geq \varepsilon_0$$

Следовательно  $\{Ag_N\}$  не содержит фундаментальную подпоследовательность — противоречие с тем, что  $A$  — компактный оператор.

**Следствие (теорема о спектре компактного оператора).** Пусть  $A$  — компактный оператор в  $H$ , то  $\sigma(A)$  — не более, чем счётное множество.  $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_P(A)$ .  $\sigma(A)$  имеет не более одной предельной точки и эта точка — ноль.  
**Доказательство.**  $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$  и если вдруг  $\lambda \notin \sigma_P(A)$ , то есть  $\ker A_\lambda = 0$ , тогда по 2-ой теореме Фредгольма  $\ker(A_\lambda)^* = 0$ , тогда по 3-ей теореме Фредгольма  $\text{Im } A_\lambda = (\ker A_\lambda^*)^\perp = H$ , следовательно  $\lambda \in \rho(A)$  — противоречие. Следовательно  $\lambda \in \sigma_P(A)$ . По 4-ой теореме Фредгольма  $\sigma_P(A)$  не более чем счётно, следовательно  $\sigma(A)$  не более чем счётно если  $\dim H = +\infty$ , следовательно  $0 \in \sigma(A)$ . Если  $\sigma_P(A)$  счётно, то  $\exists \{\lambda\}_{n=1}^\infty = \sigma_P(A) \setminus \{0\}$ , а по 4-ой теореме Фредгольма  $\lambda_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно  $0$  — предельная точка спектра.