Спектр и резольвентное множество линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве $A : H \mapsto H$.

Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный оператор. Тождественный оператор $I : H \mapsto H$ ($If = f\ \forall f \in H$). Далее $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ A_\lambda = A - \lambda I$. Резольвентное множество

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (A_\lambda)^{-1} : H \mapsto H\}$$

где $(A_\lambda)^{-1}$ — линейный и непрерывный и по теореме Банаха об обратном операторе

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda = 0, \operatorname{Im} A_\lambda = H\}$$

Тогда $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — спектр,

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \left[\begin{array}{l} \ker A_\lambda \neq 0 \\ \begin{cases} \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \end{array} \right. \right\}$$

Точечный спектр оператора A; это $\lambda \in \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker A_\lambda \neq 0\}$ называют собственными значениями A. Непрерывный спектр в свою очередь

$$\sigma_C(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \ker A_\lambda = 0 \\ \operatorname{Im} A_\lambda \neq H \end{cases} \right\}$$

Очевидно $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_C(A)$. Резольвента $R_A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1} : H \mapsto H$, также используется определение $\forall \lambda \neq 0$: $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A)\ -\frac{1}{\lambda}(A - \frac{I}{\lambda})^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(A_{\frac{1}{\lambda}})^{-1}$

Теорема 1. *Пусть $A : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный, тогда*

1. *$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ такой, что $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. При этом $(A_\lambda)^{-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$, причём ряд сходиться по операторной норме.*
2. *$\rho(A)$ — открыто в $\mathbb{C}$ (очевидно следует, что спект — замкнутое множество, а так же $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda \leq \|A\|\}$, поэтому спектр — компакт).*
3. *Функция от λ $(A_\lambda)^{-1}$ непрерывна на $\rho(A)$ по операторной норме*
4. *$\forall \lambda \in \rho(A)\ \exists \lim\limits_{\text{по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = ((A_\lambda)^{-1})^2$*

Доказательство.

1. $|\lambda| > \|A\|$, то

$$A_\lambda = -\lambda(I - \frac{A}{\lambda}$$

где $\frac{A}{\lambda}$ обозначим T, $\|T\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$ По теореме Неймана $\exists$ оператор непрерывный в H

$$(A_\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{A}{\lambda})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

ряд сходится по операторной норме.

2. Так как существует $\exists (A_\lambda)^{-1}$ линейный и непрерывный. $\forall \lambda \in \rho(A)$ рассмотрим

$$A_{\lambda+\Delta\lambda} = A_\lambda - \Delta\lambda I = A_\lambda(I - \Delta\lambda (A_\lambda)^{-1})$$

. Обозначим $T = \Delta\lambda (A_\lambda)^{-1}$, тогда

$$\exists \Delta\lambda \colon \|T\| = |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\| < 1$$

Тогда

$$\Delta\lambda < \frac{1}{(A_\lambda)^{-1}}$$

следовательно $\exists (A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} : H \mapsto H$ линейный и непрерывный, следовательно $\lambda + \Delta\lambda \in \rho(A)$.

3. $\lambda \in \rho(A) \colon \lambda \to (A_\lambda)^{-1}$. Рассмотрим

$$(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = (I - \Delta\lambda (A_\lambda)^{-1})(A_\lambda)^{-1} - (A_\lambda)^{-1}$$

рассскладываем по Нейману

$$A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta\lambda)^n ((A_\lambda)^{-1})^{n+1}$$

Учтём, что $\|((A_\lambda)^{-1})^{n+1}\| \leq \|(A_\lambda)^{-1}\|^{n+1}$. Отсюда

$$\|(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\lambda|^n \|((A_\lambda)^{-1})^{n+1}\| \leq |\Delta\lambda| \frac{\|(A_\lambda)^{-1}\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\|}$$

где $|\Delta\lambda| \frac{\|(A_\lambda)^{-1}\|^2}{1 - |\Delta\lambda| \|(A_\lambda)^{-1}\|} \to 0$ $\Delta\lambda \to 0$. Следовательно непрерывен по операторной норме

4. $\lambda \in \rho(A)$ $|\Delta\lambda| < \frac{1}{\|(A_\lambda)^{-1}\|}$, тогда получим тождество Гильберта

$$(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = (A_\lambda)^{-1}(A_\lambda - A_{\lambda+\Delta\lambda})(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}$$

где очевидным образом $A_\lambda - A_{\lambda+\Delta\lambda} = \Delta\lambda I$. По этому

$$(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1} = \Delta\lambda (A_\lambda)^{-1}(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}$$

Рассмотрим теперь предел

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0 \text{ по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} =$$

$$= \lim_{\Delta\lambda \to 0 \text{ по операторной норме}} (A_\lambda)^{-1}(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}$$

А по п.3 $(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} \to (A_\lambda)^{-1}$ поэтому

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0 \text{ по операторной норме}} \frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1} - (A_\lambda)^{-1}}{\Delta\lambda} = (A_\lambda)^{-1}(A_\lambda)^{-1}$$

Следствие 1. *$\sigma(A) \neq \varnothing$, иначе говоря спектр — непустой компакт в $\mathbb{C}$. Определим спектральный радиус $r(A) = \max|\lambda|$. Тогда $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n} \leq \|A\|$.*

Доказательство. 1) Если вдруг спектр пуст $\sigma(A) = \varnothing$, тогда $\forall f, g \in H$ $\forall \lambda \in \rho(A) = \mathbb{C}$. Рассмотрим $F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1}f, g)$ при $|\lambda| > \|A\|$

$$F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1}f, g) = (-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n f}{\lambda^{n+1}}, g)$$

где сумма сходится в H, а скалярное произведение непрерывно H.

$$F(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}} = O(\frac{1}{\lambda}) \quad \lambda \to \infty$$

но в силу п. 4 $F(\lambda)$ регулярная. Действительно, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \Delta\lambda \neq 0$

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{F(\lambda + \Delta\lambda) - F(\lambda)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0} (\frac{(A_{\lambda+\Delta\lambda})^{-1}f - (A_\lambda)^{-1}f}{\Delta\lambda}, g)$$

где первая компонента скалярного произведения сходится по операторной норме к $((A_\lambda)^{-1})^2 f$. По определению $F'(\lambda) = \lim\limits_{\Delta\lambda\to 0} \dots = (((A_\lambda)^{-1})^2 f, g)$ — непрерывно в $\mathbb{C}$. Следовательно $F(\lambda)$ — целая функция, далее $F(\lambda) \to 0$ $\lambda \to \infty$, тогда по теореме Лиувиля из ТФКП $F(\lambda) \equiv 0$, следовательно $\ker(A_\lambda)^{-1} = H$, с другой стороны $\ker(A_\lambda)^{-1} = 0$ так как $(A_\lambda)^{-1}$ имеет обратный A_λ на H, следовательно $H = 0$, получили противоречие.

2) По определению $r(A) = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ существует в $\mathbb{R}$. **Шаг 1**. Докажем $\forall \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(A^n)$. Если вдруг это не так, тогда $\lambda^n \in \rho(A^n) \Rightarrow \exists((A^n)_{\lambda^n})^{-1} : H \mapsto H$ линейный непрерывный оператор. Обозначим его B. Тогда

$$(A^n - \lambda^n I) = (A - \lambda I)(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \dots + \lambda^{n-2}A + \lambda^{n-1}I)$$

Обозначим скобку как $C : H \mapsto H$.

$$B = C(A - \lambda I)$$

Также

$$A^n - \lambda^n I = A_\lambda C$$

следовательно

$$(A^n - \lambda^n I)B = I = A_\lambda C B \Rightarrow \operatorname{Im} A_\lambda = H$$

Далее

$$A_\lambda C B f = f \in H \quad \forall f \in H$$

Следовательно

$$A^n - \lambda^n I = C A_\lambda$$

тогда

$$B(A^n - \lambda^n I) = I = B C A_\lambda \Rightarrow \ker A_\lambda = 0$$

Пусть $f \in \ker A_\lambda \Rightarrow f = BCA_\lambda f = BC(0) = 0$. Из $\operatorname{Im} A_\lambda = H$ и $\ker A_\lambda = 0$ следует по определению, что $\lambda \in \rho(A)$. Получили противоречие условию, что λ в спектре. Отсюда $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$ так как $\rho(A^n) \supset \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| > \|A^n\|\}$. Очевидно тогда, что $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Следовательно

$$|\lambda| \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \Rightarrow r(A) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

. **Шаг 2**. Утверждаем, что $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A\|^n} \leq r(A)$. Для $\forall f, g \in H$ рассмотрим

$$F(\lambda) = ((A_\lambda)^{-1} f, g)$$

$F(\lambda) \to 0, \lambda \to \infty$, регулярная во внешности круга $|\lambda| < r(A)$. $|\lambda| > r(A) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. Так как $|\lambda| > \|A\| \geq r(A)$, то по теореме Неймана

$$F(\lambda) = -\sum_0^\infty \frac{(A^n f, g)}{\lambda^{n+1}}$$

С другой стороны

$$F(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{\lambda^{n+1}} \quad |\lambda| > r(A)$$

$\Rightarrow$ по теореме единственности разложения в ряд Лорана $c_n = -(A^n f, g)\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом $\forall |\lambda| > r(A)$ получаем $\frac{A^n f, g}{\lambda^n}$ — член сходящегося ряда, следовательно

$$\frac{(A^n f, g)}{\lambda^n} \to 0 \quad n \to \infty$$

что равносильно $\forall g \in H\ (g, \frac{A^n f}{\lambda^n}) \to 0, n \to \infty$. $\Phi_n : H \to \mathbb{C}$ линейный и непрерывный оператор, где $\Phi_n(g) = \frac{A^n f}{\lambda^n}$. Норма оператора $\|\Phi_n\| = \frac{\|A^n f\|}{|\lambda^n|}$ сходится к 0 поточечно на H. Отсюда по теореме Банаха-Штейнгаусса $\|\Phi_n\|$ — ограниченная числа последовательность. $\forall f \in H\ \exists M_f > 0 \colon \|\frac{A_n f}{\lambda^n}\| \leq M_f \Rightarrow \{\frac{A_n}{\lambda_n}\}$ — поточечно сходящаяся на H ограниченная последовательность операторов, следовательно по теореме Банаха-Штейнгаусса $\|\frac{A^n}{\lambda^n}\|$ ограниченная числовая последовательность. Следовательно $\exists M > 0 \colon \|\frac{A^n}{\lambda^n}\| \leq M \Rightarrow \forall |\lambda| > r(A)\ \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \sqrt[n]{M}|\lambda|$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq |\lambda| \to r(A) + 0$. Получаем $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, что и требовалось доказать.

Определение 1. *$A : H \mapsto H$ линейно непрерывный оператор, то $A^* : H \mapsto H$ называется сопряжённым к A (эрмитов оператор), если $(Af, g) = (f, A^* g)\ \forall f, g \in H$.*

Утверждение 2. *$\forall A : H \mapsto H$ линейный непрерывный оператор $\exists! A^* = T \colon (Af, g) = (f, Tg)\ \forall f, g \in H$ и $\|T\| = \|A\|$.*

Доказательство. $\forall g \in H$ рассмотрим $f \in H\ f \to (Af, g) = \Phi_g(f)$. $\Phi_g : H \to \mathbb{C}$ линейный и непрерывный. Тогда по теореме Риса-Фреше $\exists! h \in H \colon \Phi_g(f) = (f, h) \Rightarrow \exists! T : H \mapsto H \colon \forall g \in H\ Tg = h_g$ и

$$(Af, g) = (f, h_g) = (f, Tg)$$

Далее

$$\begin{aligned}(Af, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = (f, T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)) = \\ = \overline{\alpha}_1 (Af, g_1) + \overline{\alpha}_2 (Af, g2) = \\ = (f, \alpha_1 T g_1) + (f, \alpha_2 T g_2) \quad \forall f \in H\end{aligned}$$

Следовательно $T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T(g_1) + \alpha_2 T(g_2)$, T — линейный оператор.

$$\|Tg\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tg)| = \sup_{\|f\|=1} |(Af, g)| \leq \sup_{\|f\|=1} \|Af\|\|g\| \leq \|A\|\|g\|$$

С другой стороны

$$\|Af\| = \sup_{\|g\|=1} |(Af, g)| = \sup_{\|g\|=1} |(f, Tg)| \leq \sup_{\|g\|=1} \|f\|\|Tg\| \leq \|f\|\|T\|$$

. Получаем, что T — линейный и непрерывный оператор и $\|T\| = \|A\|$.

Упражнение 1. $A^{**} = A \; \forall A : H \mapsto H$.

Теорема 3 (Фредгольма). *Пусть $A : H \mapsto H$ линейный и непрерывный оператор. Тогда $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ и $(\operatorname{Im} A)^\perp = \ker A^*$.*

Доказательство. Пусть $f \in \ker A \;\Leftrightarrow\; Af = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall g \in H \; (Af, g) = 0 \;\Leftrightarrow\; (f, A^* g) = 0$. $\forall h \in \operatorname{Im} A^* \; (f, h) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \in (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. Второе утверждение доказывается аналогично.

Утверждение 4. *$L \subset H$ — подпространство, тогда $L \subseteq L^{\perp\perp} = \overline{L}$.*

Доказательство. $L^{\perp\perp} \supset L$. С другой стороны из непрерывности скалярного произведения в H имеем $L^{\perp\perp} \subset \overline{L}$. Рассмотрим $\forall f \in L^{\perp\perp}$, тогда $f \in \overline{L}$ и

$$\overline{L} \oplus \overline{L}^\perp = H$$

по теореме Риса об ортогональном дополнении. Покажем, что $\overline{L}^\perp \subset L^\perp$. Пусть последовательность $h_n \in L$ такая, что $h_n \to \Phi \in \overline{L}$. Пусть $g \in L^\perp$, тогда $(h_n, g) = 0$, $h_n \to \Phi$, поэтому $(\Phi, g) = 0 \; \forall \Phi \in \overline{L}$ по непрерывности скалярного произведения. Получаем, что

$$\overline{L} \oplus L^\perp = H$$

Теперь разложим $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \overline{L}$, $f_2 \in L^\perp$ и f перпендикулярен f_2.

$$0 = (f, f_2) = (f_1, f_2) + \|f_2\|^2$$

следовательно $\|f_2\| = 0$, следовательно $f = f_1 \in \overline{L} \Rightarrow L^{\perp\perp} \supset \overline{L}$.

Следствие 1. $\overline{\operatorname{Im} A} = (\ker A^*)^\perp$

Пример 1. Рассмотрим оператор $A : L_2(G) \mapsto L_2(G)$, действующий следующим образом:

$$(Af)(x) = \int\limits_G K(t, x) f(t) dt$$

где $K(t, x) \in L_2(G \times G)$. Рассмотрим скалярное произведение (Af, g)

$$(Af, g) = \int\limits_G dx \int\limits_G dt K(t, x) f(t) \overline{g(x)} = \int\limits_G dt f(t) \int\limits_G dx \overline{K(t, x)} g(x)$$

где $\int\limits_G dx \overline{K(t, x)} g(x) = (A^* g)(t)$.

Расмотрим частный случай. Пусть $A : L_2[0, 1] \mapsto L_2[0, 1]$,

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x f(t) dt$$

Тогда сопряжённый оператор будет иметь вид:

$$(A^*g)(t) = \int\limits_t^1 g(x)dx$$

Образ этого оператора $\operatorname{Im} A^* \supset \{h \in C^1[0,1], h(1) = 0\}$ — всюду плотно в $L_2[0,1]$. Очевидно, что $\overline{ImA^*}^{\perp} = H^{\perp} = 0$

Введём уравнение Фредгольма. $(I - \lambda A)u = f$ $f \in H$ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Пусть $\frac{1}{\lambda} \in \rho(A) \Rightarrow \exists! u = (I - \lambda A)^{-1} f$ и $\overline{\operatorname{Im}(I - \lambda A)} = (\ker(I - \lambda A)^*)^{\perp}$