Резольвента компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве

Пусть $A : H \mapsto H$, $A \neq 0$ — компактный самосопряжённый оператор. H — гильбертово пространство. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ — все нетривиальные собственные значения A. Пусть $\{e_{k,1} \dots e_{k,m_k}\} \in \ker A_{\lambda_k}$ — ортогональный базис в $\ker A_{\lambda_k}$ $\forall n \in 1 \dots N$. Тогда по теореме Гильберта-Шмидта $\{e_{k,j}\}_{j=1\dots m_k}^{k=1\dots N}$ образует ортогональный базис в $(\ker A)^{\perp}$. Тогда $\forall f \in H$ мы можем разложить её на

$$f = f_{\|} + f_{\perp}$$

где $f_{\|} \in \ker A$, $f_{\perp} \in (\ker A)^{\perp}$. Очевидно

$$f_{\|} = P_{\ker A} f$$
$$f_{\perp} = P_{(\ker A)^{\perp}} f$$

с другой стороны, так как в $(\ker A^{\perp}$ существует базис, то

$$f_{\perp} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} e_{kj}$$

Эта сумма сходится в H и

$$\alpha_{kj} = \frac{(f_{\perp}, e_{kj})}{(e_{kj}, e_{kj})}$$

причём $(f_{\perp}, e_{kj}) \equiv (f, e_{kj})$ так как $f_{\|} \perp e_{kj}$. Таким образом

$$P_{kj} g = \frac{(g_{\perp}, e_{kj})}{(e_{kj}, e_{kj})} e_{kj} \quad \forall g \in H$$

$P_{kj} : H \mapsto \mathrm{Lin}\{e_{kj}\}$ — ортопроектор. Можно интерпретировать

$$f_{\perp} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f = P_{(\ker A)^{\perp}} f$$

Оператор A — непрерывный, так как является компактным оператором.

$$Af = Af_{\|} + Af_{\perp}$$

причём $Af_{\|} = 0$ так как $f_{\|} \in \ker A$, поэтому

$$Af = Af_{\perp} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} A e_{kj} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} \lambda_k e_{kj}$$

где $\lambda_k \to 0$ $k \to +\infty$ когда $N = +\infty$ по 4-ой теореме Фредгольма. В итоге можно переписать получившиеся выражение как

$$Af = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f$$

этот ряд сходится поточечно при $N = +\infty$. Формулу

$$A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}$$

называют спектральным разложением оператора A. Если $N = +\infty$, то указанный ряд сходится по операторной норме в силу того, что $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$ если $N = +\infty$. Действительно

$$\|Af - \sum_{k=1}^{S} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| = \| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f - \sum_{k=1}^{S} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| = \| \sum_{k=S+1}^{+\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} e_{kj}\|$$

и далее по равенству Парсеваля

$$\|Af - \sum_{k=1}^{S} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| = \sqrt{\sum_{k=S+1}^{+\infty} \lambda_k^2 \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2} \le \sup_{k>S} |\lambda_k| \sqrt{\sum_{k=S+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2}$$

причём

$$\sqrt{\sum_{k=S+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m_k} |\alpha_{kj}|^2 \|e_{kj}\|^2} = \|f\|$$

Таким образом

$$\|Af - \sum_{k=1}^{S} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f\| \le \sup_{k>S} |\lambda_k| \|f\|$$

и

$$\|A - \sum_{k=1}^{S} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}\| \le \sup_{k>S} |\lambda_k| \to 0 \quad s \to +\infty$$

Построим теперь резольвенту.

$$R_A(\lambda) = (I - \lambda A)^{-1} : H \mapsto H$$

если $\lambda \neq \dfrac{1}{\lambda_k}$ $\forall k = 1 \ldots N$, то есть λ — не характеристическое число A. С одной стороны

$$(I - \lambda A)f = f - \lambda A f = f_{\|} + f_{\perp} - \lambda A f = P_{\ker A} f + P_{(\ker A)^{\perp}} f - \lambda A f$$

Воспользуемся спектральным разложением оператора A и определением $P_{(\ker A)^{\perp}}$ получим

$$(I - \lambda A)f = P_{\ker A} f + P_{(\ker A)^{\perp}} f - \lambda \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} f = P_{\ker A} f + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} (1 - \lambda \lambda_k) P_{kj} f$$

С другой стороны пусть

$$(I - \lambda A)f = g = P_{\ker A} g + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} g$$

Тогда

$$P_{\ker A} f = P_{\ker A} g \quad (f_{\|} = g_{\|})$$
$$(1 - \lambda \lambda_k) P_{kj} f = P_{kj} g$$

где $P_{kj} f = \alpha_{kj} e_{kj}$ и $P_{kj} g = \beta_{kj} e_{kj}$ и

$$\beta_{kj} = \frac{(g, e_{kj})}{(e_{kj}, e_{kj})}$$

Так как $(1 - \lambda \lambda_k \neq 0$, то

$$(1 - \lambda \lambda_k) \alpha_{kj} = \beta_{kj}$$

и

$$\alpha_{kj} = \frac{\beta_{kj}}{1 - \lambda \lambda_k}$$

Таким образом

$$f = R_A(\lambda) g = P_{\ker A} g + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - \lambda \lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj} g$$

и

$$R_A(\lambda) = P_{\ker A} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - \lambda \lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}$$

Если $N = +\infty$, то ряд сходится поточечно, но не операторной норме. Действительно $\forall g \in H$

$$\|R_A(\lambda)g - P_{\ker A}g - \sum_{k=1}^{S} \frac{1}{1-\lambda\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}g\| = \sqrt{\sum_{k=S+1}^{\infty} |\frac{1}{1-\lambda\lambda_k}|^2 \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2}$$

Пусть $g = \dfrac{e_{S+1,1}}{\|e_{S+1,1}\|}$, тогда $\|P_{kj}g\| = 1$ только при $k = S+1$ и $j = 1$, а в остальных случаях ноль. Тогда

$$\|R_A(\lambda)g - P_{\ker A}g - \sum_{k=1}^{S} \frac{1}{1-\lambda\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}g\| = \frac{1}{|1-\lambda\lambda_{S+1}|}$$

Тогда

$$\|P_A(\lambda) - P_{\ker A} - \sum_{k=1}^{S} \frac{1}{1-\lambda\lambda_k} \sum_{j=1}^{m_k} P_{kj}\| \geq \frac{1}{1-\lambda\lambda_{S+1}}$$

и так как $\lambda_{S+1} \to 0$ при $S \to +\infty$, то $\exists S_\lambda$: $|\lambda_{S+1}\lambda| \leq \dfrac{1}{2}$ $\forall S \geq S_\lambda$, тогда $\dfrac{1}{|1-\lambda\lambda_{S+1}|} \geq \dfrac{1}{2}$ и ближе не приблизиться.

Найдём теперь норму резольвенты. $\forall g \in H$

$$\|R_A(\lambda)g\| = \sqrt{\|g_\|\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|1-\lambda\lambda_k|^2} \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2}$$

Введём $d(\lambda) = \sup\limits_{k=1\ldots N} \dfrac{1}{|1-\lambda\lambda_k|}$. Так как при $N = +\infty$ $\lambda_k \to 0$, то $\dfrac{1}{|1-\lambda\lambda_k|} \to 1$ при $k \to +\infty$, поэтому $d(\lambda)$ ограничено.

$$\|R_A(\lambda)g\| \leq \sqrt{\|g_\|\|^2 + \sum_{k=1}^{N} d(\lambda)^2 \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2} \leq \max\{1, d(\lambda)\}\|g\|$$

где

$$\|g\| = \sqrt{\|g_\|\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} \|P_{kj}g\|^2}$$

Таким образом $\|R_A(\lambda)\| \leq \max\{1, d(\lambda)\}$

Упражнение . *Доказать, что* $\|R_A(\lambda)\| = \max\{1, d(\lambda)\}$.
Если $d(\lambda) > 1$, то $\exists k_l\colon d(\lambda) = \lim\limits_{l\to+\infty} \dfrac{1}{1-\lambda\lambda_{k_l}}$. Пусть $g = \dfrac{e_{k_l,1}}{\|e_{k_l,1}\|}$. Так как $d(\lambda) > 1$, то

$$d(\lambda) \geq \|R_A(\lambda)\| \geq \|R_A(\lambda)g_{k_l}\| = \frac{1}{|1-\lambda\lambda_{k_l}|} \to d(\lambda)$$

следовательно $\|R_A(\lambda)\| = d(\lambda)$.

Применение теоремы Гильберта-Шмидта для исследования базисности системы собственных функция дифференциальных операторов

Пример 1. Пусть $A = -i\dfrac{d}{dx}$, $x \in [0, 2\pi]$. $H = L_2[0, 2\pi]$ (оператор L_z в квантовой механике). $A : D(A) \mapsto H$, где $D(A)$ — область определения A, являющиеся подпространством в H.

$$D(A) = \{f \in C'[0, 2\pi] \mid f(0) = e^{\imath\phi} f(2\pi)\}$$

где $\phi \in (0, 2\pi)$ — заданный параметр и $e^{\imath\phi} \neq 1$. Эта область определения соответствует области определения оператора проекции момента импульса при эффекте Ааронова — Бома. Мы ищем

$$Af = \lambda f, \quad f \neq 0 \in D(A), \lambda \in \mathbb{C}$$

Оператор A симметричный на $D(A)$, то есть $(Af, g) = (f, Ag)\ \forall f, g \in D(A)$. Действительно

$$\int\limits_0^{2\pi} \imath f'\overline{g}dx = -\imath f\overline{g}\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \imath f\overline{g'}dx$$

Из условий на f, g:

$$-\imath f\overline{g}\Big|_0^{2\pi} = -\imath f(2\pi)\overline{g}(2\pi) + \imath f(0)\overline{g}(0) =$$
$$= -\imath f(2\pi)\overline{g}(2\pi) + \imath f(2\pi)e^{\imath\phi}\overline{g}(2\pi)e^{-\imath\phi} = 0$$

Таким образом A действительно симметричен.

Утверждение . *Пусть* $T : D(T) \mapsto H$ *— линейный и непрерывный оператор на* $D(T)$ *— подпространство в* H*, тогда все собственные значения* T *действительны и собственные функции для различных собственных значений ортогональны в* H.

Доказательство. Пусть $Tf = \lambda f$ и $f \in D(T) \setminus \{0\}$, тогда

$$(Tf, f) = \lambda(f, f) = (f, Tf) = \overline{\lambda}(f, f)$$

таким образом $\lambda = \overline{\lambda}$. Пусть теперь $Tg = \mu g$ и $\lambda \neq \mu$

$$(Tf, g) = \lambda(f, g) = (f, Tg) = (f, g)\mu$$

Так как $\lambda \neq \mu$, то $(f, g) = 0$, то есть $f \perp g$ в H. Доказательство закончено.

Вернёмся к нашему оператору A. Ищем решение $Af = \lambda f$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$-\imath f' = \lambda f$$
$$f(x) = Ce^{\imath\lambda x}, \quad C \neq 0$$

Используем условия на f и получаем

$$1 = e^{\imath\phi}e^{\imath\lambda 2\pi}$$

Отсюда

$$\phi + 2\pi\lambda_k = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\lambda_k = k - \frac{\phi}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Получили собственные значения A. Тогда собственные функции $f_k(x) \in D(A)$ имеют вид

$$f_k(x) = e^{\imath x(k - \frac{\phi}{2\pi})}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$\ker A = 0$ так как $\lambda = 0$ не собственно значение. Тогда $\exists A^{-1} : \operatorname{Im} A \mapsto D(A)$. Исследуем базисность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — ортогональная система собственных функци A с помощью теоремы Гильберта-Шмитда. $\operatorname{Im} A \subset C[0, 2\pi]$, $\forall g \in C[0, 2\pi]$

$$\begin{cases} f \in D(A) \\ Af = -\imath f' = g \end{cases}$$

справедливо, что

$$\exists! f = \imath \int\limits_0^x g(t)dt + C$$

Получаем, что $\operatorname{Im} A = C[0, 2\pi]$. Из условия на f

$$C = e^{\imath\phi}\left(\imath \int\limits_0^{2\pi} g(t)dt + C\right)$$

Отсюда выражаем константу

$$C = \frac{e^{\imath\phi}}{1-e^{\imath\phi}} \int\limits_0^{2\pi} g(t)dt$$

Таким образом

$$(A^{-1}g)(x) =$$

$$= \left(\imath + \frac{\imath e^{\imath\phi}}{1-e^{\imath\phi}}\right) \int\limits_0^{x} gdt + \frac{\imath e^{\imath\phi}}{1-e^{\imath\phi}} \int\limits_x^{2\pi} gdt =$$

$$= \frac{\imath}{1-e^{\imath\phi}} \int\limits_0^{x} gdt - \frac{\imath}{1-e^{-\imath\phi}} \int\limits_x^{2\pi} gdt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} K(t,x)g(t)dt$$

где

$$K(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\imath}{1-e^{\imath\phi}}, & 0 \le t < x \le 2\pi \\ \dfrac{-\imath}{1-e^{-\imath\phi}}, & 0 \le x < t \le 2\pi \end{cases}, \quad \phi \in (0, 2\pi)$$

$\overline{K(t,x)} = K(x,t)$ для почти всех $t, x \in [0, 2\pi]$. Очевидно $K \in L_2([0,2\pi]^2)$ тогда построим

$$(Tg)(x) = \int\limits_0^{2\pi} K(t,x)g(t)dt$$

$T : L_2[0,2\pi] \mapsto L_2[0,2\pi]$, $\operatorname{Im} T \subset C[0,2\pi] = \operatorname{Im} A$ и $T|_{C[0,2\pi]} = A^{-1}$. По теореме Гильберта-Шмидта в $H = L_2[0,1]$ существует ортогональный базис из собственных функций T.

$\ker T = 0$ так как $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$ по теореме Фредгольма, а так как $T = T^*$ то $\ker T = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Так как $T|_{C[0,2\pi]} = A^{-1}$, то $\operatorname{Im} T \supset A^{-1}(C[0,2\pi]) = D(A)$. Тогда $(\operatorname{Im} T)^\perp \subset (D(A))^\perp = \left(\overline{D(A)}\right)^\perp$. Покажем, что $\overline{D(A)} =$ (A — плотно определённый оператор). Введём

$$D_0 = \{f \in C^1[0,2\pi] \mid f(0) = 0, f(2\pi) = 0\} \subset D(A)$$

$\overline{D_0} = H$ так как $\forall g \in L_2[0,2\pi]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists h \in C[0,2\pi]$: $\|g-h\|_{L_2} \le \varepsilon$. Действительно, по теореме Вейерштрасса $\exists P$ — многочлен такой, что

$$\max_{[0,2\pi]} |h-P| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

тогда

$$\|h-P\|_{L_2} \le \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{2\pi} dx} = \varepsilon$$

Пусть $|P| \le R$ на $[0,2\pi]$. Пусть $f \in D_0$, $|f| \le R$ на $[0,2\pi]$. Пусть также нули многочлена отдалены от 0 и 2π на $0 \le \delta \le 2\pi$, тогда

$$\|f-P\|_{L_2} \le \sqrt{\delta 4R^2 + \delta 4R^2} = \sqrt{8}R\sqrt{\delta} \le \varepsilon$$

Тогда подберём $\delta \le \dfrac{\varepsilon^2}{8R^2}$. В итоге получаем

$$\|f-g\|_{L_2} \le \|f-P\|_{L_2} + \|h-P\|_{L_2} + \|g-h\|_{L_2} \le 3\varepsilon$$

В итоге $\overline{D_0} = H$, значит $\left(\overline{D(A)}\right)^{\perp} = H^{\perp} = 0$, следовательно $0 \in \ker T \subset 0 \Rightarrow \ker T = 0$.

Пусть $\mu \neq 0$ и $Tg = \mu g$, $g \in H \setminus \{0\}$. Это равносильно $g = \dfrac{1}{\mu} Tg$, $Tg \in C[0,2\pi]$, следовательно $g \in C[0,2\pi]$, следовательно $Tg = A^{-1}g \in D(A)$, отсюда $g \in D(A)$. В итоге $g \in D(A)$ и

$$g = \frac{1}{\mu} A^{-1} g \Rightarrow Ag = \frac{1}{\mu} g$$

то есть $\dfrac{1}{\mu}$ — собственное значение A, g — собственная функция A из $D(A)$. Отсюда $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}$ и $g_k = f_k$. По теореме Гильберта-Шмидта все $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортогональный базис.

Просуммируем теперь общие свойства.

Замечание . *Оператор $A : D(A) \mapsto H$ — симметричный оператор на $D(A)$, $D(A)$ — подпространство в H; $\overline{D(A)} = H$; $\ker A = 0$ и $A^{-1} : \operatorname{Im} A \mapsto D(A)$ — непрерывный оператор и $\overline{\operatorname{Im} A} = H$. Тогда $\exists!$ продолжение по непрерывности оператора A^{-1} до $T : H \mapsto H$ — линейный и непрерывный.*

Доказательство. Так как $\|A^{-1}\| < +\infty$, то берём $g \in H$ и $g_n \in \operatorname{Im} A$: $g_n \to g$

$$\|A^{-1}g_n - A^{-1}g_m\| \le \|A^{-1}\| \|g_n - g_m\| \to 0$$

Тогда $A^{-1}g_n \to h$ и определим $h = Tg$. Такое определение корректно, если $\tilde{g}_n \to g, \tilde{g} \in \operatorname{Im} A$

$$\|A^{-1}\tilde{g}_n - A^{-1}\tilde{g}_m\| \leq \|A^{-1}\|\|\tilde{g}_n - g_n\|$$

где $g_n \to g$ и $\tilde{g}_n \to g$, поэтому

$$\|A^{-1}\|\|\tilde{g}_n - g_n\| \to 0$$

Оператор $T : H \mapsto H$ линейный и непрерывный, $T|_{\operatorname{Im} A} = A^{-1}$, поэтому $\|T\| \geq \|A^{-1}\|$. Пусть снова $g_n \in \operatorname{Im} A, g_n \to g$

$$\|Tg\| = \|\lim_{n\to+\infty} A^{-1}g_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|A^{-1}g_n\| \leq \lim_{m\to+\infty} \|A^{-1}\|\|\| \to \|A^{-1}\|\|g\|$$

Таким образом $\|T\| \leq \|A^{-1}\|$, значит $\|T\| = \|A^{-1}\|$.

Утверждение . *T — самосопряжённый оператор в силу симметричности A на $D(A)$*

Доказательство. Рассмотрим (Tg, h), $g, h \in H$. Тогда $\exists g_n, h_n \in \operatorname{Im} A\colon g_n \to g, h_n \to h$ и

$$\begin{aligned}|(Tg,h) - (Tg_n,h_n)| = \\ &= |(Tg,h) \pm (Tg_n,h) - (Tg_n,h_n)| = \\ &= |(Tg - Tg_n, h) + (Tg_n, h - h_n)| \leq \\ &\qquad \leq \|h\|\|T\|\|g - g_n\| + \|Tg_n\|\|h - h_n\| \to 0\end{aligned}$$

отсюда и в силу того, что $Tg_n = A^{-1}g_n$ так $g_n \in \operatorname{Im} A$

$$(Tg,h) = \lim_{n\to+\infty}(Tg_n,h_n) = \lim_{n\to+\infty}(A^{-1}g_n,h_n)$$

Пусть $f_n = A^{-1}g_n$ и $\psi_n = A^{-1}h_n$. Это равносильно $Af_n = g_n$, $A\psi_n = h_n$, $\psi_n, f_n \in D(A)$. Тогда

$$(Tg,h) = \lim_{n\to+\infty}(f_n, A\psi_n) = \lim_{n\to+\infty}(Af_n, \psi_n) = \lim_{n\to+\infty}(g_n, A^{-1}h_n) = (g, Th)$$

аналогично

$$(g,Th) = \lim_{n\to+\infty}(g_n, Th_n) = \lim_{n\to+\infty}(g_n, A^{-1}h_n) = (Tg,h)$$

В итоге

$$(Tg,h) = (g,Th) \quad \forall g,h \in H$$

Потребуем компактность оператора T (например, если A^{-1} компактен на $\operatorname{Im} A$, то T — компактен на H (доказать в качестве упражнения)). Тогда по теореме Гильберта-Шмидта у T есть в H ортогональный базис из собственных функций.

T и A обладают общей системой собственных функций.

$$\begin{cases} Af = \lambda f \\ f \in D(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \lambda A^{-1} f = \lambda T f \\ f \in D(A) \end{cases}$$

$\ker A = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow Tf = \dfrac{1}{\lambda} f, f \in D(A)$. И наоборот, $\ker T = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ так как $T = T^*$

$$(\operatorname{Im} T)^{\perp} \subset (D(A))^{\perp} = \left(\overline{D(A)}\right)^{\perp} = H^{\perp} = 0$$

значит $\ker T = 0$. $Tf = \mu f, f \in H$ и $\mu \neq 0$, следовательно $f = \dfrac{1}{\mu} Tf$.

Потребуем $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Im} A$. Пусть $\dfrac{1}{\mu} Tf \in \operatorname{Im} A$, тогда $f = \dfrac{1}{\mu} Tf \in \operatorname{Im} A$, тогда $Tf = A^{-1} f \in D(A)$, следовательно $f \in D(A)$, значит $f = \dfrac{1}{\mu} A^{-1} f \Rightarrow Af = \dfrac{1}{\mu} f$.

В итоге получили, что ортогональная система всех собственных функций A образует в H ортогональный базис.

Рассмотрим теперь в качестве приложения задачу Штурма-Лиувиля.

$$\begin{aligned} &A = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)I, \quad x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \\ &a, b, c \in C[\alpha, \beta], a \not\equiv 0 \\ &a, b, c : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im} A \subset C[\alpha, \beta]$. Пусть $H = L_2[\alpha, \beta]$ и

$$D(A) = \left\{ f \in C^2[\alpha, \beta] \;\middle|\; \begin{matrix} \mu_1 f'(\alpha) + \nu_1 f(\alpha) = 0 & \quad (1) \\ \mu_2 f'(\beta) + \nu_2 f(\beta) = 0 & \quad (2) \end{matrix} \right\}$$

где

$$\begin{gathered} \mu_k, \nu_k \in \mathbb{R} \\ |\mu_1| + |\nu_1| > 0 \\ |\mu_2| + |\nu_2| > 0 \end{gathered}$$

Поставим теперь задачу: $\forall f \in C[\alpha, \beta]$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ исследовать решение уравнения

$$\begin{cases} Au(x) = \lambda u(x) + f(x), \quad x \in [\alpha, \beta] \\ u \in D(A) \end{cases}$$

Исследуем, когда $\ker A = 0$. Если $\ker A = 0$, то рассмотрим 2 задачи Коши:

$$\begin{cases} Av_1 = 0, \quad v_1 \in C^2[\alpha, \beta] \\ v_1(\alpha) = \mu_1 \\ v_1'(\alpha) = -\nu_1 \end{cases}$$

$\exists! v_1 \not\equiv 0$ удовлетворяет (1). Аналогично

$$\begin{cases} Av_2 = 0, \quad v_2 \in C^2[\alpha, \beta] \\ v_2(\alpha) = \mu_2 \\ v_2'(\alpha) = -\nu_2 \end{cases}$$

и $\exists! v_2 \not\equiv 0$ удовлетворяет (2). Пусть $\ker ! = 0$, тогда v_2 не удовлетворяет (1) и v_1 не удовлетворяет (2). Следовательно v_1 и v_2 линейно независимы в $C^2[\alpha, \beta]$. Следовательно $\{v_1, v_2\}$ — фундаментальная система решений для A.

Утверждение . *Если $\exists$ специальная фундаментальная система решений $v_1, v_2 \in C^2[\alpha, \beta]$ и $Av_k = 0$ $k = 1, 2$ на $[\alpha, \beta]$ и v_1 удовлетворяет (1), но не удовлетворяет (2) и v_2 удовлетворяет (2), но не удовлетворяет (1), тогда* $\ker A = 0$

Доказательство. Если $v \in \ker A$, то

$$\begin{cases} v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ v \in D(A) \end{cases}$$

из условия (1)

$$\alpha_1(\mu_1 v_1'(\alpha) + \nu_1 v_1(\alpha)) + \alpha_2(\mu_1 v_2'(\alpha) + \nu_1 v_2(\alpha)) = \alpha_2(\mu_1 v_2'(\alpha) + \nu_1 v_2(\alpha)) = 0$$

И так как v_2 не удовлетворяет (1), то $\alpha_2 = 0$. Аналогично $\alpha_1 = 0$. Следовательно $v \equiv 0$.

Утверждение . *Пусть $\ker A = 0$ (то есть существует специальная фундаментальная система решений v_1 и v_2). Тогда*

$$A^{-1} : C[\alpha, \beta] \mapsto D(A)$$

$\forall f \in C[\alpha, \beta]$ и можно указать единственную функцию $u \in D(A)$: $u = A^{-1} f \Rightarrow Au = f$

Доказательство.

$$u(x) = C_1(x) v_1(x) + C_2(x) v_2(x)$$

Поставим требование

$$C_1'(x) v_1(x) + C_2'(x) v_2(x) = 0$$

тогда

$$v' = C_1 v_1' + C_2 v_2'$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} Au = a(C_1'v_1' + C_2'v_2') + a(C_1 v_1'' + C_2 v_2'') + \\ + b(C_1 v_1' + C_2 v_2') + c(C_1 v_1 + C_2 v_2) = \\ = a(C_1'v_1' + C_2'v_2') + C_1 A v_1 + C_2 A v_2 = f \end{aligned}$$

где $C_1 A v_1 = C_2 A v_2 = 0$. В итоге можно записать:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix}$$

где $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}$ — фундаментальная система решений.

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = w = \mathrm{const} e^{-\int \frac{b}{a} dx}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_2}{wa} f \\ \frac{v_1}{wa} f \end{pmatrix}$$

В итоге

$$C_1(x) = \int\limits_x^\beta \frac{v_2(t)}{w(t)a(t)} f(t) dt + D_1$$

$$C_2(x) = \int\limits_\alpha^x \frac{v_1(t)}{w(t)a(t)} f(t) dt + D_2$$

Осталось $u = C_1(x) v_1(x) + C_2(x) v_2(x)$ подставить в (1) и (2) и найти D_1 и D_2.

Утверждение . $D_1 = D_2$