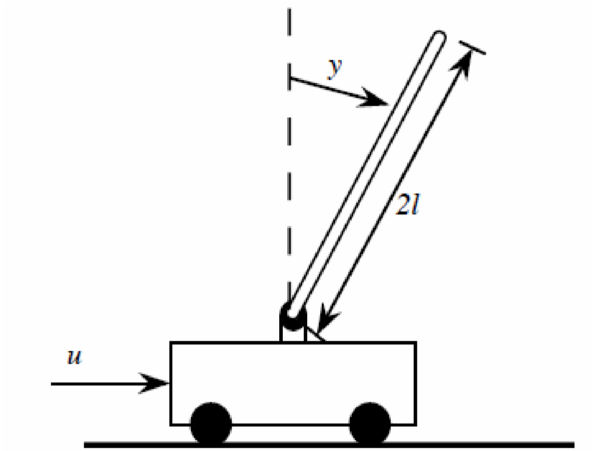
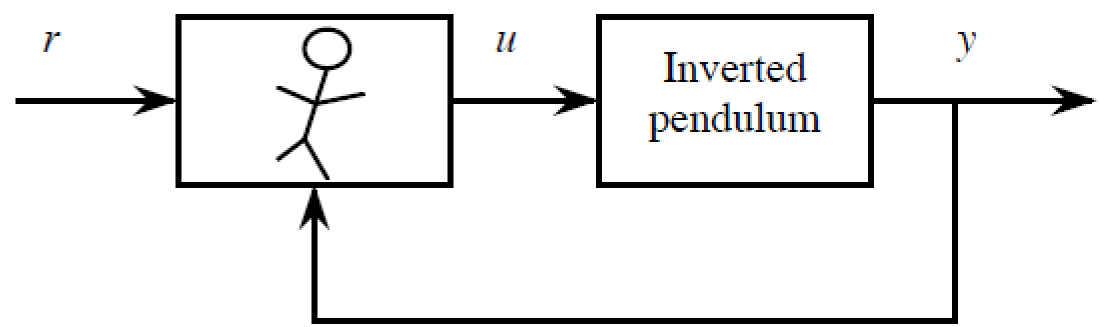
智能控制
第四章 模糊控制

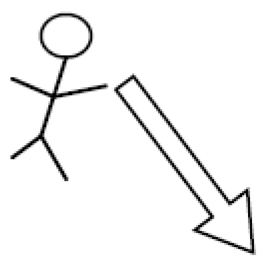
刘山
浙江大学控制科学与工程学院

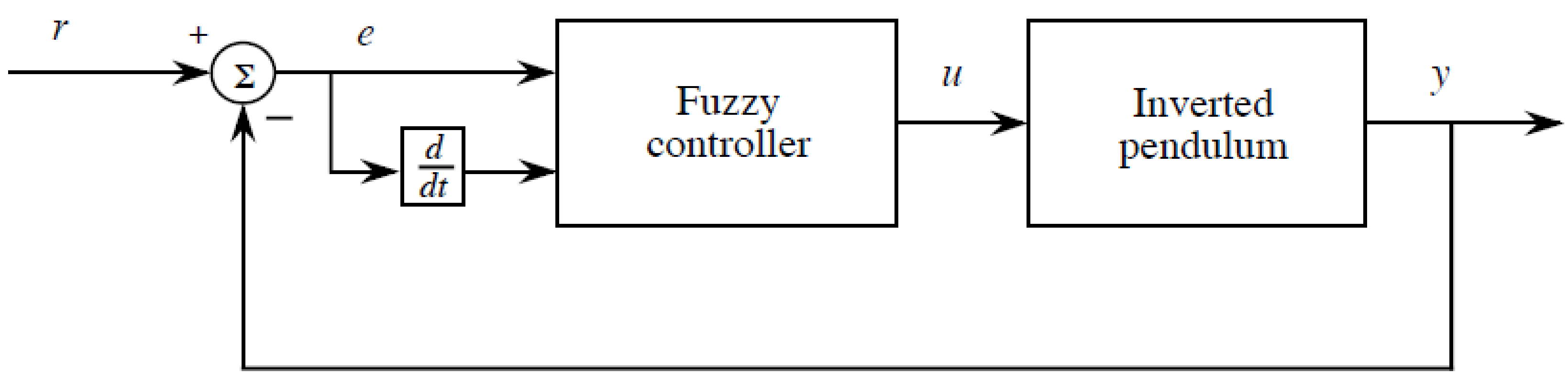
2022/11/26

倒立摆的模糊控制


y
2l
u


r
u
Inverted
pendulum
y




r
+
Σ
−
e
d
dt
Fuzzy
controller
u
Inverted
pendulum
y

模糊控制

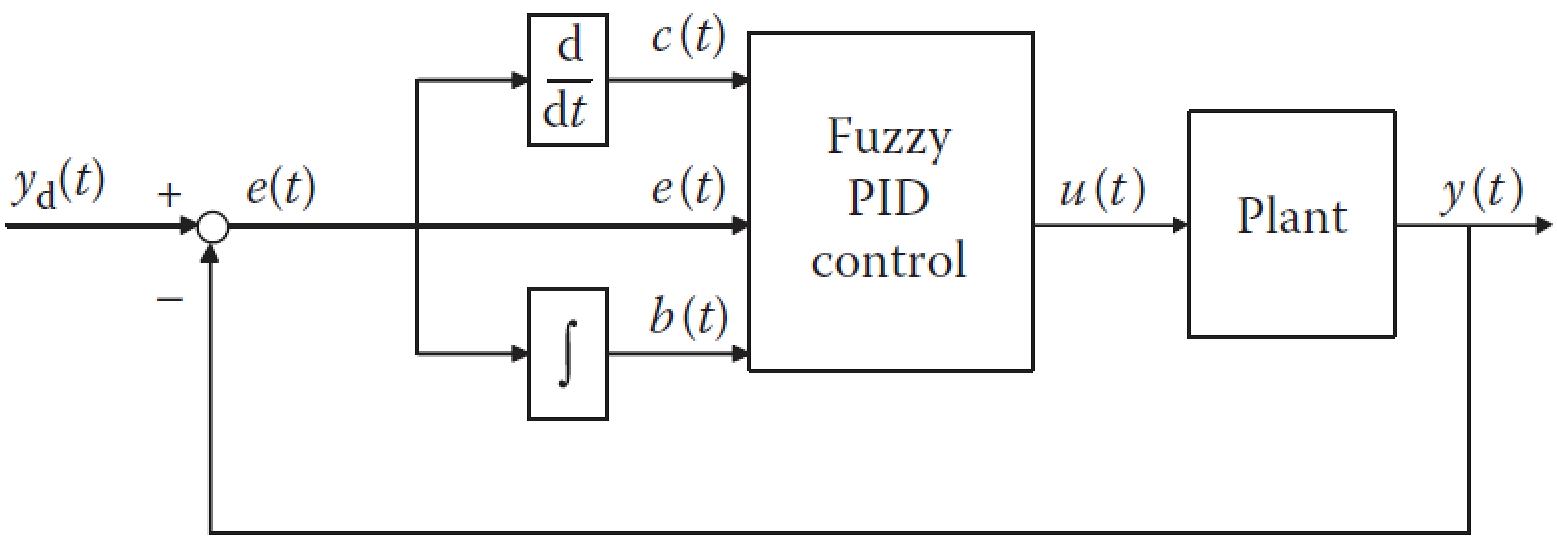
- **1965年，Zadeh**教授提出模糊集合的概念，突破了经典集合论中属于或不属于的绝对关系，成为处理现实世界各类物体的一种方法，标志着模糊数学的诞生。

- 模糊控制是一类应用模糊集合理论的控制方法，最早由**Mamdani**提出。

- 模糊控制是智能控制的一个十分活跃的研究与应用领域。

模糊PID控制

- 最简单的模糊控制方法是模糊PID控制，是一种启发式控制方法



$$R\text{: IF} \quad e_1 \text{ is } E_k \quad \text{AND} \quad e_2 \text{ is } E_l \quad \text{AND} \quad e_3 \text{ is } E_q, \quad \text{THEN} \quad u \text{ is } U$$

模糊控制的价值

- 提出一种新的机制用于实现基于知识（规则）甚至语义描述的控制规律。

- 为非线性控制器提出一个比较容易的设计方法，尤其是当受控装置（对象或过程）含有不确定性而且很难用常规非线性控制理论处理时，更是有效。

模糊控制与专家控制

- 模糊控制采用“基于知识的控制”的形式，可看成专家系统的一种应用。
- 相同点：
  - 专家控制与模糊控制都是建立人类经验和决策行为模型。
- 不同点：
  - 模糊控制主要源于控制工程而不是人工智能；
  - 模糊控制主要基于规则；
  - 模糊控制的应用领域要比专家控制系统窄；
  - 模糊控制的规则一般不是从人类专家提取，而是由模糊控制的设计者构造的。

内容

- **1、模糊控制的数学基础**
- **2、模糊控制的基本原理与设计**
- **3、模糊模型**
- **4、模糊PID控制**
- **5、自适应模糊控制**

一、模糊控制的数学基础
—— 模糊逻辑

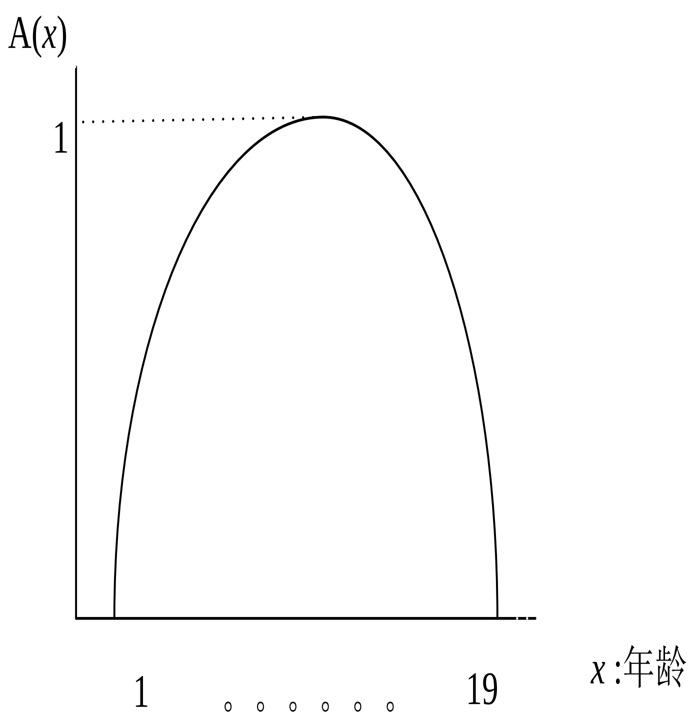
普通集合

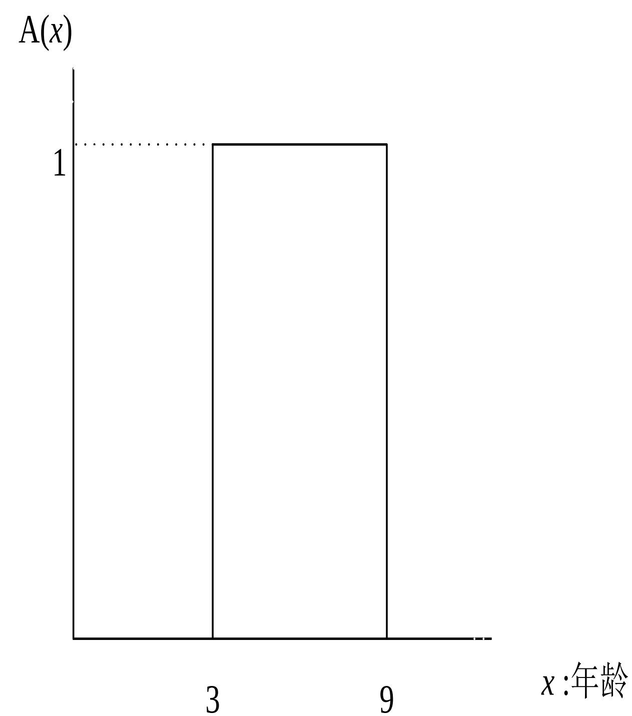
- 论域（全域或全集、**universe**）：被研究对象的全体。
- 个体（**element**）：论域中的每个对象。
- 集合（**set**）：具有共同特征的群体。
- 普通集合（清晰集合、**crisp set**）：集合$A=\{x\}$的特征函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

模糊集合与清晰集合

- 儿童





模糊集合（一）

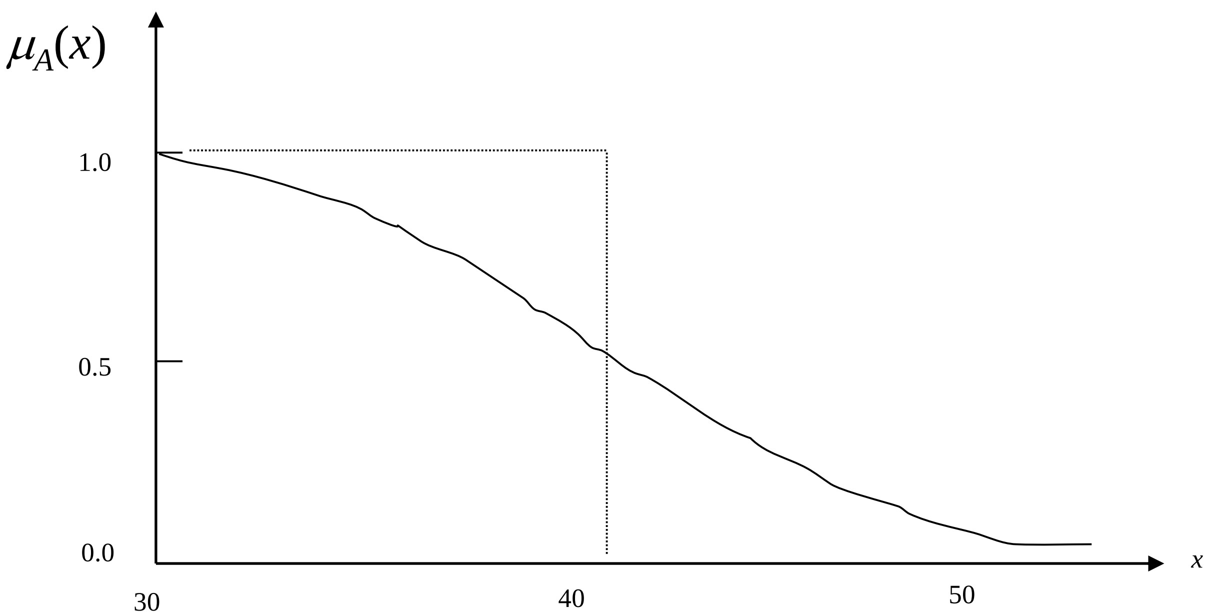
- 模糊集合（**fuzzy set**）：给定论域*X*，*X*中的模糊集合*A*是指用映射

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

  表示其特征的集合。
- 隶属函数：μ_A称为*A*的隶属函数（**membership function**）或隶属度（**grade of membership**）。也就是说，μ_A表示*x*属于模糊集合*A*的程度或等级。
- 从论域*X*到区间**[0,1]**的任一映射μ_A都确定*X*的一个模糊集合。
- 普通集合是模糊集合的一个特例。

模糊集合（二）

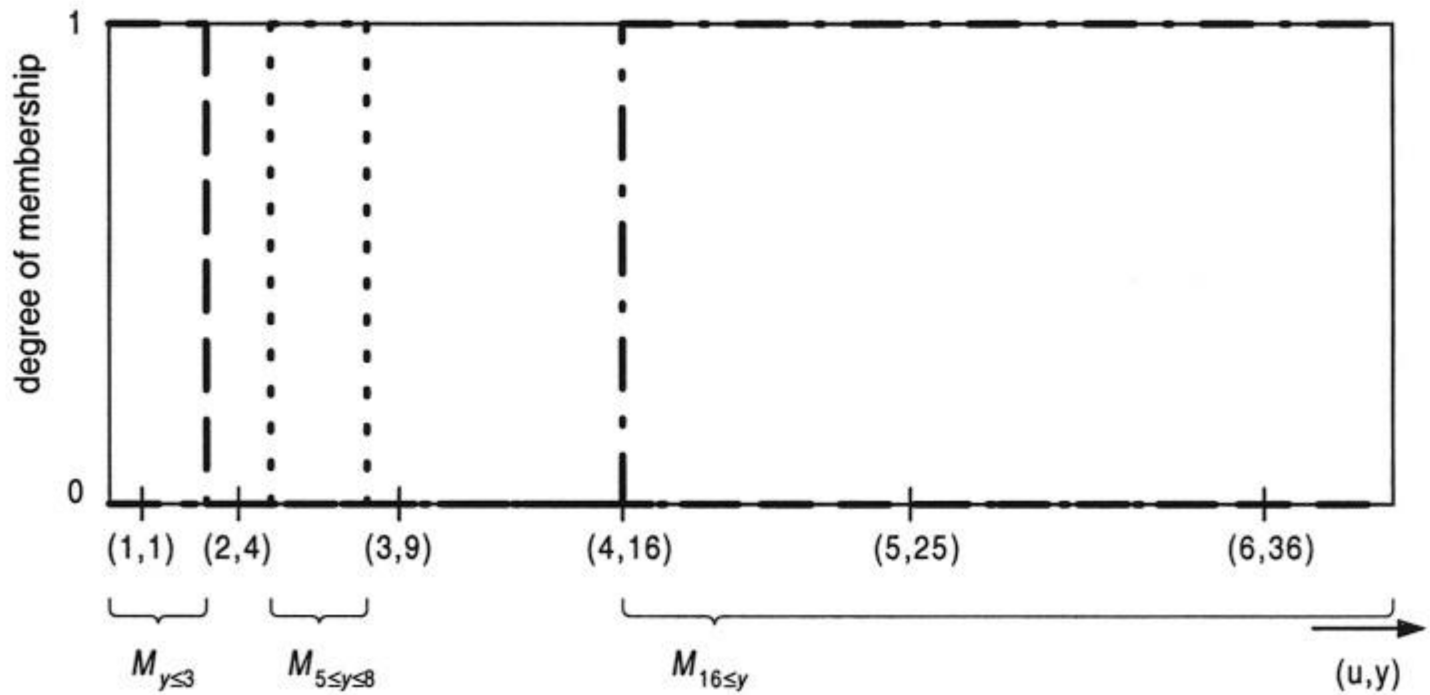
- 模糊集合“青年”的隶属度函数



模糊集合（三）

u	1	2	3	4	…
y	1	4	9	16	…

- 函数 $y = u^2$
- 论域 $M = \{\langle x_i, y_i \rangle, i = 1, 2, \ldots, n\}$
- 清晰集

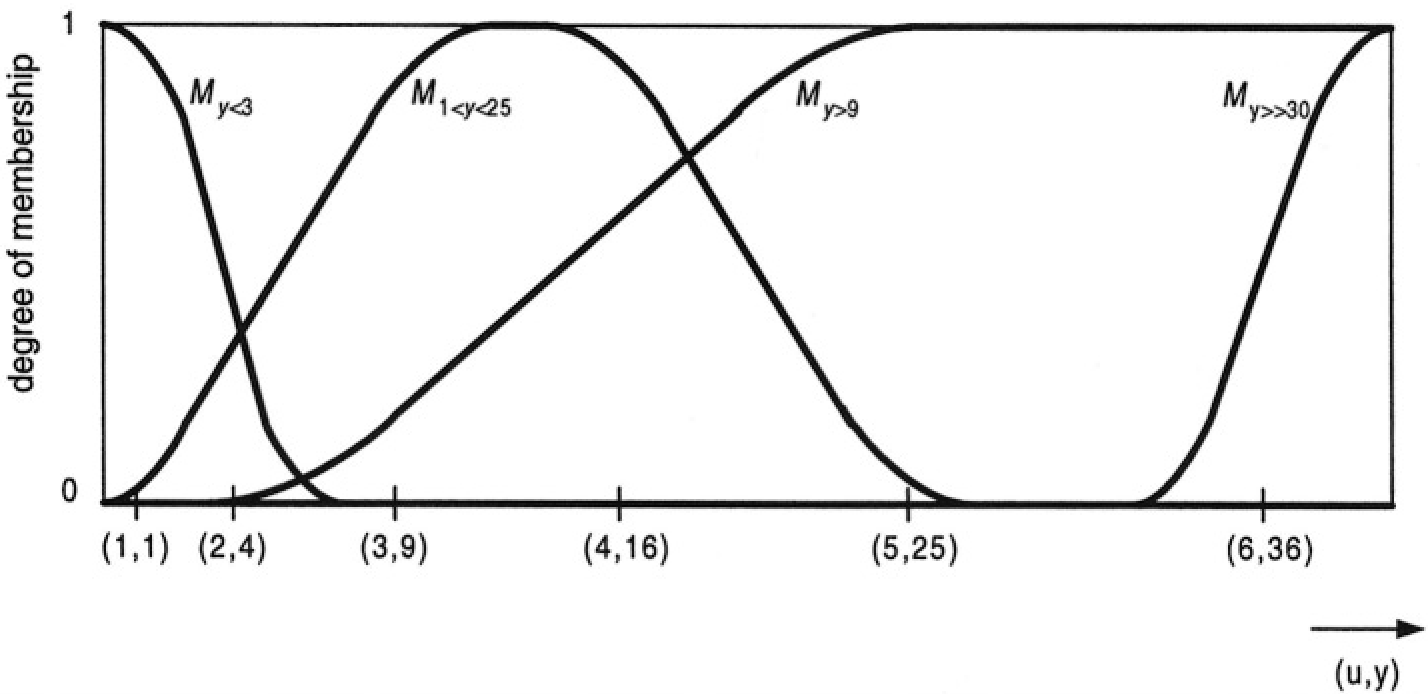


模糊集合（四）

$M_{y>9}$

- 模糊集

u	1	2	3	4	5	6
y	1	4	9	16	25	36
μ	0	0	0.2	0.6	1	1



模糊集合（五）

- 模糊集合描述模糊现象。
- 模糊性也是一种不确定性，但它不同于随机性，是指概念的定义以及语言意义的理解上的不确定性。
  - 模糊性：主观理解
  - 随机性：客观存在
- 模糊逻辑通过模仿人的思维方式来精确表示和分析不确定不精确信息。
- 模糊逻辑并不是“模糊的”逻辑，其本身一点也不模糊，而是对“模糊”处理以达到消除模糊的目的。

模糊集合的表示

- 模糊集合的表示要将模糊集合所包含的元素及相应的隶属度函数表示出来。
- 序偶形式

$$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in X\}$$

- 积分表示

$$A=\begin{cases}\int_X \dfrac{\mu_A(x)}{x} & X\text{连续}\\ \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\mu_A(x_i)}{x_i} & X\text{离散}\end{cases}$$

模糊集合（例）

- 论域X={1，2，3，4，5}上的模糊集合
  - A表示“大”，设隶属度函数为 $\mu_A(x)=\{0, 0, 0.6, 0.8, 1\}$
  - B表示“小”，设隶属度函数为 $\mu_B(x)=\{1.0, 0.8, 0.6, 0, 0\}$
  - C表示“中”，设隶属度函数为 $\mu_C(x)=\{0, 0.8, 1, 0.8, 0\}$
- 则 A的表示法

$$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in X\}=\{(1,0),(2,0),(3,0.6),(4,0.8),(5,1)\}$$

或者

$$A=\sum_{i=1}^{5}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}=\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$$

模糊集合（例）

- 以年龄为论域，设X=[0,200]，模糊集合
  - O表示“年老”，Y表示“年青”

$$\mu_O(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 50\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{x-50}\right)^2}, & 50<x\le 200\end{cases}\qquad \mu_Y(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 25\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, & 25<x\le 200\end{cases}$$

- 模糊集合O的表示法

$$O=\{(x,0)\mid 0\le x\le 50\}+\{[x,\frac{1}{1+\left(\dfrac{5}{x-50}\right)^2}]\mid 50\le x\le 200\}$$

或者

$$O=\int_{0\le x\le 50}\frac{0}{x}+\int_{50\le x\le 200}\frac{\left[1+\left(\dfrac{5}{x-50}\right)^2\right]^{-1}}{x}$$

与模糊集合相关的基本概念（一）

- 台集（支集，**support**）

$$A_s = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$$

台集为普通集合，模糊集合可只在它的台集上表示

- **α**截集（**α-cut**）

强**α**截集：（**strong α-cut**） $A_\alpha = \left\{x \middle| \mu_A(x) > \alpha\right\} \quad \alpha \in [0,1)$

弱**α**截集：（**weak α-cut**） $A_{\bar{\alpha}} = \left\{x \middle| \mu_A(x) \ge \alpha\right\} \quad \alpha \in (0,1]$

α截集是普通集合，台集即为**0**截集

- 正则模糊集合（**normal fuzzy set**）

若 $\max\limits_{x \in X} \mu_A(x) = 1$（即模糊集合中存在确定个体。）

与模糊集合相关的基本概念（二）

- 凸模糊集合（**convex fuzzy set**）

$$\mu_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge \min(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2)),\quad x_1,x_2\in X,\lambda\in[0,1]$$

- 分界点

$$\mu_A(x)=0.5\text{的}x$$

- 单点模糊集

  在论域**X**中，若模糊集合**A**的支集仅为一个点，且在该点的隶属度函数 $\mu_A=1$

模糊集合的基本关系和运算

- 模糊集合的相等

  $\mu_A(x)=\mu_B(x), \quad \forall x\in X$,则称**A**与**B**相等，记作**A=B**

- 模糊集合的包含关系

  $\mu_A(x)\le\mu_B(x), \quad \forall x\in X$, 则称**A**包含于**B**或**A**是**B**的子集，记作 $A\subseteq B$

- 模糊空集

  $\mu_A(x)=0, \quad \forall x\in X$, 则称**A**为模糊空集，记作**A=ϕ**

- 模糊集合的并集

  $\mu_C(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)=\max[\mu_A(x),\mu_B(x)], \quad \forall x\in X$,

  则称**C**为**A**与**B**的并集，记为 $C=A\cup B$

- 模糊集合的交集

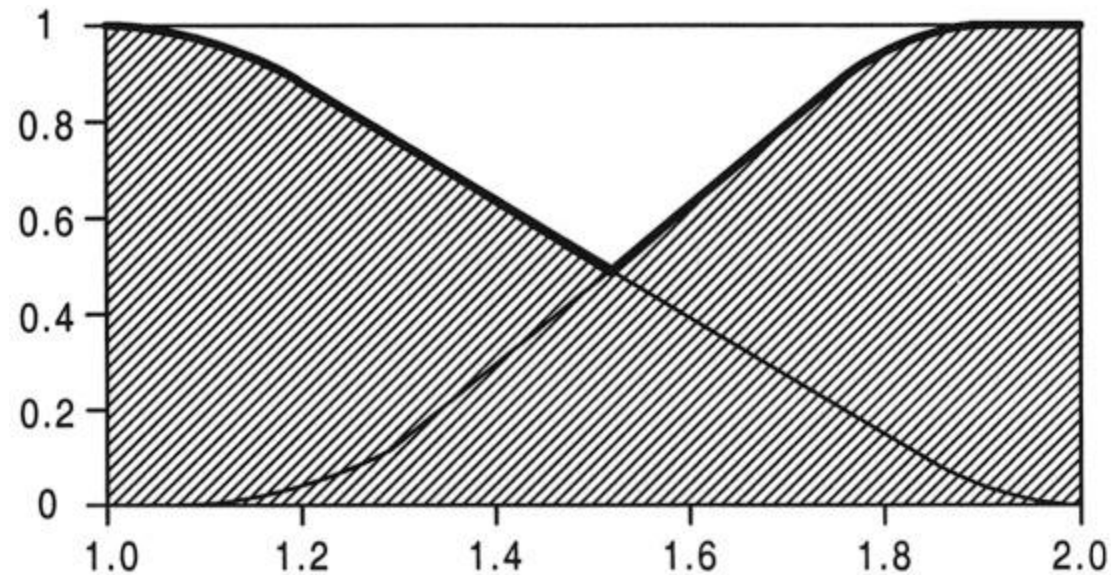
  $\mu_c(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)=\min[\mu_A(x),\mu_B(x)], \quad \forall x\in X$,

  则称**C**为**A**与**B**的交集，记为$C=A\cap B$

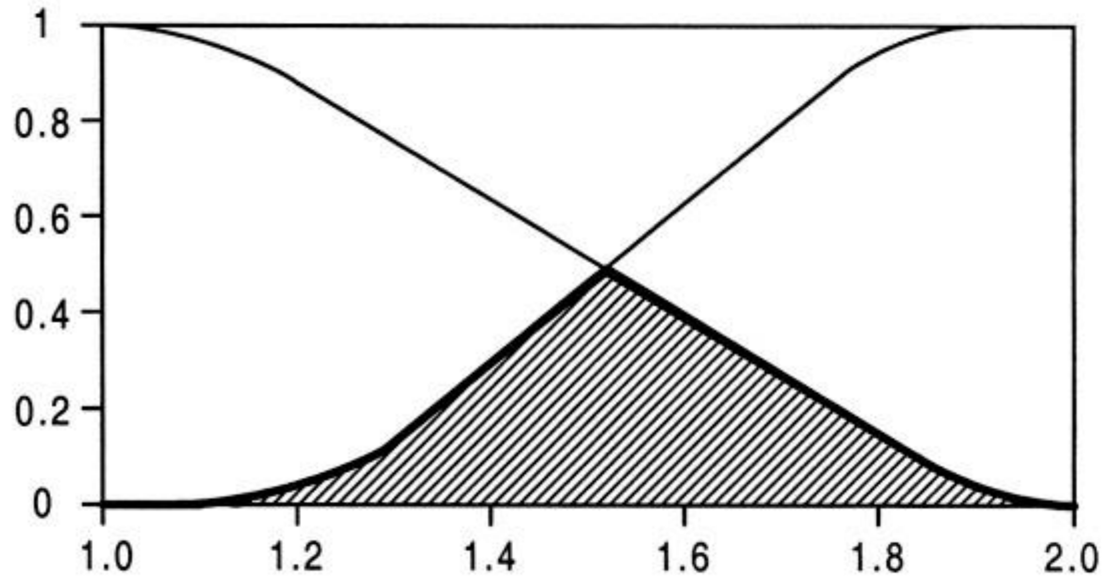
- 模糊集合的补集

  $\mu_B(x)=1-\mu_A(x), \quad \forall x\in X$, 则称**B**为**A**的补集，记为 $B=\overline{A}$

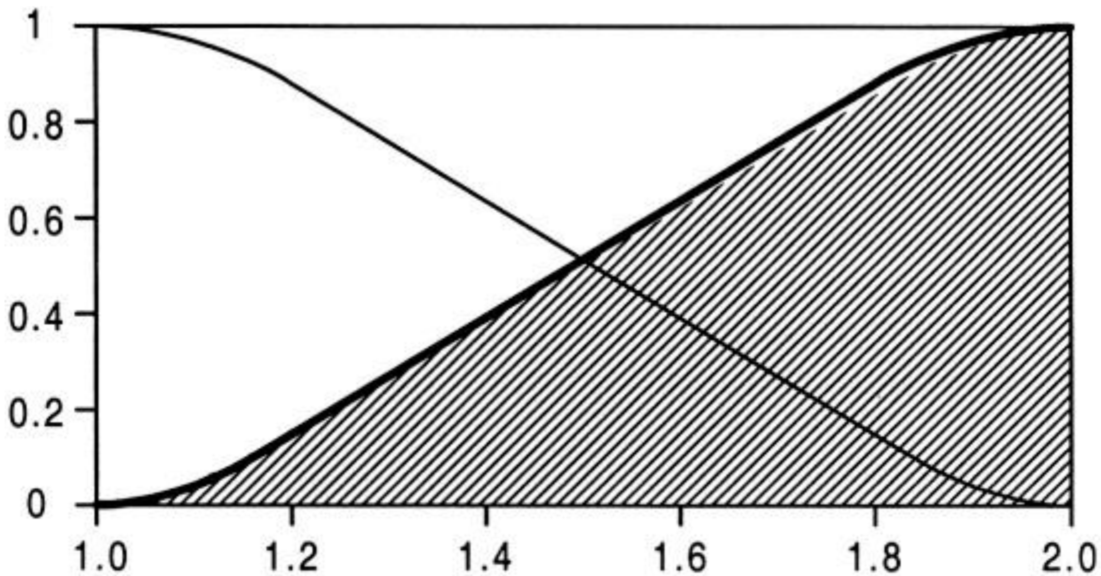
模糊集合的并集



模糊集合的交集



模糊集合的补集



模糊集合的基本关系和运算

- 模糊集合的直积

若有两个模糊集合**A**和**B**，其论域分别为**X**和**Y**，则定义在积空间**X×Y**上的模糊集合**A×B**为**A**和**B**的直积，其隶属度函数为

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\min[\mu_A(x),\mu_B(y)] \quad \text{或} \quad \mu_{A\times B}(x,y)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$$

- 模糊集合的代数运算

代数和

$$C=A\hat{+}B \leftrightarrow \mu_c(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x), \quad \forall x\in X,$$

代数积

$$C=A\cdot B \leftrightarrow \mu_c(x)=\mu_A(x)\mu_B(x), \quad \forall x\in X,$$

有界和

$$C=A\oplus B \leftrightarrow \mu_c(x)=\min\left\{1,\mu_A(x)+\mu_B(x)\right\}, \quad \forall x\in X,$$

模糊集合运算的基本性质

- 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

- 结合律

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$$

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$$

- 交换律

$$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$$

- 吸收律

$$(A\cap B)\cup A=A \qquad (A\cup B)\cap A=A$$

- 幂等律

$$A\cup A=A \qquad A\cap A=A$$

- 同一律

$$A\cup X=X, \quad A\cap X=A,$$

$$A\cup\varnothing A=A, \quad A\cap\varnothing=\varnothing$$

- 复原律

$$\bar{\bar{A}}=A$$

- 对偶律

$$\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

$$\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

模糊关系

- **n**元模糊关系**R**是定义在 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 直积上的模糊集合，可表示为

$$R_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} = \left\{ ((x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_x)) \middle| (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \right\}$$

$$= \int_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_n) / (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- 模糊关系为直积上的模糊集合。
- 常用的是**n=2**时的二元模糊关系。
  - 例，设**X**为实数集合， $x, y \in X$ ，对于"**y**比**x**大得多"的模糊关系**R**，其隶属度函数可表示为

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 0 & x \geq y \\ \dfrac{1}{1 + (\dfrac{10}{y - x})^2} & x < y \end{cases}$$

模糊关系表示

- 模糊矩阵
  - 当 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 是有限集合时， $X\times Y$上的模糊关系**R**可用如下矩阵表示

$$R=\begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \cdots & \mu_R(x_1,y_m) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \cdots & \mu_R(x_2,y_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(x_n,y_1) & \mu_R(x_n,y_2) & \cdots & \mu_R(x_n,y_m) \end{bmatrix}$$

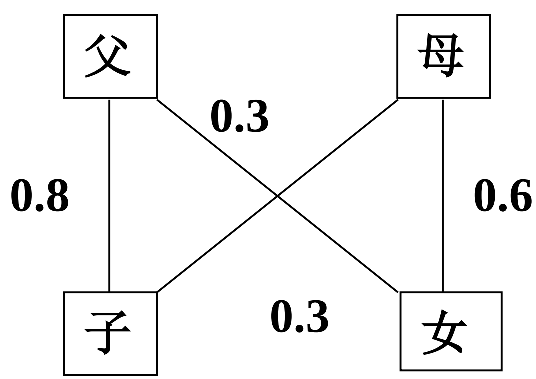
- 模糊图
  - 将 x_i,y_i 作为节点，在 x_i 到 y_i 的连线上标上 $\mu_R(x_i,y_i)$ 的值

模糊关系的表示（例）

- “子女与父母长得相似”的模糊关系***R***
- 模糊矩阵表示

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{父} & \text{母} \end{array} \\
R = & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{子} \\ \text{女} \end{array}
\end{array}
$$

- 模糊图表示



模糊关系运算（一）

- 逆模糊关系

$$R^c \leftrightarrow \mu_{R^c}(y,x)=\mu_R(x,y)$$

- 恒等关系

$$I \leftrightarrow \mu_I(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$$

- 零关系

$$0 \leftrightarrow \mu_0(x,y)=0$$

- 全称关系

$$E \leftrightarrow \mu_E(x,y)=1$$

- 模糊矩阵表示

$$R^C = R^T \qquad (R\text{的转置})$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

$$O=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

模糊关系运算（二）

- 模糊关系服从一般模糊集合的运算规则
  - 包含：

$$R \subseteq S \leftrightarrow \mu_R(x,y) \le \mu_s(x,y)$$

  - 并：

$$R \cup S \leftrightarrow \mu_{R\cup S}(x,y) = \mu_R(x,y) \vee \mu_s(x,y)$$

  - 交：

$$R \cap S \leftrightarrow \mu_{R\cap S}(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \mu_S(x,y)$$

  - 补：

$$\bar{R} \leftrightarrow \mu_{\bar{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$$

模糊关系的合成

- 设X、Y、Z是论域，R是X到Y的一个模糊关系，S是Y到Z的一个模糊关系，则R到S的合成T也是一个模糊关系，记为$T = R \circ S$，具有隶属度

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \vee_{y\in Y}(\mu_R(x,y) * \mu_S(y,z))$$

"*"是二项积的符号，上面的合成称为最大-星合成。二项积算子"*"可采用

  - 交 $x \wedge y = \min(x,y)$
  - 代数积 $x \cdot y = xy$
  - 有界积 $x \odot y = \max\{0, x+y-1\}$

- <u>最常用的合成方法</u>：二项积采用求交运算，称为最大-最小合成

$$R\circ S \leftrightarrow \mu_{R\circ S}(x,z) = \vee_{y\in Y}(\mu_R(x,y) \wedge \mu_S(y,z))$$

模糊关系的合成（例）

- 已知子女与父母的相似关系模糊矩阵为

$$R=\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} 父 & 母 \end{array}$$

$$R=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.3 & 0.6\end{bmatrix}\begin{array}{c}子\\ 女\end{array}$$

父母与祖父母的相似关系模糊矩阵为

$$\begin{array}{cc} 祖父 & 祖母 \end{array}$$

$$S=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}\begin{array}{c}父\\ 母\end{array}$$

求子女与祖父母的相似关系模糊矩阵***T***是一个典型的模糊关系合成问题。按最大-最小合成规则

$$T=R\circ S=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.3 & 0.6\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0.8\wedge 0.7)\vee(0.3\wedge 0.1) & (0.8\wedge 0.5)\vee(0.3\wedge 0.1)\\ (0.3\wedge 0.7)\vee(0.6\wedge 0.1) & (0.3\wedge 0.5)\vee(0.6\wedge 0.1)\end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc}祖父 & 祖母\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.7 & 0.5\\ 0.3 & 0.3\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}子\\ 女\end{array}$$

模糊关系的合成（例）

- 论域P、Q、S，P和Q各有一个元素p和q，S有两个元素s_1和s_2，
- P和S间的关系R_1：“事件 a以给定的可能引起状态b”

$\mathbf{R}_1$	s_1	s_2
p	0.3	0.9

- S和Q间的关系R_2：“状态b以给定的可能是事件 c发生的前提”

$\mathbf{R}_2$	q
s_1	0.9
s_2	0.7

- 模糊关系R_1和R_2的合成表示：“事件a和事件c的联系”

模糊关系合成的性质

$$R\circ I = I\circ R = R$$

$$R^{m+n} = R^m \circ R^n$$

$$R\circ 0 = 0\circ R = 0$$

$$\left(R^m\right)^n = R^{mn}$$

$$R\circ S \neq S\circ R$$

$$R\circ\left(S\cup T\right) = \left(R\circ S\right)\cup\left(R\circ T\right)$$

$$\left(R\circ S\right)\circ T = R\circ\left(S\circ T\right)$$

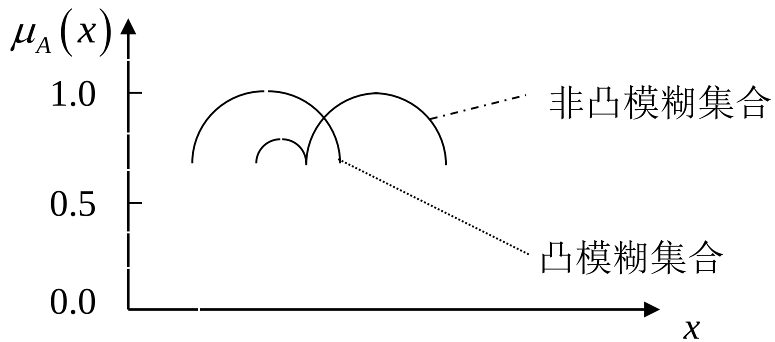
$$R\circ\left(S\cap T\right) = \left(R\circ S\right)\cap\left(R\circ T\right)$$

$$R^{m+1} = R^m \circ R$$

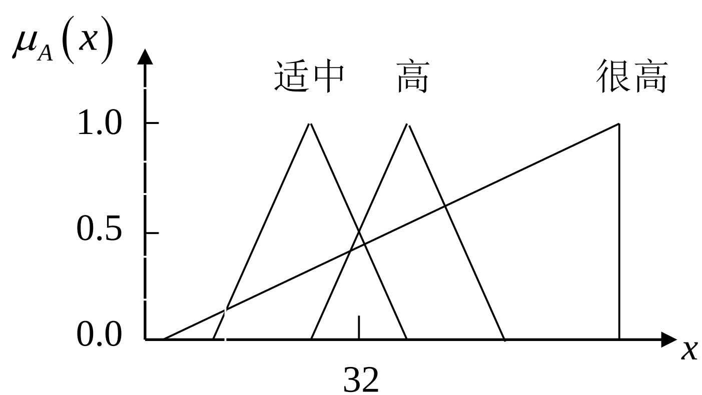
$$S\subseteq T \to R\circ S \subseteq R\circ T$$

隶属度函数的建立原则（一）

- 表示隶属度函数的模糊集合必须是凸模糊集合

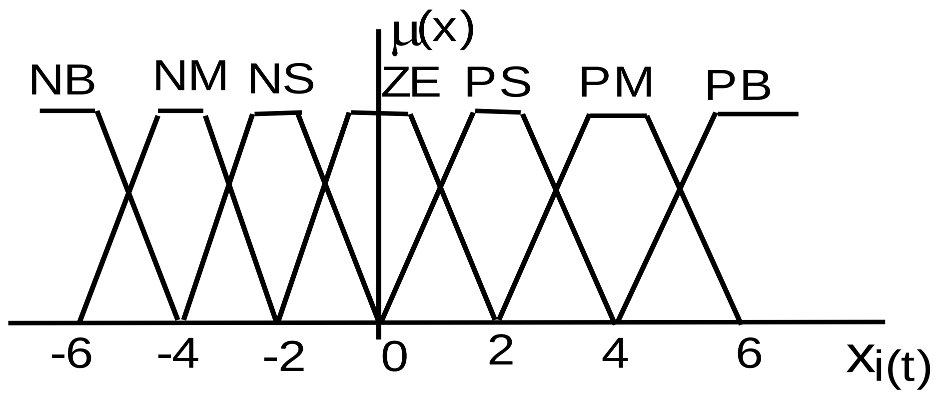


- 变量所取隶属度函数通常是对称和平衡的
- 隶属度函数要符合人们的语言顺序，避免不恰当的重叠



隶属度函数的建立原则（二）

- 论域中的每个点应该至少属于一个隶属度函数的区域，同时它一般应该属于至多不超过两个隶属度函数的区域。
- 对同一输入没有两个隶属度函数会同时有一最大隶属度。
- 当两个隶属度函数重叠时，重叠部分对两个隶属度函数的最大隶属度不应该有交叉。



隶属度函数的建立方法

- 目前还没有一套成熟有效的方法，大多数系统的确定方法还停留在经验和实验的基础上。通常的方法是初步确定粗略的隶属函数，然后再通过“学习”和不断的实践来修整和完善，从而达到主观和客观的统一。
- 确定隶属函数的方法
  - 主观经验法
    - 专家评分法
    - 因素加权综合法
    - 二元排序法
  - 分析推理法
  - 调查统计法
- 在实际应用中，某些问题可用同一类型隶属度函数所表示的模糊集合来描述，所以在一定的定义下给出模糊集合的一般形式，对于所要解决的问题具有普遍意义。
- 在模糊控制中，最常用的隶属度函数的形状有三角形、梯形和正态分布曲线。

常用隶属度函数

- **钟形曲线** $\mu(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$ $\mu(x) = 1 - e^{-(\frac{\sigma}{x_0 - x})^a}$

- **S形曲线**

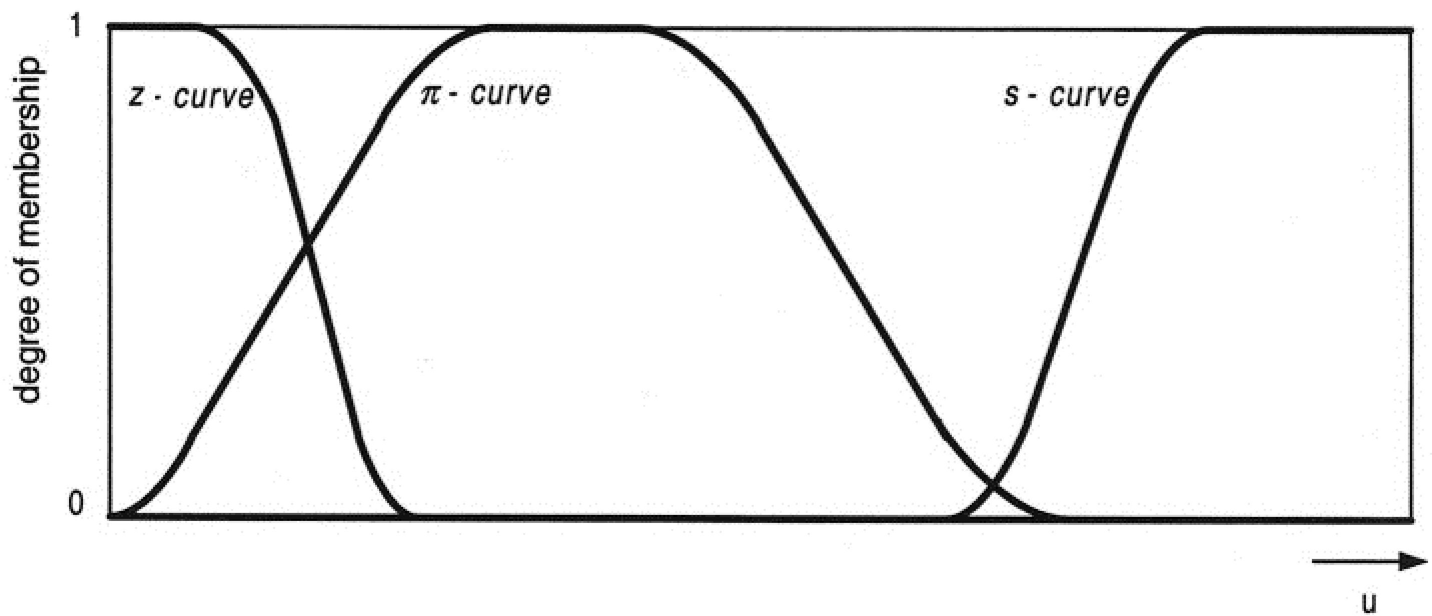
$$s(x_0, b, x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - b \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(\frac{x-x_0}{b}\pi), & x_0 - b \le x \le x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

- **Z形曲线**

$$z(x_0, b, x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(\frac{x-x_0}{b}\pi), & x_0 \le x \le x_0 + b \\ 0, & x > x_0 + b \end{cases}$$

- **π形曲线** $\pi(x_1, x_2, b, x) = min(s(x_1, b, x), z(x_2, b, x))$

常用隶属度函数



常用隶属度函数

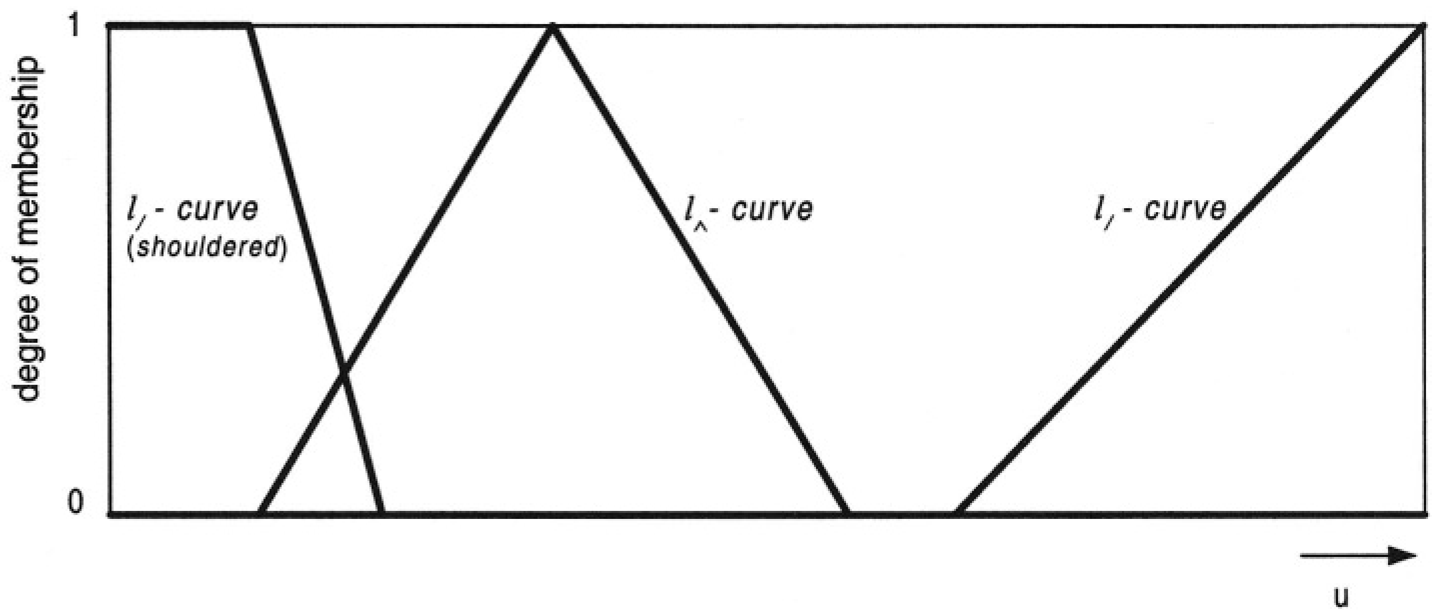
- 线性表示

$$\ell_{/}(x_\ell, x_r, x) = \begin{cases} 0, & x < x_\ell \\ \frac{x - x_\ell}{x_r - x_\ell}, & x_\ell \le x \le x_r \\ 1, & x > x_r \end{cases}$$

- 三角形表示

$$\ell_{\wedge}(x_\ell, x_c, x_r, x) = \begin{cases} 0, & x < x_\ell \\ \frac{x - x_\ell}{x_c - x_\ell}, & x_\ell \le x \le x_c \\ 1 - \frac{x - x_c}{x_r - x_c}, & x_c \le x \le x_r \\ 0, & x > x_r \end{cases}$$

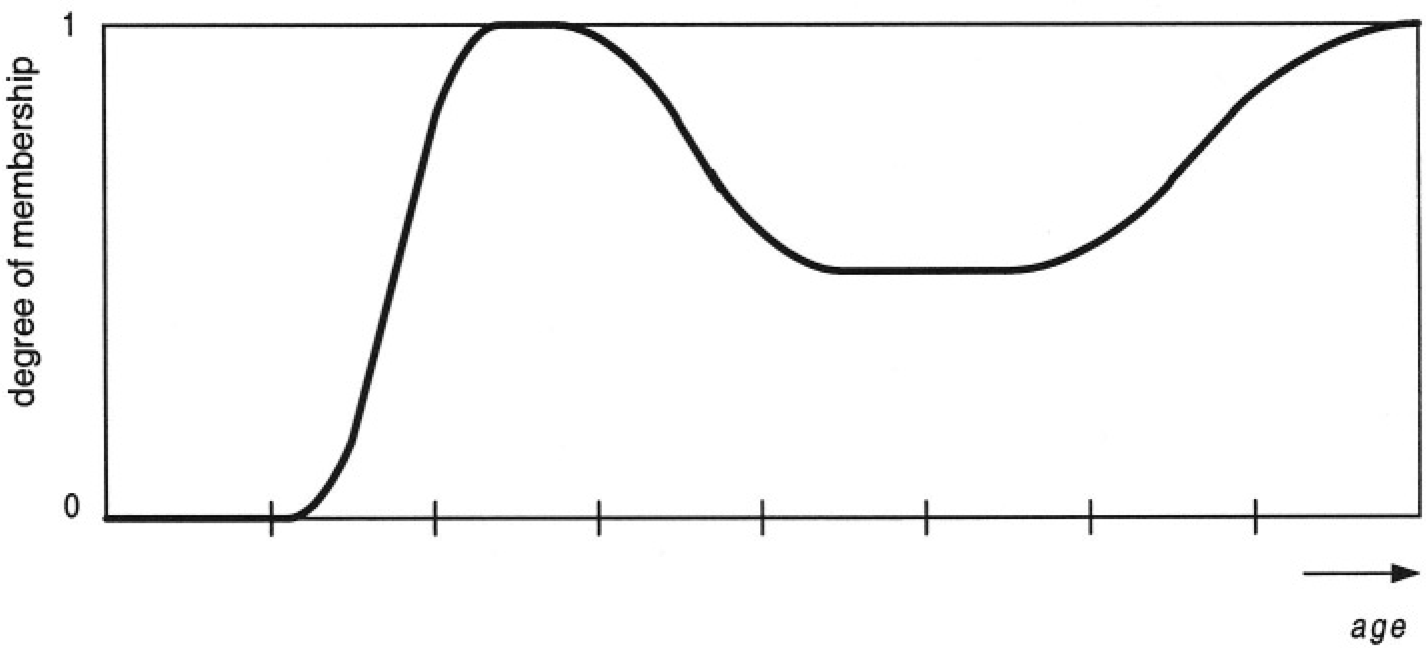
常用隶属度函数



1
0
degree of membership
$l_/$ - curve
(shouldered)
$l_\wedge$ - curve
$l_/$ - curve
u

常用隶属度函数

- 任意曲线及离散表示



调查统计法

- 对论域X上一个确定元素x是否属于论域上的一个边界可变的普通集合A*的问题，针对不同的对象进行调查统计，再根据统计规律计算出x的隶属度。
- 步骤：
  - （1）确定一个论域X；
  - （2）在论域中选择一个确定的元素x；
  - （3）考虑X的一个边界可变的普通集合A*；
  - （4）就x是否属于A*的问题针对不同对象调查统计，并记录结果；
  - （5）根据统计规律计算x属于模糊集合A的隶属度。

$$\mu_A(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\in A^*\text{的次数}}{n}$$

隶属函数的拟合

1. 求取论域中足够多元素的隶属度；

2. 求隶属函数曲线。
   – 以论域元素为横坐标，隶属度为纵坐标，画出足够多元素的隶属度（点），将这些点连起来，得到所求模糊结合的隶属函数曲线；

3. 求隶属函数。
   – 将求得的隶属函数曲线与常用隶属函数曲线相比较，取形状相似的隶属函数曲线所对应的函数，修改其参数，使修改参数后的隶属函数的曲线与所求隶属函数曲线一致或非常接近。此时，修改参数后的函数即为所求模糊结合的隶属函数。

调查统计法举例（1）

- 用调查统计法确定27岁的人属于“青年”模糊集合的隶属度

18～25	17～30	17～28	18～25	16～35	14～25	18～30	18～35	18～35	16～25
15～30	18～35	17～35	18～25	18～25	18～35	20～30	18～30	16～30	20～35
18～30	18～30	15～25	18～30	15～28	16～28	18～30	18～30	16～30	18～35
18～25	18～25	16～28	18～30	16～30	16～28	18～35	18～35	17～27	16～28
15～28	16～30	19～28	15～30	15～26	17～25	15～36	18～30	17～30	18～35
16～35	15～25	15～25	18～28	16～30	15～28	18～35	18～30	17～28	18～35
15～28	18～30	15～25	15～25	18～30	16～24	15～25	16～32	15～27	18～35
16～25	18～28	16～28	18～30	18～35	18～30	18～30	17～30	18～30	18～35
16～30	18～35	17～25	15～30	18～25	17～30	14～25	18～26	18～29	18～35
18～28	18～30	18～25	16～35	17～29	18～25	17～30	16～28	18～30	16～28
15～30	15～35	15～30	20～30	20～30	16～25	17～30	15～30	18～30	16～30
18～28	18～35	16～30	15～30	18～35	18～35	18～30	17～30	16～35	17～30
15～25	18～35	15～30	15～25	15～30	18～30	17～25	18～29	18～28	

调查统计法举例（2）

- 由调查统计结果可知，共调查统计**129**次，其中**27**岁的人属于“青年”这个边界可变的普通集合的次数为**101**次。根据统计规律计算隶属度为：

$$\mu_A(27) = \frac{27 \in \text{青年}^* \text{的次数}}{n} = \frac{101}{129} = 0.78$$

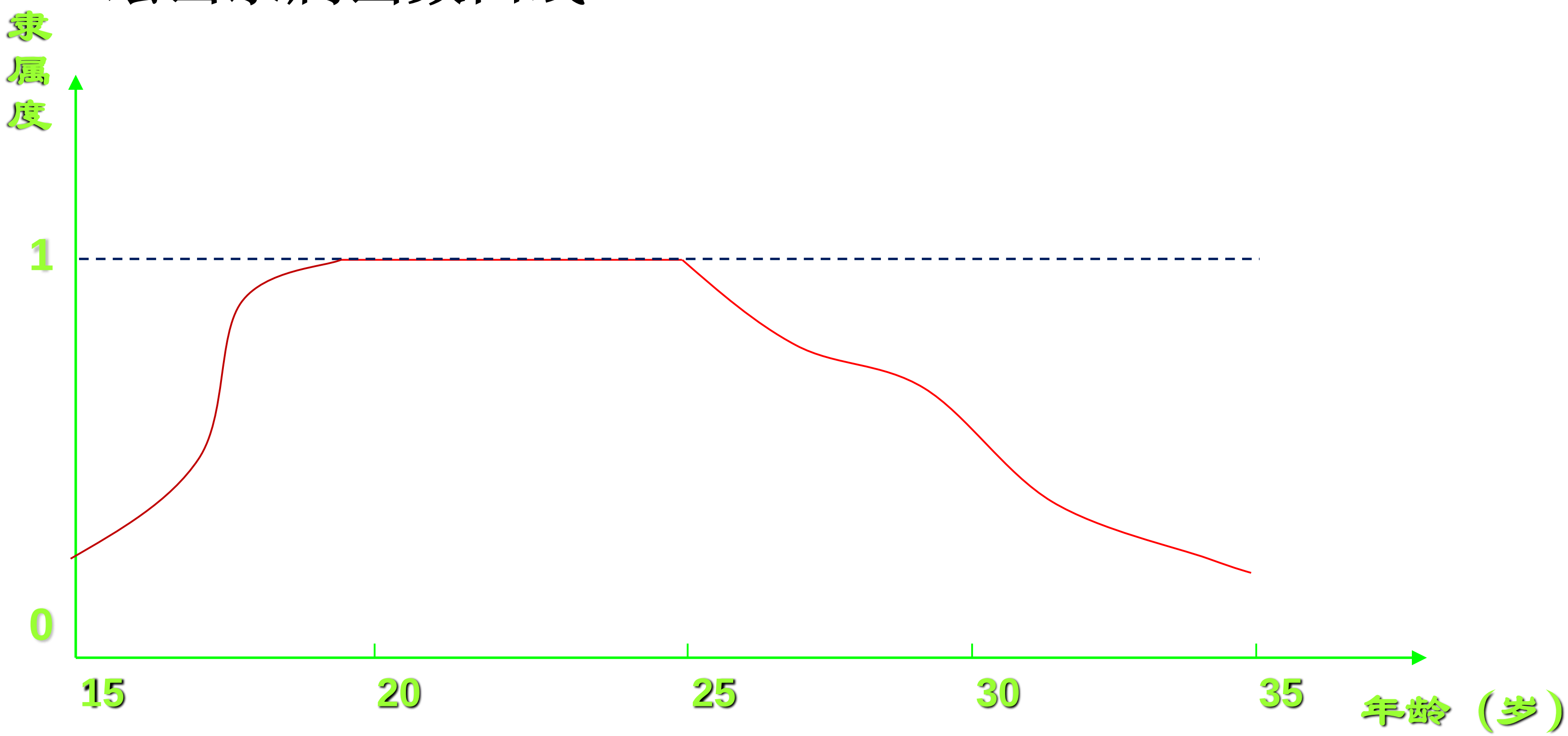
调查统计法举例（3）

- 由调查统计结果可知，分别计算出15～35岁的人属于模糊集合“青年”的隶属度：

年龄	隶属次数	隶属度	年龄	隶属次数	隶属度	年龄	隶属次数	隶属度
15	27	0.21	22	129	1	29	80	0.62
16	51	0.39	23	129	1	30	77	0.60
17	67	0.52	24	129	1	31	27	0.21
18	124	0.96	25	128	0.99	32	27	0.21
19	125	0.97	26	103	0.80	33	26	0.20
20	129	1	**27**	**101**	**0.78**	34	26	0.20
21	129	1	28	99	0.77	35	25	0.19

调查统计法举例（4）

- 模糊集合“青年”的隶属函数曲线
  - 根据计算结果，以年龄为横坐标，隶属度为纵坐标，绘出隶属函数曲线。



调查统计法举例（5）

- “青年”的隶属函数曲线与下述函数曲线相似

$$\mu(x)=\begin{cases} 1 & x\le a \\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}} & a<x, 0<\alpha, \beta>0 \end{cases}$$

- 拟合后，取α=1/25, a=24.5, β=2. 即模糊集合“青年”的隶属函数如下

$$\mu_{青年}(x)=\begin{cases} 1 & 18\le x\le 24 \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-24.5}{5}\right)^{2}} & 24<x\le 100 \end{cases}$$

模糊语言变量

- 语言变量（ ***linguistic variable***）是以五元组$(x,T(x),X,G,M)$来表征的，其中，
  - x是变量的名称，（如“温度”）
  - $T(x)$是语言变量值的集合，（如“高、中、低”）
  - 每个语言变量值是定义在论域X上的一个模糊集合，（如“高”）
  - G是用以产生语言变量x值名称的语法规则，（如“很、比较”）
  - M是语义规则，用以产生模糊集合的隶属度函数。（函数规则）

- 语言变量基本词集把模糊概念与精确值联系起来，实现对定性概念的定量化以及定量数据的定性模糊化。
  - 例如，某工业窑炉模糊控制系统，把温度作为一个语言变量，其词集T（温度）可为：

    T（温度）＝{超高，很高，较高，中等，较低，很低，过低}

模糊语言语气算子

- 语言变量的结果是模糊的。
- 为了进一步区分和刻化模糊值的程度，还可以采用一些自然语言中的修饰词（含糊词），诸如“极”、“非常”、“相当”、“比较”、“略”、“稍微”等。其结果是改变了该模糊语言的含义，相应的隶属度函数也要改变。
  – 例如，设有模糊语言变量为A，其隶属度函数为μ_A，则通常有

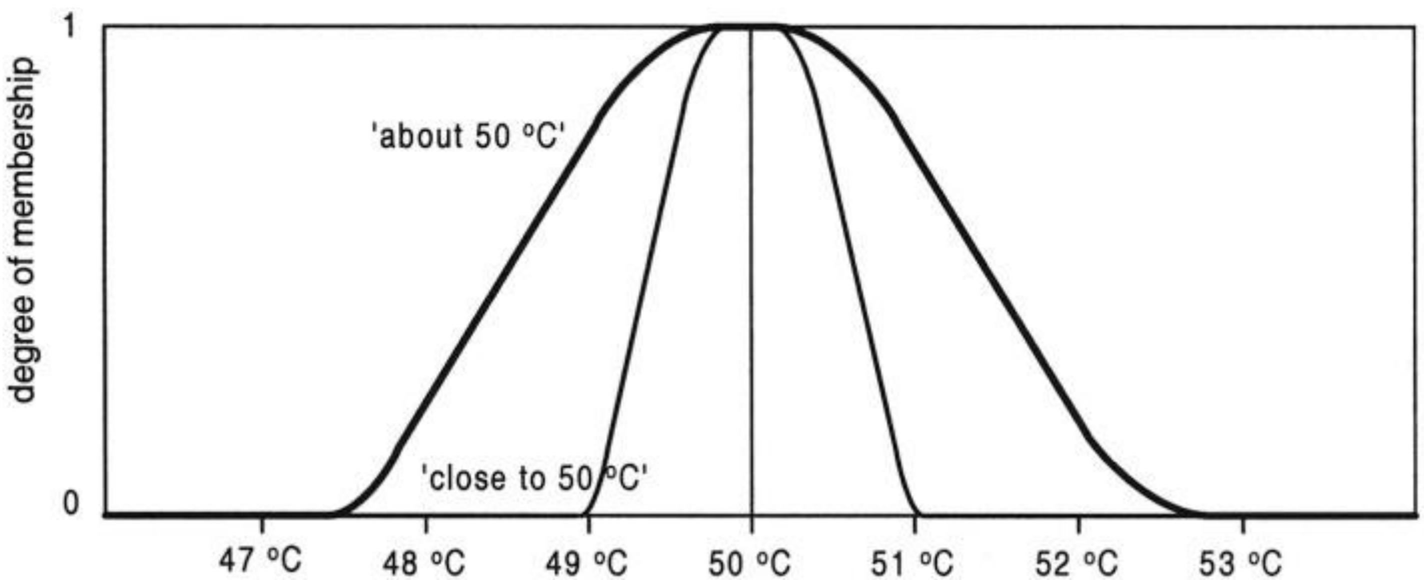
$$\mu_{极A} = \mu_A^{4} \qquad \mu_{非常A} = \mu_A^{2} \qquad \mu_{相当A} = \mu_A^{1.25}$$

$$\mu_{比较A} = \mu_A^{0.75} \qquad \mu_{略A} = \mu_A^{0.5} \qquad \mu_{稍微A} = \mu_A^{0.25}$$

- 语气算子： $H_\lambda\left(\mu_A\right) = \left(\mu_A\right)^\lambda$
  – 集中化算子， $\lambda > 1$
  – 散漫化算子， $\lambda < 1$

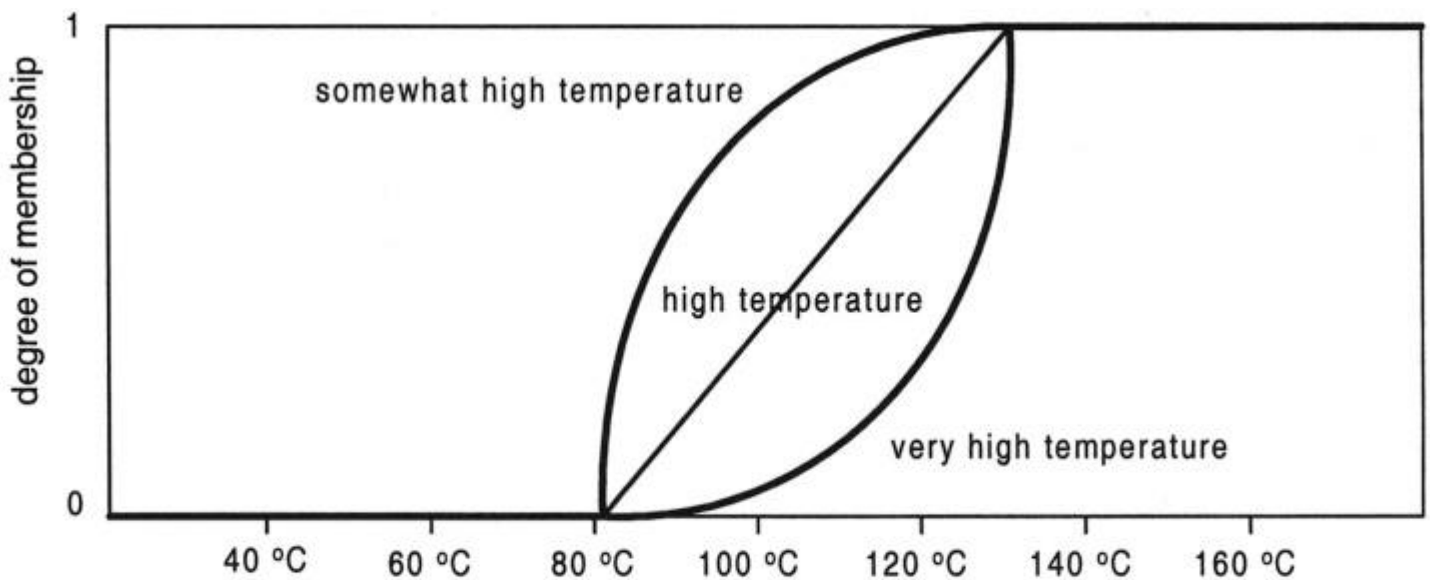
模糊语言语气算子

- “大约”和“接近”



模糊语言语气算子

- “有点”和“非常”



模糊蕴含关系

- 模糊蕴含关系就是模糊规则或模糊条件语句。
  - 模糊控制中的控制规则实质上是模糊蕴含关系。
- 模糊蕴含关系 $A \to B$ 通常具有以下的形式：

$$\textbf{if} \;\; x\text{是}A, \quad \textbf{then} \;\; y\text{是}B$$

  - **A**和**B**是语言值，分别由**X**和**Y**中的模糊集合确定。
  - **“x**是**A”**通常叫前提或前件；
  - **“y**是**B”**叫做结论或后件。
- 模糊蕴含关系为乘积空间中的二元模糊关系。

模糊蕴含关系的运算方法

- 模糊蕴含最小运算

$$R_m = A \to B = A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) / (x, y)$$

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

- 模糊蕴含乘积运算

$$R_p = A \to B = A \times B = \int_{X \times Y} \mu_A(x)\mu_B(y) / (x, y)$$

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$$

模糊推理

- 模糊推理是建立在模糊逻辑基础上的，是一种不确定性推理方法，在二值逻辑三段论基础上发展起来的。
- 以模糊判断为前提，动用模糊语言规则，推导出一个近似的模糊判断结论。

大前提：　如果***A***，则***B***
小前提：　***X***是***A'***

结　论：　**X**是**B'**

大前提：如果苹果红了，则熟了
小前提：这个苹果有点红

结　论：这个苹果差不多熟了

模糊推理方法

- 广义前向推理法：广义取式（肯定前提）假言推理法(GMP)

  大前提：如果*X*是*A*，则 *Y*是*B*　（事实）
  小前提：*X*是A’　（知识）

  结　论：*Y*是B’

- 广义后向推理法：广义拒式（否定结论）假言推理法(GMT)

  大前提：如果*X*是*A*，则 *Y*是*B*　（事实）
  小前提：*Y*是B’　（知识）

  结　论：*X*是A’

模糊推理计算（一）

- 关系生成规则
  - 模糊推理规则中的大前提由模糊蕴含关系表示，是***X***到***Y***的模糊关系 $A \to B$
  - 关系生成规则可采用模糊蕴含关系的运算。

- 推理合成规则
  - 由模糊关系 $R(x, y) = A \to B$ 和小前提得到***Y***上的模糊集。
  - 合成规则由模糊关系的合成得到。

模糊推理计算（二）

- 广义肯定式 $B' = A' \circ R = A' \circ \left(A \to B\right)$
  - 关系生成规则用最小运算（**Mamdani**算法）

$$R\left(x,y\right) = A \to B\left(x,y\right) = A(x) \wedge B(y)$$

  - 推理合成规则为**max-min**合成运算

$$B^{'}(y) = \left(A^{'} \circ R\right)(y) = \bigvee_{x \in X}\left[A^{'}(x) \wedge R(x,y)\right]$$

  - 将关系生成规则与推理合成规则合并在一起

$$B^{'}(y) = \bigvee_{x \in X}\left[A^{'}(x) \wedge A(x) \wedge B(y)\right]$$

  - 用隶属度函数表示

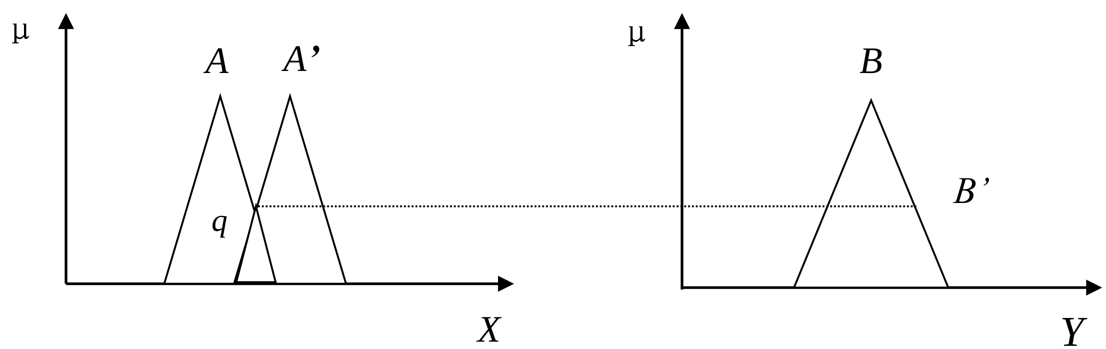
$$\mu_{B^{'}}(y) = \max_{x} \min\left[\mu_{A^{'}}(x), \mu_{A}(x), \mu_{B}(y)\right]$$

模糊推理计算（三）

- 相似度
  - 广义肯定式

$$B^{'}(y)=\left[\bigvee_{x\in X}\left(A^{'}(x)\wedge A(x)\right)\right]\wedge B(y)=q\wedge B(y)$$

  - $q=q\left(A^{'},A\right)=\bigvee_{x\in X}\left(A^{'}(x)\wedge A(x)\right)$ 是大前提中的**A**与小前提中的**A’**的相似度，它是 $\mu_{A'}(x)\wedge\mu_{A}(x)$ 的最大值
  - 结论**B’** 的隶属度函数等于由**q**限位的**B**的隶属度函数。
  - **q**可看作是对规则前提部分可信程度的一种度量，这个度量由**if-then**规则传递，<u>结果的可信度或结论部分的隶属度函数不会大于**q**</u>



模糊推理计算（四）

- 广义否定式 $A' = R \circ B' = (A \to B) \circ B'$
  - 关系生成规则用最小运算

$$R(x,y) = A \to B(x,y) = A(x) \wedge B(y)$$

  - 推理合成规则为**max-min**合成运算

$$A^{'}(x) = \left(R \circ B^{'}\right)(x) = \vee_{y \in Y}\left[R(x,y) \wedge B^{'}(y)\right]$$

  - 将关系生成规则与推理合成规则合并在一起

$$A^{'}(x) = \vee_{y \in Y}\left[A(x) \wedge B(y) \wedge B^{'}(y)\right]$$

  - 用隶属度函数表示

$$\mu_{A^{'}}(x) = \max_{y} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y), \mu_{B^{'}}(y)\right]$$

模糊推理计算（五）

- 相似度
  - 广义否定式

$$A'(x) = A(x) \wedge \left[\underset{y \in Y}{\vee} \left(B(y) \wedge B'(y) \right) \right] = A(x) \wedge q$$

  - $q = q\left(B, B'\right) = \underset{y \in Y}{\vee} \left(B(y) \wedge B'(y) \right)$ 是大前提中的**B**与小前提中的**B’**的<u>相似度</u>。

模糊推理（例）

- 设在论域 $T(\text{温度})=\{0,20,40,60,80,100\}$　　$P(\text{压力})=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 上定义模糊子集的隶属度函数

$$\mu_A(\text{温度高})=\frac{0}{0}+\frac{0.1}{20}+\frac{0.3}{40}+\frac{0.6}{60}+\frac{0.85}{80}+\frac{1}{100}\qquad \mu_B(\text{压力大})=\frac{0}{1}+\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.85}{6}+\frac{1}{7}$$

- 规则是“如果温度高，那么压力就大”，通过模糊推理方法确定在“温度较高”的情况下得到压力变化的情况。
- 根据经验把“温度较高”的隶属度函数定义为

$$\mu_{A'}(\text{温度较高})=\frac{0.1}{0}+\frac{0.15}{20}+\frac{0.4}{40}+\frac{0.75}{60}+\frac{1}{80}+\frac{0.8}{100}$$

- 将模糊子集写成向量形式

$$A(x)=\{0\quad 0.1\quad 0.3\quad 0.6\quad 0.85\quad 1\}$$
$$B(x)=\{0\quad 0.1\quad 0.3\quad 0.5\quad 0.7\quad 0.85\quad 1\}$$
$$A'(x)=\{0.1\quad 0.15\quad 0.4\quad 0.75\quad 1\quad 0.8\}$$

模糊推理（例）

- 采用模糊蕴含最小运算法和最大-最小合成。求出**A’**与***A***的相似度

$$q = q\left(A^{'}, A\right) = \underset{x\in X}{\vee}\left(A^{'}(x)\wedge A(x)\right)$$

$$= \underset{x\in X}{\vee}\left(\frac{0.1\wedge 0}{0}+\frac{0.15\wedge 0.1}{20}+\frac{0.4\wedge 0.3}{40}+\frac{0.75\wedge 0.6}{60}+\frac{1\wedge 0.85}{80}+\frac{0.8\wedge 1}{100}\right)$$

$$= \underset{x\in X}{\vee}\left(\frac{0}{0}+\frac{0.1}{20}+\frac{0.3}{40}+\frac{0.6}{60}+\frac{0.85}{80}+\frac{0.8}{100}\right) = 0.85$$

- 再用此**q**值去限位**B**的隶属度函数得到**B’**的隶属度函数

$$B^{'} = q\wedge B = 0.85\wedge\left(\frac{0}{1}+\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.85}{6}+\frac{1}{7}\right)$$

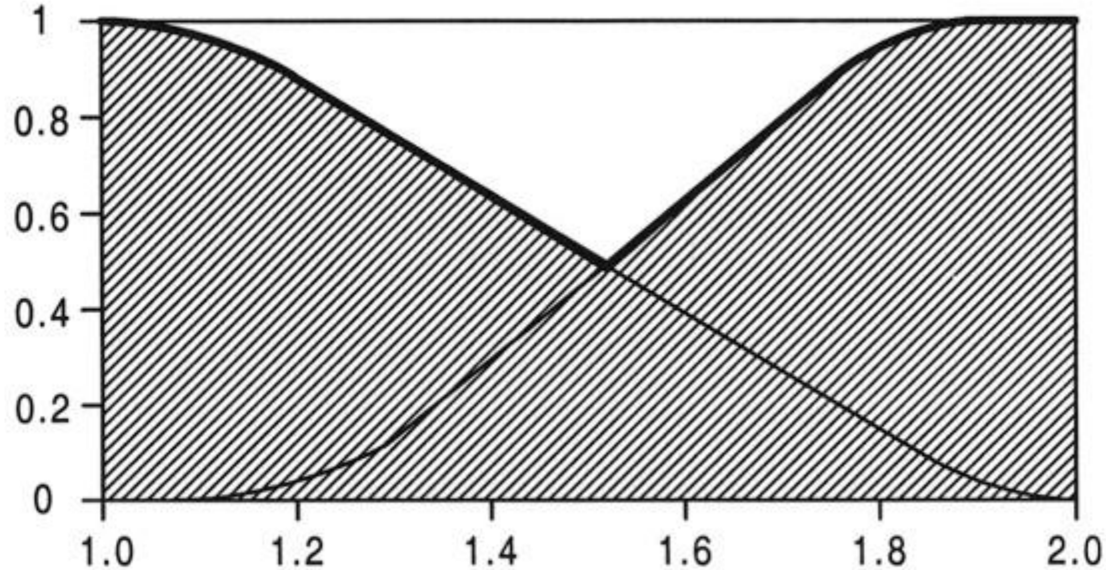
$$= \left(\frac{0}{1}+\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.85}{6}+\frac{0.85}{7}\right)$$

- 对比 “压力大”的隶属度函数，可认为上式相当于是“压力较大”的隶属度函数。

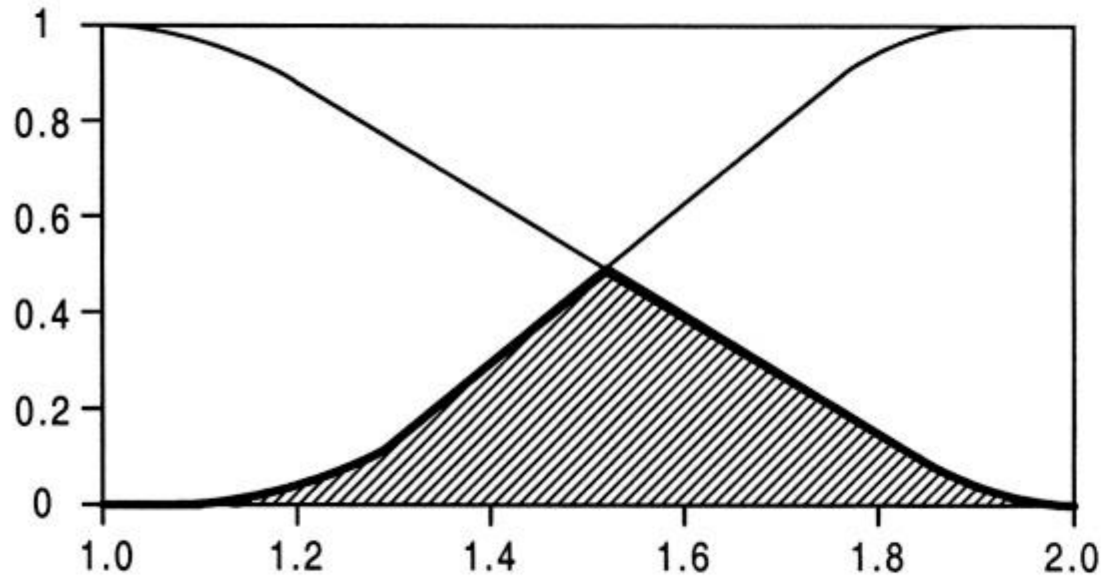
联接词

- 共有三个："与"、"或"、"非"，是人们表达意思的常用词。
- 为进行运算，定义隶属函数
  - 与： $\mu_{A\cap B} = \mu_A \wedge \mu_B$
  - 或： $\mu_{A\cup B} = \mu_A \vee \mu_B$
  - 非： $\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$

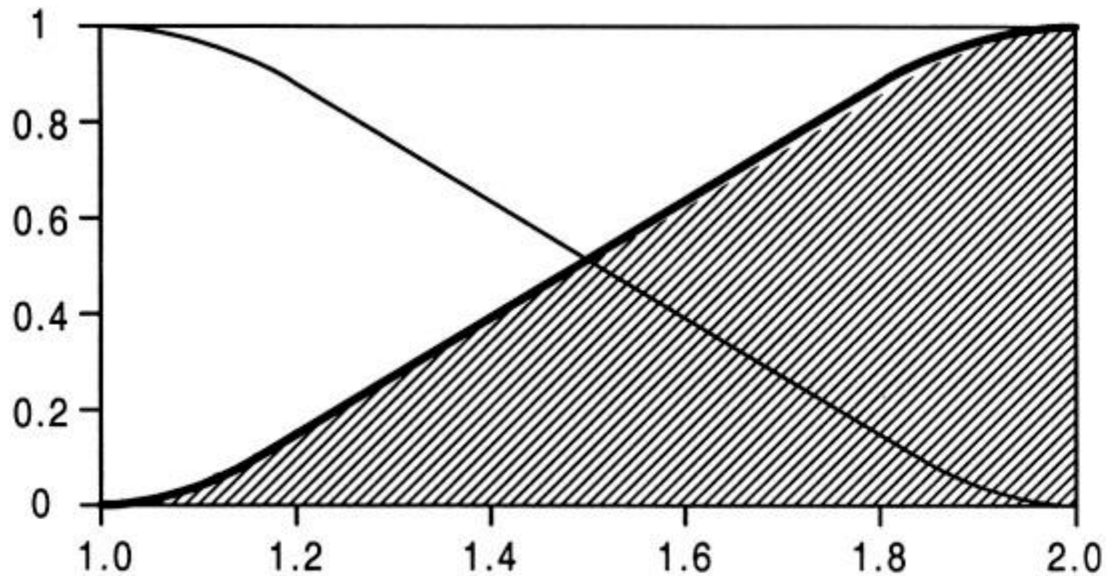
模糊集合联接词“或”



模糊集合联接词“与”



模糊集合联接词“非”



多输入模糊推理（一）

- 前提部分只有一个输入的情况为单输入模糊推理。
- 在模糊控制系统中经常遇到的问题往往是多输入的。
- 一般多输入推理采用**GMP**推理

大前提：　如果X是A且Y是B，则Z是C

小前提：　X是A’且Y是B’

结　论：　Z是C’

- 在大前提中的前提条件“**X是A且Y是B**”是直积空间 $X\times Y$ 上的模糊集合，并记为$A\times B$，其隶属度函数为

$$\mu_{A\times B}(x,y)=\min\left[\mu_A(x),\mu_B(y)\right] \quad \text{或者} \quad \mu_{A\times B}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y)$$

- 多输入模糊推理可记为模糊蕴含关系“ $A\times B\rightarrow C$ ”，该模糊蕴含关系可以转换为三元模糊关系，以最小运算法为例

$$R_m\left(A,B,C\right)=A\times B\times C=\int_{X\times Y\times Z}\left[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(z)\right]/\left(x,y,z\right)$$

多输入模糊推理（二）

- **结论C’可由模糊推理求出**

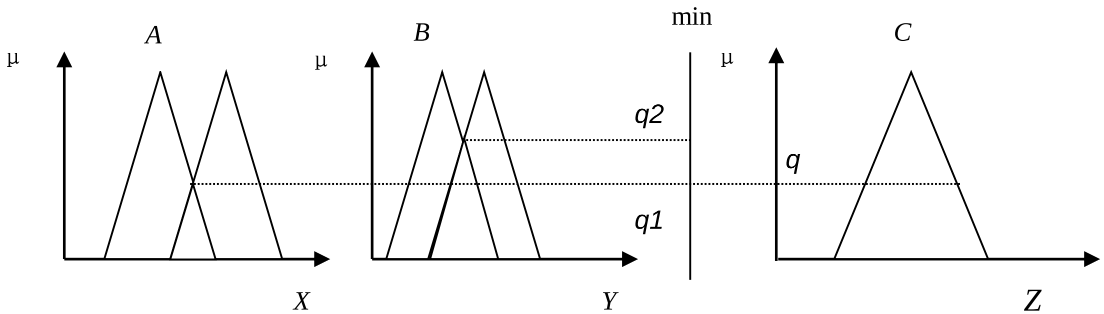
$$C^{'}=\left(A^{'}\times B^{'}\right)\circ R=\left(A^{'}\times B^{'}\right)\circ\left(A\times B\rightarrow C\right)$$

- **采用最大-最小合成**

$$\mu_{C^{'}}(z)=\bigvee_{x,y}\left[\mu_{A^{'}}(x)\wedge\mu_{B^{'}}(y)\right]\wedge\left[\mu_{A}(x)\wedge\mu_{B}(y)\wedge\mu_{C}(z)\right]=\left\{\bigvee_{x}\left[\mu_{A^{'}}(x)\wedge\mu_{A}(x)\right]\right\}\wedge\left\{\bigvee_{y}\left[\mu_{B^{'}}(y)\wedge\mu_{B}(y)\right]\right\}\wedge\mu_{C}(z)$$

$$=\bigvee_{x,y}\left\{\left[\mu_{A^{'}}(x)\wedge\mu_{B^{'}}(y)\wedge\mu_{A}(x)\wedge\mu_{B}(y)\right]\right\}\wedge\mu_{C}(z)=\left(q_1\wedge q_2\right)\wedge\mu_{C}(z)$$

- **q_1和q_2 分别是 $A\cap A^{'}$ 和 $B\cap B^{'}$ 的隶属度函数的最大值，代表了A’与A之间和B’与B之间的相似度。**
- $q_1\wedge q_2$ **称为模糊规则的激励强度，代表了规则前提部分的满意程度。**



多输入多规则模糊推理（一）

- 多输入多规则模糊推理是多个多输入单规则模糊推理的组合，可按相应于模糊规则的模糊关系的并来计算。
- 两输入多规则的情况

大前提： 如果x是A_1且y是B_1，则z是C_1

如果x是A_2且y是B_2，则z是C_2

…………

如果x是A_n且y是B_n，则z是C_n

小前提： 如果x是A'且y是B'

结　论： z是C'

- 模糊蕴含关系R_i定义为 $R_i = (A_i \times B_i) \to C_i$
- 以最小运算法 $\mu_{R_i} = \mu_{(A_i \times B_i) \to C_i}(x, y, z) = \left[\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)\right] \to \mu_{C_i}(z)$

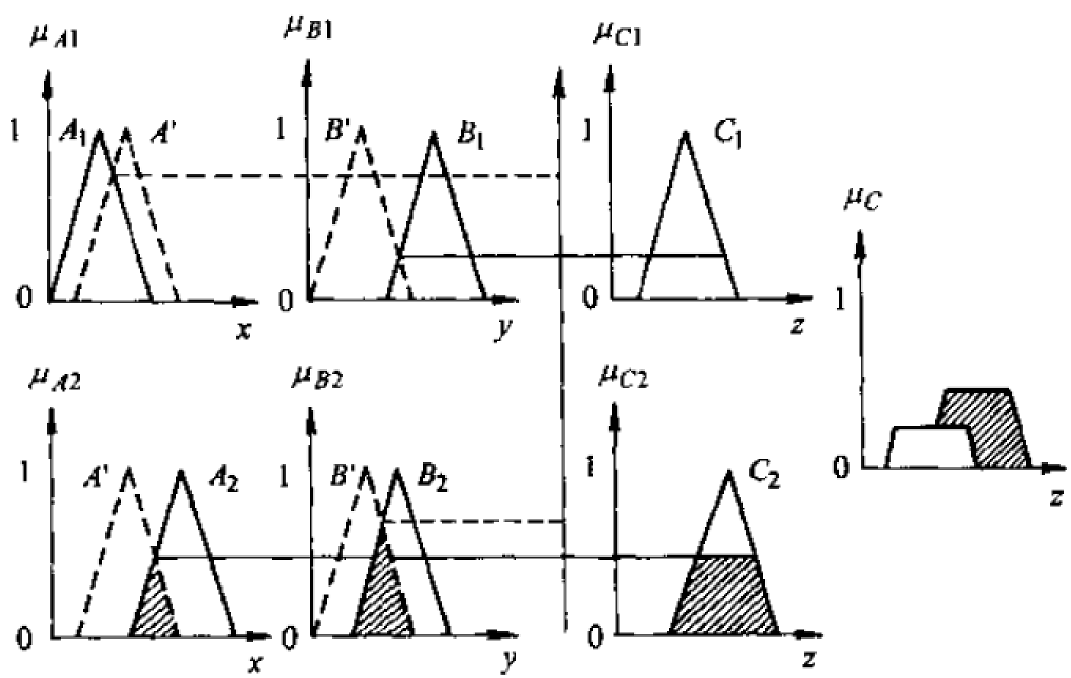
$$= \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y) \wedge \mu_{C_i}(z)$$

- **n**条模糊规则的总的模糊蕴含关系为 $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

多输入多规则模糊推理（二）

- 推理结论：$C^{'} = \left(A^{'} \wedge B^{'}\right) \circ R$
- 合成运算采用最大-最小合成方法

$$C^{'} = \left(A^{'} \wedge B^{'}\right) \circ R = \bigcup_{i=1}^{n} C_i^{'} = \bigcup_{i=1}^{n} \left[q_{1i} \wedge q_{2i} \wedge \mu_{C_i}(z) \right]$$



模糊推理的性质

- **1.** $\left(A' \; and \; B'\right)\circ\bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n}\left(A' \; and \; B'\right)\circ R_i$
- **2.** $\left(A' \; and \; B'\right)\circ\left(A_i \; and \; B_i \rightarrow C_i\right)$

  $= \left[A'\circ\left(A_i \rightarrow C_i\right)\right]\cap\left[B'\circ\left(B_i \rightarrow C_i\right)\right]$
- **3.** 对于$C_i' = \left(A' \; and \; B'\right)\circ\left(A_i \; and \; B_i \rightarrow C_i\right)$的推理结果，

  可用如下形式表示

  $\mu_{C_i'}(z) = \alpha_i \wedge \mu_{C_i}(z)$ （当采用模糊蕴含最小运算）

  $\mu_{C_i'}(z) = \alpha_i \mu_{C_i}(z)$ （当采用模糊蕴含乘积运算）

  其中$\alpha_i = \left[\max_x\left(\mu_{A'}(x)\wedge\mu_{A_i}(x)\right)\right]\wedge\left[\max_y\left(\mu_{B'}(y)\wedge\mu_{B_i}(y)\right)\right]$

模糊推理步骤

- 1、计算相似度。（规则适应度）
  - 把已知事实与模糊规则的前提进行比较，求出相对于每一前提隶属度函数的近似程度。
- 2、求激励强度。
  - 用模糊与（AND）、或（OR）算子，把相对于前提隶属度函数的相似度结合起来，形成激励强度。它表示了规则前提部分的满足程度。
- 3、求各条规则输出的隶属度函数。
  - 把激励强度施加于规则的结论部分的隶属度函数，以形成规则输出的隶属度函数。
- 4、求总输出隶属度函数。
  - 把所有规则输出隶属度函数求和获得总的输出隶属度函数。