第二章 变分法(2)

（Variational Approach）

2. 5 等式约束条件的泛函极值问题－Lagrange乘子法

- 上节已解决了无约束条件的泛函极值问题，建立了***Euler***方程。
- 对于等式约束条件下的泛函极值问题，解决思路是将其转化为了无约束条件的泛函极值问题加以求解。

- 回顾函数求极值时有约束条件转化为无约束条件的方法：
  - 直接消元法
  - **Lagrange**乘数(子)法

求有约束函数极值的两种解法

- **例：容积最大容器制造问题**
  - 考虑表面积A一定情况下容积最大的圆柱形容器尺寸。设容器高为l，半径为r，则容器的容积V和表面积A分别为

$$V(r,l)=\pi r^2 l \qquad (2\text{-}5\text{-}1)$$

$$A(r,l)=2\pi r^2+2\pi rl \qquad (2\text{-}5\text{-}2)$$

  - 该问题即为：在约束条件$A(r,l)=A_0$下，求$V(r,l)$最大值。

求有约束函数极值的两种解法

- **消元法**
  - 由（**2-5-2**）式可得 $$l=\frac{A_0-2\pi r^2}{2\pi r}$$ （**2-5-3**）
  - 代入（**2-5-1**）式得 $$V(r)=\frac{r}{2}A_0-\pi r^3$$
  - 将其对r求导数并令其为**0**，有
$$\frac{dV}{dr}=\frac{1}{2}A_0-3\pi r^2=0$$
  - 解之得 $r=\sqrt{\frac{A_0}{6\pi}}$ 代入（**2-5-3**）式得 $l=2\sqrt{\frac{A_0}{6\pi}}$ ，此时即为在表面积A_0约束下容器容积最大时r和l的取值。
- 消元法：简单直观，但难于在复杂问题中应用。

求有约束函数极值的两种解法

- **Lagrange乘数（子）法**

  – 考虑函数 $$F(r,l,\lambda)=V(r,l)+\lambda[A(r,l)-A_0]$$
  $$=\pi r^2 l+\lambda(2\pi r^2+2\pi rl-A_0)$$

  其中λ为Lagrange乘数（乘子）。

  应满足的极值条件为

  $$\frac{\partial F}{\partial r}=2\pi rl+\lambda(4\pi r+2\pi l)=0$$

  $$\frac{\partial F}{\partial l}=\pi r^2+2\lambda\pi l=0$$

  $$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=2\pi r^2+2\pi rl-A_0=0$$

  解此方程组可得

  $$r=\sqrt{\frac{A_0}{6\pi}},\quad l=2\sqrt{\frac{A_0}{6\pi}},$$

  $$\lambda=\sqrt{\frac{A_0}{24\pi}}$$

  与消元法结果相同。

- Lagrange乘子法：原理通用，适用于各种复杂问题。

求泛函极值的Lagrange乘子法

- 考虑泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},t)\,dt \qquad （2\text{-}5\text{-}10）$$

在等式约束条件

m维

$$\boldsymbol{f}(x,t)=0 \qquad （2\text{-}5\text{-}11）$$

约束下的极值问题。其中$\boldsymbol{f}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}$是$n$维向量函数。

- 定义广义泛函

$$\begin{aligned}J_a(x,\lambda)&=\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,\dot{x},t)+\lambda^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(x,t)\}\,dt\\&=\int_{t_0}^{t_f}L_a(x,\dot{x},\lambda,t)\,dt\end{aligned} \qquad （2\text{-}5\text{-}12）$$

其中$\boldsymbol{\lambda}(t)$为$m\times 1$维向量，称为**Lagrange乘子(multiplier)**，又称协态变量**(costate)**。当x满足（**2-5-11**）式时，则对任意$\lambda(t)$都有$J_a=J$。

- 对（2-5-12）式，可以用Taylor级数展开求$J_a(x,\lambda)$的一阶变分:

$$\delta J_a(x,\lambda)=\int_{t_0}^{t_f}\{[\frac{\partial L_a}{\partial x}]^{\mathrm{T}}\delta x+[\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}]^{\mathrm{T}}\delta \dot{x}+[\frac{\partial L_a}{\partial \lambda}]^{\mathrm{T}}\delta \lambda\}\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\{[(\frac{\partial L}{\partial x})^{T}+\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x}]\delta x+[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]^{T}\delta \dot{x}+f^{\mathrm{T}}(x,t)\delta \lambda\}\,dt$$

（2-5-13）

- 用分部积分法消去$\delta\dot{x}$，得

$$\delta J_a(x,\lambda)=\int_{t_0}^{t_f}\{[(\frac{\partial L}{\partial x})^{\mathrm{T}}+\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})^{\mathrm{T}}]\delta x+f^{\mathrm{T}}(x,t)\delta \lambda\}\,dt$$

$$+(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})^{\mathrm{T}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}$$

（2-5-14）

考虑端点固定问题，则上式最后一项为零。

- 由达到极值时的极值轨线应满足等式约束条件 $f(\hat{x},t)=0$，即上式中 $\delta\lambda$ 前系数为零，因此 $\delta\lambda$ 可任意取值。
- 由泛函取极值的必要条件一阶变分为零，即 $\delta J_a(x,t)=0$，可得

$$(\frac{\partial L}{\partial x})^{\mathrm{T}}+\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})^{\mathrm{T}}=0 \qquad （2\text{-}5\text{-}15）$$

- 由（2-5-12）式中 $L_a(x,\dot{x},\lambda,t)=L(x,\dot{x},t)+\lambda^{\mathrm{T}}(t)f(x,t)$，（2-5-15）式也可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x}L_a(x,\dot{x},\lambda,t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}L_a(x,\dot{x},\lambda,t)=0 \qquad （2\text{-}5\text{-}16）$$

- （2-5-16）式即为对应于广义泛函 $J_a(x,\lambda)$ 的欧拉方程，它与约束条件（2-5-11）构成求泛函极值的必要条件。

具有微分方程等式约束的泛函极值

- 进一步讨论泛函

  $$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},t)\,dt \qquad （2\text{-}5\text{-}17）$$

  在微分方程等式约束条件

  $$\boldsymbol{f}(x,\dot{x},t)=0 \qquad （2\text{-}5\text{-}18）$$

  约束下的极值问题。其中$\boldsymbol{f}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^T$是$n$维向量函数。

- 应用**Lagrange**乘子法，取广义泛函

  $$J_a(x,\lambda)=\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,\dot{x},t)+\lambda^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(x,\dot{x},t)\}\,dt$$

  $$=\int_{t_0}^{t_f} L_a(x,\dot{x},\lambda,t)\,dt \qquad （2\text{-}5\text{-}19）$$

- J_a的一阶变分为

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \{[\frac{\partial L_a}{\partial x}]^{\mathrm{T}} \delta x + [\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}]^{\mathrm{T}} \delta \dot{x} + [\frac{\partial L_a}{\partial \lambda}]^{\mathrm{T}} \delta \lambda\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \{[(\frac{\partial L}{\partial x})^{T} + \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial x}]\delta x + [(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})^{T} + \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}]\delta \dot{x} + f^{\mathrm{T}}(x, \dot{x}, t)\delta \lambda\} dt$$

（2-5-20）

- 用分部积分法处理包含$\delta \dot{x}$的项，得

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \{[(\frac{\partial L}{\partial x})^{\mathrm{T}} + \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}[(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})^{\mathrm{T}} + \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}]]\delta x + f^{\mathrm{T}}(x, \dot{x}, t)\delta \lambda\} dt$$

$$+ [(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})^{\mathrm{T}} + \lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}]\delta x \Big|_{t_0}^{t_f}$$

（2-5-21）

- 当泛函取极值时须满足约束条件 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)=\mathbf{0}$，则 $\delta\lambda$ 可任意取值。且考虑端点固定，上式最后一项恒定为零。由泛函极值必要条件 $\delta J_a=0$，有

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}+\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)^{\mathrm{T}}+\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right]=\mathbf{0} \tag{2-5-22}$$

- 上式也可表示为

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}L_a(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\lambda,t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}L_a(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\lambda,t)=\mathbf{0} \tag{2-5-23}$$

为具有微分方程等式约束的泛函极值必要条件，也是相应广义泛函的欧拉方程。

2.6 变动端点的变分问题——横截条件

- 考虑端点变动情况下的泛函极值问题。这时在端点处不再保证 $\delta x(t_0)=0$ 有和 $\delta x(t_f)=0$。

- 端点变动包括：
  - 端点时刻变动
  - 端点位置变动

- 任何形式的端点变动问题都可以转化为起点时刻固定问题 ＝＞ 端点变动情况可以归结为两大类：
  - 终点时刻固定
  - 终点时刻自由

1. 终点时刻固定

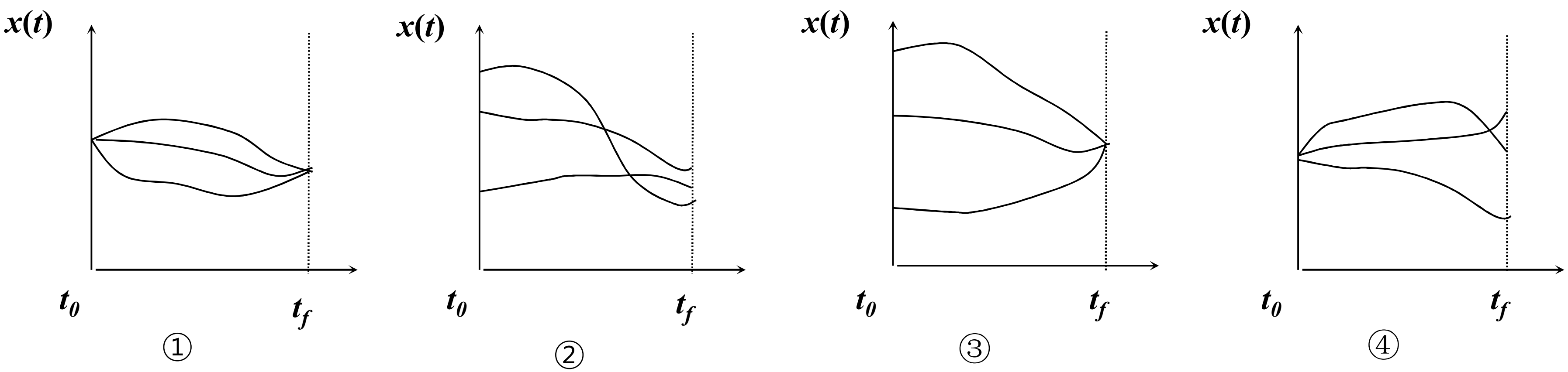
- 终点时刻固定可以分为4种情况：

  ①起点和终点位置都固定；

  ②起点和终点位置都变动；

  ③起点位置变动、终点位置固定；

  ④终点位置变动、起点位置固定。



- 解决端点变动的泛函极值问题，基本方法仍是根据变分原理中泛函极值必要条件，即一阶变分等于零，来求解导出的微分方程两点边值问题，而关键是确定边界条件，即保证

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \qquad (2\text{-}6\text{-}1)$$

即当 $t = t_0$ 和 $t = t_f$ 时，$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x = 0$。该条件即为**横截条件**，又称为**正交条件**。

- 对应于终点时刻固定的4种情况，要保证满足正交条件 $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$，有：

① $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$，恒有 $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$ ；

② $\delta x(t_0)$ **和** $\delta x(t_f)$ **都**任意，只有 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0$；

③ $\delta x(t_f) = 0$, $\delta x(t_0)$ 任意，要求 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0$ ；

④ $\delta x(t_0) = 0$，$\delta x(t_f)$任意，要求 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0$ ；

- 若考虑起点、终点不是相互独立的自由变化，而是相互间存在一定约束关系，如下列方程约束

$$F[x(t_0),x(t_f)]=0 \tag{2-6-2}$$

或表示为

$$F[\hat{x}(t_0)+\delta x(t_0),\hat{x}(t_f)+\delta x(t_f)]=0 \tag{2-6-3}$$

其中$\hat{x}(t_0)$和$\hat{x}(t_f)$分别为极值轨线在端点的取值。假定F的一阶偏导数在$\hat{x}(t_0)$和$\hat{x}(t_f)$处存在并连续，由于极值轨线端点同样需要满足约束条件（2-6-2），即

$$F[\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_f)]=0 \tag{2-6-4}$$

则由（2-6-3）式一阶Taylor展开有

$$\frac{\partial}{\partial x(t_0)}F[\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_f)]\delta x(t_0)+\frac{\partial}{\partial x(t_f)}F[\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_f)]\delta x(t_f)=0 \tag{2-6-5}$$

由（**2-6-1**）式有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_f}\delta x(t_f)-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_0}\delta x(t_0)=0 \qquad \text{（2-6-6）}$$

解（**2-6-5**）、（**2-6-6**）两式得

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_f}+\frac{b}{a}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_0}\right]\delta x(t_f)=0 \qquad \text{（2-6-7）}$$

其中：

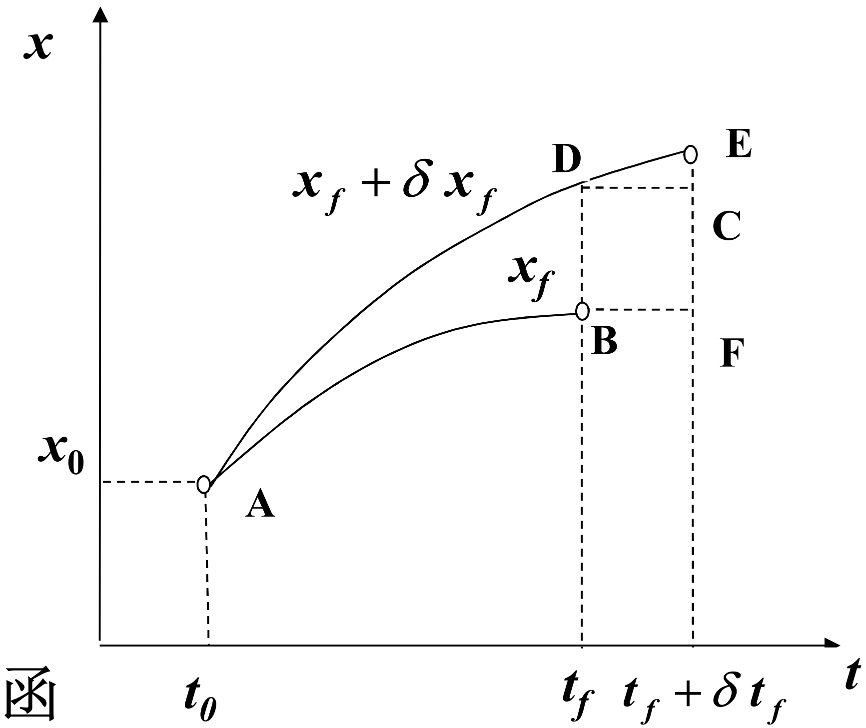
$$a=\frac{\partial}{\partial x(t_0)}F[\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_f)]，\quad b=\frac{\partial}{\partial x(t_f)}F[\hat{x}(t_0),\hat{x}(t_f)]$$

若$\delta x(t_f)$可任取，即变动终点，则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_f}+\frac{b}{a}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t=t_0}=0 \qquad \text{（2-6-8）}$$

即为当$x(t_0)$和$x(t_f)$受到方程（**2-6-2**）约束时的横截条件。

2. 终点时刻自由



- 考虑求泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L(x(t),\dot{x}(t),t)\,dt \qquad (2\text{-}6\text{-}9)$$

的极值轨线，其中t_0、x_0固定， t_f、x_f变动。

- 考虑终点由（t_f, x_f）移动到（$t_f+\delta t_f, x_f+\delta x_f$）时泛函的增量，有

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} L(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)dt-\int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},t)dt \qquad (2\text{-}6\text{-}9)'$$

- 分解积分限可得

$$\Delta J = \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_f} \{L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)\}dt \qquad \text{（2-6-10）}$$

对上式右边第一项利用中值定理，有

$$\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)dt = L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)\Big|_{t=t_f+\theta\delta t_f} \cdot \delta t_f$$

其中$0<\theta<1$。再考虑L的连续性，有

$$L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)\Big|_{t=t_f+\theta\delta t_f} = L(x, \dot{x}, t)\Big|_{t=t_f} + \varepsilon_1$$

其中ε_1为高阶无穷小，当$\delta t_f \to 0$，$\delta x_f \to 0$时，$\varepsilon_1 \to 0$。由此可得（2-6-10）式右边第一项为

$$\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} L(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)dt = L(x, \dot{x}, t)\Big|_{t=t_f} \cdot \delta t_f + \varepsilon_1 \delta t_f \qquad \text{（2-6-11）}$$

- 对于（2-6-10）式右边第二项，将被积函数用**Taylor**公式展开可得

$$\int_{t_0}^{t_f}\{L(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-L(x,\dot{x},t)\}dt=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}]dt+\varepsilon_2 \tag{2-6-12}$$

其中ε_2为高阶无穷小。将上式右边第一项分部积分，并考虑因$x(t_0)=x_0$固定从而$\delta x(t_0)=0$，可得

$$\int_{t_0}^{t_f}\{L(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-L(x,\dot{x},t)\}dt$$

$$=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\delta x dt+\varepsilon_2 \tag{2-6-13}$$

考虑$\delta x\big|_{t_f}=\overline{BD}=\overline{EF}-\overline{EC}$ 为t_f时刻x的变分，
$\overline{EF}=\delta x_f$ 为综合 t_f和 x 变动产生的变分，$\overline{EC}=\dot{x}(t_f)\delta t_f+\varepsilon_3$，
其中ε_3为高阶无穷小。代入（2-6-13）式得

$$\int_{t_0}^{t_f}\{L(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-L(x,\dot{x},t)\}dt$$

$$=[\delta x_f-\dot{x}(t_f)\delta t_f]\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\delta x dt+\varepsilon_2-\varepsilon_3\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \tag{2-6-14}$$

- 综合(2-6-11)、(2-6-14)两式并根据泛函变分定义有

$$\delta J = \Delta J - H.O.T$$

$$= L(x,\dot{x},t)\Big|_{t=t_f} \cdot \delta t_f + [\delta x_f - \dot{x}(t_f)\delta t_f]\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\delta x dt$$

$$= [L(x,\dot{x},t) - \dot{x}(t_f)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\Big|_{t_f} \delta t_f + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \delta x_f + \int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\delta x dt$$

（2-6-15）

- 由泛函极值必要条件 $\delta J = 0$ ，可得

1) 在 δt_f、δx_f 相互独立情况下，泛函极值的必要条件为

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 & \text{(欧拉方程）} \\ \left.\begin{array}{l} [L(x,\dot{x},t) - \dot{x}(t_f)\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\Big|_{t_f} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0 \end{array}\right\} & \text{（横截条件）} \end{array}\right\}$$

（2-6-16）

- 当终点沿某一轨线变动，受轨线方程约束 $x(t_f)=C(t_f)$ 时，则在 $[t_f, t_f+\delta t_f]$ 区间内有 $\delta x_f=\dot{C}(t_f)\delta t_f$，因此泛函极值的必要条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 &&\text{（欧拉方程）}\\ &\{L(x,\dot{x},t)+[\dot{C}(t_f)-\dot{x}(t_f)]\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\}\Big|_{t_f}=0 &&\text{（横截条件）}\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(2-6-16)}$$