# 第二章 变分法(3)
# （Variational Approach）

# 2.7用变分法解最优控制问题
## —Hamilton函数

1. 变分学的三个基本问题

- **Lagrange问题**：求积分型泛函 $J=\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]dt$ 的极值，又称积分指标问题。
- **Mayer问题**：求末值型泛函 $J=\Phi[x(t_f),t_f]$ 的极值，又称终值指标问题。
- **Bolza问题**：求复合型泛函 $J=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),\dot{x}(t),t]\,dt$ 的极值。
- **Bolza**问题有最一般的形式，以下主要考虑该形式的最优控制问题。

## 2. 最优控制问题

- 最优控制问题的一般表述是：在系统状态方程一般形式

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad （2\text{-}7\text{-}1）$$

约束下，求最优控制$u^*(t)$，使性能指标（泛函）

$$J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t)]dt \qquad （2\text{-}7\text{-}2）$$

取极值。其中，$x$为$n$维状态向量，$u$为$m$维控制向量。这里对$u$的取值不加限制，$x(t_0) = x_0$ 已知。

- 以下按照终点时刻固定和终点时刻自由两种情况进行讨论。

## （1）$t_f$ 固定不变

- 利用**Lagrange** 乘子$\lambda(t)$将状态方程作为约束条件合并到性能指标（**2-7-2**）式中，构造新的性能指标$\bar{J}$，有

$$\bar{J} = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[x(t), u(t), t)] + \lambda^T(t)[f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t)]\}dt$$

$$= \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[x(t), u(t), t)] + \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] - \lambda^T(t)\dot{x}(t)\}dt$$

（**2-7-3**）

定义**Hamilton**函数

$$H[x(t), u(t), \lambda(t), t] = L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] \qquad \text{（2-7-4）}$$

则可以记

$$\bar{J} = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{H[x(t), u(t), \lambda(t), t] - \lambda^T(t)\dot{x}(t)\}dt \qquad \text{（2-7-5）}$$

对（**2-7-5**）式右边最后一项进行分部积分，有

$$\bar{J}=\Phi[x(t_f),t_f]-\lambda^{\mathrm{T}}(t_f)x(t_f)+\lambda^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)x(t)\}dt \tag{2-7-6}$$

在 $x(t_0)=x_0$ 已知情况下，$\bar{J}$ 的变分为

$$\delta\bar{J}=[(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\lambda)^{\mathrm{T}}\delta x]\Big|_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\{[\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}]^{\mathrm{T}}\delta x+(\frac{\partial H}{\partial u})^{\mathrm{T}}\delta u\}dt \tag{2-7-7}$$

为使 $\delta x$ 的系数为**0**，取

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial L}{\partial x}-\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2-7-8}$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{t_f} \tag{2-7-9}$$

则有

$$\delta\bar{J}=\int_{t_0}^{t_f}(\frac{\partial H}{\partial u})^{\mathrm{T}}\delta u dt \tag{2-7-10}$$

由泛函极值必要条件，对任意$\delta u$均有$\delta \bar{J}=0$，则应有

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \tag{2-7-11}$$

（2-7-8）式和（2-7-11）式即为该最优控制问题的*Euler-Lagrange*方程，而（2-7-9）式则是其边界条件。

然而要求使性能指标$J$达到极值的控制函数$u$，必须满足状态方程约束条件，即要求解微分代数方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t]=\frac{\partial H}{\partial \lambda}\\
&\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial L}{\partial x}-\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial H}{\partial x}\\
&\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial L}{\partial u}+\lambda^{\mathrm{T}}\frac{\partial f}{\partial u}=0
\end{aligned}\right\} \tag{2-7-12}$$

- （2-7-12）式中三个微分方程分别称为状态方程、协态方程和控制方程。该微分方程组又称为规范方程组，需满足的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \lambda(t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_{t_f} \end{aligned}\right\} \qquad \text{（2-7-13）}$$

- 引入**Hamilton**函数的目的，是将泛函在等式约束条件下对控制函数$u$的条件极值问题转化为**Hamilton**函数对$u$的无条件极值问题。这种方法又称为**Hamilton**方法。
- **Hamilton**函数的另一种引入形式，可以更清楚地看出**Hamilton**函数的引入如何将条件极值问题转化为无条件极值问题。

考虑目标函数和状态方程约束条件

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t]dt \qquad \text{（2-7-14）}$$

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \qquad \text{（2-7-15）}$$

将（2-7-15）变换为

$$f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t) = 0 \qquad \text{（2-7-16）}$$

引入Lagrange乘子$\lambda(t)$，$\lambda(t)$为$n$维列向量，构造广义泛函 $\bar{J}$，将条件极值问题转化为无条件极值问题，有

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \{L[x(t), u(t), t)] + \lambda^T(t)[f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t)]\}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), u(t), \lambda(t), t)]dt \qquad \text{（2-7-17）}$$

其中

$$F[x(t), u(t), \lambda(t), t)] = L[x(t), u(t), t)] + \lambda^T(t)\{f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t)\}$$

用变分法可求得$\bar{J}$的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad \text{（2-7-18）}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \qquad \text{（2-7-19）}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0 \qquad \text{（2-7-20）}$$

定义：

$$H[x(t), u(t), \lambda(t), t)] = L[x(t), u(t), t)] + \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t] \qquad （2\text{-}7\text{-}21）$$

则有

$$F[x(t), u(t), \lambda(t), t)] = H[x(t), u(t), \lambda(t), t)] - \lambda^T(t)\dot{x}(t) \qquad （2\text{-}7\text{-}22）$$

代入（**2-7-18**）~（**2-7-20**）式，即可得

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f[x(t), u(t), t] \\ &\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad （2\text{-}7\text{-}12）$$

## （2）$t_f$ 变动

- 仍考虑状态方程 $\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t]$，

其中 $x\in R^n, u\in R^m, m\le n, t\in[t_0,t_f]$， $x(t_0)=x_0$ 已知。

求最优控制$u^*(t)$，使系统由$x_0$转移到$x(t_f)$，并满足约束

$\Psi[x(t_f),t_f]=0$， $\Psi\in R^r$ 连续可微；并使

$$J=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]dt \qquad \text{（2-7-23）}$$

取极值。其中$\Phi$、$L$连续可微，$t_f$未知。

- 引入Lagrange乘子 $\lambda_1(t)\in R^n, \lambda_2\in R^r$ ，构造广义泛函

$$\begin{aligned}\bar{J}(u)=&\varPhi[x(t_f),t_f]+\lambda_2^{\mathrm{T}}\varPsi[x(t_f),t_f]\\&+\int_{t_0}^{t_f}\{L[x(t),u(t),t]+\lambda_1^{\mathrm{T}}(t)[f[x(t),u(t),t]-\dot{x}(t)]\}dt\end{aligned} \qquad \text{（2-7-24）}$$

- 定义**Hamilton**函数

$$H[x(t),u(t),\lambda_1(t),t)]=L[x(t),u(t),t)]+\lambda_1^{\mathrm{T}}(t)f[x(t),u(t),t] \quad （2\text{-}7\text{-}25）$$

代入$\bar{J}$并作变换后得

$$\begin{aligned}\bar{J}(u)&=\Phi[x(t_f),t_f]+\lambda_2^{\mathrm{T}}\Psi[x(t_f),t_f]-\lambda_1^{\mathrm{T}}(t_f)x(t_f)+\lambda_1^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)\\&+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda_1(t),t)]+\dot{\lambda}_1^{\mathrm{T}}(t)x(t)\}dt\end{aligned} \quad （2\text{-}7\text{-}26）$$

- 因$t_f$未知，即为端点变动变分问题。由一阶变分$\delta\bar{J}(u)=0$，参照2.6节的推导，有

$$\begin{aligned}\delta\bar{J}(u)&=\delta t_f[H+\dot{\lambda}_1^{\mathrm{T}}(t)x(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\lambda_2^{\mathrm{T}}\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\lambda_1^{\mathrm{T}}(t)x(t)}{\partial t}]\Big|_{t_f}\\&+\delta x_f[\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi^{\mathrm{T}}}{\partial x}\lambda_2-\lambda_1(t_f)]\Big|_{t_f}\\&+\int_{t_0}^{t_f}\{\delta x^{\mathrm{T}}[\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}_1(t)]+\delta u^{\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial u}\}dt=0\end{aligned} \quad （2\text{-}7\text{-}27）$$

- 由$\delta t_f, \delta x_f, \delta x$和$\delta u$的任意性，有

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} && \text{协态方程} \\
&\frac{\partial H}{\partial u} = 0 && \text{控制方程} \\
&\left.
\begin{aligned}
&\lambda_1(t_f) = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi^{\mathrm{T}}}{\partial x}\lambda_2\right]\Big|_{t_f} \\
&\left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \lambda_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right]\Big|_{t_f} = 0
\end{aligned}
\right\} && \text{横截条件}
\end{aligned}
\right\}
\quad \text{（2-7-28）}
$$

- 至此可以得到$t_f$变动时使（2-7-23）式所示性能指标$J(u)$取极值得最优解必要条件为：

(1) 若 $x^*(t)$ 为对应于$u^*(t)$ 的最优轨线，则存在相应的协态变量 $\lambda_1^*(t)$，满足规范方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{x}^*(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda_1(t)}\\
&x^*(t_0)=x_0\\
&\dot{\lambda}_1^*(t)=-\frac{\partial H}{\partial x(t)}\\
&\lambda_1^*(t_f)=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi^{\mathrm{T}}}{\partial x}\lambda_2\right]\Big|_{t_f}
\end{aligned}\right\}\qquad（2\text{-}7\text{-}31）
$$

(2) $H$对控制向量取极值

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)}=0\qquad（2\text{-}7\text{-}32）$$

(3) 满足目标集条件

$$
\left.\begin{aligned}
&\Psi[x(t_f),t_f]=0\\
&\left[H+\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\lambda_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right]\Big|_{t_f}=0
\end{aligned}\right\}（2\text{-}7\text{-}33）
$$

## （3）角点条件与内点约束

- 用变分法解最优控制问题，要求容许轨线$x(t)$连续可微。

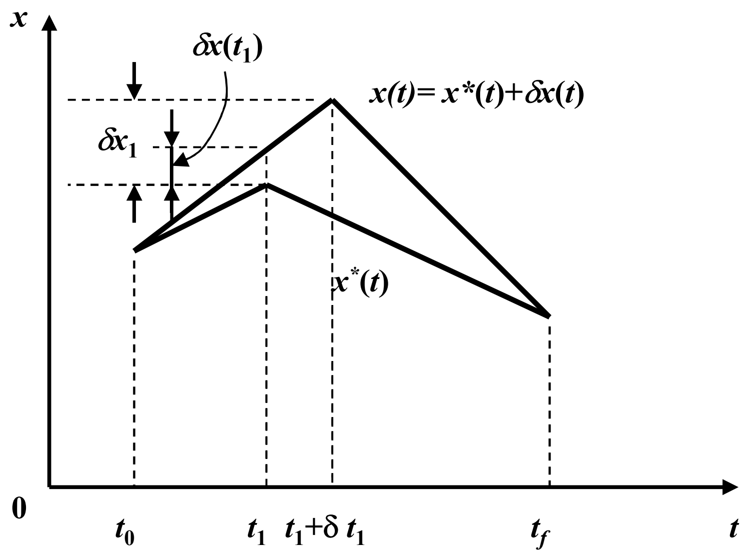
- 当$x(t)$为分段光滑，即$x(t)$在有限个点上连续但不可微时，这些点称为角点。
- 状态轨线中间某一点称为内点。可能存在一组内点约束条件 $\eta[x(t_1), t_1]=0$，其中$t_1$为某一中间时刻，$t_0<t_1<t_f$， $\eta[\cdot]$为$q$维向量函数。
- 以下考虑存在角点和内点约束时，用变分法解最优控制最优解的必要条件问题

# 1）角点条件

- 设$x^*(t)$分段光滑，且为使性能泛函

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_f} L(x,\dot{x},t)\,dt$$

取极值的极值轨线，如图所示。




- 假定在$[t_0, t_f]$区间上$x^*(t)$只在$t_1$有一个角点，$t_1$未知，$t_f$固定。
- 令$x(t)$ 为任意一条容许轨线，满足

$$x(t)=x^*(t)+\delta x(t)$$

- 由于在$t_1$处不可微，性能泛函$J(x)$可以写为$J(x)=J_1(x)+J_2(x)$，其中

$$J_1(x)=\int_{t_0}^{t_1^-} L(x,\dot{x},t)\,dt$$

$$J_2(x)=\int_{t_1^+}^{t_f} L(x,\dot{x},t)\,dt$$

显然$J_1(x)$对应末端时刻自由、$J_2(x)$对应初始时刻自由情况

- 由2.6节可知，$J_1(x)$的一阶变分为

$$\delta J_1=\int_{t_0}^{t_1^-}[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\delta x dt+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^-}\delta x_1+[L(x,\dot{x},t)-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\Big|_{t_1^-}\delta t_1$$

- 类似可得$J_2(x)$的一阶变分为

$$\delta J_2=\int_{t_1^+}^{t_f}[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\delta x dt-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^+}\delta x_1+[L(x,\dot{x},t)-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\Big|_{t_1^+}\delta t_1$$

- 由此可得泛函$J(x)$的一阶变分为

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}]\delta x dt+[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^-}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^+}]\delta x_1+[(L-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\Big|_{t_1^-}+(L-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\Big|_{t_1^+}]\delta t_1$$

- 因此，可以得到有角点泛函$J(x)$取极值的必要条件为，

欧拉方程： $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$

横截条件： $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^-}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_1^+}$ $\quad$ $(L-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\Big|_{t_1^-}=-(L-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})\Big|_{t_1^+}$

# 2）内点约束条件

- 设$t_f$固定、末端自由，存在内点约束的复合型性能泛函的变分问题为

$$\min_{u(t)} J=\Phi[x(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]dt$$

满足约束条件 $\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t]$ ，$x(t_0)=x_0$

$$\eta[x(t_1),t_1]=0$$

式中$t_f$固定，$x(t_f)$自由; $t_1$自由，$x(t_1)$自由。要求确定性能泛函极值的必要条件。

□ 当存在内点约束时，$x(t)$在 $t_1$处未必可微。可以以$t_1$为界，将$J$分为两部分

$$J=\Phi[x(t_f)]+\int_{t_1^+}^{t_f} L(x,u,t)dt+\int_{t_0}^{t_1^-} L(x,u,t)dt$$

$$J=\Phi[x(t_f)]+\int_{t_1^+}^{t_f} L(x,u,t)dt+\int_{t_0}^{t_1^-} L(x,u,t)dt$$

- 可以认为内点约束 $\eta[x(t_1),t_1]=0$ 是 $t_0$ 到 $t_1$ 那部分轨线的末端约束条件。引入**Lagrange**乘子$\lambda(t)\in R^n$ 和 $\pi(t)\in R^q$，构造广义泛函

$$J_a=\underbrace{\Phi[x(t_f)]+\int_{t_1^+}^{t_f}(H-\lambda^T\dot{x})dt}_{\text{初始时刻自由}}+\underbrace{\pi^T\eta[x(t_1),t_1]+\int_{t_0}^{t_1^-}(H-\lambda^T\dot{x})dt}_{\text{末端时刻自由}}$$

式中 $t_1^+$和$t_1^-$都是可变的，**Hamilton**函数

$$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

- 广义泛函$J_a$中，等式右端前两项为初始时刻自由的泛函，后两项为末端时刻自由的泛函。

- 广义泛函的一阶变分为 ⇨

$$\delta J_a = (\frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)})^T \delta x_f - (H - \lambda^T \dot{x})\Big|_{t_1^+} \delta t_1 - (\lambda^T \delta x)\Big|_{t_1^+}^{t_f} + \int_{t_1^+}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x} - \dot{\lambda})^T \delta x + (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u] dt$$

$$+ \frac{\partial \pi^T \eta}{\partial x(t_1)} \delta x_1 + \frac{\partial \pi^T \eta}{\partial \delta t_1} \delta t_1 + (H - \lambda^T \dot{x})\Big|_{t_1^-} \delta t_1 - (\lambda^T \delta x)\Big|_{t_0}^{t_1^-} + \int_{t_0}^{t_1^-} [(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda})^T \delta x + (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u] dt$$

- 将如下关系式代入上式

$$\delta x_1 = \delta x(t_1^-) + \dot{x}(t_1^-)\delta t_1 = \delta x(t_1^+) + \dot{x}(t_1^+)\delta t_1$$

整理后得

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda})^T \delta x + (\frac{\partial H}{\partial u})^T \delta u] dt + [(\frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}) - \lambda(t_f)]^T \delta x_f$$

$$+ [\lambda(t_1^+) - \lambda(t_1^-) + \frac{\partial \eta^T}{\partial x(t_1)} \pi]^T \delta x_1 + [H(t_1^-) - H(t_1^+) + \pi^T \frac{\partial \eta}{\partial \delta t_1}] \delta t_1$$

- 则可得有内点约束的最优控制解的必要条件为

(1) $x^*(t)$和$\lambda^*(t)$满足规范方程组： $\dot{x}^*(t)=\dfrac{\partial H}{\partial \lambda(t)}$ ， $\dot{\lambda}^*(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x(t)}$

(2) 横截条件与边界条件： $x(t_0)=x_0$ ， $\lambda(t_f)=\dfrac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$

(3) $H$对控制向量取极值： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$

(4) 内点约束条件： $\eta[x(t_1),t_1]=0$

$$\lambda(t_1^-)=\lambda(t_1^+)+\frac{\partial \eta^T}{\partial x(t_1)}\pi$$

$$H(t_1^-)=H(t_1^+)-\pi^T\frac{\partial \eta}{\partial \delta t_1}$$

其中内点约束条件共给出$(q+n+1)$个方程，正好可以确定$\pi$、$x(t_1)$和$t_1$共$(q+n+1)$个未知数。此问题实际上是求解三点边界问题，难度更大。

- 例：
- 已知：

系统方程 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$（即二次积分传递函数 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2}$）

$\dot{x}_2(t)=u(t)$

边界条件 $x_1(0)=1,\quad x_1(1)=0$

$x_2(0)=1,\quad x_2(1)=0$

求使性能指标 $J=\dfrac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$ 达极小值的最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$。

- 解：此例为最小能量控制问题。

引入Lagrange乘子 $\lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$，则其Hamilton函数为

$$H=\frac{1}{2}u^2(t)+\lambda_1(t)x_2(t)+\lambda_2(t)u(t)$$

由控制方程 $\dfrac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0$ ，得 $u(t)=-\lambda_2(t)$

协态方程为 $\dot{\lambda}_1(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=0,\quad \dot{\lambda}_2(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1(t)$

解之得 $\lambda_1(t)=c_1,\quad \lambda_2(t)=-c_1t+c_2$

则有 $u(t)=c_1t-c_2$

由状态方程 $\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad \dot{x}_2(t)=u(t)$ 可解得

$$x_2(t)=\frac{1}{2}c_1t^2-c_2t+c_3\ ,\quad x_1(t)=\frac{1}{6}c_1t^3-\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4$$

由边界条件可求得 $c_1=18,\quad c_2=10,\quad c_3=1,\quad c_4=1$

则可得最优控制 $u^*(t)=18t-10$

和最优轨线

$$x_1^*(t)=3t^3-5t^2+t+1$$

$$x_2^*(t)=9t^2-10t+1$$

则最后可求得

最优控制 $$u^*(t) = 18t - 10$$

最优轨线 $$x_1^*(t) = 3t^3 - 5t^2 + t + 1$$

$$x_2^*(t) = 9t^2 - 10t + 1$$

由例题求解过程可以看出，**Lagrange**乘子$\lambda(t) = \left[\lambda_1(t) \ \ \lambda_2(t)\right]^{\mathrm{T}}$在运算中只是作为中间变量起到辅助作用，其最终结果如何我们并不关心。

例题提供了最基本的求解步骤，但最优控制问题因性能指标和状态方程约束的不同而千变万化，要求得最优控制$u^*$并不容易。

这里假设对控制变量$u$的取值不加限制，而实际工程系统中$u$却总是有取值范围的（容许控制），如何解决?