七. 随机系统最优控制
(Stochastic Optimal Control)

引 言

- 前面都是以确定性系统为基础讨论最优控制问题，而实际上绝对的确定性系统几乎不存在，各种工程系统中总是或多或少地存在不确定性。
- 如何处理系统中的不确定性已经是当前控制理论研究的重要问题。引起不确定性的原因很多，处理的方法也有很多。
- 随机系统控制理论考虑不确定性问题中的随机扰动部分，方法是将确定性控制系统理论与概率论、随机过程理论方法相结合。
- 随机系统最优控制作为随机系统控制理论的重要组成部分，是建立在最优状态估计基础之上的。因最优状态估计不是本课程的重点，本章前面三节暂略过。

7.4 随机系统最优控制

随机系统最优控制的两种主要表现形式:

最小方差控制——基于输入输出模型

随机二次型最优控制——基于线性状态空间模型

最小方差控制问题可以看作是随机线性二次型最优控制问题的特例，所以这里只讨论随机线性二次型最优控制问题。

(1)系统状态对随机作用的响应

设在随机作用下系统状态方程为

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+G(t)w(t) \tag{7-4-1}$$

初始状态为

$$x(t_0)=x_0 \tag{7-4-2}$$

其中$x(t)$是n维随机状态向量；x_0是n维随机初始状态向量，其统计性能为

$$E[x(t_0)]=E[x_0]=\mu_0 \tag{7-4-3}$$

$$Var[x(t_0)]=E\{[x_0-\mu_0][x_0-\mu_0]^T\}=P_x(t_0)=P_{x0} \tag{7-4-4}$$

$w(t)$是m维零均值高斯白噪声过程，统计性能为

$$Cov[w(t),w(\tau)] = E[w(t)w(\tau)^{\mathrm{T}}] = Q'(t)\delta(t-\tau) \tag{7-4-5}$$

其中，$\delta(t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & , \quad \tau-\dfrac{\varepsilon}{2}<t<\tau+\dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & , \quad t\text{ 等于其他值}\end{cases}$ 为狄拉克δ函数；$Q'(t)$为动态噪声$w(t)$的协方差矩阵。并设$x(t_0)$与$w(t)$无关，即

$$Cov[x(t_0),w(t)] = E\{[x(t_0)-\mu_0][w(t)-Ew(t)]^{\mathrm{T}}\} = 0 \tag{7-4-6}$$

则可以证明存在下列有关$x(t)$统计性能的关系式：

i) $x(t)$的均值满足矩阵微分方程

$$\frac{d}{dt}[Ex(t)] = A(t)Ex(t) + G(t)Ew(t) \tag{7-4-7}$$

$$E[x(t_0)] = \mu_0 \tag{7-4-8}$$

ii) $x(t)$的方差阵满足矩阵微分方程

$$\dot{P}_x(t) = A(t)P_x(t) + P_x(t)A^{\mathrm{T}}(t) + G(t)Q'(t)G^{\mathrm{T}}(t) \tag{7-4-9}$$

及初始条件

$$P_x(t_0) = P_{x0}$$

均为确定性方程

iii) $x(t)$的协方差阵为

$$\left.\begin{aligned} P_x(t+\tau,t) &= \Phi(t+\tau,t)P_x(t) \\ P_x(t,t+\tau) &= P_x(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t+\tau,t) \end{aligned} \quad \tau \geq 0 \right\} \tag{7-4-10}$$

其中$\Phi(t+\tau,t)$为系统(7-4-1)的状态转移矩阵。

iv) $x(t+\tau)$与$w(t)$的协方差阵为

$$P_{xw}(t+\tau,t) = \begin{cases} \Phi(t+\tau,t)G(t)Q'(t) & \tau > 0 \\ \dfrac{1}{2}G(t)Q'(t) & \tau = 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases} \tag{7-4-11}$$

对于定常随机系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Gw(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{7-4-12}$$

当其具有与上述相同的噪声统计性能时，$x(t)$的统计性能有类似于上面公式的表达式。当$t \to \infty$时$P_x(t) \to \bar{P}$，有

i') $x(t)$的均值满足矩阵微分方程

$$\frac{d}{dt}[Ex(t)] = AEx(t) + GEw(t) \tag{7-4-7'}$$

$$E[x(t_0)] = \mu_0 \tag{7-4-8'}$$

ii') $x(t)$的方差阵满足矩阵代数方程

$$A\bar{P}_x + \bar{P}_x A^{\top} + GQ'G^{\top} = 0 \tag{7-4-9'}$$

iii') $x(t)$的协方差阵为

$$\left.\begin{aligned} P_x(\tau) &= \Phi(\tau)\bar{P}_x \\ P_x(-\tau) &= \bar{P}_x\Phi^{\top}(\tau) \end{aligned} \quad \tau \geq 0 \right\} \tag{7-4-10'}$$

iv') $x(t+\tau)$与$w(t)$的协方差阵为

$$P_{xw}(\tau) = \begin{cases} \Phi(\tau)GQ' & \tau > 0 \\ \dfrac{1}{2}GQ' & \tau = 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases} \tag{7-4-11'}$$

(2) 系统状态的随机型性能指标

仍考虑系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + G(t)w(t) \tag{7-4-13}$$

及其初始状态

$$x(t_0) = x_0 \tag{7-4-14}$$

由于$x(t)$是在白噪声$w(t)$作用下动力学系统的响应，是一个随机过程，如果采用与确定性二次型性能指标相同的表示方法，即

$$J_s = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)P_{t_f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t)dt \tag{7-4-15}$$

则J_s就无法象确定性系统那样是一个确定数值，而是一个随机变量。要求得确定性的性能指标数值，需要考虑用J_s的数学期望

$$J = EJ_s = E\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)P_{t_f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t)dt\} \tag{7-4-16}$$

作为性能指标。其中 P_{t_f} 为终值项加权矩阵，$Q(t)$为积分项加权矩阵，均为对称半正定矩阵。

$$J = EJ_s = E\{\frac{1}{2}x^{\top}(t_f)P_{t_f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^{\top}(t)Q(t)x(t)dt\}$$

上式可以考虑表示为另外一种形式。

首先假定 $E[x(t_0)] = \mu_0 = 0$。令$P_x'(t_0) = E[x_0 x_0^{\top}]$，表示对 $x_0 x_0^{\top}$ 取均值，

则此时有 $P_x'(t_0) = P_x(t_0) = P_{x0}$。

只在μ_0=0时成立

再考虑 $x_0^{\top}x_0 = T_r[x_0 x_0^{\top}]$，其中，$T_r[A] = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 表示对$n \times n$维方阵A的对角线元素a_i求和。则有

$$J = T_r\{\frac{1}{2}P_x(t_f)P_{t_f} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} P_x(t)Q(t)dt\} \qquad (7\text{-}4\text{-}17)$$

在上式右边加上一项 $\frac{1}{2}\{\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}[P_x(t)P(t)]dt - [P_x(t_f)P(t_f) - P_x'(t_0)P(t_0)]\} = 0$，

并令 $P(t_f) = P_{t_f}$，及考虑 $P_x'(t_0) = P_x(t_0)$ ，则上式可表示为

$$J = T_r\{\frac{1}{2}\cancel{P_x(t_f)P_{t_f}} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[P_x(t)Q(t) + \frac{d}{dt}[P_x(t)P(t)]]dt - \frac{1}{2}[\cancel{P_x(t_f)P_{t_f}} - P_x(t_0)P(t_0)]\}$$

$$= \frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}[P_x(t)Q(t) + P_x(t)\dot{P}(t) + \dot{P}_x(t)P(t)]dt\}$$

$$\dot{P}_x(t) = A(t)P_x(t) + P_x(t)A^{\top}(t) + G(t)Q'(t)G^{\top}(t)$$

将$x(t)$的方差阵$P_x(t)$满足的(7-4-9)式代入上式，并注意到$T_r[MN] = T_r[NM]$(M、N为相同维数方阵)，则上式可改写为

$$J = \frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\} \tag{7-4-18}$$

其中，$P(t)$必须满足矩阵微分方程

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^{\top}(t)P(t) + Q(t) = 0 \tag{7-4-19}$$

以及终值条件

$$P(t_f) = P_{t_f} \tag{7-4-20}$$

(7-4-19)和(7-4-20)式即为确定性系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\ ，\quad x(t_0) = x_0$$

当$B(t)$=0时的最优控制所满足的黎卡提方程。

[回顾：当$B(t)\neq 0$时

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t) - A^{\top}(t)P(t) - Q(t)$$]

$$J=\frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\}$$

若 $E[x(t_0)]=\mu_0\neq 0$，仍定义 $P_x'(t_0)=E[x_0x_0^{\top}]$，

这时由方差

$$P_x(t_0)=E\{[x_0-\mu_0][x_0-\mu_0]^{\top}\}=E[x_0x_0^{\top}]-\mu_0Ex_0^{\top}-Ex_0\mu_0^{\top}+\mu_0\mu_0^{\top}$$

$$=E[x_0x_0^{\top}]-\mu_0\mu_0^{\top}$$

有 $P_x'(t_0)=P_x(t_0)+\mu_0\mu_0^{\top}$

$$T_r\{P_x'(t_0)P(t_0)\}=T_r\{\mu_0\mu_0^{\top}P(t_0)+P_x(t_0)P(t_0)\}$$

$$=\mu_0^{\top}P(t_0)\mu_0+T_r\{P_x(t_0)P(t_0)\}$$

因此得随机系统性能指标的最后形式为

$$J=\frac{1}{2}\mu_0^{\top}P(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\} \quad (7\text{-}4\text{-}21)$$

此式中 $P(t)$ 仍应满足（7-4-19）和（7-4-20）式。

$$\dot{P}(t)+P(t)A(t)+A^{\top}(t)P(t)+Q(t)=0$$

$$P(t_f)=P_{t_f}$$

$$J=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}P(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\}$$

- 关于随机系统最优性能指标的讨论

➢ 当$w(t)=0$，$Q'(t)=0$（即系统无随机干扰），并且系统初始状态为确定性，即 $x(t_0)=x_0=\mu_0$，则有 $P_x(t_0)=0$，此时即为确定性系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)$$
$$x(t_0)=x_0 \tag{7-4-22}$$

的性能指标，由(7-4-21)可得

$$J=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}P(t_0)\mu_0=\frac{1}{2}x_0{}^{\top}P(t_0)x_0 \tag{7-4-23}$$

与前面讨论过的确定性系统二次型最优性能指标完全一致。

➢ 当$w(t)\neq 0$，$Q'(t)\neq 0$，系统初始状态为零均值随机变量，即有 $Ex(t_0)=Ex_0=\mu_0=0$，$Var[x(t_0)]=P_x(t_0)$，则有

$$J=\frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\} \tag{7-4-24}$$

$$J=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}P(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\}$$

➢ 当$w(t)=0$，$Q'(t)=0$，系统初始状态为非零均值随机变量，即有 $Ex(t_0)=Ex_0=\mu_0\neq 0$，$Var[x(t_0)]=P_x(t_0)$，则

$$J=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}P(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{P_x(t_0)P(t_0)\} \tag{7-4-25}$$

➢ 当$w(t)\neq 0$，$Q'(t)\neq 0$，并且系统初始状态为确定性， 则有

$$J=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}P(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{\int_{t_0}^{t_f}G(t)Q'(t)G^{\top}(t)P(t)dt\} \tag{7-4-26}$$

以上讨论表明，随机系统的性能指标总是大于相应的确定性系统性能指标，(7-4-21)式中右边的后两项分别是由于初始状态的随机性和系统的随机干扰而产生的。

(3) 随机状态反馈调节器

考虑随机干扰作用下或系统本身存在随机误差时系统的动力学模型

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \tag{7-4-27}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{7-4-28}$$

其中$x(t)$为n维状态向量，$w(t)$为n维零均值高斯白噪声向量，$u(t)$为m维控制向量；

$$E[x(t_0)] = E[x_0] = \mu_0$$

$$Var[x(t_0)] = E\{[x_0 - \mu_0][x_0 - \mu_0]^T\} = P_x(t_0) = P_{x0}$$

$$Cov[w(t), w(\tau)] = E[w(t)w(\tau)^{\mathrm{T}}] = Q'(t)\delta(t-\tau)$$

$$Cov[x(t_0), w(\tau)] = E\{[x(t_0) - \mu_0][w(t) - Ew(t)]^{\mathrm{T}}\} = 0$$

随机状态反馈调节器问题为：寻求最优控制$u^*(t)$，使随机二次型性能指标

$$J = E\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)P_{t_f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]dt\} \tag{7-4-29}$$

最小。

其中P_{t_f}、$Q(t)$为半正定对称矩阵、$R(t)$ 为正定对称矩阵，t_f固定。这里假定状态均可量测，反馈采用全部状态。

可以证明有如下定理：随机型状态反馈调节器的最优控制规律与确定型状态反馈调节器的最优控制规律完全相同，只是随机型状态反馈调节器的性能指标比确定型状态反馈调节器的性能指标变大了。

证明：

先证明确定性系统的一个预备定理：设确定性系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{7-4-30}$$

$$x(t_0)=x_0 \tag{7-4-31}$$

和性能指标

$$J=\frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt \tag{7-4-32}$$

若采用某种控制规律，有以下负反馈形式，即

$$u(t)=-\tilde{K}(t)x(t) \tag{7-4-33}$$

其中$\tilde{K}(t)$为任意选定的时间函数矩阵，则(7-4-30)变为

$$\dot{x}(t)=[A(t)-B(t)\tilde{K}(t)]x(t) \tag{7-4-34}$$

性能指标变为

$$J=\frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}x^T(t)[Q+\widetilde{K}^T(t)R\widetilde{K}(t)]x(t)dt \qquad (7\text{-}4\text{-}35)$$

式(7-4-34)与(7-4-22)形式一致，式(7-4-35)与(7-4-15)也一致，所以这时性能指标的取值形式为

$$J=\frac{1}{2}x_0{}^T\widetilde{P}(t_0)x(t_0) \qquad (7\text{-}4\text{-}36)$$

其中，$\widetilde{P}(t)$ 应适合如(7-4-19)形式的方程，即

$$\begin{aligned}&\dot{\widetilde{P}}(t)+\widetilde{P}(t)[A(t)-B(t)\widetilde{K}(t)]+[A(t)-B(t)\widetilde{K}(t)]^T\widetilde{P}(t)+[Q(t)+\widetilde{K}^T(t)R(t)\widetilde{K}(t)]=0\\&\widetilde{P}(t_f)=F\end{aligned} \qquad (7\text{-}4\text{-}37)$$

而以上问题的最优控制是

$$u^*(t)=-K(t)x(t) \qquad (7\text{-}4\text{-}38)$$

其中

$$K(t)=R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \qquad (7\text{-}4\text{-}39)$$

$P(t)$满足

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t)=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)P(t)-Q(t)\\&P(t_f)=F\end{aligned} \qquad (7\text{-}4\text{-}40)$$

系统最优性能指标为

$$J = \frac{1}{2} x_0{}^T P(t_0) x_0$$

由最优条件，应有$J \le \tilde{J}$和 $P(t) \le \tilde{P}(t)$ 。

只有当$\tilde{K}(t) = R^{-1}(t) B^T(t) \tilde{P}(t)$ 时，上式中等号才成立。

预备定理： 设有矩阵微分方程及末端条件如(7-4-37)，另有一矩阵微分方程及末端条件(7-4-40)，其中$F \ge 0$，$Q(t) \ge 0$，$R(t) > 0$，$t_0 \le t \le t_f$，$\tilde{K}(t)$为任意连续时间函数矩阵，则有$P(t) \le \tilde{P}(t)$，只当$\tilde{K}(t) = R'^{-1}(t) B^T(t) \tilde{P}(t)$时等号成立。

基于上述确定性系统预备定理，对系统方程(7-4-27)、(7-4-28)，任选一线性反馈控制律

$$u(t) = -\tilde{K}(t) x(t) \tag{7-4-41}$$

则闭环系统方程为

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)\tilde{K}(t)] x(t) + w(t) \tag{7-4-42}$$

性能指标(7-4-29)可写为

$$\tilde{J} = E\{\frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}(t_f) P_{t_f} x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^{\mathrm{T}}(t) [Q(t) + \tilde{K}^T(t) R(t) \tilde{K}(t)] x(t) dt\} \tag{7-4-43}$$

根据(7-4-19)~(7-4-21)式，上式可写为

$$\tilde{J}=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}\tilde{P}(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{P_0\tilde{P}(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}Q'(t)\tilde{P}(t)dt\} \tag{7-4-44}$$

其中$\tilde{P}(t)$ 适合下列矩阵微分方程及末端条件

$$\begin{aligned}&\dot{\tilde{P}}(t)+\tilde{P}(t)[A(t)-B(t)\tilde{K}(t)]+[A(t)-B(t)\tilde{K}(t)]^T\tilde{P}(t)+[Q(t)+\tilde{K}^T(t)R(t)\tilde{K}(t)]=0\\&\tilde{P}(t_f)=P_{t_f}\end{aligned} \tag{7-4-45}$$

若选取

$$u(t)=-K(t)x(t) \tag{7-4-46}$$

$$K(t)=R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \tag{7-4-47}$$

同样根据(7-4-19)~(7-4-21)式，有系统性能指标

$$J=\frac{1}{2}\mu_0{}^{\top}P(t_0)\mu_0+\frac{1}{2}T_r\{P_0P(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}Q'(t)P(t)dt\} \tag{7-4-48}$$

其中$P(t)$适合矩阵Riccati方程及末值条件

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t)=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)+P(t)B(t)R'^{-1}(t)B^T(t)P(t)-Q(t)\\&P(t_f)=P_{t_f}\end{aligned} \tag{7-4-49}$$

考虑(7-4-45)、(7-4-49)式和预备定理，有$P(t) \le \tilde{P}(t)$，只当选取$\tilde{K}(t) = R^{-1}(t)B^T(t)\tilde{P}(t)$时，等式才成立，得到性能指标(7-4-48)的最小值。

因此得到结论，随机型系统最优控制规律与相应的确定型系统最优控制规律完全相同。

定理证明完毕。#

由此，随机型状态调节器的最优控制规律为：

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

其中$P(t)$满足

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q(t)$$

$$P(t_f) = P_{t_f}$$

最优性能指标为

$$J = \boxed{\frac{1}{2}\mu_0^{\mathrm{T}} P(t_0)\mu_0} + \boxed{\frac{1}{2}T_r\{P_0 P(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} Q'(t)P(t)dt\}}$$

确定型系统性能指标　随机初始状态引起　系统噪声引起

随机性使性能指标变大

(4) 分离定理和随机输出反馈调节器

考虑随机系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \tag{7-4-50}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) \tag{7-4-51}$$

和随机初态

$$x(t_0) = x_0 \tag{7-4-52}$$

其中$x(t)$为n维状态向量，$w(t)$为n维零均值高斯白噪声向量，$u(t)$为m维控制向量，$v(t)$为量测零均值高斯噪声，其统计特性为

$$E[w(t)] = E[v(t)] = 0, \qquad E[x(t_0)] = E[x_0] = \mu_0$$

$$E[w(t)w(t)^{\mathrm{T}}] = Q'(t), \qquad E[v(t)v(t)^{\mathrm{T}}] = R'(t)$$

$$E[w(t)v(t)^{\mathrm{T}}] = 0, \qquad Var[x_0 x_0^{\mathrm{T}}] = P_0$$

$$E[x_0 w^{\mathrm{T}}(t)] = E[x_0 v^{\mathrm{T}}(t)] = 0$$

随机输出反馈调节器问题，是寻求一个最优反馈控制规律$u^*(t)$，使性能指标

$$J = E\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)P_{t_f}x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]dt\} \tag{7-4-54}$$

最小。其中P_{t_f}、$Q(t)$为半正定对称矩阵、$R(t)$ 为正定对称矩阵，t_f 固定。

分离定理：随机输出反馈调节器问题的线性最优控制就是随机状态调节器的最优控制，只是用最小线性方差 $\hat{x}(t)$ 估计代替 $x(t)$，而 $\hat{x}(t)$ 由**Kalman**滤波方程给出。

根据分离定理，对系统(7-4-50)~(7-4-52)，有以下最优控制规律：

$$u(t) = -K(t)\hat{x}(t) \tag{7-4-55}$$

$$K(t) = R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) \tag{7-4-56}$$

其中 $P(t)$满足Riccati矩阵微分方程及末值条件

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^{\mathrm{T}}(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) - Q(t)$$

$$P(t_f) = P_{t_f} \tag{7-4-57}$$

$\hat{x}(t)$ 由**Kalman**滤波方程

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K_1(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \tag{7-4-58}$$

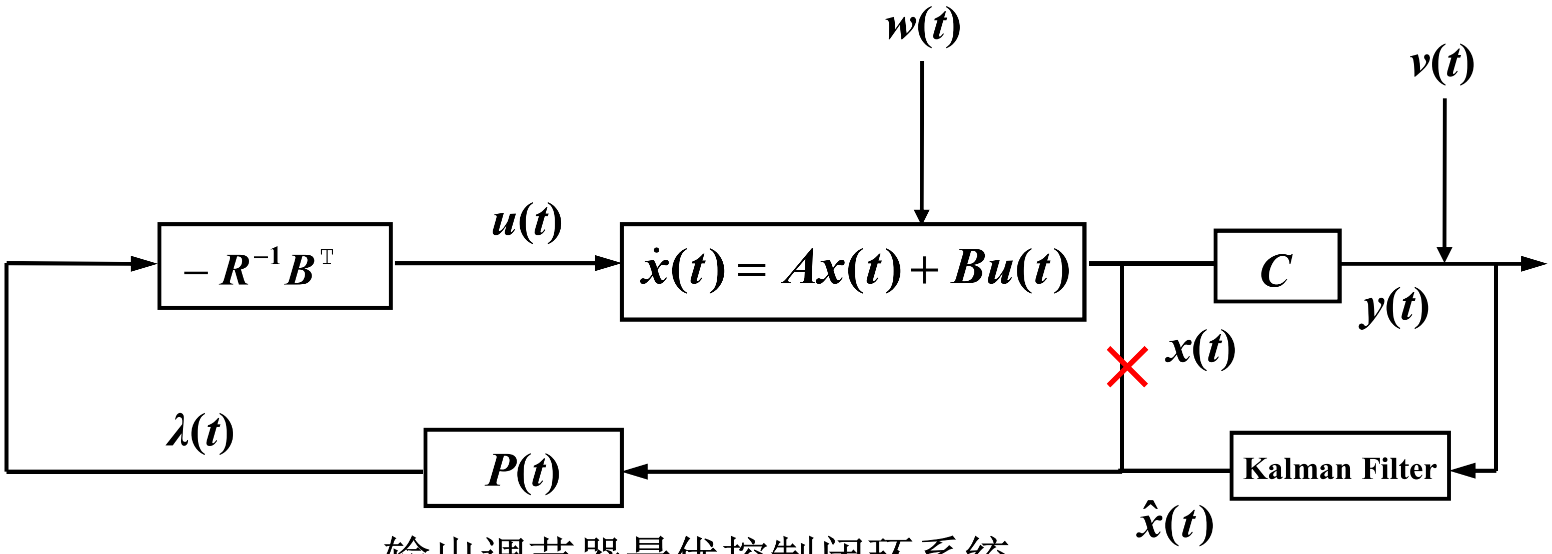
给出，其初始条件为

$$\hat{x}(t_0) = \mu_0 \text{ ， } K_1(t) = P_1(t)C^T(t)R'^{-1}(t) \tag{7-4-59}$$

$P_1(t)$ 满足以下Riccati矩阵微分方程及末值条件

$$\dot{P}_1(t) = A(t)P_1(t) + P_1(t)A^T(t) - P_1(t)C^T(t)R'^{-1}(t)C^T(t)P_1(t) + B(t)Q'(t)B^T(t)$$

$$P_1(t_0) = P_0 \tag{7-4-60}$$



输出调节器最优控制闭环系统

Review: Separation Principle

- 设开环线性系统 Σ 能控能观： $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$

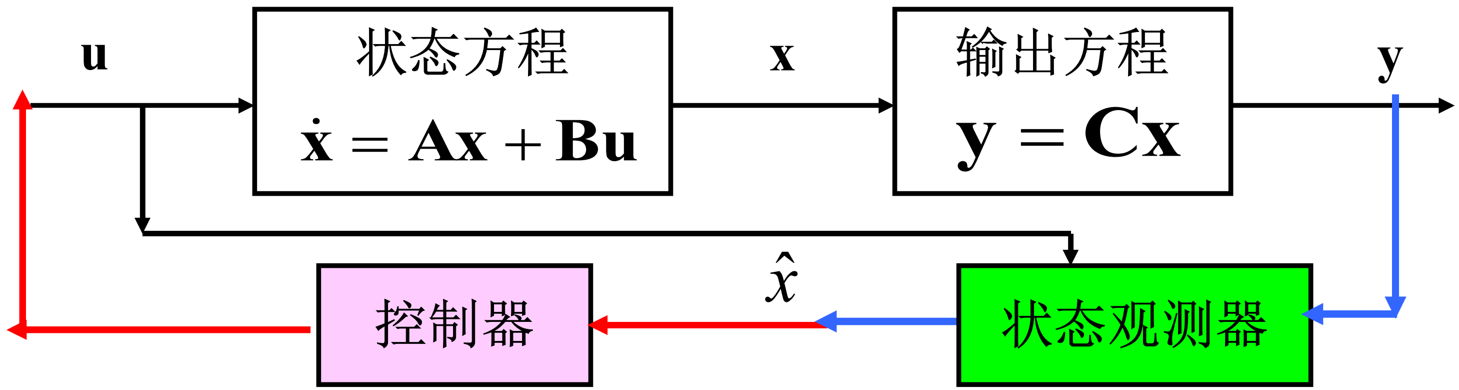
设计状态观测器增益阵 **L**估计状态以实现反馈控制 $\mathbf{u}=\mathbf{r}+\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$

问题：**(1)** 采用全维状态观测器提供的状态估计值代替真实状态实现状态反馈，其状态反馈阵**K**是否需要重新设计以保持系统期望的特征值?

(2) 状态观测器引入后，状态反馈部分是否会改变已经设计好的观测器极点配置？观测器的增益矩阵**L**是否需要重新设计?

(3) 稳定的**(A+BK)**和稳定的**(A-LC)**能保证复合系统的稳定吗?

(4) 这些问题是考虑一个维数为 **2n** 的复合系统的动态特性，需要重新研究新的设计方法吗?



Review: Separation Principle

➢ 定理2(分离定理): 若受控系统(A, B, C)能控能观, 则用状态观测器重构的状态进行反馈时, 其系统的极点配置和观测器设计可分别独立进行, 即状态反馈阵K和状态观测器L阵的设计可分别独立地进行. 经构造状态反馈阵和状态观测阵形成的状态反馈系统共有2n个极点, 其中: n个极点是λ(A+BK), 另n个极点是λ(A-LC).

定义复合系统的状态: $$X=\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=Ax+B[r+K\hat{x}]=Ax+BK\hat{x}+Br$$

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly=LCx+(A-LC+BK)\hat{x}+Br$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A-LC+BK \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}r$$

变换阵 $T=\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ $T^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$

$$\tilde{A}=T^{-1}\begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A-LC+BK \end{bmatrix}T=\begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}$$

特征多项式为:

$$Q(\lambda)=\left|\lambda\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\right|\cdot\left|\lambda\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\right|$$ ——K与L可独立设计