第五章 离散时间系统最优控制(II)

5.5 离散线性二次型最优状态调节器问题

与连续系统线性二次型最优状态调节器问题类似，离散系统线性二次型最优状态调节器具有符合实际应用需求的多种特点，得到广泛重视。

给定线性离散系统状态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{u}(k),\quad k=0,1,\ \dots,N\text{-}1 \tag{5-5-1}$$

初始状态

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{5-5-2}$$

及二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{u}(k)\right] \tag{5-5-3}$$

其中$\boldsymbol{S}$为半正定对称常数阵，$\boldsymbol{Q}(k)$为半正定对称时变阵，$\boldsymbol{R}(k)$为正定对称时变阵。

要求最优控制序列$\boldsymbol{u}^*(k)$, $k=0,1,\cdots,N\text{-}1$，使J达最小值。

利用离散极大值原理求解：

Hamilton函数

$$H(k)=\frac{1}{2}\left[x^{\mathrm{T}}(k)Q(k)x(k)+u^{\mathrm{T}}(k)R(k)u(k)\right]+\lambda^{\mathrm{T}}(k+1)\left[F(k)x(k)+G(k)u(k)\right] \tag{5-5-4}$$

协态方程

$$\lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)}=Q(k)x(k)+F^{\mathrm{T}}(k)\lambda(k+1) \tag{5-5-6}$$

因终态无约束，所以

$$\lambda(N)=Sx(N) \tag{5-5-7}$$

由控制方程

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=R(k)u(k)+G^{\mathrm{T}}(k)\lambda(k+1)=0 \tag{5-5-8}$$

有

$$u(k)=-R^{-1}(k)G^{T}(k)\lambda(k+1) \tag{5-5-9}$$

代入(5-5-1)式得两点边值问题(规范方程组)

$$\begin{cases} x(k+1)=F(k)x(k)-G(k)R^{-1}(k)G^{T}(k)\lambda(k+1) \\ \lambda(k)=Q(k)x(k)+F^{T}(k)\lambda(k+1) \\ x(0)=x_0 \\ \lambda(N)=Sx(N) \end{cases} \tag{5-5-10}$$

假设 $\lambda(k)=P(k)x(k)$ (5-5-11)

代入规范方程组得

$$x(k+1)=F(k)x(k)-G(k)R^{-1}(k)G^{T}(k)P(k+1)x(k+1) \tag{5-5-12}$$

$$P(k)x(k)=Q(k)x(k)+F^{T}(k)P(k+1)x(k+1) \tag{5-5-13}$$

消去其中$x(k+1)$，得

$$P(k)x(k)=Q(k)x(k)+F^{T}(k)P(k+1)\left[I+G(k)R^{-1}(k)G^{T}(k)P(k+1)\right]^{-1}F(k)x(k) \tag{5-5-14}$$

此式对任意$x(k)$成立，因此得离散黎卡提方程：

$$\begin{aligned} P(k)&=Q(k)+F^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)\left[I+G(k)R^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)\right]^{-1}F(k) \\ &=Q(k)+F^{\mathrm{T}}(k)\left[P^{-1}(k+1)+G(k)R^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)\right]^{-1}F(k) \end{aligned} \tag{5-5-15}$$

及其终值条件

$$P(N)=S \tag{5-5-16}$$

若$F^{-1}(k)$存在（事实上可以放宽，但要使用动态规划求解），则由协态方程

$$\lambda(k)=P(k)x(k)=Q(k)x(k)+F^{\mathrm{T}}(k)\lambda(k+1) \tag{5-5-17}$$

有

$$\lambda(k+1)=F^{-\mathrm{T}}(k)\left[P(k)-Q(k)\right]x(k) \tag{5-5-18}$$

则最优控制为

$$u^{*}(k)=-R^{-1}(k)G^{T}(k)F^{-\mathrm{T}}(k)\left[P(k)-Q(k)\right]x(k)=-K(k)x(k) \tag{5-5-19}$$

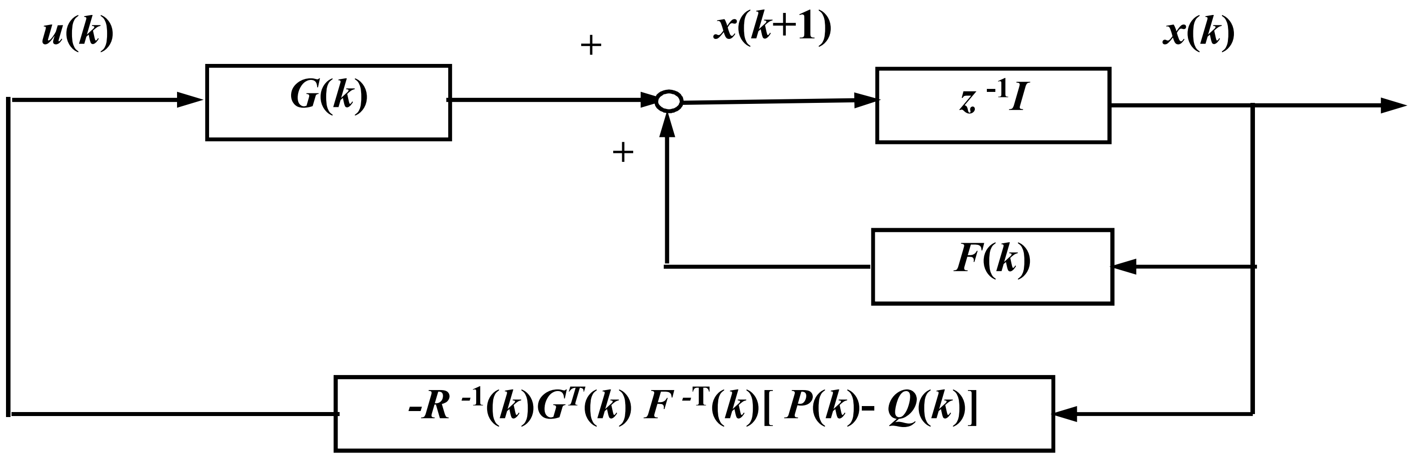
为状态反馈控制，其中

$$K(k)=R^{-1}(k)G^{T}(k)F^{-\mathrm{T}}(k)\left[P(k)-Q(k)\right] \tag{5-5-20}$$

为反馈增益矩阵。

事实上，由于$F(k)$是状态转移矩阵，所以$F^{-1}(k)$总是存在。

由以上结果，离散线性二次型最优状态调节器状态反馈的闭环系统构成可表示为



与连续系统二次型最优控制相似，如果$N \to \infty$， $F(k)=F$ 和 $G(k)=G$ 均为常数矩阵，系统完全可控，则也应有黎卡提方程的解 $P(k)=\overline{P}$（当$k<<N$时）为常数矩阵。

以离散线性二次型最优状态调节器为基础，同样可以得到离散线性二次型最优输出调节器和跟踪问题的解。

例：

考虑离散系统状态方程

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

和二次型性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{2}[x^2(k)+u^2(k)]$$

求使J最小值的最优控制序列$u^*(k)$。

解:

本例中，$F(k)=1$，$G(k)=1$，$S=0$，$N=3$。$Q(k)=R(k)=1$，满足正定条件。因此黎卡提方程的解$P(k)$存在。

由其边界条件$P(N)=P(3)=S=0$，黎卡提方程的解$P(k)$可由(5-5-15)式递推求得。

$$P(k)=Q(k)+F^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)\left[I+G(k)R^{-1}(k)G^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)\right]^{-1}F(k)$$

将$F(k)=1$，$G(k)=1$，$Q(k)=1$，$R(k)=1$代入(5-5-15)式有

$$P(k)=1+\frac{P(k+1)}{1+P(k+1)}$$

用迭代法递推，可得

$$P(2)=1+\frac{P(3)}{1+P(3)}=1+\frac{0}{1+0}=1$$

$$P(1)=1+\frac{P(2)}{1+P(2)}=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$$P(0)=1+\frac{P(1)}{1+P(1)}=1+\frac{3/2}{1+3/2}=\frac{8}{5}$$

再将$F(k)$=1，$G(k)$=1，$Q(k)$=1，$R(k)$=1代入(5-5-20)式

$$K(k)=R^{-1}(k)G^{T}(k)F^{-\mathrm{T}}(k)\left[P(k)-Q(k)\right]$$

得 $K(0)=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$

$$K(1)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$K(2)=1-1=0$$

所以，最优控制序列$\boldsymbol{u^*(k)}$为

$$u^*(0) = -\frac{3}{5}x(0),\quad u^*(1) = -\frac{1}{2}x(1),\quad u^*(2) = 0$$

此时，由状态方程有

$$x(1) = x(0) + u^*(0) = \frac{2}{5}x(0)$$

$$x(2) = x(1) + u^*(1) = \frac{1}{2}x(1) = \frac{1}{5}x(0)$$

将$\boldsymbol{x(k)}$、$\boldsymbol{u^*(k)}$代入性能指标得最优性能指标为

$$J^* = \sum_{k=0}^{2}[x^2(k) + u^{*2}(k)]$$

$$= \{x^2(0) + [-\frac{3}{5}x(0)]^2\} + \{[\frac{2}{5}x(0)]^2 + [-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x(0)]^2\} + \{[\frac{1}{5}x(0)]^2 + 0\}$$

$$= \frac{8}{5}x^2(0)$$

与公式 $J^* = x^{\mathrm{T}}(0)P(0)x(0)$ 计算结果完全一致。