

第五章 离散时间系统最优控制

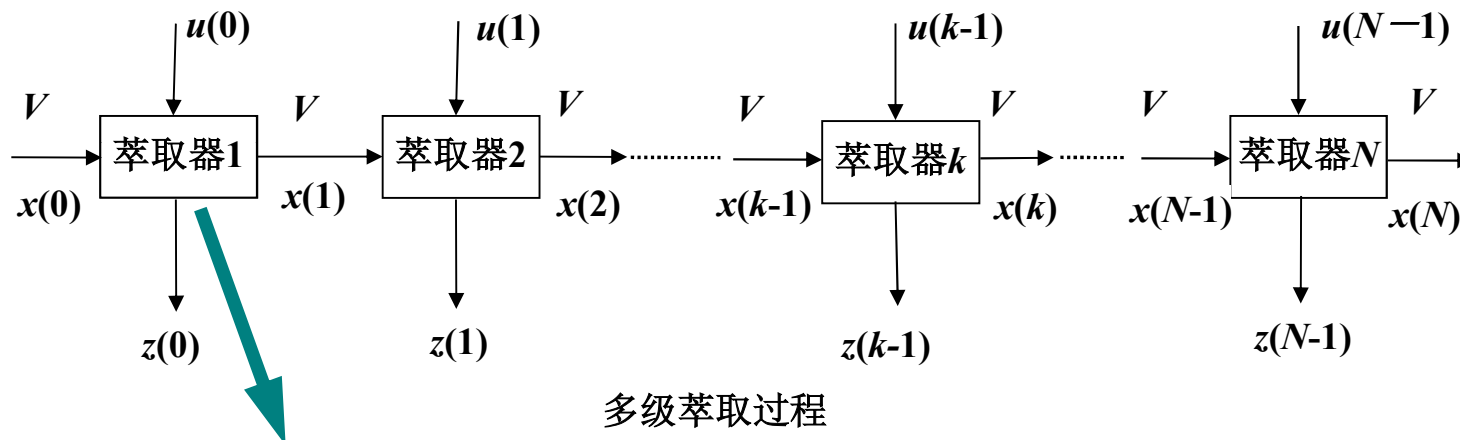
引 言

- 前面所讨论的都是关于连续时间系统的最优控制问题。
- 现实世界中，很多实际系统本质上是时间离散的。
- 即使是系统是时间连续的，因为计算机是基于时间和数值上都离散的数字技术的，实行计算机控制时必须将时间离散化后作为离散系统处理。
- 因此，有必要讨论离散时间系统的最优控制问题。
- 离散时间系统仍然属于连续变量动态系统(CVDS)范畴。注意与离散事件动态系统(DEDS)的区别。
- CVDS与DEDS是自动化领域的两大研究范畴，考虑不同的自动化问题。

5.1 离散时间系统最优控制问题的提法

(1) 离散系统最优控制举例——多级萃取过程最优控制

- **萃取**是指可被溶解的物质在两种互不相溶的溶剂之间的转移，一般用于将要提取的物质从不易分离的溶剂中转移到容易分离的溶剂中。
- **多级萃取**是化工生产中提取某种价值高、含量低的物质的常用生产工艺。



- 含物质 A 的混合物以流量 V 进入萃取器1，混合物中 A 浓度 $x(0)$ ；
- 萃取剂以流量 $u(0)$ 通过萃取器1，单位体积萃取剂带走 A 的量为 $z(0)$ ；
- 一般萃取过程的萃取物含量均较低，可认为通过萃取器1后混合物流量仍为 V ；
- 流出萃取器1的混合物中 A 物质的浓度为 $x(1)$ 。

以此类推至萃取器 N 。

在萃取过程中，对第 k 个萃取器有如下萃取平衡关系

$$z(k-1) = Kx(k) \quad (5-1-1)$$

其中， K 为萃取平衡常数。同时有物料平衡关系

$$V[x(k-1)-x(k)] = u(k-1)z(k-1) \quad (5-1-2)$$

由以上关系可列出萃取物浓度方程

$$x(k) = \frac{x(k-1)}{1 + \frac{K}{V}u(k-1)} = f[x(k-1), u(k-1)] \quad (5-1-3)$$

将 $x(k)$ 视为状态变量， $u(k)$ 视为控制变量，则上式可作为状态方程。

假定A物质的单价为 α ，萃取剂的单价为 β ，则 N 级萃取过程总的收益为

$$p = \sum_{k=1}^N \alpha V[x(k-1) - x(k)] - \sum_{k=0}^{N-1} \beta u(k) \quad (5-1-4)$$

引进性能指标

$$J = \frac{p}{\alpha V} = \sum_{k=1}^N [x(k-1) - x(k)] - B \sum_{k=0}^{N-1} u(k) = \sum_{k=0}^{N-1} [x(k) - x(k+1)] - B \sum_{k=0}^{N-1} u(k) \quad (5-1-5)$$

其中 $B = \frac{\beta}{\alpha V}$ 。则该多级萃取过程寻求收益最大化问题就可以描述为一个离散最优控制问题，即要确定一组最优控制序列 $u(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$)，使性能指标 J 达到最大。

(2) 离散系统最优控制问题的提法

给定离散系统状态方程

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5-1-6)$$

和初始状态

$$x(0) = x_0 \quad (5-1-7)$$

其中 $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^m$ 分别为状态向量和控制向量, f 为连续可微的 n 维函数向量。考虑性能指标

$$J = \Phi[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k), u(k), k] \quad (5-1-8)$$

其中 Φ 、 L 连续可微。

- 离散系统的最优控制问题就是确定最优控制序列 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$, 使性能指标 J 达到极小(或极大)值。
- 将最优控制序列 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 依次代入状态方程, 并利用初始条件, 可以解出最优状态序列 $x^*(1), x^*(2), \dots, x^*(N)$, 也称为最优轨线。

5.2 离散Euler方程

与连续系统Lagrange问题对应，相应的离散系统性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k), x(k+1), k] = \sum_{k=0}^{N-1} L_k \quad (5-2-1)$$

其中 $L_k = L[x(k), x(k+1), k]$ 是第 k 个采样周期内性能指标 J 的增量。

假定离散性能指标 J 存在极小值，则式(5-2-1)存在极值解序列

$x^*(k)$ 。在 $x^*(k), x^*(k+1)$ 的邻域内 $x(k), x(k+1)$ 可表示为

$$\begin{cases} x(k) = x^*(k) + \alpha \delta x(k) \\ x(k+1) = x^*(k+1) + \alpha \delta x(k+1) \end{cases} \quad (5-2-2)$$

其中 α 为参变量， $\delta x(k)$ 和 $\delta x(k+1)$ 分别是 $x(k)$ 和 $x(k+1)$ 的变分，代入 J 有

$$J(\alpha) = \sum_{k=0}^{N-1} L[x^*(k) + \alpha \delta x(k), x^*(k+1) + \alpha \delta x(k+1), k] \quad (5-2-3)$$

由函数极值必要条件 $\delta J = \left. \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ ，可得

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\delta x^\top(k) \frac{\partial L_k}{\partial x(k)} + \delta x^\top(k+1) \frac{\partial L_k}{\partial x(k+1)} \right] = 0 \quad (5-2-4)$$

由于

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} \delta x^T(k+1) \frac{\partial L_k}{\partial x(k+1)} &= \sum_{k=1}^N \delta x^T(k) \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \delta x^T(k) \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x(k)} + \delta x^T(k) \frac{\partial L_{k-1}}{\partial x(k)} \Big|_{k=N}\end{aligned}\quad (5-2-5)$$

离散分部积分

代入 (5-2-4) 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} \delta x^T(k) \left\{ \frac{\partial L[x(k), x(k+1), k]}{\partial x(k)} + \frac{\partial L[x(k-1), x(k), k-1]}{\partial x(k)} \right\} \\ + \delta x^T(k) \frac{\partial L[x(k-1), x(k), k-1]}{\partial x(k)} \Big|_{k=0}^{k=N} = 0\end{aligned}\quad (5-2-6)$$

由 $\delta x(k)$ 的任意性, 可得极值的必要条件

$$\frac{\partial L[x(k), x(k+1), k]}{\partial x(k)} + \frac{\partial L[x(k-1), x(k), k-1]}{\partial x(k)} = 0 \quad (5-2-7)$$

$$\delta x^T(k) \frac{\partial L[x(k-1), x(k), k-1]}{\partial x(k)} \Big|_{k=0}^{k=N} = 0 \quad (5-2-8)$$

上两式分别称为离散Euler方程和离散的横截条件。

当初态 $x(0) = x_0$ 给定，终态 $x(N)$ 自由，即 $\delta x(N)$ 是任意值时，则有横截条件为

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{\partial L[x(N-1), x(N), N-1]}{\partial x(N)} = 0 \end{cases} \quad (5-2-9)$$

综上所述，离散Lagrange问题（5-2-1）的极值若存在，其极值解 $x^*(k)$ 必满足Euler方程（5-2-7）和横截条件（5-2-8）。

与连续时间变分法一样，也可通过Lagrange乘子法将等式约束下的极值问题化为无约束的极值问题。如例题所示。

例：已知离散系统状态方程及边界条件

$$x(k+1) = x(k) + au(k) \quad (5-2-10)$$

$$x(0) = 1, x(10) = 0 \quad (5-2-11)$$

以及性能指标

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 u^2(k) \quad (5-2-12)$$

求使 J 达极小值的最优控制和最优轨线。

解：应用Lagrange乘子法，构造辅助泛函

$$\bar{J} = \sum_{k=0}^9 \left\{ \frac{1}{2} u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + au(k) - x(k+1)] \right\} \quad (5-2-13)$$

考虑 \bar{J} 中，

注意：是 $\lambda(k+1)$ ，不是 $\lambda(k)$

$$L_k = \frac{1}{2} u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + au(k) - x(k+1)] \quad (5-2-14)$$

$$L_{k-1} = \frac{1}{2} u^2(k-1) + \lambda(k)[x(k-1) + au(k-1) - x(k)] \quad (5-2-15)$$

则有
$$\frac{\partial L_k}{\partial x(k)} = \lambda(k+1) \quad (5-2-16)$$

$$\frac{\partial L_{k-1}}{\partial x(k)} = -\lambda(k) \quad (5-2-17)$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial u(k)} = a\lambda(k+1) + u(k) \quad (5-2-18)$$

$$\frac{\partial L_{k-1}}{\partial u(k)} = 0 \quad (5-2-19)$$

因而可以写出 \bar{J} 的 Euler 方程为

$$\lambda(k+1) - \lambda(k) = 0 \quad (5-2-20)$$

$$a\lambda(k+1) + u(k) = 0 \quad (5-2-21)$$

解之可得

$$\lambda(k) = C = \text{常数} \quad (5-2-22)$$

$$u(k) = -aC \quad (5-2-23)$$

由状态方程有

$$x(k+1) = x(k) - a^2 C \quad (5-2-24)$$

因而有

$$x(1) = x(0) - a^2 C$$

$$x(2) = x(1) - a^2 C = x(0) - 2a^2 C$$

$$x(3) = x(2) - a^2 C = x(0) - 3a^2 C$$

⋮

$$x(k) = x(0) - ka^2 C$$

由边界条件有 $x(10) = x(0) - 10a^2 C = 1 - 10a^2 C = 0$

可解得 $C = 1/10a^2$

则有最优控制 $u^*(k) = -\frac{1}{10a}$

最优轨线 $x^*(k) = 1 - \frac{k}{10}$

5.3 离散极大值原理

- 与连续系统相似，离散变分法解最优控制问题多有不便，需考虑离散极大值原理。

考虑离散系统状态方程

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5-3-1)$$

初始状态

$$x(0) = x_0 \quad (5-3-2)$$

终态应满足的约束条件

$$\Psi[x(N), N] = 0 \quad (5-3-3)$$

和性能指标

$$J = \phi[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k), u(k), k] \quad (5-3-4)$$

其中： $x(k) \in R^n$ ， $u(k) \in R^m$ 。 $u(k)$ 不受约束， f 为 n 维连续可微向量函数， Ψ 是 $x(N)$ 的连续可微 r 维向量函数， Φ 是 $x(N)$ 的连续可微标量函数， L 为 $x(k)$ 、 $u(k)$ 的连续可微标量函数，要求最优控制序列 $u^*(k)$ ， $k=0, \dots, N-1$ ，使 J 最小。

与连续系统类似，引入**Lagrange乘子**向量 $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r]^\top$ 和**协态变量**序列 $\lambda(k) = [\lambda_1(k), \lambda_2(k), \dots, \lambda_n(k)]^\top$, $k = 1, 2, \dots, N$

使问题转化为求使辅助性能指标

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \phi[x(N), N] + \mu^\top \Psi[x(N), N] \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \{L[x(k), u(k), k] + \lambda^\top(k+1)[f[x(k), u(k), k] - x(k+1)]\} \end{aligned} \quad (5-3-5)$$

达极小值的问题。

定义**离散Hamilton函数**

$$\begin{aligned} H(k) = & H[x(k), \lambda(k+1), u(k), k] \\ = & L[x(k), u(k), k] + \lambda^\top(k+1)f[x(k), u(k), k] \end{aligned} \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (5-3-6)$$

则有

$$\bar{J} = \Phi[x(N), N] + \mu^\top \Psi[x(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [H(k) - \lambda^\top(k+1)x(k+1)] \quad (5-3-7)$$

经过与连续系统类似的推导，有离散系统极大值原理为：

定理5-1：

设离散状态方程（5-3-1），为将系统状态 $x(k)$ 自初态（5-3-2）转移到满足终端条件（5-3-3）的某个 $x(N)$ ，并使性能指标（5-3-4）达到极小值的最优控制应满足的必要条件是：

（1）设 $u^*(k)$ （ $k=0, \dots, N-1$ ）是最优控制， $x^*(k)$ （ $k=1, 2, \dots, N$ ）是对应于 $u^*(k)$ （ $k=0, \dots, N-1$ ）的最优轨线，则必存在相应协态序列 $\lambda(k)$ （ $k=1, 2, \dots, N$ ），使状态向量序列 $x(k)$ 与协态向量序列 $\lambda(k)$ 满足下列差分方程（正则方程，规范方程）组，即

状态方程

$$x(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} \quad \text{或} \quad x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad (5-3-13)$$

协态方程

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} \quad \text{或} \quad \lambda(k) = \frac{\partial L_k}{\partial x(k)} + \frac{\partial f_k^T}{\partial x(k)} \lambda(k+1) \quad (5-3-14)$$

其中：

$$H(k) = H[x(k), \lambda(k+1), u(k), k] = L[x(k), u(k), k] + \lambda^T(k+1) f[x(k), u(k), k]$$

(2) 边界条件为

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\Psi[\mathbf{x}(N), N] = 0$$

$$\lambda(N) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(N)} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{x}(N)} \mu$$

其中 $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r]^T$

(3) 离散 H 函数对最优控制序列 $\mathbf{u}^*(k)$ 达最小值, 即

$$\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial L_k}{\partial \mathbf{u}(k)} + \frac{\partial f_k^T}{\partial \mathbf{u}(k)} \lambda(k+1) = 0 \quad (5-3-15)$$

上式称为控制方程。

若边界条件变化, 则与连续系统一样有相同结论。

上述问题中，当控制序列 $u(k) (k = 1, \dots, N-1)$ 受到约束时，即 $u(k) \in \Omega, k = 0, \dots, N-1$ 时，其中 Ω 是 m 维实函数空间的闭子集，即 $\Omega \subset R^m$ ，则与连续系统相同，有相应的极大值原理形式，即上述定理中(3)不同，为

(3') 离散 H 函数对最优控制序列达到最小值，即：

$$H[x^*(k), \lambda^*(k+1), u^*(k), k] = \min_{u(k) \in \Omega} H[x^*(k), \lambda^*(k+1), u(k), k] \quad (5-3-16)$$

- 离散最优控制的极大值原理充分条件为：
 - (i) 离散最优控制问题的状态集为凸集，
 - (ii) 性能指标泛函为凸函数
- 如果上述条件不能满足，则不能确定极大值原理是否是离散最优控制的充分AND/OR必要条件。

5.4 连续与离散极大值原理的比较

- 本章讨论的离散系统极大值原理和在第三章讨论的连续系统极大值原理，基本原理是相同的，因此我们希望在解决同一个最优控制问题时应该得到同样的结果。
- 然而，从连续系统极大值原理出发，以不同的变换途径所得的离散系统极大值原理在形式上有所不同，解决同一问题所得到的解也会有所不同。
- 通过比较两种不同的离散系统极大值原理获取途径，分析同一问题所得到的离散最优控制解不同的原因，可以帮助尽量避免这种现象产生。

考虑**Lagrange问题**。在等式约束

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (5-4-1)$$

和初始状态

$$x(t_0) = x_0 \quad (5-4-2)$$

情况下，求性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (5-4-3)$$

的极小值问题为一**连续的Lagrange问题**。

此时有**H函数**

$$H[x(t), \lambda(t), u(t), t] = L[x(t), u(t), t] + \lambda^\top(t) f[x(t), u(t), t] \quad (5-4-4)$$

协态方程

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial L[x(t), u(t), t]}{\partial x(t)} - \frac{\partial f^\top[x(t), u(t), t]}{\partial x(t)} \lambda(t) \quad (5-4-5)$$

控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = \frac{\partial L[x(t), u(t), t]}{\partial u(t)} + \frac{\partial f^\top[x(t), u(t), t]}{\partial u(t)} \lambda(t) = 0 \quad (5-4-6)$$

和边界条件 $\lambda(t_f) = 0$

$$(5-4-7)$$

用计算机求解此两点边值问题，可用一阶差分来近似 $\dot{x}(t)$ 和 $\dot{\lambda}(t)$ ，从而产生离散的 **两点边值问题**。即有：

$$x(k+1) = x(k) + Tf[x(k), u(k), k] \quad (5-4-8)$$

$$\lambda(k+1) = \lambda(k) - T \frac{\partial L[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} - T \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \lambda(k) \quad (5-4-9)$$

$$x(0) = x_0 \quad (5-4-10)$$

$$\lambda(N) = 0 \quad (5-4-11)$$

$$\frac{\partial L[x(k), u(k), k]}{\partial u(k)} + \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial u(k)} \lambda(k) = 0 \quad (5-4-12)$$

以上为**对连续系统极大值原理列出的微分方程进行离散化求解**的结果。

另一种形成离散两点边值问题的途径是**对离散系统直接应用离散极大值原理**。

先将连续系统状态方程和性能指标离散化为：

$$x(k+1) = x(k) + Tf[x(k), u(k), k] \quad (5-4-13)$$

$$x(0) = x_0 \quad (5-4-14)$$

$$J = T \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k), u(k), k] \quad (5-4-15)$$

因此有离散 H 函数：

$$H(k) = TL[x(k), u(k), k] + \lambda^T(k+1)[x(k) + Tf[x(k), u(k), k]] \quad (5-4-16)$$

相应协态方程，边界条件和控制方程为

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = T \frac{\partial L[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} + [I + T \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)}] \lambda(k+1) \quad (5-4-17)$$

$$\lambda(N) = 0 \quad (5-4-18)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = T \frac{\partial L[x(k), u(k), k]}{\partial u(k)} + T \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial u(k)} \lambda(k+1) = 0 \quad (5-4-19)$$

上述两种离散两点边值问题中，协态方程[式(5-4-9)与式(5-4-17)]、控制方程[式(5-4-12)与式(5-4-19)]是不同的。

对控制方程，若采样周期足够小，则 $\lambda(k) \approx \lambda(k+1)$ ，两种方法结果近于相等。

对协态方程(5-4-17)求解 $\lambda(k+1)$ 得：

$$\lambda(k+1) = \left[I + T \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \right]^{-1} \left[\lambda(k) - T \frac{\partial L[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \right] \quad (5-4-20)$$

对上式中的逆阵在 T 的零值附近展开成 T 的 Taylor 级数

$$\left[I + T \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \right]^{-1} = I^{-1} - I^{-2} \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} T + \dots \quad (5-4-21)$$

将其代入(5-4-20)式，并略去 T 的高次项，可得

$$\lambda(k+1) = \lambda(k) - T \frac{\partial L[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} - T \frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \lambda(k) \quad (5-4-22)$$

与(5-4-9)式完全相同。

或者可直接由(5-4-17)式右边第二项中 $\lambda(k+1)$ 乘入括号后, 将 $\frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \lambda(k+1)$ 用 $\frac{\partial f^T[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \lambda(k)$ 代替, 可得同样结果。

由上述讨论可知, 当 T 足够小时, 两种方法的解本质上相同。虽然都不是连续系统最优控制问题的严格最优解, 但使离散和连续两种极大值原理沟通了。