
第三章 极大值原理 (Maximum Principle)

-
- 前面介绍的变分法属于经典变分学的内容。
 - 经典变分学只能解决容许控制属于开集的一类最优控制问题，而且对轨线 $x(t)$ 、函数 L 、 f 均有连续可微要求。实际工程应用问题中，这些要求一般无法得到满足。
 - 为解决容许控制属于闭集的一类最优控制问题，前苏联数学家庞特里亚金（俄文ЛЮНДЛЯТИН，英文Pontryagin）受力学中Hamilton原理启发，于1958年提出极大值原理并加以证明。
 - 极大值原理将经典变分学推进到现代变分学，成为现代控制理论的重要基石。
 - 极大值原理（Maximum Principle），或称最大值原理，也有称为极小值原理或最小值原理（Minimum Principle）。
 - 极大值原理的证明在数学上非常严格，本课程只从工程应用需要的理解程度出发对其进行简单推导。
-

3.1 泛函极值的充分条件

几个有关定义

□ 正常场

定义3-1: 若 (x, t) 平面某一区域 D 上每一点都有曲线族中一条且仅有一条通过, 则称曲线族在区域 D 上形成一个正常场。曲线族上点 (x, t) 处的切线的角系数称为场在点 (x, t) 的斜率。

□ 中心场

定义3-2: 若区域 D 上曲线族的全部曲线都通过一点 (x_0, t_0) , 即它们形成曲线束, 且束心也属于 D , 同时除束心外, 曲线在 D 内不再相交, 曲线布满区域 D , 则该场为中心场。

□ 极值曲线场

定义3-3: 若正常场或中心场是由某一变分问题的极值曲线族所形成, 则称之为极值曲线场。

以上定义可以从平面场拓展到 n 维空间场。

维尔斯特拉斯E函数

(Weierstrass Erdmann Function)

□ 设有泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt$$

若用 $p(x, t)$ 表示其极值曲线场中极值曲线斜率, 则可以证明泛函增量可表示为

$$\Delta J(x) = \int_{t_0}^{t_f} E[x(t), \dot{x}(t), p(x, t), t] dt$$

其中

$$E[x, \dot{x}, p, t] = L[x, \dot{x}, t] - L[x, p, t] - [\dot{x} - p] \frac{\partial}{\partial p} L[x, p, t]$$

称为维尔斯特拉斯E函数。

泛函 J 在曲线上达到极值的充分条件

□ 设泛函 J 在曲线 c 上达到极值，可分为弱极值和强极值两种情况，其充分条件分别为：

□ 对于弱极值，

- ① 曲线 c 应是满足极值条件的极值曲线；
- ② 极值曲线 c 能够被包含在极值曲线场中；
- ③ 对于 c 近旁所有点 (x, t) 以及近于 $p(x, t)$ 的 \dot{x} 值，函数 $E(x, \dot{x}, p, t)$ 不变号，极小值时 $E \geq 0$ ，极大值时 $E \leq 0$ 。

□ 对于强极值，

- ① 曲线 c 应是满足极值条件的极值曲线；
 - ② 极值曲线 c 能够被包含在极值曲线场中；
 - ③ 对于 c 近旁所有点 (x, t) 以及任意的 \dot{x} 值，函数 $E(x, \dot{x}, p, t)$ 不变号，极小值时 $E \geq 0$ ，极大值时 $E \leq 0$ 。
-

3.2 连续系统极大值原理

□ 考虑系统状态方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (3-2-1)$$

其中, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $m \leq n$

初始状态 $x(t_0) = x_0 \quad (3-2-2)$

终态满足 $\psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (3-2-3)$

其中, $\psi \in R^r$, $r \leq n$ 。

$u(t)$ 属于有界闭集 Ω , 受不等式

$$g[x(t), u(t), t] \geq 0 \quad (3-2-4)$$

约束, g 为 p 维连续可微函数, $p \leq m$ 。

求最优控制 $u^*(t)$, 满足上列条件, 并使性能指标

$$J(u) = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (3-2-5)$$

达到极小值。

- $u(t)$ 有界并受不等式约束，与前面讨论的问题不同。
- $u(t)$ 有界一般可以考虑为分段连续函数，对不等式约束则设法转化为等式约束处理。

引进新变量 $Z(t)$ 和 $w(t)$ ，取

$$[\dot{Z}(t)]^2 = g[x(t), u(t), t], \quad Z(t_0) = 0 \quad (3-2-6)$$

$$\dot{w}(t) = u(t), \quad w(t_0) = 0 \quad (3-2-7)$$

- 取 $\dot{Z}^2 = g$ 可以保证 g 非负；而由 $u(t)$ 的分段连续性，有 $\dot{w}(t)$ 的分段连续性，则进一步有 $w(t)$ 分段光滑连续。因此，可以采用Lagrange乘子法进行求解。
- 分别取Lagrange乘子 $\lambda \in R^n$, $v \in R^r$, $\gamma \in R^p$ ，构造广义性能指标

$$J_a(u) = \Phi[x(t_f), t_f] + v^T \psi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x, \dot{w}, t) + \lambda^T [f(x, \dot{w}, t) - \dot{x}] + \gamma^T [g(x, \dot{w}, t) - \dot{Z}^2]\} dt \quad (3-2-8)$$

定义 $H(x, \lambda, \dot{w}, t) = L(x, \dot{w}, t) + \lambda^T f(x, \dot{w}, t)$ (3-2-9)

$$F(x, \dot{x}, \dot{w}, \dot{Z}, \lambda, \gamma, t) = H(x, \lambda, \dot{w}, t) - \lambda^T \dot{x} + \gamma^T [g(x, \dot{w}, t) - \dot{Z}^2]$$

(3-2-10)

则有

$$J_a(u) = \Phi[x(t_f), t_f] + \nu^T \psi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, \dot{w}, \dot{Z}, \lambda, \gamma, t) dt$$

(3-2-11)

求其一阶变分有

$$\delta J_a = \delta J_{t_f} + \delta J_x + \delta J_w + \delta J_z$$

(3-2-12)

其中

$$\delta J_{t_f} = \frac{\partial}{\partial t_f} \left\{ \Phi + \nu^T \psi + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F dt \right\} \Big|_{t_f} \delta t_f = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^T}{\partial t_f} \nu + F \right\} \Big|_{t_f} \delta t_f$$

(3-2-13)

$$\begin{aligned}
\delta J_x &= \delta \mathbf{x}_f^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \Phi + \mathbf{v}^T \psi \} \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \{ \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \delta \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \} dt \\
&= \delta \mathbf{x}_f^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right\} \Big|_{t_f} + \left\{ \left(\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] dt \right\}
\end{aligned}
\tag{3-2-14}$$

式 (3-2-14) 中, 由于 $\delta \mathbf{x}_f = \delta \mathbf{x}(t_f) + \dot{\mathbf{x}} \delta t_f$, 则有

$$\begin{aligned}
\delta J_x &= \delta \mathbf{x}_f^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right\} \Big|_{t_f} \\
&\quad - \left(\dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \Big|_{t_f} \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{x}^T \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] dt
\end{aligned}
\tag{3-2-14'}$$

$$\delta J_w = \left(\delta \mathbf{w}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \right) \Big|_{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{w}^T \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{w}}} dt
\tag{3-2-15}$$

$$\delta J_z = \left(\delta \mathbf{Z}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} \right) \Big|_{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{Z}^T \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{Z}}} dt
\tag{3-2-16}$$

□ 由泛函极值必要条件 $\delta J_a = 0$ 及 $\delta t_f, \delta x_f, \delta x, \delta w, \delta Z$ 的任意性，得此泛函极值的必要条件为：

□ 欧拉方程：

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (3-2-17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} = 0 \quad (3-2-18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{Z}} = 0 \quad (3-2-19)$$

□ 横截条件：

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^T}{\partial t_f} v + F - \dot{x}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-20)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} v + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{Z}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-23)$$

□ 将 $F(x, \dot{x}, \dot{w}, \dot{Z}, \lambda, \gamma, t) = H(x, \lambda, \dot{w}, t) - \lambda^\top \dot{x} + \gamma^\top [g(x, \dot{w}, t) - \dot{Z}^2]$ 代入以上各式，可得泛函极值必要条件为：

□ 欧拉方程：

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial g^\top}{\partial x} \gamma \quad (3-2-24)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} + \frac{\partial g^\top}{\partial \dot{w}} \gamma \right\} = 0 \quad (3-2-25)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma^\top \dot{Z}) = 0 \quad (3-2-26)$$

□ 横截条件：

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^\top}{\partial t_f} \nu + H \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-27)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^\top}{\partial x} \nu - \lambda \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-28)$$

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial \dot{w}} + \frac{\partial g^\top}{\partial \dot{w}} \gamma \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-29)$$

$$(\gamma^\top \dot{Z}) \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-30)$$

- 再由3.1节中泛函达到极值的充分条件，维尔斯特拉斯E函数在泛函极小值时沿最优轨线非负，即有

$$E = F(x^*, w^*, Z^*, \dot{x}, \dot{w}, \dot{Z}) - F(x^*, w^*, Z^*, \dot{x}^*, \dot{w}^*, \dot{Z}^*) \\ - (\dot{x} - \dot{x}^*)^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - (\dot{w} - \dot{w}^*)^T \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} - (\dot{Z} - \dot{Z}^*)^T \frac{\partial F}{\partial \dot{Z}} \geq 0 \quad (3-2-31)$$

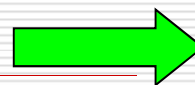
- 将F函数定义式（3-2-10）代入上式，并考虑

$$\text{由 } \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \Big|_{t_f} = 0, \text{ 有 } \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \equiv 0;$$

$$\text{由 } \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{Z}} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial F}{\partial \dot{Z}} \Big|_{t_f} = 0, \text{ 有 } \frac{\partial F}{\partial \dot{Z}} \equiv 0,$$

以及在最优轨线上有 $\dot{Z}^2 = g(x, u, t)$ ，所以有

$$E = H(x^*, \lambda^*, \dot{w}, t) - H(x^*, \lambda^*, \dot{w}^*, t) \geq 0 \quad (3-2-32)$$




$$E = H(x^*, \lambda^*, \dot{w}, t) - H(x^*, \lambda^*, \dot{w}^*, t) \geq 0 \quad (3-2-32)$$

考虑 $\dot{w} = u$, 上式即

$$H(x^*, \lambda^*, u, t) \geq H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \quad (3-2-33)$$

或

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) = \min_{u \in \Omega} H(x^*, \lambda^*, u, t) \quad (3-2-33')$$

□ 以上即为极大值原理的简单推导。

□ 至此可以将庞特里亚金极大值原理表示为:

□ 定理3-1: 设系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (3-2-1)$$

控制变量 $u(t)$ 是有第一类间断点的分段连续函数, 属于 m 维空间中的有界闭集 Ω , 满足不等式约束条件

$$g[x(t), u(t), t] \geq 0 \quad (3-2-4)$$

则为把状态 $x(t)$ 自初始状态

$$x(t_0) = x_0 \quad (3-2-2)$$

转移到满足边界条件

$$\psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (3-2-3)$$

的终态, 其中 t_f 未知, 并使性能指标 (泛函)

$$J(u) = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (3-2-5)$$

达到最小值, 实现最优控制的条件是:

- (1) 设 $u^*(t)$ 是最优控制, $x^*(t)$ 为由此最优控制产生的最优轨线, 则存在与其相对应的协态向量 $\lambda^*(t)$, 使 $x^*(t)$ 和 $\lambda^*(t)$ 满足规范方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} H[x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t] \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} H[x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t] \end{aligned} \right\} \quad (3-2-34)$$

- (2) 在最优轨线上与最优控制 $u^*(t)$ 对应的 Hamilton 函数取最小值

$$H[x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t] = \min_{u \in \Omega} H[x^*(t), \lambda^*(t), u(t), t] \quad (3-2-35)$$

- (3) Hamilton 函数在最优轨线终点处的值由下式决定

$$\left\{ H + \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^T}{\partial t_f} \nu \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-36)$$

- (4) 协态向量 $\lambda^*(t)$ 的终值满足横截条件

$$\lambda^*(t_f) = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \nu \right\} \Big|_{t_f} \quad (3-2-37)$$

- (5) 状态向量 $x^*(t)$ 满足边界条件

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \psi[x(t_f), t_f] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2-38)$$

$$\left\{ H + \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^T}{\partial t_f} v \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-36) \quad \lambda^*(t_f) = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} v \right\} \Big|_{t_f} \quad (3-2-37)$$

3.3 极大值原理边界条件的几种典型情况

□ 以下几种典型情况的分析将有助于解决实际问题，特别是如何确定解规范方程组的边界条件。

(1) $\Phi[x(t_f), t_f] = 0$, $x(t_f) = x_f$ 固定, t_f 自由

由于 $\Phi[x(t_f), t_f] = 0$ 和 $\psi[x(t_f), t_f] = x(t_f) - x_f = 0$ 不显含 t_f , 由 (3-2-36) 式有 $H \Big|_{t_f} = 0$, 这为确定 t_f 提供了一个条件; 又由 (3-2-37) 式有 $\lambda^*(t_f) = v$, 即在终点处对 λ 无约束。

这时, 因 $x(t_0) = x_0$ 和 $x(t_f) = x_f$ 已经为规范方程组提供了 $2n$ 个边界条件, 无需 $\lambda(t)$ 的任何约束。

$$\left\{ H + \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^T}{\partial t_f} \nu \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-36) \quad \lambda^*(t_f) = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \nu \right\} \Big|_{t_f} \quad (3-2-37)$$

(2) $\Phi[x(t_f), t_f] = 0$, $x(t_f)$ 受 $n-k$ 个方程约束, t_f 自由

此时有 $\psi[x(t_f), t_f] = h[x(t_f)]$, h 为 $n-k$ 维连续可微向量函数。因为 $\psi[x(t_f), t_f] = h[x(t_f)] = 0$ 不显含 t_f , 由 (3-2-36) 式有 $H \Big|_{t_f} = 0$ 。由 (3-2-37) 式有

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial h^T}{\partial x(t_f)} \nu = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x(t_f)}, \frac{\partial h_2}{\partial x(t_f)}; \dots, \frac{\partial h_{n-k}}{\partial x(t_f)} \right] \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{n-k} \end{bmatrix}, \text{ 即各 } \lambda_i^*(t) \text{ 是 } \frac{\partial h_i}{\partial x(t_f)} \text{ 的线性组合。}$$

考虑特殊情况 $h_i[x(t_f)] = x_i(t_f) - x_{fi}$, $i = 1, 2, \dots, n-k$, 则有

$$\lambda_i^*(t_f) = \nu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-k$$

$$\lambda_i^*(t_f) = 0, \quad i = n-k+1, \dots, n$$

即状态终值为规范方程组提供 $n-k$ 个边界条件, 其余 k 个边界条件由协态终值提供。

$$\left\{ H + \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \frac{\partial \psi^\top}{\partial t_f} \nu \right\} \Big|_{t_f} = 0 \quad (3-2-36) \quad \lambda^*(t_f) = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^\top}{\partial x} \nu \right\} \Big|_{t_f} \quad (3-2-37)$$

(3) $\Phi[x(t_f), t_f] = 0$ $x(t_f)$ 不受约束, t_f 自由

这时 $\psi[x(t_f), t_f] \equiv 0$, 有 $H \Big|_{t_f} = 0$, $\lambda^*(t_f) = 0$, 即协态终值为规范方程组提供所需的 n 个边界条件。

(4) $\Phi[x(t_f), t_f] = 0$, $x(t_f)$ 属于动点 $h(t_f)$, t_f 自由

这时, $x(t_f) = h(t_f)$, 有 $\psi[x(t_f), t_f] = x(t_f) - h(t_f) = 0$, 因而 $\lambda^*(t_f) = \nu$,

$$H \Big|_{t_f} = - \frac{\partial \psi^\top}{\partial t_f} \nu = - \frac{\partial \psi^\top}{\partial t_f} \lambda^*(t_f)$$

(5) 情况同 (4), 但 t_f 固定

此时 δt_f 不存在, 因而横截条件 (3-2-36) 不存在, 即 t_f 不用确定。

(6) 情况同 (1)~(4), 但 $\Phi[x(t_f), t_f] \neq 0$

此时, 只需在相应的横截条件方程中增加 $\frac{\partial \Phi}{\partial t_f}$ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$ 项即可。

以上边界条件处理情况同样也适用于经典变分法求解最优控制问题。

3.4 极大值原理的典型应用之一

—最短时间控制

- 最短时间控制又称为快速控制或时间最优控制，其基本特征是在满足一定约束条件前提下，取一控制作用（最优控制），使系统以最短的时间从初始状态转移到给定的终态。

(1) 最短时间控制问题提法

已知系统状态方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + B[x(t), t]u(t) \quad (3-4-1)$$

其中 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, f , B 对 x , t 连续可微。要寻找控制向量 u , 满足

$$|u(t)| \leq 1 \quad (3-4-2)$$

以使系统从初始状态 $x(t_0) = x_0$ 到达满足边界条件

$$\psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (3-4-3)$$

的某个终态, 并使性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (3-4-4)$$

最小。其中 $\psi \in R^r$, 对 x , t 连续可微, t_f 未知。

(2) 运用极大值原理求解

列出此最优控制问题的Hamilton函数:

$$H[x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t] = 1 + \lambda^{\top}(t) \{f[x(t), t] + B[x(t), t]u(t)\} \quad (3-4-5)$$

由极大值原理

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq H(x^*, \lambda^*, u, t), \quad \forall u \in \Omega$$

有

$$1 + \lambda^{*\top}(t) \{f[x^*(t), t] + B[x^*(t), t]u^*(t)\} \leq 1 + \lambda^{*\top}(t) \{f[x^*(t), t] + B[x^*(t), t]u(t)\} \quad (3-4-7)$$

即

$$u^{*\top}(t) B^{\top}[x^*(t), t] \lambda^*(t) \leq u^{\top}(t) B^{\top}[x^*(t), t] \lambda^*(t) \quad (3-4-8)$$

将上式两边展开为分量形式，有

$$\sum_{j=1}^m u_j^*(t) \sum_{i=1}^n b_{ij} [x^*(t), t] \lambda_i^*(t) \leq \sum_{j=1}^m u_j(t) \sum_{i=1}^n b_{ij} [x^*(t), t] \lambda_i^*(t) \quad (3-4-9)$$

取

$$q_j^*(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} [x^*(t), t] \lambda_i^*(t) \quad (3-4-10)$$

则有

$$\sum_{j=1}^m u_j^*(t) q_j^*(t) \leq \sum_{j=1}^m u_j(t) q_j^*(t) \quad (3-4-11)$$

假设各控制分量约束相互独立，由 $|u(t)| \leq 1$ ，则最小值应是

$$\min_{u \in \Omega} u_j(t) q_j^*(t) = -|q_j^*(t)| \quad (3-4-12)$$

所以，使性能指标取最小值的控制作用应为

$$u_j^*(t) = \begin{cases} +1, & q_j^*(t) < 0 \\ -1, & q_j^*(t) > 0 \\ \text{不定}, & q_j^*(t) = 0 \end{cases} \quad (3-4-13)$$

采用符号函数 Sgn 可表示为

$$u_j^*(t) = -Sgn\{q_j^*(t)\} = -Sgn\left\{\sum_{i=1}^n b_{ij}[x^*(t), t]\lambda_i^*(t)\right\} \quad (3-4-14)$$

(3) 时间最优问题的非奇异与奇异定义

非奇异时间最优问题：函数 $q_j^*(t)$ 只在独立瞬间取0值。

—— $u_j^*(t)$ 是有第一类间断点的分段恒值函数。

奇异时间最优问题：函数 $q_j^*(t)$ 在区间 $[t_0, t_f]$ 中的一个或多个子区间上取0值。

——从 $H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq H(x^*, \lambda^*, u, t)$ 不能推出 u^* 与 x^* 、 λ^* 和 t 之间的关系。

但并不意味最优控制不存在或无法定义——奇异最优控制。

• “Bang-Bang”控制原理

注意 u_i 的
独立性!

定理3-2:

设 $u^*(t)$ 是问题(1)的时间最优控制, 并令 $x^*(t)$ 和 $\lambda^*(t)$ 是相应的状态和协态。若问题是**非奇异的**, 则 $u^*(t)$ 的各分量 $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_m^*(t)$ 应按下列关系确定,

$$u_j^*(t) = -\text{Sgn}\left\{\sum_{i=1}^n b_{ij}[x^*(t), t]\lambda_i^*(t)\right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3-4-14)$$

或写成更简洁的向量形式

$$u^*(t) = -\text{SGN}\{q^*(t)\} = -\text{SGN}\{B[x^*(t), t]\lambda^*(t)\} \quad (3-4-14')$$

“Bang-Bang”控制: 控制变量在最大值和最小值之间切换的控制方式。
也称**“砰-砰”控制**、**双位控制**, 工程系统中非常普遍。

- 线性定常系统 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 时间最优控制问题的
奇异性判定定理

定理3-3：线性时不变系统时间最优控制奇异的充要条件是当且仅当至少对某一 j ($j=1, 2, \dots, m$)，矩阵

$$G_j = [b_j : Ab_j : A^2b_j : \dots : A^{n-1}b_j] \quad (3-4-16)$$

是奇异的，则该时间最优控制问题是奇异的。

定理3-4：线性时不变系统时间最优控制非奇异的充要条件是当且仅当 m 个 $n \times n$ 矩阵 G_1, G_2, \dots, G_m

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= [b_1 : Ab_1 : A^2b_1 : \dots : A^{n-1}b_1] \\ G_2 &= [b_2 : Ab_2 : A^2b_2 : \dots : A^{n-1}b_2] \\ &\vdots \\ G_m &= [b_m : Ab_m : A^2b_m : \dots : A^{n-1}b_m] \end{aligned} \right\} \quad (3-4-17)$$

全部是非奇异的，则该时间最优控制问题是非奇异的。

(4) 有限切换原理（开关次数定理）

由（3-4-13）式，最优控制 $u^*(t)$ 如果存在，一定是在+1和-1两个状态进行切换。

对于线性时不变系统，最优控制 $u^*(t)$ 的切换次数满足如下定理。

定理3-5：有限切换原理

设线性时不变系统 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 是非奇异的，且 $n \times n$ 维系统矩阵 A 的全部特征值 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 均为实数，时间最优控制 $u^*(t)$ 存在， $u_j^*(t)$ ($j=1, 2, \dots, m$) 是其各个分量。用 t_{r_j} 表示分段恒值函数 $u_j^*(t)$ 的开关时间，则数 γ_j ($j=1, 2, \dots, m$) 的最大值至多是 $n-1$ ，即每一个分段恒值函数 $u_j^*(t)$ 能切换（从+1到-1，或从-1到+1）至多 $n-1$ 次。

(5) 二次积分（双积分）系统的时间最优控制问题

二次积分（双积分）系统的数学表达式为 $\ddot{x} = u$ ，其物理含义为惯性负载在无阻力环境中的运动。

考虑二次积分系统的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-4-18)$$

其中控制变量约束为 $|u(t)| \leq 1$ 。求最优控制规律 $u^*(t)$ ，使系统以最短时间从任一初态 (x_{10}, x_{20}) 到达原点 $(0, 0)$ 。

• 解：

此问题性能指标为 $J = \int_0^{t_f} 1 dt$ ，其中 t_f 待定。

由Hamilton函数 $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$ 和极大值原理有

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) = \min_u H(x^*, \lambda^*, u, t)$$

即 $1 + \lambda_1^* x_2^* + \lambda_2^* u^* \leq 1 + \lambda_1^* x_2^* + \lambda_2^* u$

由此有 $\lambda_2^* u^* \leq \lambda_2^* u$

因 $|u(t)| \leq 1$, 所以 $\min \lambda_2^* u = -|\lambda_2^*|$, 由此可得

$$u^* = -Sgn\{\lambda_2(t)\} = \pm 1 \doteq \Delta \quad (3-4-19)$$

又由协态方程 $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$ 得

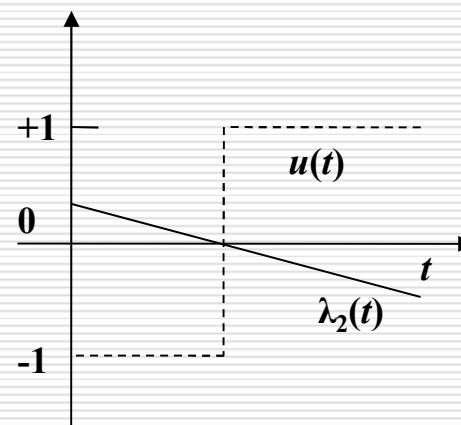
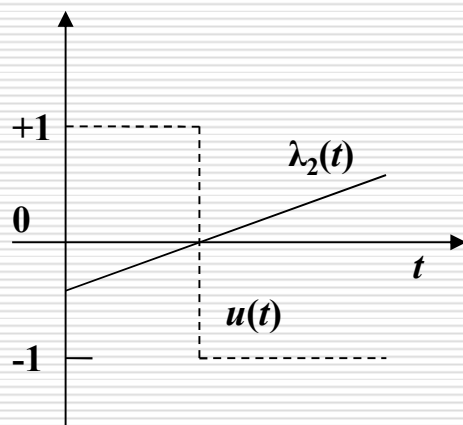
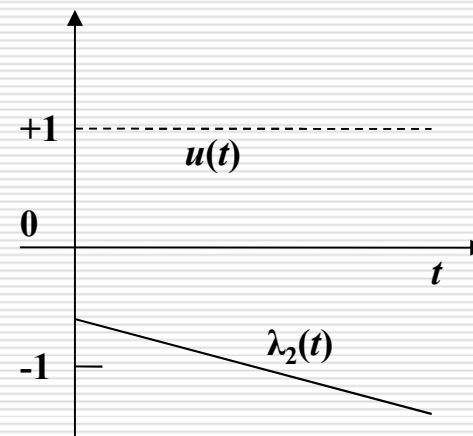
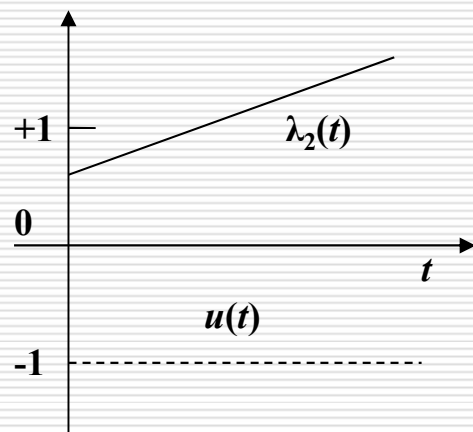
$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t)$$

令 $\lambda_1(0) = c_1$, $\lambda_2(0) = c_2$ 均为常数, 解微分方程组可得

$$\lambda_1(t) = c_1, \quad \lambda_2(t) = c_2 - c_1 t \quad (3-4-20)$$

由 (3-4-20) 式可知 $\lambda_2(t)$ 是 t 的一次函数，为一直线。由式 (3-4-19) 可得 $u^*(t)$ 与 $\lambda_2(t)$ 关系图



由图可知，此问题只有4种可能的控制序列，即 $\{+1\}$ ， $\{-1\}$ ， $\{+1, -1\}$ ， $\{-1, +1\}$ ，也就是最多只开关了一次。

采用最优控制 $u^*(t)$ ，可以在平面上描绘最优轨线，以直观表现双积分系统时间最优控制的特性。

考虑 $u^*(t)$ 在一段时间内是常数 $\Delta = \pm 1$ ，可由状态方程（3-4-18）得到 x_1 、 x_2 的轨迹方程

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= x_{20} + \Delta t \\ x_1(t) &= x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-21)$$

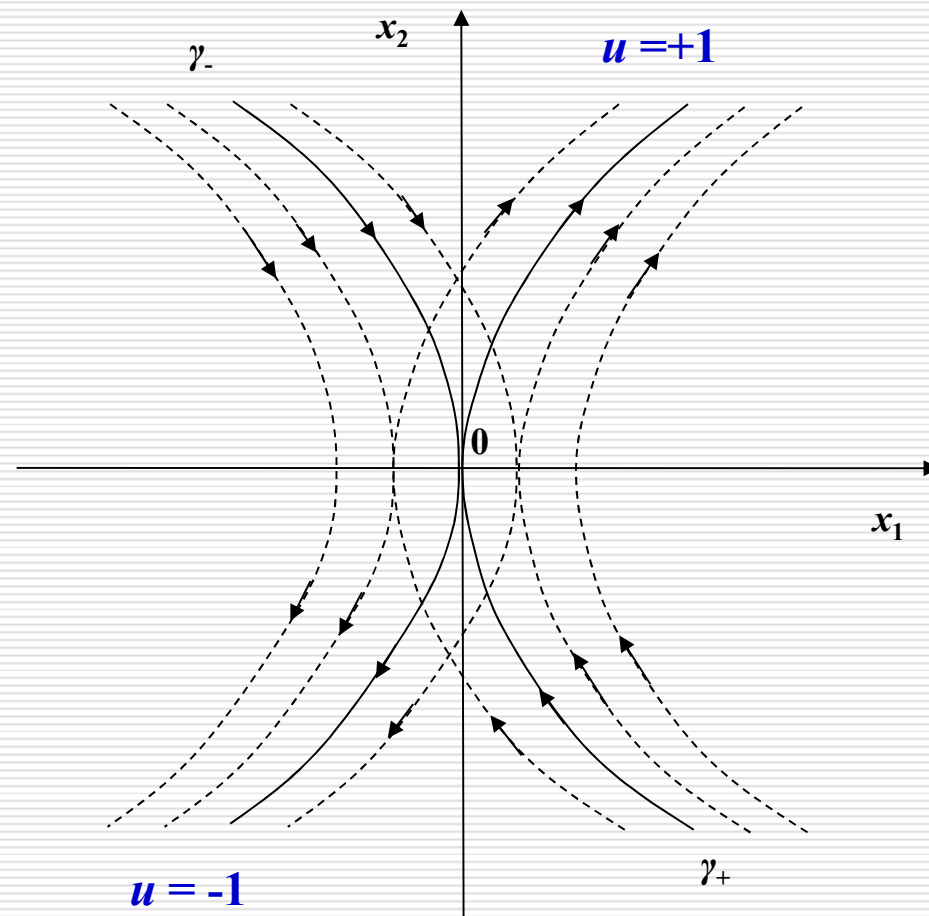
考虑 $\Delta = \frac{1}{\Delta}$ ，将上两式合并消去 t 可得

$$x_1 = x_{10} + \frac{1}{2}\Delta x_2^2 - \frac{1}{2}\Delta x_{20}^2 \quad (3-4-22)$$

(3-4-22) 式为平面上一族抛物线，如图所示。

图中抛物线上的箭头表示抛物线随时间变化的方向。

由图可见，只有在曲线 γ_- 或 γ_+ 上 x_1 - x_2 的运动轨线才能到达终点 $(0, 0)$

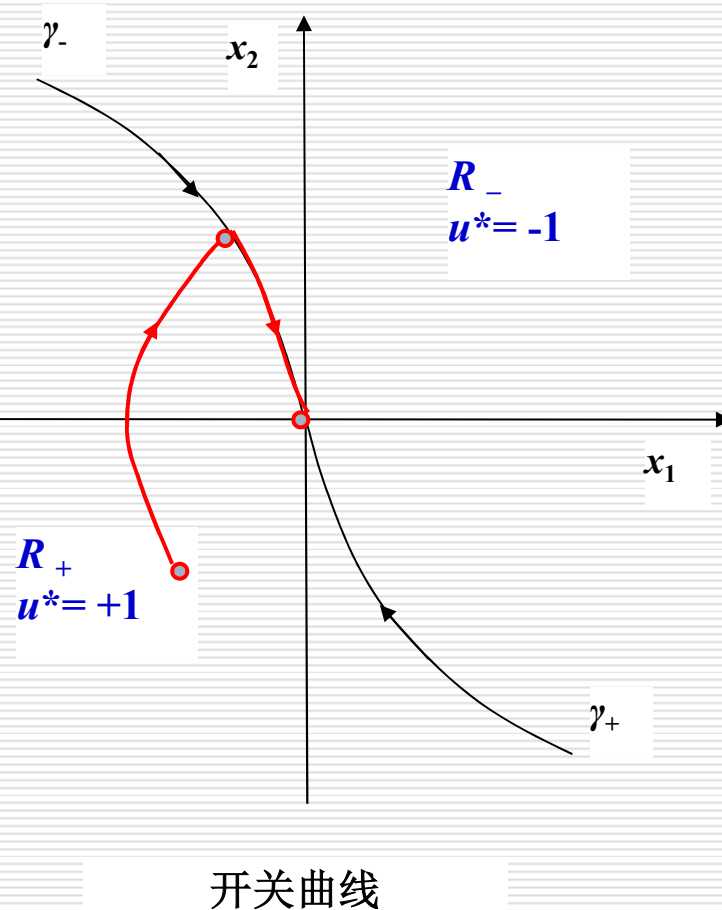


x_1 、 x_2 的轨迹方程构成的抛物线族

曲线 γ_- 和 γ_+ 构成如图所示的**开关曲线**，将 x_1 - x_2 平面划分为 R_- 和 R_+ 两个区域。

在 R_+ 区域 u^* 取 +1， x_1 - x_2 轨线到达开关曲线的 γ_- 段时 u^* 切换为 -1 从而使轨线到达原点；

在 R_- 区域 u^* 取 -1， x_1 - x_2 轨线到达开关曲线的 γ_+ 段时 u^* 切换为 +1 从而使轨线到达原点；



- 因此，从 x_1 - x_2 平面上任意一点 (x_1, x_2) 出发的最优控制规律 u^* 可表示为：

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = +1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \gamma_+ \cup R_+ \quad (3-4-23)$$

$$u^* = u^*(x_1, x_2) = -1, \quad \forall (x_1, x_2) \in \gamma_- \cup R_- \quad (3-4-24)$$

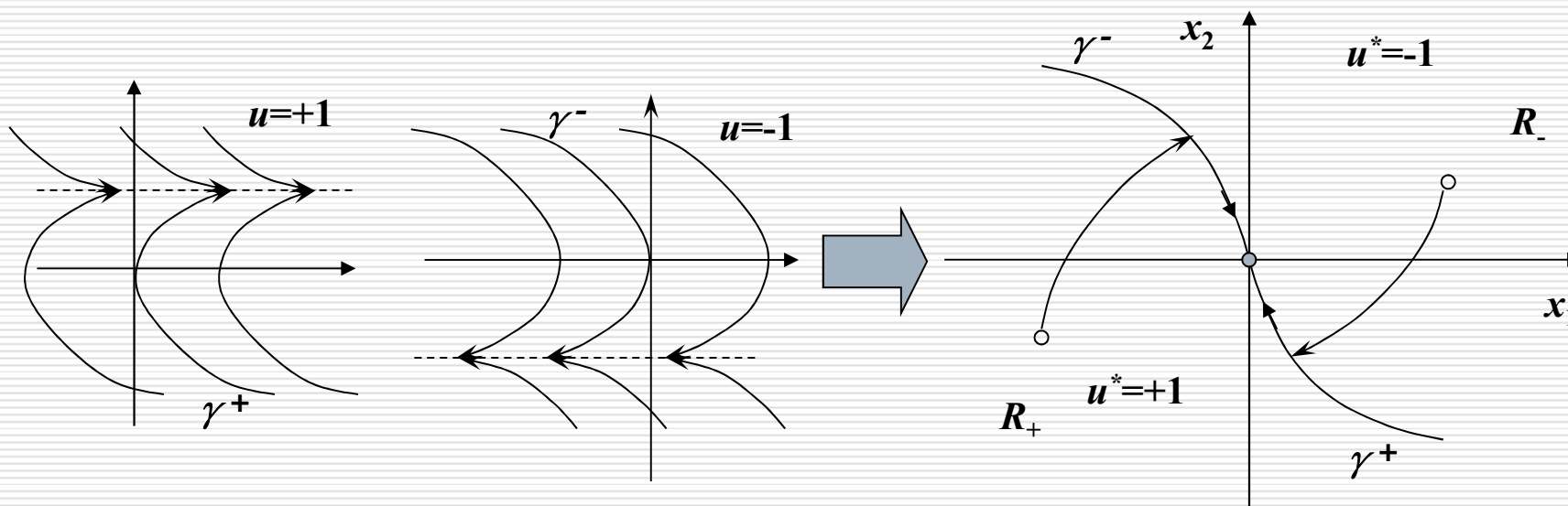
此时，有最短时间 t^* 为

$$t^*(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}, & \text{当 } x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \text{ } (R_-) \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}, & \text{当 } x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \text{ } (R_+) \\ |x_2|, & \text{当 } x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \text{ } (\gamma_- \text{ 和 } \gamma_+) \end{cases} \quad (3-4-25)$$

其他系统的时间最优控制问题

- 若系统对象特性不同，相应的时间最优控制问题表现也不同。
例如：

- 对象传递函数 $G(s) = \frac{1}{s(s+a)}$ \rightarrow 状态方程 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + u \end{cases}$



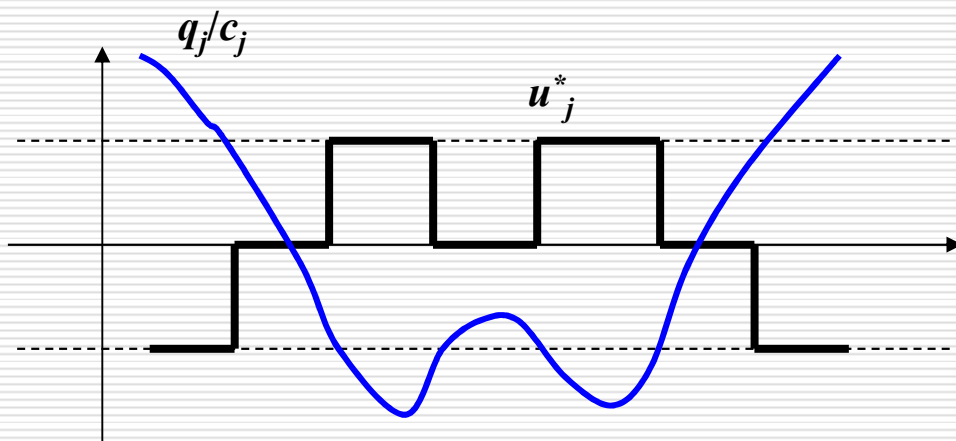
极大值原理的其他典型应用

□ 燃料(能量)最优控制问题

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} c^T |u(t)| dt$$

由极大值原理 H 函数取极大值可得

$$u_j^* = \begin{cases} 0, & |q_j / c_j| < 1 \\ \text{Sgn}\{q_j / c_j\}, & |\lambda_2| > 1 \\ a(0 \leq a \leq 1), & q_j / c_j = +1 \\ b(-1 \leq b \leq 0), & q_j / c_j = -1 \end{cases}$$



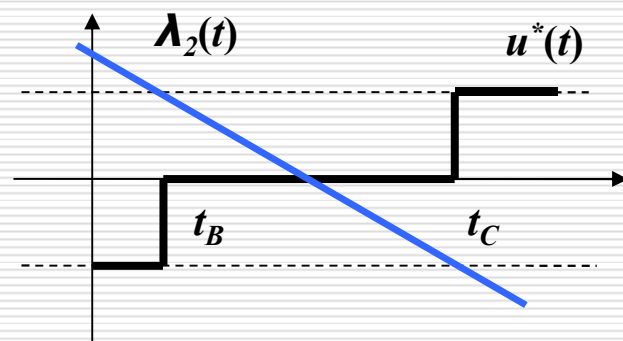
极大值原理的其他典型应用

- 以时间最优考虑控制问题，往往导致过高的燃料(能量)消耗；而以燃料(能量)最优考虑控制问题，又会导致系统响应时间太慢。促使人们考虑这两个指标的结合。

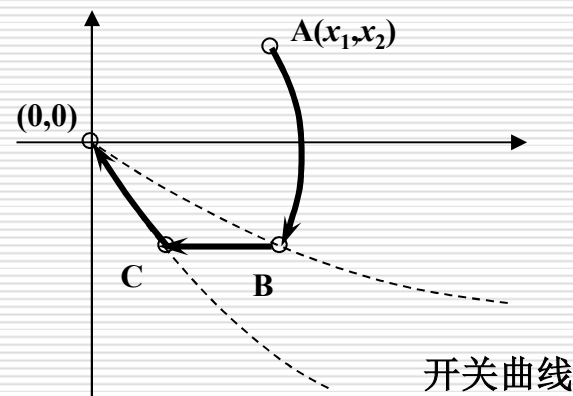
- 时间-燃料(能量)最优控制问题

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \{\rho + |u(t)|\} dt$$

- 双积分系统的时间-燃料(能量)最优控制的6种可能控制序列：
 $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$, $\{+1, 0, -1\}$, $\{-1, 0, +1\}$



控制序列为 $\{-1, 0, +1\}$ 时 u^* 与 λ_2 关系



开关曲线