八. 线性规划(II)

(Linear Programming)

8.5 单纯形方法(Simplex Method)

单纯形方法是求解线性规划的普遍方法，**1947**年由匈牙利数学家**G. B. Dantzig**提出，使线性规划成为运筹学的一个分支。

单纯形方法基本思想：从一个基本可行解出发，求一个使目标函数值有所改善的基本可行解；通过不断改进基本可行解，达到最优基本可行解。

考虑线性规划问题标准形式：

$$\begin{aligned} &\min \ Cx \\ &s.t. \ Ax=b \\ &\qquad x\geq 0 \end{aligned}$$

其中A是$m \times n$维矩阵，C为n维行向量，b为m维列向量。

(1)基本可行解的严格定义

上面标准形式中，设A的秩为m，则可设 $A=[B, N]$，其中B为m阶可逆方阵。这种做法不失一般性。

又记$x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$，$x_B$的分量与$B$中列对应，$x_N$的分量与$N$中列对应.

则有 $Ax=b \Rightarrow [B, N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=b$

或表示为 $Bx_B+Nx_N=b$

因而有 $x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$

x_N的分量是自由未知变量，它们取值不同，方程组的解就不同。

当 $x_N=0$ 时，解为 $x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$。

定义： $x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 为$Ax=b$的一个基本解。

B称为基矩阵，或简称为基。

x_B的各分量称为基变量，基变量的全体$x_{B1}, x_{B2}, \ldots\ldots, x_{Bm}$称为一组基。

x_N的各分量称为非基变量。

若$B^{-1}b \geq 0$，则称$x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$为约束条件$Ax=b$，$x\geq 0$的基本可行解，并称$B$为可行基矩阵。

若$B^{-1}b > 0$，则基变量取值均为正数 ——非退化基本可行解

若$B^{-1}b \geq 0$，且至少一个分量为0 ——退化的基本可行解

(2) 基本可行解的转换

令 $f = Cx$，为目标函数。

记 $A = (p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n)$， p_i为m维列向量。

将A分解成 (B, N) (可能经列调换)，使B为基矩阵，N为非基矩阵。

设 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ 为基本可行解, 此处目标函数值为

$$f_0 = Cx^{(0)} = (C_B, C_N)\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = C_B B^{-1} b$$

其中，C_B是C中与基变量对应的分量组成的m维行向量，C_N为C中与非基变量对应的n-m维行向量。

下面要从$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解。

设 $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ 为任一可行解，则由$Ax=b$得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

在x点处目标函数值为

$$f = Cx = (C_B, C_N)\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = C_B x_B + C_N x_N$$

$$= C_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + C_N x_N = C_B B^{-1}b - (C_B B^{-1}N - C_N)x_N$$

$$= f_0 - \sum_{j\in R}(C_B B^{-1}p_j - c_j)x_j = f_0 - \sum_{j\in R}(z_j - c_j)x_j$$

其中R是非基变量下标集，$z_j = C_B B^{-1}p_j$

从上式可见，当 $x_j (j\in R)$ 取值相同时，$z_j - c_j$越大(正数)，目标函数值下降越多。

因此选 $z_k - c_k = \max\limits_{j\in R}(z_j - c_j)$ 对应的非基变量(这里假定$z_k - c_k > 0$)由零变为正数，而其它非基变量仍为零，有$Ax=b$的解为

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}p_k x_k \equiv \bar{b} - y_k x_k$$

其中$\bar{b}$ 和 y_k 均为m维列向量，$\bar{b} = B^{-1}b$，$y_k = B^{-1}p_k$ 。

将x_B写成分量形式，并考虑x_N中某一元素由0转为非0，有

$$x_B=\begin{bmatrix}x_{B1}\\x_{B2}\\\vdots\\x_{Bm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\vdots\\\bar{b}_m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y_{1k}\\y_{2k}\\\\y_{mk}\end{bmatrix}x_k,\quad x_N=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & x_k & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T$$

则在新的点目标函数值为$f=f_0-(z_k-c_k)x_k$。

考虑x_k的取值：由上式，$x_k\uparrow\rightarrow f\downarrow$，同时由$x\geq 0$的限制，若$x_k$过大，则有可能 $x_{Bi}<0$ 。

为保证 $x_{Bi}\geq 0$ ，即 $x_{Bi}=\bar{b}_i-y_{ik}x_k\geq 0$，必须取

$$x_k\leq\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\qquad (i=1, 2, \ldots, m)\ (\text{当}\ y_{ik}>0\ \text{时})。$$

(当 $y_{ik}\leq 0$ 时，无论x_k取何正值，均有$x_{Bi}\geq 0$ ，无法对x_k进行限制(x_i应受到可行性限制))

所以，为使$x_B \geq 0$，应令$x_k = \min\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$。

这时，原来的基变量$x_{Br} = 0$，得新的可行解：

$$x = \begin{bmatrix} x_{B1} & \cdots & x_{Br-1} & 0 & x_{Br+1} & \cdots & x_{Bm} & 0 & \cdots & 0 & x_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

必为基本可行解。

这样，就实现了基本可行解的转移。转换后的目标函数值比原来减少了$(z_k - c_k)x_k$。

重复上述过程，不断改进基本可行解，直到所有的$z_j - c_j$均为负值，任何一个非基变量为正都不能使f值下降为止。

定理：若在极小化问题中，对于某个基本可行解，所有$z_j - c_j \leq 0$，则此基本可行解是最优解；而在极大化问题中，对某个基本可行解，所有$z_j - c_j \geq 0$，则此基本可行解为最优解，其中

$z_j - c_j = C_B B^{-1} p_j - c_j$，($j$= 1,2,…, n)，称为判别数或检验数。

(3) 单纯形方法计算步骤

以极小化为例。

(1) 给定初始基本可行解，设初始基矩阵B；

(2) 解 $Bx_B = b$，求得 $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$，令$x_N = 0$，计算目标函数值 $f = C_B x_B$；

(3) 求单纯形乘子w：解$wB=C_B$，得$w = C_B B^{-1}$。对于所有非基变量，计算判别数 $z_j - c_j = wp_j - c_j$，令 $z_k - c_k = \max\limits_{j\in R}(z_j - c_j)$

若$z_k - c_k \le 0$，则对所有非基变量均有$z_j - c_j \le 0$，应停止计算，现行基本可行解即是最优解。否则，进行下一步。

(4) 解 $By_k = p_k$，得 $y_k = B^{-1}p_k$，若 $y_k \le 0$，即y_k的每个分量均非正数，应停止计算，问题不存在有限最优解；否则，进行下一步；

(5)确定下标r，使 $\dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0\right\}$，则$x_{Br}$为离基变量，$x_k$为进基变量，用$p_k$代替$p_{Br}$，得新的基矩阵$B$，返回(2)。

对极大化问题，除令(3)中$z_k - c_k = \min\limits_{j\in R}(z_j - c_j)$外，其它步骤完全相同。

例 用单纯形方法解下列线性规划问题：

$$\min f(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{4}x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} s.t.\quad & -x_1 + \mathbf{2}x_2 \le \mathbf{4} \\ & \mathbf{2}x_1 + \mathbf{3}x_2 \le \mathbf{12} \\ & x_1 - x_2 \le \mathbf{3} \\ & \boldsymbol{x}_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

为用单纯形方法求解上述问题，先引入松弛变量$\boldsymbol{x}_3$、$\boldsymbol{x}_4$、$\boldsymbol{x}_5$，把问题化为标准形式

$$\min f(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{4}x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} s.t.\quad & -x_1 + \mathbf{2}x_2 + x_3 = \mathbf{4} \\ & \mathbf{2}x_1 + \mathbf{3}x_2 + x_4 = \mathbf{12} \\ & x_1 - x_2 + x_5 = \mathbf{3} \\ & x_j \ge \mathbf{0},\quad j = \mathbf{1}, \cdots, \mathbf{5} \end{aligned}$$

系数矩阵 $A = (p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

第1次迭代：

$$B=(p_3\ p_4\ p_5)=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\mathbf{4}\\ \mathbf{12}\\ \mathbf{3}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$f_1=c_B\boldsymbol{x}_B=(\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0})(\mathbf{4}\ \ \mathbf{12}\ \ \mathbf{3})^T=\mathbf{0}$$

$$w=c_BB^{-1}=(\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0})\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}=(\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0})$$

$$z_1-c_1=wp_1-c_1=(\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0})(-\mathbf{1}\ \ \mathbf{2}\ \ \mathbf{1})^T+\mathbf{4}=\mathbf{4}$$

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=(\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0})(\mathbf{2}\ \ \mathbf{3}\ \ -\mathbf{1})^T+\mathbf{1}=\mathbf{1}$$

又知对应基变量的判别数均为零，因此最大判别数是$z_1-c_1=\mathbf{4}$ ，下标$\boldsymbol{k}$**=1**。

计算$\boldsymbol{y_1}$：

$$y_1 = B^{-1}p_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \overline{b} = \boldsymbol{x}_B = (\mathbf{4}\ \ \mathbf{12}\ \ \mathbf{3})^T$$

可由 $$\frac{\overline{b}_r}{y_{r1}} = \min\{\frac{\overline{b}_2}{y_{21}} \quad \frac{\overline{b}_3}{y_{31}}\} = \min\{\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{2}} \quad \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}\} = \mathbf{3}$$

确定下标$\boldsymbol{r}$为$\boldsymbol{r}$ =3。即$\boldsymbol{x_B}$中第3个分量$\boldsymbol{x_5}$为离基变量，$\boldsymbol{x_1}$为进基变量。用$\boldsymbol{p_1}$代替$\boldsymbol{p_5}$，得到新基，进行下一次迭代。

第2次迭代：

$$B = (p_3\ p_4\ p_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$f_2 = c_B \boldsymbol{x}_B = (0 \ \ 0 \ \ -4)(7 \ \ 6 \ \ 3)^T = -12$$

$$w = c_B B^{-1} = (0 \ \ 0 \ \ -4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \ \ 0 \ \ -4)$$

$$z_2 - c_2 = wp_2 - c_2 = (0 \ \ 0 \ \ -4)(2 \ \ 3 \ \ -1)^T + 1 = 5$$

$$z_5 - c_5 = wp_5 - c_5 = (0 \ \ 0 \ \ -4)(0 \ \ 0 \ \ 1)^T - 0 = -4$$

最大判别数是 $z_2 - c_2 = 5$ ，下标 $\boldsymbol{k}$ =2 。

计算$\boldsymbol{y_2}$:

$$y_2 = B^{-1} p_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r2}} = \min\{\frac{\bar{b}_1}{y_{12}} \quad \frac{\bar{b}_2}{y_{22}}\} = \min\{\frac{7}{1} \quad \frac{6}{5}\} = \frac{6}{5}$$

则$\boldsymbol{x_{Br}}$=$\boldsymbol{x_4}$为离基变量，$\boldsymbol{x_2}$为进基变量。用$\boldsymbol{p_2}$代替$\boldsymbol{p_4}$，得到新基，进行下一次迭代。

第3次迭代：

$$B=(p_3\ p_2\ p_1)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\qquad B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1/5 & 7/5\\ 0 & 1/5 & -2/5\\ 0 & 1/5 & 3/5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}29/5\\ 6/5\\ 21/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \bar{b}_3\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$f_3=c_B\boldsymbol{x}_B=(0\ \ -1\ \ -4)(29/5\ \ \ 6/5\ \ \ 21/5)^T=-18$$

$$w=c_BB^{-1}=(0\ \ -1\ \ -4)\begin{bmatrix}1 & -1/5 & 7/5\\ 0 & 1/5 & -2/5\\ 0 & 1/5 & 3/5\end{bmatrix}=(0\ \ -1\ \ -2)$$

$$z_4 - c_4 = wp_4 - c_4 = (0 \ \ -1 \ \ -2)(0 \ \ 1 \ \ 0)^T - 0 = -1$$

$$z_5 - c_5 = wp_5 - c_5 = (0 \ \ -1 \ \ -2)(0 \ \ 0 \ \ 1)^T - 0 = -2$$

由于所有 $z_j - c_j \le 0$ ，因此得到最优解

$$x_1^* = \frac{21}{5}, \ x_2^* = \frac{6}{5}$$

和目标函数最优值

$$f_{\min} = -18$$

- 按照上述计算步骤，单纯形方法很容易用计算机程序实现。
- 上面介绍的只是单纯形方法的基本方法，在基本方法的基础上，已经发展出很多改进算法。
- 随着优化问题规模的不断增大，计算效率成为在进行大规模优化计算时必须考虑的问题。
- 虽然单纯形方法是求解线性规划最普遍的方法，但从计算效率考虑，并不是求解线性规划问题的多项式时间算法。

多项式时间算法

在数值计算中，一个问题的规模大小是用输入长度来表示的。

输入长度：把一个问题的数据输入计算机时所需二进制代码的长度*L*。

多项式时间算法：如果用某种算法解一数值计算问题时，所需计算时间在最坏的情况下，不超过输入长度的某个多项式的确定的数值*P*(*L*)，则称该算法是解此问题的多项式时间算法。

用上述方法检验, 单纯形方法在理论上还不是多项式时间算法。

对于线性规划问题, 能否找到多项式时间算法?

Karmarkar算法

Karmarkar算法是**1984**年提出的解线性规划问题的一种新方法，是关于线性规划的新的多项式时间算法，计算复杂性比单纯形方法低。

单纯形法及其衍生算法，都是沿可行解凸集的顶点寻优的。 **Karmarkar**算法改变了这种做法，对线性规划问题也从内点寻优。并通过线性问题非线性化，在计算上达到简单化，是一种内点算法。

内点算法是优化算法研究的发展趋势之一。