

六. 动态规划

(Dynamic Programming)

6.2 最优性原理

(1) 最优性原理

最优性原理可以表述如下：

一个多级决策问题中的最优策略具有这样的性质，即不论初始状态和初始决策如何，当将其中任何一个过程状态再作为初始状态时，则余下的策略对此必然也是一个最优策略。

以最短行车路线问题为例，将代价函数分解，可表示为

$$J^* = J^*[S] = 5 + J^*[x_2(1)] = 5 + 4 + J^*[x_1(2)] = 5 + 4 + 1 + J^*[x_2(3)]$$

考虑一般性表示，引入符号

$x(k)$ —— k 时刻（即 $k+1$ 段开始时刻）的状态向量；

$u(k)$ —— $k+1$ 段所采用的控制或决策向量；

$J_N^*[x(k)]$ —— 从状态 $x(k)$ 往后的最优性能指标。

将初始条件和控制策略放入 J 的自变量中，即记为 $J_N[x(k), u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)]$ ，有

$$J_N^*[x(k)] = \min(or \max)_{u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)} J_N[x(k), u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)] \quad (6-2-1)$$

则**最优性原理**可表示为:

如果 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 使

$$J_N^*[x(0)] = \min_{u(0), u(1), \dots, u(N-1)} (\text{or } \max) J_N[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \quad (6-2-2)$$

则必有 $u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(N-1)$ 使

$$J_N^*[x(k)] = \min_{u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)} (\text{or } \max) J_N[x(k), u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)] \quad (6-2-3)$$

成立, 其中 $0 \leq k \leq N-1$ 。

证明: 采用反证法。以极大值为例, 即考虑。

假设 $u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(N-1)$ 不是**初态为 $x(k)$** 的 $N-1$ 级最优决策, 而另外存在一个最优决策序列 $u'(k), u'(k+1), \dots, u'(N-1)$ ($0 \leq k \leq N-1$)。

则必有

$$\begin{aligned} & J_N[x(0), u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(k-1), u^*(k), \dots, u^*(N-1)] \\ & < J_N[x(0), u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(k-1), u'(k), \dots, u'(N-1)] \end{aligned}$$

而这与

$$\begin{aligned} J_N^*[x(0)] &= J_N[x(0), u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)] \\ &= \max J_N[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \end{aligned}$$

相矛盾, 所以必然有最优性原理成立。 #

另记:

$u_{0,N-1}$ —— $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$, 表示 N 阶段决策过程中的一个策略;

$u_{0,k-1}$ —— $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$, 表示前 k 个阶段的子策略;

$u_{k,N-1}$ —— $u(k), u(k+1), \dots, u(N-1)$, 表示后 $N-k$ 个阶段的子策略;

$J_{1,N}[x(0), u_{0,N-1}]$ —— $J_N[x(0)]$, 为 N 个阶段总性能指标;

$J_{1,k}[x(0), u_{0,k-1}]$ —— 为前 k 个阶段的局部性能指标;

$J_{k+1,N}[x(k), u_{k,N-1}]$ —— 为后 $N-k$ 个阶段的局部性能指标,

则最优性原理又可表示为

定理6-1: 采用上述记法, 即存在以下两个等式

$$u_{0,N-1} = (u_{0,k-1}, u_{k,N-1}) \quad (6-2-4)$$

$$J_{1,N}[x(0), u_{0,N-1}] = J_{1,k}[x(0), u_{0,k-1}] + J_{k+1,N}[x(k), u_{k,N-1}] \quad (6-2-5)$$

则策略 $u_{0,N-1}^* = [u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)]$ 为最优策略的必要和充分条件是, 对任一 k , $0 < k < N-1$, 有下列关系成立

$$J_{1,N}[x(0), u_{0,N-1}^*] = \max_{u_{0,k-1}} \{ J_{1,k}[x(0), u_{0,k-1}] + \max_{u_{k,N-1}} J_{k+1,N}[x(k), u_{k,N-1}] \} \quad (6-2-6)$$

(2) 多阶段决策问题应满足的函数方程——Bellman方程

假设多阶段决策过程已经经历过 $k-1$ 个阶段，所处状态为 $x^*(k-1)$ 。

设想第 k 个阶段采取任一决策 $u(k-1) \in \Omega_{k-1}$ ，将状态转移到 $x^*(k)$ ，其性能指标为 $j_k[x^*(k-1), u(k-1)]$ ；

其后 $N-k$ 个阶段则采取最优子策略，把状态转移到预期终态 $x^*(N)$ ，其局部性能指标为 $J_{k+1,N}[x^*(k), u_{k,N-1}^*]$ ，

于是后 $N-(k-1)$ 个阶段的局部性能指标是

$$\begin{aligned} J_{k,N}[x^*(k-1), u(k-1), u_{k,N-1}^*] \\ = j_k[x^*(k-1), u(k-1)] + J_{k+1,N}[x^*(k), u_{k,N-1}^*] \end{aligned} \quad (6-2-7)$$

为使这后 $N-(k-1)$ 个阶段构成一个最优子策略，第 k 个阶段的决策 $u^*(k-1)$ 必须满足下列函数方程

$$\begin{aligned} J_{k,N}[x^*(k-1), u^*(k-1), u_{k,N-1}^*] \\ = \max_{u(k-1)} \{ j_k[x^*(k-1), u(k-1)] + J_{k+1,N}[x^*(k), u_{k,N-1}^*] \} \\ k=1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6-2-8)$$

上式代表多段决策过程的一组递推方程，称为Bellman方程。

(3) 关于动态规划和最优性原理的进一步说明

- I. 最优性原理成立的**前提条件是无后效性**，即某一阶段的初始条件 $x(k-1)$ 和决策 $u(k-1)$ 只影响该阶段的终止状态 $x(k)$ ，而对后继过程**无直接影响**；
- II. 在 N 段决策中，**前 k 个阶段子策略**对整体的总性能指标的影响表现在：
 - (a) **直接影响前 k 个阶段**的局部性能指标，
 - (b) **间接影响后 $N-k$ 个阶段**的局部性能指标。

所以，为构成一个总体最优的策略，前 k 个阶段子策略必须通盘考虑这两方面的影响，使之达到综合最优。定理6-1中大括号外的

$\max_{u_{0,k-1}}$ 即为此意，即要使大括号中两项的加和最大，而不是单仅前一项取最大值。换句话说，使 $J_{1,k}$ 达到最优值的 $u_{0,k-1}^*$ 与使 $J_{1,N}$ 达到最优值的前 k 个阶段子策略 $u_{0,k-1}^*$ 不一定是一致的。

6.3 离散时间系统最优控制问题

- 离散时间系统的最优控制问题可以看作是一个多级决策问题，可以用离散动态规划方法求解。

考虑离散系统状态方程

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)] \quad (6-3-1)$$

初始状态

$$x(0) = x_0 \quad (6-3-2)$$

和性能指标

$$J_N = \Phi[x(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k), u(k)] \quad (6-3-3)$$

求最优控制序列 $u^*(k)$, $k=0, \dots, N-1$, 使 J_N 达到最小值。

将(6-3-1)式代入(6-3-3)式多次可以得到

$$\begin{aligned} J_N[x(0)] &= L[x(0), u(0)] + L[x(1), u(1)] + \dots + L[x(N-1), u(N-1)] \\ &\quad + \Phi[x(N)] \\ &= L[x(0), u(0)] + L[x(0), u(0), u(1)] + \dots + L[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \\ &\quad + \Phi[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \\ &= J_N[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \end{aligned} \quad (6-3-4)$$

假定最优控制序列 $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ 已经求出, 则

$$\begin{aligned} J_N^*[x(0)] &= J_N[x(0), u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)] \\ &= \min_{u(0), \dots, u(N-1)} J_N[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \end{aligned} \quad (6-3-5)$$

当 $u^*(0)$ 已求出, 则由(6-3-1)式有

$$x(1) = f[x(0), u^*(0)] \quad (6-3-6)$$

这时问题转化为一个初态为 $x(1)$ 的 $N-1$ 级最优控制问题, 最优性能指标为

$$\begin{aligned} J_{N-1}^*[x(1)] &= \min_{u(1), \dots, u(N-1)} \{J_{N-1}[x(1), u(1), \dots, u(N-1)]\} \\ &= \min_{u(1), \dots, u(N-1)} \{L[x(1), u(1)] + \dots + L[x(N-1), u(N-1)] + \Phi[x(N)]\} \end{aligned} \quad (6-3-7)$$

由最优性原理, 有

$$\begin{aligned} J_N^*[x(0)] &= \min_{u(0), u(1), \dots, u(N-1)} \{J_N[x(0), u(0), u(1), \dots, u(N-1)]\} \\ &= \min_{u(0), u(1), \dots, u(N-1)} \{L[x(0), u(0)] + L[x(1), u(1)] + \dots \\ &\quad + L[x(N-1), u(N-1)] + \Phi[x(N)]\} \\ &= \min_{u(0)} \{L[x(0), u(0)] + \min_{u(1), \dots, u(N-1)} [J_{N-1}[x(1), u(1), \dots, u(N-1)]]\} \\ &= \min_{u(0)} \{L[x(0), u(0)] + J_{N-1}^*[x(1)]\} \end{aligned} \quad (6-3-8)$$

(6-3-8)式称为离散动态规划的基本方程，建立起 $J_N^*[x(0)]$ 与 $J_{N-1}^*[x(1)]$ 之间的递推关系。

同理可得

$$J_{N-1}^*[x(1)] = \min_{u(1)} \{L[x(1), u(1)] + J_{N-2}^*[x(2)]\}$$

$$x(2) = f[x(1), u^*(1)] \quad (6-3-9)$$

更一般的，有

$$J_{N-k}^*[x(k)] = \min_{u(k)} \{L[x(k), u(k)] + J_{N-(k+1)}^*[x(k+1)]\}$$

$$x(k+1) = f[x(k), u^*(k)] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6-3-10)$$

(6-3-10)式即为离散动态规划基本方程的一般表达式，也是Bellman方程的另外一种表现形式。

以此类推，最后有

$$\left. \begin{aligned} J_1^*[x(N-1)] &= \min_{u(N-1)} \{L[x(N-1), u(N-1)] + \underbrace{\Phi[x(N)]}_{\text{}} \} \\ x(N) &= f[x(N-1), u^*(N-1)] \end{aligned} \right\} \quad (6-3-11)$$

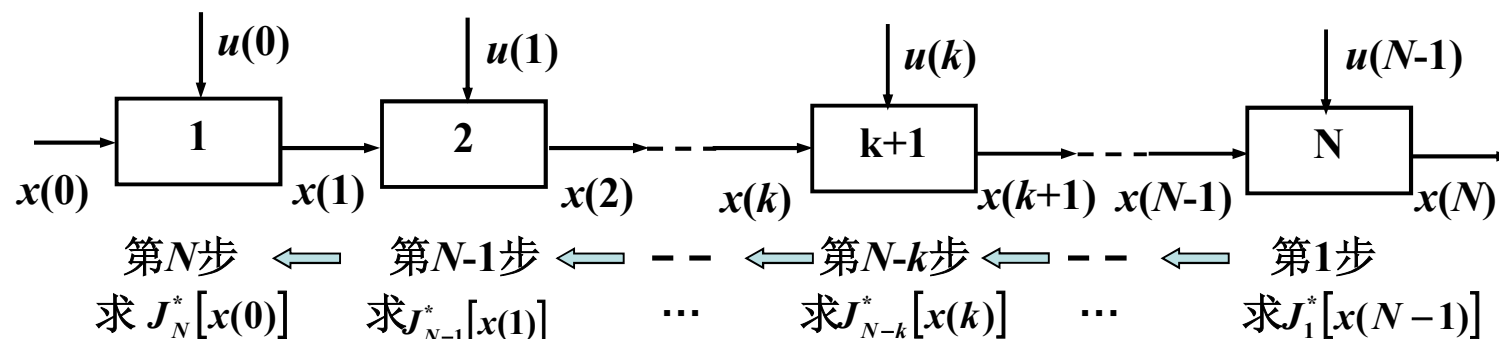
$$\text{令 } J_0^*[x(N)] = \Phi[x(N)] \quad (6-3-12)$$

则(6-3-11)式可写为

$$J_1^*[x(N-1)] = \min_{U(N-1)} \{L[x(N-1), u(N-1)] + J_0^*[x(N)]\} \quad (6-3-13)$$

当 $\Phi[x(N)] = 0$ 时, $J_0^*[x(N)] = 0$

用动态规划的基本方法求解离散系统最优控制序列的具体步骤:



例6-1：多级萃取过程的最优控制

考虑 N 级萃取过程的状态方程和性能指标分别为

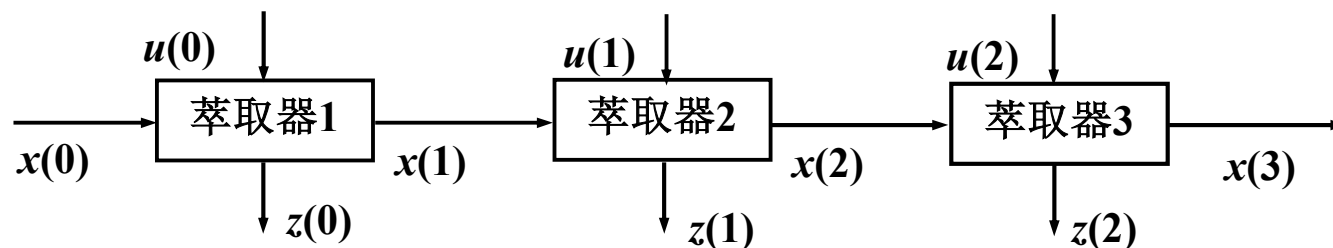
$$x(k+1) = \frac{x(k)}{1 + \frac{K}{V}u(k)}, \quad J_N = \sum_{k=0}^{N-1} [x(k) - x(k+1)] - B \sum_{k=0}^{N-1} u(k)$$

设 $K' = \frac{K}{V}$, $N = 3$, 则两式为

$$x(k+1) = \left[\frac{x(k)}{1 + K'u(k)} \right], \quad J_3 = \sum_{k=0}^2 [x(k) - x(k+1) - Bu(k)]$$

求最优溶剂流量分配 $u^*(0)$, $u^*(1)$ 和 $u^*(2)$, 使三级萃取过程收益最大。

解：三级萃取过程如图所示



应用动态规划基本方程，首先从最后一级开始考虑，即考虑初始状态为 $x(2)$ 的一级最优萃取过程，有

$$J_1^*[x(2)] = \max_{u(2)} \{x(2) - x(3) - Bu(2)\} = \max_{u(2)} \left\{ x(2) - \frac{x(2)}{1 + K'u(2)} - Bu(2) \right\}$$

由
$$\frac{\partial \left\{ x(2) - \frac{x(2)}{1 + K'u(2)} - Bu(2) \right\}}{\partial u(2)} = 0 \quad \text{得} \quad \frac{K'x(2)}{[1 + K'u(2)]^2} - B = 0$$

因而可解得

$$u^*(2) = \frac{1}{K'} \left\{ \sqrt{\frac{K'}{B} x(2)} - 1 \right\}$$

将 $u^*(2)$ 代入状态方程得

$$x(3) = \sqrt{\frac{B}{K'}} x(2)$$

代入性能指标可求得

$$J_1^*[x(2)] = x(2) - 2\sqrt{\frac{B}{K'}} x(2) + \frac{B}{K'}$$

再考虑初始状态为 $x(1)$ 的后二级最优化萃取过程，由动态规划基本方程有

$$\begin{aligned} J_2^*[x(1)] &= \max_{u(1)} \{x(1) - x(2) - Bu(1) + J_1^*[x(2)]\} \\ &= \max_{u(1)} \left\{ x(1) - Bu(1) - 2\sqrt{\frac{Bx(1)}{K'(1+K'u(1))}} + \frac{B}{K'} \right\} \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial J_2[x(1)]}{\partial u(1)} = 0$, 得 $u^*(1) = \frac{1}{K'} \left[\sqrt[3]{\frac{K'}{B} x(1)} - 1 \right]$

代入状态方程为

$$x(2) = \left(\frac{B}{K'}\right)^{1/3} [x(1)]^{2/3}$$

并有

$$J_2^*[x(1)] = x(1) + \frac{2B}{K'} - 3\left(\frac{B}{K'}\right)^{2/3} [x(1)]^{1/3}$$

最后考虑初始状态为 $x(0)$ 的三级最优萃取过程，有

$$\begin{aligned} J_3^*[x(0)] &= \max_{u(0)} \{x(0) - x(1) - Bu(0) + J_2^*[x(1)]\} \\ &= \max_{u(0)} \left\{ x(0) - Bu(0) + \frac{2B}{K'} - 3\left(\frac{B}{K'}\right)^{2/3} \left[\frac{x(0)}{1+K'u(0)} \right]^{1/3} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{\partial J_3[x(0)]}{\partial u(0)} = 0, \quad \text{得 } u^*(0) = \frac{1}{K'} \left[\sqrt[4]{\frac{K'}{B} x(0)} - 1 \right]$$

这样就得到三级萃取过程的最优溶剂流量分配为：

$$u^*(0) = \frac{1}{K'} \left[\sqrt[4]{\frac{K'}{B} x(0)} - 1 \right]$$

$$u^*(1) = \frac{1}{K'} \left[\sqrt[3]{\frac{K'}{B} x(1)} - 1 \right]$$

$$u^*(2) = \frac{1}{K'} \left[\sqrt{\frac{K'}{B} x(2)} - 1 \right]$$

以上是比较特殊的例子。很多情况下，无法得到动态规划基本方程的解析形式，这时就要求其数值解。

例6-2. 考虑以下离散时间系统

$$x(k+1) = x(k) + 0.1[x^2(k) + u(k)]$$

求满足约束条件 $|u(k)| \leq 2$ 的控制变量 $\{u(k), k = 0, \dots, N-1\}$, 使性能指标

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} 0.1 |x(k) - u^3(k)|$$

达极小值。

假定 $N=2$, 这时从

$$J_1^* = \min_{u(1)} \{ 0.1 |x(1) - u^3(1)| \}$$

无法由 $\frac{\partial J_1}{\partial u(1)} = 0$ 得出解析解, 只好用数值计算方法对所有的 $x(1)$ 和 $u(1)$ 解出 J_1 进行比较得到 J_1^* (类似于最短行车路径问题)。

6.4 线性离散系统二次型最优控制问题

(1) N 有限时线性离散系统二次型最优控制

给定线性离散系统状态方程

$$x(k+1)=F(k)x(k)+G(k)u(k) \quad (6-4-1)$$

和初始状态

$$x(0)=x_0 \quad (6-4-2)$$

以及性能指标

$$J_N = \frac{1}{2} x^T(N)S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)] \quad (6-4-3)$$

其中 $x(k)$ 为 n 维状态向量， $u(k)$ 为 m 维控制向量，不受约束。 $F(k)$ 、 $G(k)$ 为相应维数时变矩阵。 S 、 $Q(k)$ 为半正定对称矩阵， $R(k)$ 为正定对称矩阵。要求使 J_N 达极小值的 $\{u^*(k), k=0, \dots, N-1\}$ 。

用动态规划法求解。根据离散形式的Bellman方程，可写出

$$J_{N-k}^*[x(k)] = \min_{u(k)} \left\{ \frac{1}{2} [x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)] \right. \\ \left. + J_{N-(k+1)}^*[x(k+1)] \right\} \quad (6-4-4)$$

受连续系统状态调节器启发，可设最优性能指标函数有如下形式，
(6-4-5)

$$J_{N-k}^*[x(k)] = \frac{1}{2} x^T(k)P(k)x(k)$$

其中 $P(k)$ 为对称的矩阵序列。则由(6-4-3)式有

$$J_0^*[x(N)] = \frac{1}{2} x^T(N)P(N)x(N) = \frac{1}{2} x^T(N)S x(N) \quad (6-4-6)$$

$$\text{即 } P(N) = S \quad (6-4-7)$$

是 $P(k)$ 的边界条件。

$$\text{另由 } J_{N-(k+1)}^*[x(k+1)] = \frac{1}{2} x^T(k+1)P(k+1)x(k+1) \\ = \frac{1}{2} [F(k)x(k) + G(k)u(k)]^T P(k+1)[F(k)x(k) + G(k)u(k)] \quad (6-4-8)$$

将(6-4-5)、(6-4-8)代入(6-4-4)有

$$\begin{aligned} x^T(k)P(k)x(k) = \min_{u(k)} \{ & x^T(k)[Q(k) + F^T(k)P(k+1)F(k)]x(k) \\ & + 2u^T(k)G^T(k)P(k+1)F(k)x(k) \\ & + u^T(k)[R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]u(k) \} \end{aligned} \quad (6-4-9)$$

上式右侧对 $u(k)$ 求偏微分并令其为0，得最优控制

$$u^*(k) = -K(k)x(k) \quad (6-4-10)$$

其中

$$K(k) = [R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]^{-1} G(k)^T P(k+1)F(k) \quad (6-4-11)$$

为反馈增益矩阵

将(6-4-10)代入(6-4-9)，即得性能指标最小值，经过变换后可得

$$\begin{aligned} x^T(k) \{ & -P(k) + F^T(k)P(k+1)F(k) + Q(k) \\ & - K^T(k)[R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]K(k) \} x(k) = 0 \end{aligned} \quad (6-4-12)$$

此式对任意 $x(k)$ 均成立，应有

$$\begin{aligned} P(k) = & F^T(k)P(k+1)F(k) + Q(k) \\ & - K^T(k)[R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]K(k) \end{aligned} \quad (6-4-13)$$

将(6-4-11)代入上式，整理得

$$P(k) = Q(k) + F^T(k)P(k+1)F(k) - F^T(k)P(k+1)G(k)[R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]^{-1}G^T(k)P(k+1)F(k) \quad (6-4-14)$$

且有 $P(N) = S$ 。

(6-4-13)和(6-4-14)式为离散黎卡提方程的两种不同表达式。

为计算简单，可令

$$\left. \begin{aligned} Z_1(k) &= Q(k) + F^T(k)P(k+1)F(k) \\ Z_2(k) &= G^T(k)P(k+1)F(k) \\ Z_3(k) &= R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k) \end{aligned} \right\} \quad (6-4-15)$$

则线性离散系统二次型最优控制问题的计算步骤可如下进行：

1) 令 $P(N) = S$

2) 对于 $k=N-1$ 到 0 ，计算(6-4-15)式，和

$$K(k) = Z_3^{-1}(k)Z_2(k) \quad \text{以及} \quad P(k) = Z_1(k) - Z_2^T(k)Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$$

3) 此时 $K(k)$ ， $k=0, \dots, N-1$ 已全部得到，可计算

$$u^*(k) = -K(k)x(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1。$$

1)、2)两步计算可离线进行，只有第3)步需在线计算。

用动态规划法得到的离散黎卡提方程与第五章中用离散极大值原理所得的(5-5-15)式实质上是相等的。考虑(5-5-15)式

$$\begin{aligned} P(k) &= Q(k) + F^T(k)P(k+1)[I + G(k)R^{-1}(k)G^T(k)P(k+1)]^{-1}F(k) \\ &= Q(k) + F^T(k)[P^{-1}(k+1) + G(k)R^{-1}(k)G^T(k)]^{-1}F(k) \end{aligned}$$

结合(5-5-19)式

$$u^*(k) = -R^{-1}(k)G^T(k)F^{-T}(k)[P(k) - Q(k)]x(k) = -K(k)x(k)$$

可写成

$$\begin{aligned} u^*(k) &= -R^{-1}(k)G^T(k)\cancel{F^{-T}(k)}\{\cancel{F^T(k)}[P^{-1}(k+1) \\ &\quad + G(k)R^{-1}(k)G^T(k)]^{-1}F(k)\}x(k) \\ &= -R^{-1}(k)G^T(k)[P^{-1}(k+1) + G(k)R^{-1}(k)G^T(k)]^{-1}F(k)x(k) \\ &= -\left\{ [P^{-1}(k+1) + G(k)R^{-1}(k)G^T(k)][G^{-T}(k)R(k)] \right\}^{-1}F(k)x(k) \\ &= -[P^{-1}(k+1)G^{-T}(k)R(k) + G(k)]^{-1}F(k)x(k) \\ &= -\left\{ [P^{-1}(k+1)G^{-T}(k)][R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)] \right\}^{-1}F(k)x(k) \\ &= -[R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]^{-1}[P^{-1}(k+1)G^{-T}(k)]^{-1}F(k)x(k) \\ &= -[R(k) + G^T(k)P(k+1)G(k)]^{-1}G^T(k)P(k+1)F(k)x(k) \\ &= \underline{-K(k)x(k)} \end{aligned}$$

(2) 当 N 充分大时线性离散定常二次型最优控制问题

上面得到的反馈增益阵 $K(k)$ 是时变的，实际上仍有困难。

可以证明，当 F 、 G 、 Q 、 R 都为常数阵（即定常系统），且 N 趋向无穷大时，在有限时间内， $K(k)$ 将变为常数矩阵 K ，这时仍有最优控制

$$u^*(k) = -Kx(k) \quad (6-4-16)$$

这时的二次型性能指标为

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \quad (6-4-17)$$

这时离散黎卡提方程转化为非线性代数黎卡提方程（均为矩阵方程）

$$P = Q + F^T P F - F^T P G [R + G^T P G]^{-1} G^T P F \quad (6-4-18)$$

但常数阵 P 的求解一般采用迭代法，即上面计算步骤中的1)、2)两步，这里有 $P(N) = 0$ （ $N \rightarrow \infty$ ）。此时，设定一非0正数 ε ，当范数 $\|P(k+1) - P(k)\| < \varepsilon$ 时，即认为 $P(k)$ 已收敛到 P 了。