八. 线性规划

(Linear Programming)

引　言

- 线性规划讨论的是最优化问题。
- 最优化理论所研究的对象是静态系统，即与时间无关的系统，与前面各章所讨论的最优控制问题不同。
- 最优化理论和算法要解决的问题是：
  - ✓ 在可选的方案中哪个方案最优(目标函数极值)；
  - ✓ 怎样找出最优方案。
- 与最优控制理论相同，最优化理论也是泛函极值理论发展的一个重要分支，**20**世纪**40**年代起逐渐形成单独的学科。
- 最优化理论和算法内容非常丰富，主要包括：线性规划、整数规划、非线性规划、几何规划、 动态规划、随机规划、网络决策等，而最基本的内容是线性规划和非线性规划。

8.1 凸集和凸函数

- 凸集和凸函数是线性规划和非线性规划(以及整个最优化问题中)的非常重要的概念。
- 一般的最优化理论都建立在凸集和凸函数基础之上。
- 本节内容作为基础知识不作深入介绍，供需要时参考。

8.2 线性规划的定义和标准形式

(1) 线性规划的定义

考虑最优化问题的数学模型一般表示为

$$\min \text{ (or } \max) \ f(x)$$
$$\text{s.t. } g(x) = B$$

其中，$f(x)$为目标函数，$g(x)$为约束函数；$x \in \mathbf{R}^n$，B为m维列向量，$g(x)$为m维向量函数，

线性规划定义： 最优化问题数学模型中目标函数和约束函数都是变量x的线性函数的，称之为线性规划问题。

线性规划是非线性规划的一种特殊形式，但在最优化理论与算法中已成为非常重要的一个分支，在理论和算法上都很成熟，应用非常广泛。

(2) 线性规划标准形式

一般线性规划问题总可以表示为：

$$\min_{(or\max)} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (8\text{-}2\text{-}1)$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, \quad j = 1,2,3,\cdots,m \qquad (8\text{-}2\text{-}2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,\cdots,n; \quad b_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,\cdots,m \qquad (8\text{-}2\text{-}3)$$

或用矩阵形式表示为：

$$\min_{(or\max)} Cx \qquad (8\text{-}2\text{-}1')$$

$$s.t. \quad Ax = B \qquad (8\text{-}2\text{-}2')$$

$$x \geq 0; \quad B \geq 0 \qquad (8\text{-}2\text{-}3')$$

其中A为 $m \times n$ 维矩阵，C为n维行向量，B为m维列向量。

任何其他形式的线性规划问题均可转换成以上标准形式。

例如，若有 $b_j < 0$ 可在相应等式两边乘（-1）（非负化）；

若无 $x_i \geq 0$ 限制，可令 $x_i = x_i' - x_i''$，其中$x_i', x_i'' \geq 0$，用 x_i', x_i''代替x_i；

若非 $Ax = B$，而是$Ax \leq B$ 或$Ax \geq B$，可引入$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_{n+m}$，在每个不等式中加入或减去一个松弛变量，使其转化为等式标准形式，而在目标函数中则令松弛变量的系数为零。

8.3 线性规划问题的图解法

对于n=2的线性规划问题，可以用图解法求解，以便较为直观地了解多变量线性规划的一般性质。

例：生产安排问题

某工厂生产甲乙两种产品，其产量分别为x_1, x_2个单位，每天可用资源限制、单位产品资源消耗及单位产品产值如表所示。

资 源	名称	原料A	原料B	工时	产值系数
	总量	**1575kg**	**1500kg**	**420**分钟	（元/单位产量）
消耗系数	甲产品	**5kg**/单位产量	**4kg**/单位产量	**1**分钟 /单位产量	**13**元/单位产量
	乙产品	**3kg**/单位产量	**5kg**/单位产量	**2**分钟 /单位产量	**11**元/单位产量

问题：每天应生产甲乙两种产品（即x_1, x_2）各多少，使总产值

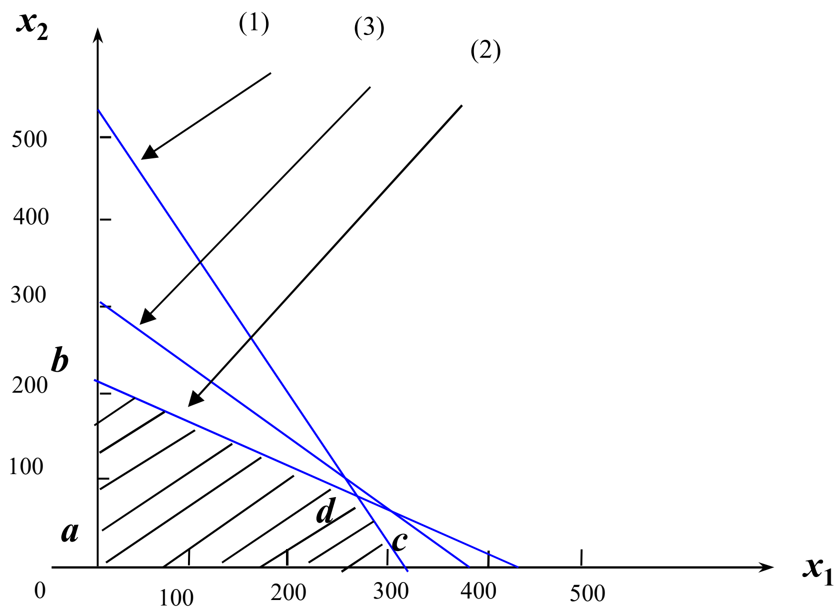
$$f(x) = 13x_1 + 11x_2 \text{最大？}$$

此问题数学模型为：

$$\max f(x) = \max(13x_1 + 11x_2)$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & 5x_1 + 3x_2 \le 1575 \quad (1)\\
& x_1 + 2x_2 \le 420 \quad (2)\\
& 4x_1 + 5x_2 \le 1500 \quad (3)\\
& x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

由约束条件，可在$x_1 - x_2$平面上作出5条直线，其中由(1)、(2)和 $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ 围成的多边形满足所有的约束条件，如图所示。



线性规划图解法示意图

多边形顶点为

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 210 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 325 \\ 0 \end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 270 \\ 75 \end{bmatrix}$$

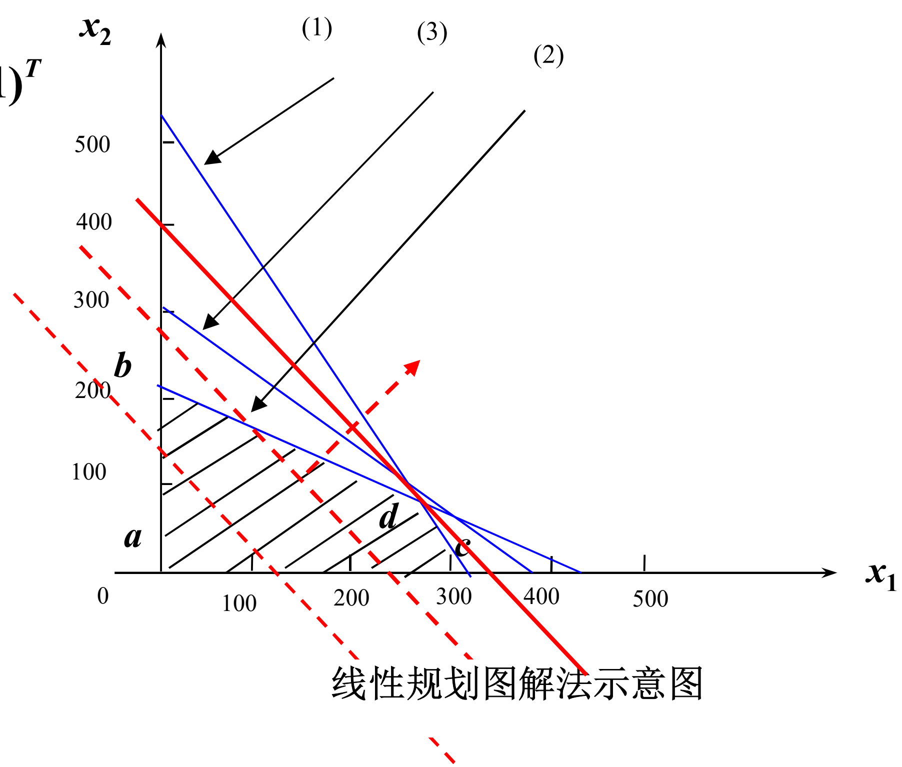
设目标函数等值线方程为

$$13x_1 + 11x_2 = \alpha$$

α变化时等值线 $x_2 = \frac{1}{11}\alpha - \frac{13}{11}x_1$ 在平面上平移，等值线法向量 $\vec{n} = (13,11)^T$ 也是目标函数的梯度，指向目标函数增大的方向，因此沿此方向移动等值线，目标函数值将增大。

将等值线一直移动到约束条件构成的多边形边缘，即多边形顶点d处，得目标函数极大值，即极值点为

$$x_d = \begin{bmatrix} 270 \\ 75 \end{bmatrix}$$



线性规划图解法示意图

最优解为

$$\max f(x) = f(x_d) = 13 \times 270 + 11 \times 75 = 4335$$

即x_1=270，x_2=75时可获得最大产值4335元。显然，这时约束条件全部满足。

8.4 线性规划的基本性质

结合前面图解的例子，可对线性规划的基本性质作出直观解释。

(1) 可行解——满足约束条件（等式或不等式）的一组解称为可行解。可行解有无穷多个，即多边形中任意一点。

(2) 最优解——使目标函数为极值的可行解，如上例中的x_d。

(3) 可行（解）域——约束条件所包含的范围，由无穷多个可行解组成，包含最优解，如上例中的多边形 ***abdc***。

定理：线性规划的可行域是凸集。

(4) **定理：**线性规划的目标函数极值如果存在，一定在可行域多边形（多面体）的顶点上达到（最优顶点）。

基本可行解——可行域多边形（多面体）顶点的解称为基本可行解。（更严格的定义后面将作介绍）

(5) 基本可行解的存在定理：如果 $Ax=B$，$x\geq 0$有可行解，则一定存在基本可行解。其中A是 $m\times n$ 矩阵，**rank(*A*)=*m***。

(6) 若有两个以上的顶点是最优解，则这些顶点的凸组合也都是最优解。

(7) 基本可行解数是有限的，因此解线性规划的问题可从可行解域减少为基本可行解数，进行有限步迭代总可以找到最优解。

(8) 线性规划的几种特殊情况 。

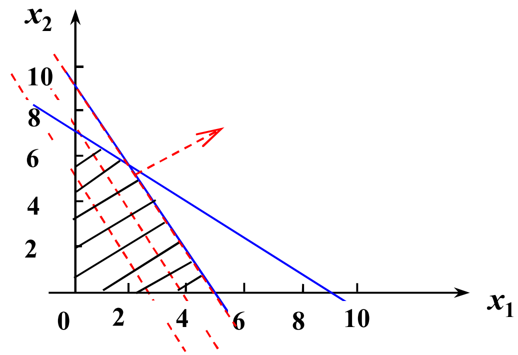
① 约束条件与变量数不等

如上例中约束条件多于变量数，则有**2**个有效约束，**1**个松弛约束。

② 目标函数与可行域一边平行，最优解不唯一。

例：$\max f(x) = \max(18x_1 + 10x_2)$

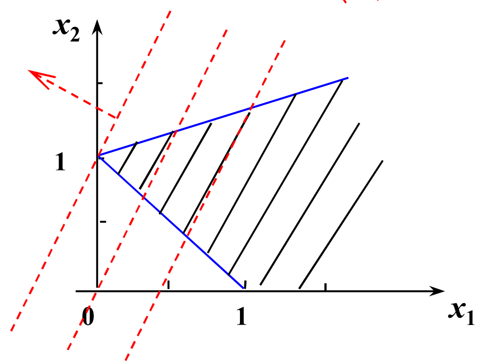
$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & 9x_1 + 5x_2 \le 45 \\
& 7x_1 + 9x_2 \le 63 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



③ 可行域无界

例(a)： $\max f(x) = x_2 - 2x_1$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & x_1 + x_2 \ge 1 \\
& x_1 - 3x_2 \ge -3 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



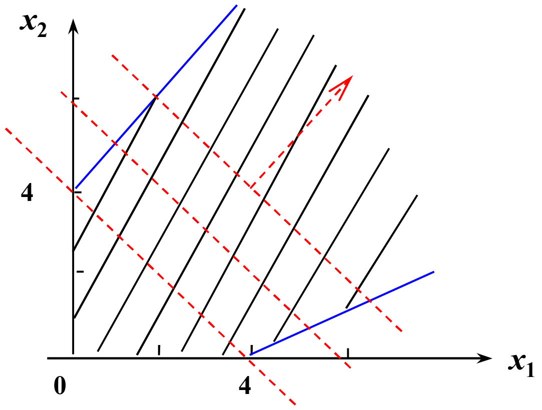
此时有解，

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x^*) = 1$$

例(b)：$\max f(x) = x_1 + x_2$

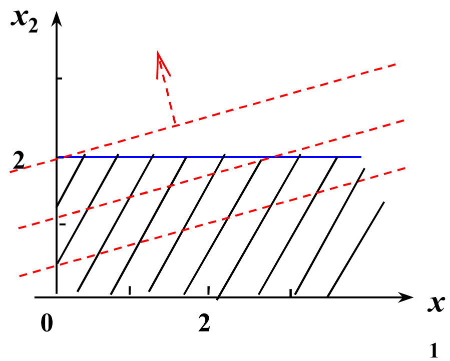
$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_2 \le \frac{1}{2}x_1 - 2 \\ & x_2 - x_1 \ge 4 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



此时无解。

例(c)：$\max f(x) = -x_1 + 4x_2$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_2 = 2 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



此时有解，

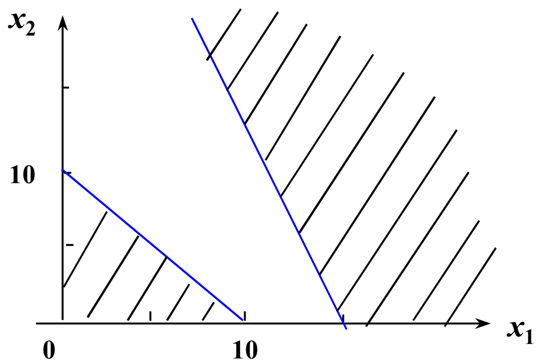
$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(x^*) = 8$$

④ 无可行解

例：$\max f(x) = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1 + x_2 \le 10 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 30 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



两个约束矛盾，无解。