第四章 线性二次型最优控制

- 线性二次型最优控制问题，一般也称做**LQ**或**LQR**（**Linear Quadratic Regulator**）问题，在最优控制理论与方法体系中具有非常重要的地位。
- 线性二次型最优控制问题的重要性在于其具有如下特点：

  ①对于用线性微分方程或线性差分方程描述的动态系统，最优控制指标具有非常明确、实际的物理意义；

  ②在系统设计技术上做到规范化，具有统一的解析解形式；

  ③构成反馈控制形式，可以得到线性反馈控制的最优解；

  ④在工程实现上使实时控制计算工作大为简化。
- **LQR**方法因此成为应用最为广泛的一种最优控制算法 。

4.1 线性二次型最优控制问题

(1) 问题提法

给定线性时变系统的状态方程和输出方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{4-1-1}$$

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{4-1-2}$$

其中$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^l$，$A(t)$、$B(t)$、$C(t)$分别是$n \times n$、$n \times m$和$l \times n$维时变系统矩阵、增益矩阵和输出矩阵。

假定$0 \le l \le m \le n$，且控制变量$u(t)$不受限制。用$y_r(t)$表示期望输出向量，$y_r(t) \in R^l$，有误差向量

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \tag{4-1-3}$$

二次型最优控制要解决的问题是，选择最优控制$u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J(u) = \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}(t_f)Fe(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[e^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]dt \tag{4-1-4}$$

最小。这就是LQR问题。

二次型性能指标

$$J(u)=\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}(t_f)Fe(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[e^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]dt$$

中，F、Q、R为加权矩阵，其中：

F为 $l\times l$ 维非负定（半正定）常数矩阵，

$Q(t)$为$l\times l$ 维非负定（半正定）矩阵，

$R(t)$为$m\times m$维正定矩阵。

- 矩阵正定与非负定（半正定）的定义分别为：

正定矩阵：如果对$n\times n$维方阵A，任意$n\times 1$维列向量x，均有二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax>0$ ，则A为正定矩阵；

非负定（半正定）矩阵：如果对$n\times n$维方阵A，任意$n\times 1$维列向量x，均有二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax\geq 0$ ，则 A为非负定（半正定）矩阵。

(2) 性能指标的物理意义

将性能指标表示为

$$J(u)=\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}(t_f)Fe(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[L_e+L_u]dt \qquad \textbf{(4-1-5)}$$

其中

$L_e=e^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t)$为衡量系统控制误差大小的代价函数，当系统为单输出，即$e(t)$为数量函数时，$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}e^2(t)dt$ 即为经典控制中的动态误差平方积分；

$L_u=u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)$为衡量控制功率（积分后即为能量）大小的代价函数，若$u(t)$表示电流或电压时，则$u^2(t)$正比于电功率；

$e^{\mathrm{T}}(t_f)Fe(t_f)$ 是要使末值时刻误差最小。

- 二次型性能指标的物理意义：用尽可能小的控制能量，来保持尽量小的输出误差，以达到控制能量和输出误差综合最优的目的。

(3) 加权矩阵$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$的选取

- $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$的选取对二次型性能指标的取值、特别是对各个误差分量和控制分量的影响至关重要，一般遵循下列原则：

➢ 一般取为对角线矩阵，其对角线元素的大小由各个分量的重要性决定。对重要性高的分量，其对应系数矩阵对角线元素的取值相对较大；反之，则取较小值。

➢ 若要减少各分量间的关联耦合作用，加权矩阵可不为对角线矩阵，只需将对应关联分量位置的元素取为非零的正数，其大小也依对消除各分量间关联的重视程度而定，即最优性能指标也可以用于解耦控制设计。

➢ 当$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$取为时变矩阵$\boldsymbol{Q}(t)$和$\boldsymbol{R}(t)$时，可以反映不同时间阶段的系统控制要求。如当$t = t_0$时$e(t)$可能很大，但此时并不反映系统的控制性能，可以将$\boldsymbol{Q}(t)$取得较小；当$t \rightarrow t_f$、$e(t)$减小时，为保证控制系统性能，可以将$\boldsymbol{Q}(t)$逐渐取大。

- 二次型性能指标中系数矩阵$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$的选取在最优控制理论中是受人为因素影响最大的步骤。
- 对同样的二次型最优控制问题，选取不同的$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$，则所得到的最优控制规律也将不一样。
- 控制规律设计（控制器综合）中人为因素总是客观存在的。

(4) 线性二次型最优控制问题的三种类型

- 状态调节器问题

  此时有$\boldsymbol{C}(t)=\boldsymbol{I}$为单位矩阵，$\boldsymbol{y}_r(t)=\mathbf{0}$，即有

  $$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{e}(t)$$

- 输出调节器问题

  此时有$\boldsymbol{y}_r(t)=\mathbf{0}$，即有

  $$\boldsymbol{y}(t)=-\boldsymbol{e}(t)$$

- 跟踪问题

  此时$\boldsymbol{y}_r(t)\neq 0$，$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{y}_r(t)-\boldsymbol{y}(t)$

- 三种类型中，状态调节器问题是最基本的线性二次型最优控制问题，输出调节器和跟踪问题均可视为状态调节器问题的扩展。

4.2 状态调节器问题—Riccati方程

(1) 问题描述

- 设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad \text{(4-2-1)}$$

其中，$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$; $A(t)$和$B(t)$分别是系统矩阵和增益矩阵，$x(t_0) = x_0$已知，且控制变量$u(t)$不受约束。

状态调节器问题是要求最优控制$u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J(u) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]dt \qquad \text{(4-2-2)}$$

最小。式中，满足F、$Q(t)$半正定，$R(t)$正定条件。

- 性能指标的含义：以尽量小的能量代价，使状态保持在零值附近。

(2) 应用极大值原理求解

首先列出该问题的Hamilton函数

$$H=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t)+\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)+\lambda^{\mathrm{T}}[A(t)x(t)+B(t)u(t)] \tag{4-2-3}$$

因$u(t)$不受约束，所以沿最优轨线有 $\frac{\partial H}{\partial u(t)}=0$,

即 $$\frac{\partial H}{\partial u(t)}=R(t)u(t)+B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)=0 \tag{4-2-4}$$

由此可得

$$u(t)=-R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \tag{4-2-5}$$

这里，因为$R(t)$对所有$t\in[t_0, t_f]$正定，所以$R^{-1}(t)$对所有$t\in[t_0, t_f]$存在。又由 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)}=R(t)>0$，所以

$u(t)=-R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)$ 是H最小控制。

$$H=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t)+\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)+\lambda^{\mathrm{T}}[A(t)x(t)+B(t)u(t)]$$

- 要将$u(t)$ 表示为$x(t)$的反馈控制形式，需求出$\lambda(t)$与$x(t)$的关系式。

考虑规范方程组

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x(t)}=-Q(t)x(t)-A^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \tag{4-2-6}$$

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda(t)}=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{4-2-7}$$

$$=A(t)x(t)-B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t) \qquad u(t)=-R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)$$

定义矩阵

$$S(t)=B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \tag{4-2-8}$$

显然，$S(t)$为$n\times n$维对称矩阵。

由(4-2-6)和(4-2-7)式并将$S(t)$代入有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\lambda}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & -S(t)\\ -Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} \tag{4-2-9}$$

(4-2-9)式为$2n$个线性齐次微分方程，$x(t_0)=x_0$提供n个边界条件，另外n个则要由横截条件提供，即由$\lambda(t)$的终值$\lambda(t_f)$提供。

由横截条件 $\lambda(t_f)=\{\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial x}\nu\}\Big|_{t_f}$ 有

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial}{\partial x(t_f)}[\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f)]=Fx(t_f) \qquad \text{(4-2-10)}$$

用$\Omega(t, t_0)$表示方程组(4-2-9)的$2n\times2n$维转移矩阵，用$\lambda(t_0)$表示待定的协态变量初值，则方程组(4-2-9)的解可以表示为

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}=\Omega(t,t_0)\begin{bmatrix} x(t_0) \\ \lambda(t_0) \end{bmatrix} \qquad \text{(4-2-11)}$$

在终端时刻有

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix}=\Omega(t_f,t)\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(4-2-12)}$$

将$\Omega(t_f，t)$划分为4个$n\times n$维子矩阵，即

$$\Omega(t_f,t)=\begin{bmatrix}\Omega_{11}(t_f,t) & \Omega_{12}(t_f,t)\\ \Omega_{21}(t_f,t) & \Omega_{22}(t_f,t)\end{bmatrix} \tag{4-2-13}$$

则(4-2-12）式可写为

$$x(t_f)=\Omega_{11}(t_f,t)x(t)+\Omega_{12}(t_f,t)\lambda(t) \tag{4-2-14}$$

$$\lambda(t_f)=\Omega_{21}(t_f,t)x(t)+\Omega_{22}(t_f,t)\lambda(t) \tag{4-2-15}$$

将 (4-2-10)式 $\lambda(t_f)=Fx(t_f)$代入(4-2-15)式，并联立(4-2-14)式消去$x(t_f)$可得

$$\lambda(t)=[\Omega_{22}(t_f,t)-F\Omega_{12}(t_f,t)]^{-1}[F\Omega_{11}(t_f,t)-\Omega_{21}(t_f,t)]x(t) \tag{4-2-16}$$

表明$\lambda(t)$与$x(t)$之间存在线性关系。

令

$$\lambda(t)=P(t)x(t) \tag{4-2-17}$$

考虑$\Omega(t_f，t_f)=I_{2n\times 2n}$，即

$\Omega_{11}(t_f，t_f)=\Omega_{22}(t_f，t_f)=I_{n\times n}$，$\Omega_{12}(t_f，t_f)=\Omega_{21}(t_f，t_f)=0$

可求得

$$P（t_f）=F \tag{4-2-18}$$

为避免求逆运算，对(4-2-17）式求导，有

$$\dot{\lambda}(t)=\dot{P}(t)x(t)+P(t)\dot{x}(t) \tag{4-2-19}$$

将系统状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(t)x(t)+B(t)u(t)=A(t)x(t)-S(t)\lambda(t)\\&=A(t)x(t)-S(t)P(t)x(t)\end{aligned} \tag{4-2-20}$$

代入(4-2-19）式，有

$$\dot{\lambda}(t)=[\dot{P}(t)+P(t)A(t)-P(t)S(t)P(t)]x(t) \tag{4-2-21}$$

由协态方程(4-2-6)式及(4-2-17)式，又有

$$\dot{\lambda}(t)=[-Q(t)-A^{\mathrm{T}}(t)P(t)]x(t) \tag{4-2-22}$$

综合上两式，并考虑 $x(t)$ 任意，有

$$\dot{P}(t)+P(t)A(t)-P(t)S(t)P(t)+A^{\mathrm{T}}(t)P(t)+Q(t)=0 \tag{4-2-23}$$

将 $S(t)=B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)$代入，整理得

$$\dot{P}(t)=-P(t)A(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)-A^{\mathrm{T}}(t)P(t)-Q(t) \tag{4-2-24}$$

此式即为解二次型最优控制问题著名的黎卡提(Riccati)型矩阵微分方程，一般简称为黎卡提(Riccati)方程。

结合(4-2-5)和(4-2-17)式即可得到最优控制的状态反馈形式

$$u^{*}(t)=-R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)x(t)=-K(t)x(t) \tag{4-2-25}$$

其中 $K(t)=R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)$ 为反馈增益矩阵。

- 可以证明(4-2-25)式是状态调节器问题最优控制的充分必要并且是唯一的条件。

\# 充分条件的证明：

考虑二次型$x^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)$，将其对 t 求导得

$$\frac{d}{dt}[x^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]=\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\dot{P}(t)x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)P(t)\dot{x}(t) \tag{4-2-26}$$

将状态方程(4-2-1)式和黎卡提方程(4-2-24)式代入，经配方整理可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[x^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]&=-[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\\&+[u(t)+R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]^{\mathrm{T}}R(t)[u(t)+R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]\end{aligned} \tag{4-2-27}$$

对上式两边由t_0到t_f积分，经整理得

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f)+\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]&=x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0)\\+\int_{t_0}^{t_f}\{[u(t)+R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]^{\mathrm{T}}R(t)[u(t)+R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]\}dt\end{aligned} \tag{4-2-28}$$

上式左边乘以1/2即为性能指标(4-2-2)式的右边，也即有

$$J(u)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{[u(t)+R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]^{\mathrm{T}}R(t)[u(t)+R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)]\}dt \tag{4-2-29}$$

当 $u(t)=-R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)=-K(t)x(t)$ 时，$J(u)$取极小值

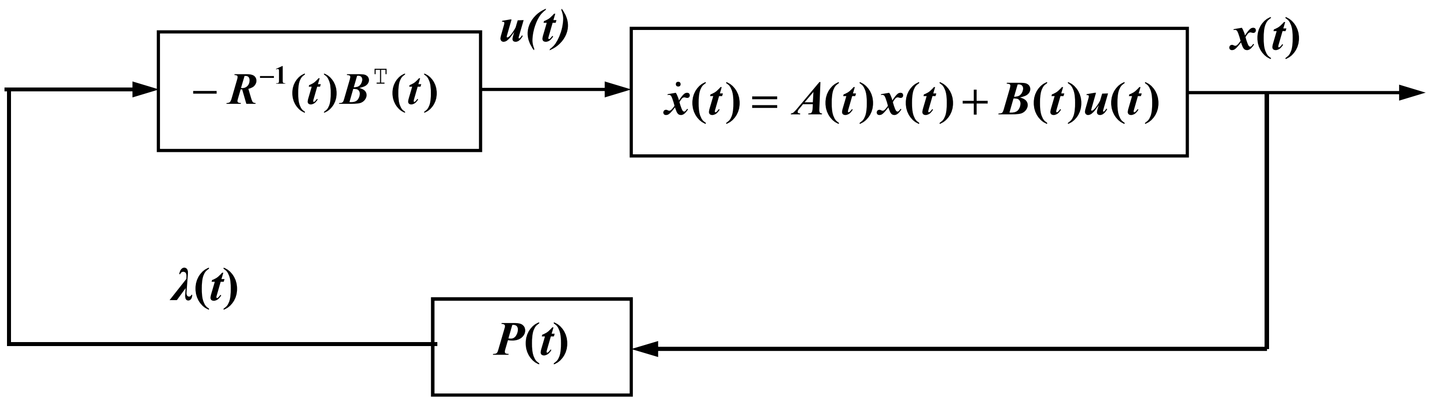
$$J^*(u)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)P(t_0)x(t_0) \tag{4-2-30}$$

因而充分条件得证。#

由此可得状态调节器问题最优性能指标的一般结论，即：从任一$x(t)$开始考虑最优控制问题，均有

$$J^*(u)=V[x,t]=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t) \tag{4-2-31}$$

将状态方程、最优控制规律以及协态变量与状态变量关系综合，可给出如图所示状态调节器问题最优控制的闭环系统框图。



状态调节器最优控制闭环系统

(3) 有关求解黎卡提方程的若干问题

I. 所求解的黎卡提方程及边界条件分别为(4-2-24）式和(4-2-18）；

II. 有限时域二次型最优控制问题的黎卡提方程为非线性微分方程，一般难于得到解析解，多通过计算机数值迭代算法求近似解；

III. 黎卡提方程的解$\boldsymbol{P}(t)$为$n\times n$维对称正定矩阵，这是由于黎卡提方程本身的对称性决定的（前提为$\boldsymbol{Q}(t)$和$\boldsymbol{R}(t)$均为对称矩阵），所以只需求解$n(n+1)/2$个独立微分方程；

IV. $\boldsymbol{P}(t)$与状态$\boldsymbol{x}(t)$无关，可以离线计算；

V. 当t_f有限时，即使$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$均为常数矩阵，黎卡提方程的解$\boldsymbol{P}(t)$也是时变的。

例：已知双积分系统状态方程为

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t),\quad \dot{x}_2(t)=u(t)$$

要求最优控制$u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}[x_1^2(3)+2x_2^2(3)]+\frac{1}{2}\int_0^3[2x_1^2(t)+4x_2^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)]dt$$

达到极小值。

解：此例中有

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad t_f=3$$

因$n=2$，所以黎卡提方程的解$P(t)$为2×2维矩阵，有

$$P(t)=\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{21}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}$$

其中 $P_{21}(t)=P_{12}(t)$ 。

则最优控制$u^*(t)$由下式决定

$$u^*(t)=-R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t)=-2[0\quad 1]\begin{bmatrix}P_{11}(t)&P_{12}(t)\\P_{21}(t)&P_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=-2[P_{21}(t)x_1(t)+P_{22}(t)x_2(t)]$$

将已知A、B、F、Q、R代入黎卡提方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t) - A^{\mathrm{T}}(t)P(t) - Q(t)$$

则问题归结为求解如下微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_{11}(t) & \dot{P}_{12}(t) \\ \dot{P}_{12}(t) & \dot{P}_{22}(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{12}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

边界条件为

$$\begin{bmatrix} P_{11}(3) & P_{12}(3) \\ P_{12}(3) & P_{22}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

展开上两式后得微分方程组及边界条件

$$\dot{P}_{11}(t) = 2P_{12}^2(t) - 2 \qquad P_{11}(3) = 1$$

$$\dot{P}_{12}(t) = -P_{11}(t) + 2P_{12}(t)P_{22}(t) - 1 \qquad P_{12}(3) = 0$$

$$\dot{P}_{22}(t) = -2P_{12}(t) + 2P_{22}(t) - 4 \qquad P_{22}(3) = 2$$

该方程组为非线性微分方程组，很难求得解析解，一般只能数值求解。