浙江大学研究生课程

最优化与最优控制

宋春跃
控制学院@ZJU

Motivation 

- Model, Model - based
- Control Theory (Have Done!!)
  - Insensitivity
    - Reject disturbance
    - Model Mismatch
  - Stable
  - Next step??

- u=kx ??

Motivation 

- Reference:
  - Set-point?
  - Trajectory?

- 决策 Decision

- 最优参数, 超参数

Outline

1. 绪论
2. 变分法
3. 极大值原理
4. 线性二次型最优控制
5. 离散时间系统最优控制
6. 动态规划
7. 随机系统最优控制
8. 线性规划
9. 非线性规划+多目标规划+智能优化方法 ………

课程目的

- 介绍经典最优控制理论的产生及应用，以及最优控制的若干理论成果. 使学习者能在自己的研究领域或处理问题时，遇到最优控制相关问题，有据可依;
- 最优控制和最优化目前仍是**应用热点**;
- http://person.zju.edu.cn/ChunyueSong

考核方式

- **平时上课+Exam**;

- 研讨会形式;

第一章 绪论

1.1 问题的提出

- 人们在做任何一件事情时，总是希望在已有的条件下，从众多可能方案中选择一个方案，使事情的结果最能满足自己的心愿，或者说使结果的目标值与自己的期望值最为符合 ——最优方案

- 选择最优方案的行为或过程——**最优化的过程**。

- 正是人类活动中无数这种寻找最优方案的过程，形成了最优化与最优控制理论与方法产生的基础。

- 例如，古代人类在生产和生活活动中经过无数次摸索认识到，在使用同样数量和质量材料的条件下，圆截面的容器比其他任何截面的容器能够盛放的谷物都要多，而且容器的强度也最大。也就是说，人们认识到了圆截面容器是各种截面容器中的最优容器。

- 又如，北半球朝南的房屋冬暖夏凉可以获得最舒适的居住条件、农作物生长过程中在某些最佳时机灌溉可以显著增产，等等。

- 古代人类这种寻找最优方案的例子比比皆是。

- 人类进入现代社会以后，生产和社会活动的规模不断扩大，复杂性日益增加，这就意味着完成一项工作或进行一项活动可以选择的方案数量也急剧增加，从中**寻找最优方案几乎已经是完成任何一件工作所必须面对的问题**。
- 例如，工厂在安排生产计划时，首先要考虑在现有原材料、设备、人力等资源条件下，如何安排生产，使产品的产值最高，或产生的利润最大；
- 又如，在多级火箭发射过程中，如何控制燃料的燃烧速率，从而用火箭所载的有限燃料使火箭达到最大升空速度；
- 再如，在城市交通管理中，如何控制和引导车辆的流向，尽量减少各个交叉路口的阻塞和等待时间、提高各条道路的车辆通行速度，在现有道路条件下取得最大的道路通行能力。

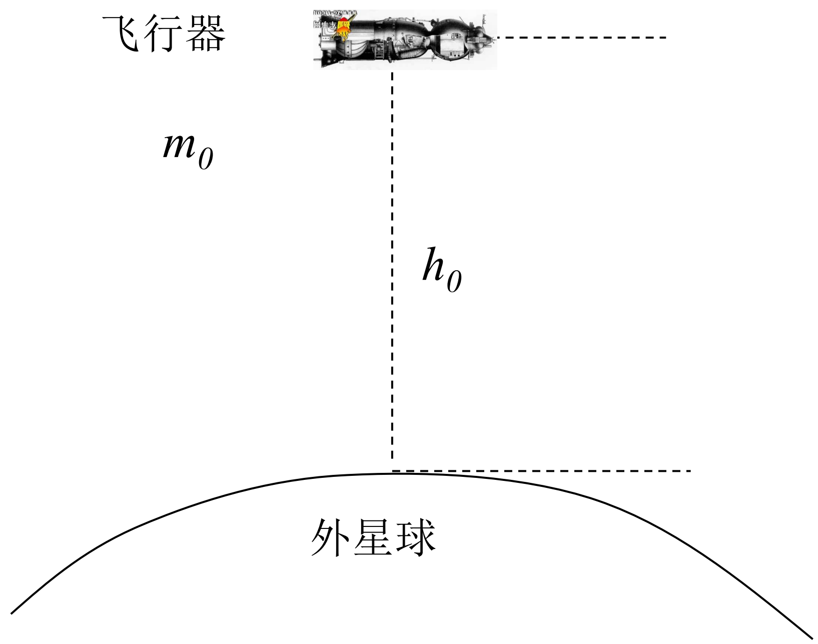
- 随着人类对自然界认识的不断深入，寻找最优逐渐从下意识的、缺乏系统性的行为发展到目的明确的有意识活动，并在数学工具日渐完善的基础上，对各种寻找最优的活动进行数学描述和分析，指导寻优活动更有效地进行，从而形成了**最优化理论与方法**这一应用数学理论分支。

- 采用现代数学工具，很多最优化问题，尤其是工程领域的最优化问题都可以得到明确的描述。

例1. 飞行器软着陆问题

- 要求飞行器落在外星球表面时垂直速度为零。
- 同时，为保证飞行器返回时有足够的燃料，要求在着陆过程中飞行器**消耗的燃料最少**。

- **一个最优化问题！**



飞行器软着陆

- 数学描述：

记

- 飞行器质量 $m(t)$，其中自重M_1，燃料初始重量 M_2
- 飞行器高度 $h(t)$，初始高度h_0，
- 飞行器垂直速度$v(t)$，初始速度v_0，
- 飞行器发动机推力 $u(t)$，
- 开始时间 $t_0 = 0$，
- 外星球引力加速度 g_w。

- 列出飞行器的运动方程，有

$$\dot{h}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} - g_w$$

$$\dot{m}(t) = -ku(t)$$

- 初始状态为：
  - $h(0) = h_0$， $v(0) = v_0$， $m(0) = M_1 + M_2 = m_0$

- 从初始状态出发，要求在某一终端时刻t_f有：
- $h(t_f)=0$
- $v(t_f)=0$
- $m(t_f)\geq M_1$

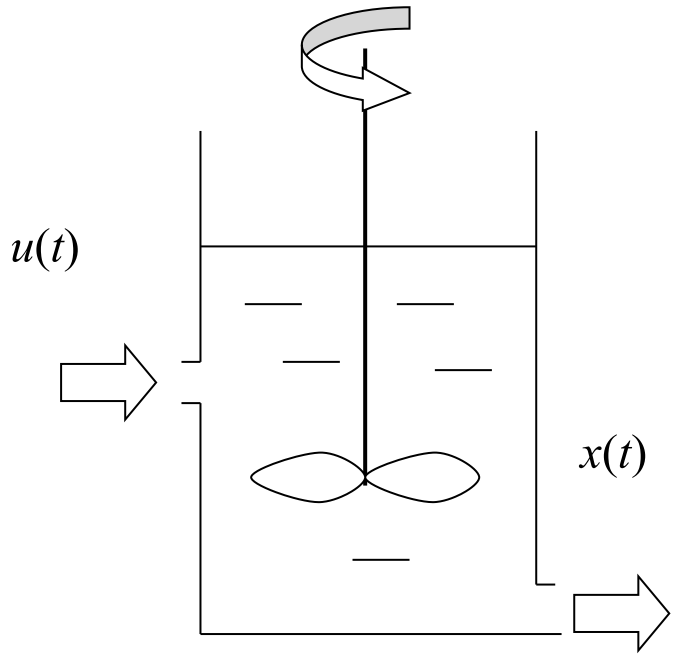
- 在运动过程中，有$0\leq u(t)\leq u_M$，其中u_M为飞行器的最大推力。

- 则该软着陆最优问题是要求在$0\leq t\leq t_f$区间求满足上述运动方程和初、终态约束的$u(t)$，使目标函数$J=m(t_f)$最大。

例2. 最小热损耗问题

- 一搅拌混合槽，原存放$0^{o}C$液体，要经过t_f小时将其升温至$T_f\ ^{o}C$，同时保持液面恒定。送入一定量温度为$u(t)\ ^{o}C$的液体，假定槽内混合均匀，出口温度为槽内温度$x(t)\ ^{o}C$。

- 要使加热过程中热损耗 最小。



搅拌混合槽

- 数学描述：
- 槽内温度的变化由热力学定律有

$$\frac{dx}{dt}=k[u(t)-x(t)]$$

- 其中k为常数，即温度变化与温差成正比。

- 加热过程中热损耗与混合槽温度以及输入液体温度有关，可以认为这里要求在初始条件$x(0)=0$，终值条件$x(t_f)=T_f$条件下，求输入液体温度$u(t)$，使

$$J=\int_0^{t_f}[qx^2(t)+ru^2(t)]dt$$

最小。

例3. 最大产值生产资源分配问题

- 某工厂生产A和B两种产品，
- A产品单位价格为P_A万元， B产品单位价格为P_B万元。
- 每生产一个单位A产品需消耗煤a_C吨，电a_E度，人工a_L个人日；
- 每生产一个单位B产品需消耗煤b_C吨，电b_E度，人工b_L个人日。
- 现有可利用生产资源煤C吨，电E度，劳动力L个人日
- 希望找出其最优分配方案（即A、B两种产品各生产多少单位），使产值最大。

- 数学描述：
- 假定生产x_A单位的A产品，x_B单位的B产品，则有约束条件：

$$a_C x_A + b_C x_B \le C$$

$$a_E x_A + b_E x_B \le E$$

$$a_L x_A + b_L x_B \le L$$

- 求满足约束条件的x_A和x_B，使产值（目标函数）

$$f(x_A, x_B) = P_A x_A + P_B x_B$$

最大。

1.2 最优化问题的提法

- 三个例子虽然涉及不同的工程应用问题，但实质都是考虑最优方案的求取问题。
- 最优化问题的数学描述或最优化问题的提法具有一定的必要形式或要素。
- 前两个例子变量的变化与时间有关，考虑的是动态问题，后一个例子则在一段时期内变量变化与时间无关，是静态问题。
- 最优化问题的提法可以分为两种情况表述。

最优控制问题（例1、例2）

- 数学描述包括：
  - 系统动态模型——状态方程（微分方程）
  - 动态系统初态、终态——状态方程的边界条件

    严格意义上讲，最优控制只对一个有起始点和终止点的动态过程而言有意义。
  - 性能指标——衡量是否达到最优的判据或标准，又称目标函数、性能泛函等。
  - 容许控制——在允许取值范围Ω内的控制作用$u(t)$，即$u(t)\in\Omega$。

- 最优控制$\hat{u}(t)$满足：
  - 是容许控制；
  - 将系统从初态转移到终态；
  - 使性能指标最优。

最优化问题（例3）

- 数学描述与最优控制类似，但有区别，包括：
  - 系统模型——代数方程
  - 系统边界——变量取值范围
  - 优化目标——衡量是否达到最优的判据，即目标函数
  - 独立变量——其变化影响优化目标取值的自变量

- 最优化问题就是寻找满足系统模型和边界条件约束的独立变量，使优化目标达到最优值。

1.3 最优化问题的分类及求解方法

最优化问题的分类

- 动态最优化（最优控制）与静态最优化
- 无约束最优化与有约束最优化
- 线性最优化与非线性最优化
- 确定性最优化与随机性最优化
- ……

动态最优化（最优控制）与静态最优化

- 最优化问题的数学描述和解有的与时间有关（如例1和例2），有的与时间无关（如例3）。
- 前者称为**动态最优化**问题，或更一般称为**最优控制**问题;
- 后者称为**静态最优化**问题，或更一般称为**最优化**问题。
- 两类最优化问题的解法不同，但相互之间有联系，在一定条件下可以转换!

无约束最优化与有约束最优化

- 如果除目标函数以外，对参与优化的各变量没有其他函数或变量约束，则称为无约束最优化问题。反之，称为有约束最优化问题。

- 实际的最优化问题一般除了目标函数外都有其他约束条件，因此多为有约束最优化问题。

- 有约束最优化问题的约束条件又可以分为等式约束和不等式约束。

线性最优化与非线性最优化

- 如果最优化问题的目标函数和所有约束条件均为线性的，则为线性最优化问题。
- 只要最优化问题目标函数和约束条件中有一个是非线性的，就是非线性最优化问题。
- 线性最优化问题是非线性最优化问题的特例。
- 由于非线性系统问题的求解难度远远大于线性系统问题，目前线性最优化问题的研究较为成熟，而非线性最优化问题仍然是当前的研究热点之一。

确定性最优化与随机性最优化

- 如果在最优化问题中，每个变量的取值都是确定可知的，则该问题为确定性最优化问题。

- 如果某个或某些变量的取值是不确定的，但服从一定的统计规律，则属于随机性最优化问题。

最优化问题的解法

- 间接法（解析法）
  - 对于系统模型具有简单明确的数学解析表达式的最优化问题，采用数学分析的方法，根据函数（泛函）极值的必要条件和充分条件求出其最优解析解的求解方法。

- 直接法（数值解法）
  - 对于无法用简单明确的数学解析表达式表达其系统模型的最优化问题，通过数值计算，在经过一系列迭代过程产生的点列中直接搜索，使其逐步逼近最优点。

- 以解析法为基础的数值解法
  - 以梯度法为基础，将解析法与数值计算相结合的最优化求解方法。
- 现代优化算法
  - 运用现代智能计算方法，如模拟退火算法、遗传算法、**PSO**、蚁群算法等，进行直接搜索的最优化求解方法，主要解决大规模复杂优化问题中的**NP-hard**问题。

1.4 最优化与最优控制理论的发展过程

- 最优化问题的产生可以追溯到开始有人类活动的远古时代。但是，最优化与最优控制理论却是现代科学技术发展的产物，确切地说，是生产力发展到大工业生产后的产物。

- 微分学关于函数极值问题的研究，可以看作是最优化与最优控制理论发展的起点。

- 从函数极值问题出发，最优化理论分别向有约束极值问题和变分学（泛函极值问题）两个方向发展，奠定了最优化理论和最优控制理论的基础。

微分学求函数极值问题

极值解的必要条件：

$$\frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x} = \nabla f^0(\hat{x}) = 0$$

等式约束极值问题：$\min f^0(x)$

约束条件：$f(x)=0$

Lagrange函数：$L(x,\lambda^0,\lambda)=\lambda^0 f^0(x)+\lambda(x)$

有极值点，使 $\dfrac{\partial L(\hat{x})}{\partial x}=0$

泛函极值问题（变分学）：

$$\min J(x) = \int_{t}^{t_f} f^0[x(t),\dot{x}(t),t]dt$$

边界条件： $x(t_0)=x_0$， $x(t_f)=x_f$

泛函极值必要条件（**Euler-Lagrange**方程）

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} = 0$$

20世纪30年代前，约束为开集

数学规划问题（静态最优化）：

- 线性规划
- 非线性规划

以及众多分支问题。

极值控制问题（动态最优化）：

- 动态规划（**Bellman，50**年代初）
- 极大值原理（庞特里亚金，**50**年代）

先考虑连续问题，后拓展到离散系统

20世纪60年代前，约束为闭集

现代优化计算方法：

- 遗传算法
- 模拟退火算法
- 蚁群算法
- 神经网络算法
- ……

- 大系统递阶控制（分解协调原理）
- 混杂系统理论
- ……

最优化与最优控制理论发展概况

- 20世纪40年代第二次世界大战开始军事上的需求和现代工业的迅速发展、以及计算机技术的出现，极大地推动了最优化与最优控制理论的进步。
  - 最优化理论中的单纯形方法、共轭方向法、罚函数法等方法以及在线性规划和非线性规划两大类问题中更加细化的分支如凸规划、二次规划等，最优控制理论中的动态规划方法和极大值原理等重要理论和方法，都是在20世纪40至60年代产生的。
- 最优化与最优控制理论与方法是控制科学的重要组成部分，也是绝大部分控制与系统理论和方法的重要基础。
-
- 本课程将以最优控制为主要内容，并对最优化理论进行必要的讨论。

参考书目

- Michael Athans and Peter L. Falb.， Optimal control : an introduction to the theory and its applications, McGraw-Hill, 1966
- 王照林 等，现代控制理论基础，国防工业出版社，1981
- 秦寿康，最优控制，电子工业出版社，1984（1990）
- 解学书，最优控制理论与应用，清华大学出版社，1986
- 孟宪仲，最优控制理论，北航出版社，1987
- 刘培玉，应用最优控制，大连理工大学出版社，1990
- 符　曦，系统最优化及控制，机械工业出版社，1995
- Kemin Zhou, John.C. Doyle, Keith. Glover, Robust and optimal control, Prentice Hall, 1996
- 吴沧浦，最优控制的理论与方法，国防工业出版社，2000
- 王朝珠、秦化淑，最优控制理论，科学出版社，2003
- 邢继祥 等，最优控制应用基础，科学出版社，2003
- 张洪钺、王 青，最优控制理论与应用，高等教育出版社，2006

- [English textbooks]:
  - Applied optimal control--- Optimization, estimation and control.
  - Author: Arthur E. Bryson, Jr., Stanford University. Yu-Chi Ho, Harvard University.)

- **讲义及ppt下载：**

  http://person.zju.edu.cn/ChunyueSong