第四章 线性二次型最优控制

4.3 无限时域线性定常系统状态调节器问题

- 前面给出的状态调节器问题考虑的是有限时域、即 t_f 有限时的黎卡提方程求解问题。存在以下问题：
  - 即使是一个非常简单的二阶定常系统，所得到的黎卡提方程也是非线性微分方程，很难求得解析解；
  - 在实际应用中，特别是定值过程控制场合，控制系统在连续运行时要将时域划分为有限区间再去确定最优控制参数也是十分困难的；
  - 时变的黎卡提方程解 $P(t)$ 在工程实现上也极不方便。
- 针对上述问题，无限时域状态调节器是一种有效的解决方案。

(1) 无限时域线性定常系统状态调节器

给定线性定常系统状态方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0 \tag{4-3-1}$$

其中，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$；A和B分别是$n\times n$和$n\times m$维常数系统矩阵和增益矩阵，控制变量$u(t)$不受约束。

考虑无限时域二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]dt \tag{4-3-2}$$

其中加权矩阵满足Q半正定，R正定条件，且均为常数矩阵。

上式也可表示为有限时域性能指标取极限的形式，即

$$J=\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]dt=\lim_{t_f\to\infty}J_{t_f} \tag{4-3-3}$$

所以可以直接应用有限时域性能指标状态调节器结果。

由于在(4-3-3)式J_{t_f}中$F=0$，因此有使J_{t_f}取极小值的最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x(t) \tag{4-3-4}$$

其中$P(t)$为黎卡提微分方程

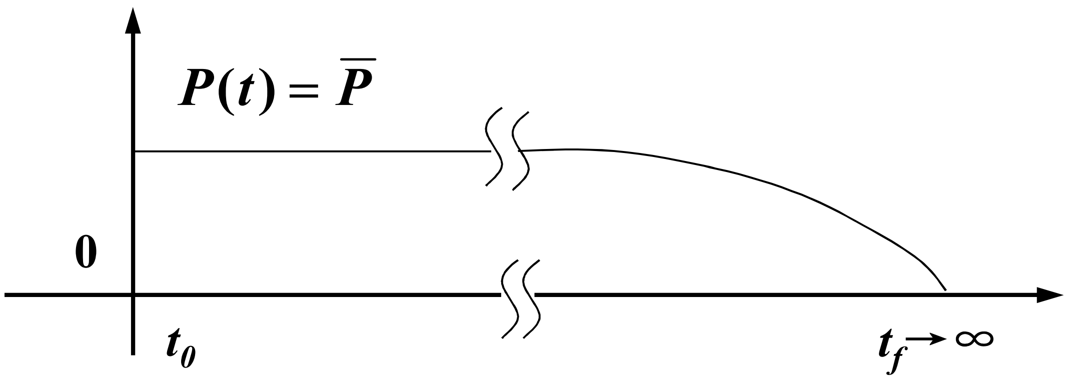
$$\dot{P}(t) = -P(t)A + P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t) - A^{\mathrm{T}}P(t) - Q \tag{4-3-5}$$

的正定对称解，且满足边界条件

$$P(t_f) = 0 \tag{4-3-6}$$

可以证明，当系统(4-3-1)完全可控时，存在常数阵$\bar{P}$，使

$\lim\limits_{t_f\to\infty} P(t) = \bar{P}$，　$0 \le t \ll t_f$　成立。 而当$t \ll \infty$时，$\dot{P}(t) = 0$，即$\dot{\bar{P}}(t) = 0$。



因此，当$t_f \to \infty$时，黎卡提微分方程转化为黎卡提代数方程，即有

$$\overline{P}A - \overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P} + A^{\mathrm{T}}\overline{P} + Q = 0 \qquad \text{(4-3-8)}$$

$\overline{P}$为上式的对称正定解。此时，最优控制存在且唯一，为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}x(t) \qquad \text{(4-3-9)}$$

而最优状态$x^*(t)$则为下列线性定常齐次方程的解

$$\dot{x}^*(t) = [A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}]x(t) = A_c x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{(4-3-10)}$$

(2) 有关讨论

- 无限时域线性定常系统状态调节器与有限时域一般线性系统状态调节器相比的区别在于：
  - 要求系统**(4-3-1)**完全可控，从而可以保证使每一个状态都趋于零，从而保证当$t_f \to \infty$时性能指标有限；
  - 最优控制系统是稳定系统，亦即**(4-3-10)**式中矩阵Ac的所有特征根都必须具有负实部。否则，不具有负实部的特征根所对应的状态将不趋于零，因而性能指标将趋于无穷大；
  - 要求$F = 0$，因为所关心的只是在有限时域内的响应，对 $t_f \to \infty$的终端代价无实际意义。

例: 仍考虑双积分系统，状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t)$$

要求最优控制$u^*(t)$，使二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

达到极小值。其中$a-b^2>0$。

解：此例中有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

因$a-b^2>0$，所以Q正定。又由 $Rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$满秩，所以黎卡提方程存在常数解。

此时有黎卡提代数方程为$\bar{P}A - \bar{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{P} + A^{\mathrm{T}}\bar{P} + Q = 0$，即有

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} = 0$$

将上式展开，并考虑$\bar{P}_{21}=\bar{P}_{12}$，经整理可得代数方程组

$$\begin{cases}\bar{P}_{12}^2-1=0\\ -\bar{P}_{11}+\bar{P}_{12}\bar{P}_{22}-b=0\\ -2\bar{P}_{12}+\bar{P}_{22}^2-a=0\end{cases}\quad \text{解之可得}\quad \begin{cases}\bar{P}_{12}=\pm 1\\ \bar{P}_{11}=\bar{P}_{12}\bar{P}_{22}-b\\ \bar{P}_{22}=\pm\sqrt{a+2\bar{P}_{12}}\end{cases}$$

由$\bar{P}$的正定性，应有$\bar{P}_{11}>0$，$\bar{P}_{11}\bar{P}_{22}-\bar{P}_{12}^2>0$。由此可推出$\bar{P}_{22}>0$，从而有$\bar{P}_{22}=\sqrt{a+2\bar{P}_{12}}$。

若考虑$\bar{P}_{12}=-1$，则由$\bar{P}_{22}=\sqrt{a-2}$，必有$a>2$。

而由$\bar{P}_{11}=\bar{P}_{12}\bar{P}_{22}-b=-\sqrt{a-2}-b>0$，得$b<-\sqrt{a-2}<0$。

将$\bar{P}_{12}=-1$、$\bar{P}_{11}=-\sqrt{a-2}-b$和$\bar{P}_{22}=\sqrt{a-2}$代入不等式$\bar{P}_{11}\bar{P}_{22}-\bar{P}_{12}^2>0$，得$-(a-2)-b\sqrt{a-2}>1$，经整理可化为$b^2>\dfrac{(a-1)^2}{a-2}=a+\dfrac{1}{a-2}>a$，与$a-b^2>0$相矛盾。

所以，必有 $\bar{P}_{12}=+1$，从而有 $\bar{P}_{22}=\sqrt{a+2}$，$\bar{P}_{11}=\sqrt{a+2}-b$，因此有

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{P}x(t)=-1\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{12} & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=-\bar{P}_{12}x_1(t)-\bar{P}_{22}x_2(t)=-x_1(t)-\sqrt{a+2}\,x_2(t)$$

由此可见，与有限时域情况相比，无限时域时黎卡提方程的求解要相对容易得多。

但要得到解析解也还是比较麻烦。而实际工程问题中系统远比双积分系统复杂，因此得到解析解的难度更大。

所以即使是无限时域线性定常系统状态调节器问题，其黎卡提代数方程的常数解一般也是通过数值计算方法求取。

4.4 输出调节器问题

以状态调节器这一最基本的线性二次型最优控制问题为基础讨论输出调节器问题。

(1) 输出调节器问题

考虑线性定常系统的状态方程和输出方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4-4-1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4-4-2}$$

及二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} y^{\mathrm{T}}(t_f) F y(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [y^{\mathrm{T}}(t) Q y(t) + u^{\mathrm{T}}(t) R u(t)] dt \tag{4-4-3}$$

其中，A、B、C分别是$n\times n$、$n\times m$和$l\times n$维常数系统矩阵、增益矩阵和输出矩阵，控制变量$u(t)$不受约束；F、Q非负定（半正定），R正定。

假定系统完全可观，要求最优控制$u^*(t)$，使J最小。

将 $y(t)=Cx(t)$ 代入J，有

$$J=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)C^{\mathrm{T}}FCx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}QCx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]dt \tag{4-4-4}$$

- 可以证明，若系统可观，F、Q都为半正定时，则$C^{\mathrm{T}}FC$和$C^{\mathrm{T}}QC$也都为半正定。
- 这样，输出调节器问题即可转化为等效的状态调节器问题，可以应用状态调节器问题的解法求解输出调节器问题。

(2) 有限时域输出调节器问题

此时，t_f有限，F、Q半正定，R正定。

与有限时域状态调节器问题类似有 $u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x(t)$ 存在且唯一。

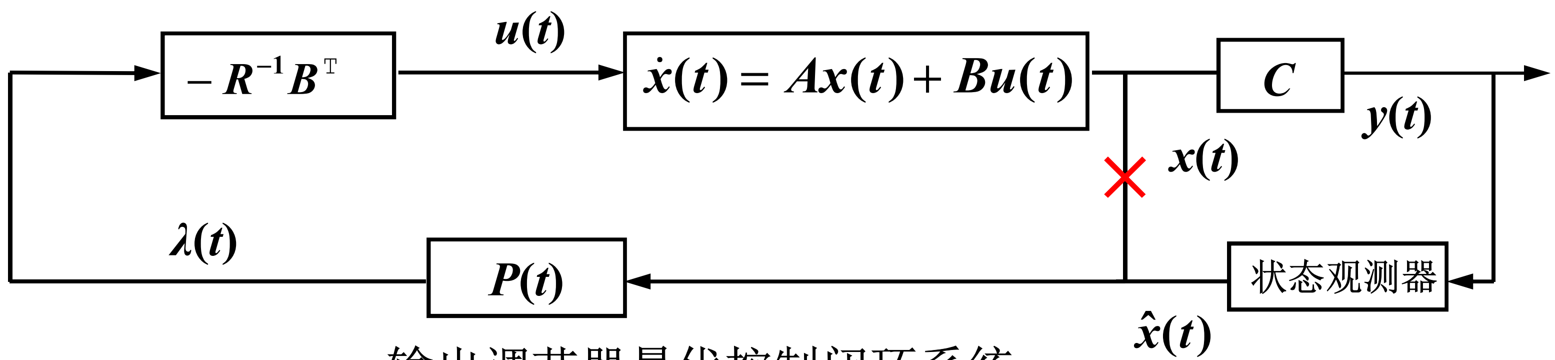
其中$n \times n$维矩阵$P(t)$为黎卡提矩阵微分方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A + P(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t) - A^{\mathrm{T}}P(t) - C^{\mathrm{T}}QC$$

$$P(t_f) = C^{\mathrm{T}}FC$$

的对称正定解。

注意： $u^*(t)$是$x(t)$的函数而不是$y(t)$的函数，系统不可观则无法实现反馈最优控制！



输出调节器最优控制闭环系统

(3) 无限时域输出调节器问题

此时$t_f \to \infty$，且$F=0$，系统完全可控可观， Q半正定，R正定。

类似于无限时域状态调节器，有

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}x(t)$$

存在且唯一。

其中$n \times n$维矩阵 $\overline{P}$ 为黎卡提矩阵代数方程

$$-\overline{P}A + \overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P} - A^{\mathrm{T}}\overline{P} - C^{\mathrm{T}}QC = 0$$

的对称正定解。

4.5 跟踪问题（伺服(servo)问题）

(1) 问题描述

考虑线性可观系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\qquad x(t_0)=x_0 \tag{4-5-1}$$

$$y(t)=Cx(t)\quad,\quad y_r(t)\ \text{为预期输出} \tag{4-5-2}$$

及二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{[y_r(t)-y(t)]^{\mathrm{T}}Q[y_r(t)-y(t)]+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\}dt \tag{4-5-3}$$

其中，A、B、C分别是$n\times n$、$n\times m$和$l\times n$维常数系统矩阵增益矩阵和输出矩阵，控制变量$u(t)$不受约束； Q非负定（半正定），R正定；系统完全可观。

要求$u^*(t)$，使J达最小值

(2) 问题求解

考虑**Hamilton**函数

$$H=\frac{1}{2}\{[y_r(t)-y(t)]^{\mathrm{T}}Q[y_r(t)-y(t)]+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\}$$

$$+\lambda^{\mathrm{T}}(t)Ax(t)+\lambda^{\mathrm{T}}(t)Bu(t) \tag{4-5-4}$$

由于$u(t)$不受约束，有

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Ru(t)+B^{\mathrm{T}}\lambda(t)=0 \tag{4-5-5}$$

则 $u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t)$ **(4-5-6)**

又由于$\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2}=R>0$，所以$u^*(t)$是使$H$和$J$达到最小值的最优控制。

由输出方程及H，可得协态方程为

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-C^{\mathrm{T}}Q[Cx(t)-y_r(t)]-A^{\mathrm{T}}\lambda(t) \qquad \text{(4-5-7)}$$

由于无终端性能指标及约束，即$x(t_f)$自由，所以有

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\Phi}{\partial x(t_f)}=0 \qquad \text{(4-5-8)}$$

将(4-5-6)式代入状态方程(4-5-1)式，并结合(4-5-7)和(4-5-8)式，则规范方程组可表示为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t),\qquad x(t_0)=x_0 \qquad \text{(4-5-9)}$$

$$\dot{\lambda}(t)=-C^{\mathrm{T}}QCx(t)-A\lambda(t)+C^{\mathrm{T}}Qy_r(t),\quad \lambda(t_f)=0 \qquad \text{(4-5-10)}$$

与状态调节器问题的规范方程组相比，(4-5-10)式中多了一项反映预期输出的 $C^{\mathrm{T}}Qy_r(t)$而成为非齐次微分方程。假设其解为

$$\lambda(t)=P(t)x(t)-\zeta(t) \qquad \text{(4-5-11)}$$

其中$P(t)$为待定的$n\times n$维矩阵、$\zeta(t)$为待定的 n维向量。

对上式两边求导得

$$\dot{\lambda}(t)=\dot{P}(t)x(t)+P(t)\dot{x}(t)-\dot{\zeta}(t) \tag{4-5-12}$$

结合前面有关各式，消去 $\dot{\lambda}(t),\lambda(t),\dot{x}(t)$ 后整理得

$$\begin{aligned}&[-\dot{P}(t)-P(t)A-A^{\top}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\top}P(t)-C^{\top}QC]x(t)\\&=-\dot{\zeta}(t)-A\zeta(t)+P(t)BR^{-1}B^{\top}\zeta(t)-C^{\top}Qy_r(t)\end{aligned} \tag{4-5-13}$$

上式左端为一时间函数与$x(t)$的乘积，右端单纯为一时间函数，要使其对任意$x(t)$成立，应满足，

$$-\dot{P}(t)-P(t)A-A^{\top}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\top}P(t)-C^{\top}QC=0 \tag{4-5-14}$$

$$-\dot{\zeta}(t)-A\zeta(t)+P(t)BR^{-1}B^{\top}\zeta(t)-C^{\top}Qy_r(t)=0 \tag{4-5-15}$$

或表示为

$$\dot{P}(t)=-P(t)A-A^{\top}P(t)+P(t)BR^{-1}B^{\top}P(t)-C^{\top}QC \tag{4-5-16}$$

$$\dot{\zeta}(t)=-A\zeta(t)+P(t)BR^{-1}B^{\top}\zeta(t)-C^{\top}Qy_r(t) \tag{4-5-17}$$

由于 $\lambda(t_f)=P(t_f)x(t_f)-\zeta(t_f)=0$，且$x(t_f)$任意，所以有

$$P(t_f)=0,\quad \zeta(t_f)=0 \tag{4-5-18}$$

求方程组(4-5-16)、(4-5-17)满足边界条件(4-5-18)的解，即可得最优控制为

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P(t)x(t)-\zeta(t)] \\ &= -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P(t)x(t)+R^{-1}B^{\mathrm{T}}\zeta(t) \end{aligned} \tag{4-5-19}$$

即$u^*(t)$包括两项，一项为$x(t)$的线性函数，另一项为受控于 $y_r(t)$ 的$\zeta(t)$ 的线性函数，代表由被跟踪变量引起的驱动作用。

(3) 无限时域跟踪问题

此时$t_f \to \infty$，并假设系统(4-5-1)、(4-5-2)完全可控可观。与无限时域状态调节器问题相似，当$t << t_f$时，有

$$\dot{P}(t) = 0, \quad P(t) = \overline{P}$$

其中$\overline{P}$为常数矩阵。并有

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}x(t) + R^{-1}B^{\mathrm{T}}\zeta(t)$$

其中$\overline{P}$和$\zeta(t)$分别为方程

$$\overline{P}A + A^{\mathrm{T}}\overline{P} - \overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P} + C^{\mathrm{T}}QC = 0 \qquad \text{(4-5-20)}$$

$$\dot{\zeta}(t) = [\overline{P}BR^{-1}B^{\mathrm{T}} - A]\zeta(t) - C^{\mathrm{T}}Qy_r(t) \qquad \text{(4-5-21)}$$

的解。

以上是二次型最优控制问题的基本内容介绍。**4.6~4.9** 节介绍了基于二次型最优控制的一些控制系统综合方法，供扩展视野。

- 线性二次型最优控制作为应用最为广泛的一种最优控制算法，几十年来以其为基础已经发展出很多种控制系统设计方法。
- 以下分别对其中几种进行介绍。

4.6 具有指定稳定度的最优调节器问题

(1) 渐近稳定性概念

一个系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 是渐近稳定的，是指微分方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad t\geq t_0$$

的解 $x(t)$ 对于任意的 x_0 都有 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

前面讨论的无限时间调节器都是渐近稳定的，但均未考虑 $x(t)\to 0$的速度，即衰减速度问题。衰减速度越快，则稳定性越好。

(2)具有指定稳定度的最优调节器

首先给出稳定度含义：对于一个渐近稳定系统，稳定度$\alpha>0$，是表示 $x(t)\to 0$ 的衰减速度不低于 $e^{-\alpha t}$ 的数量级。

以下以无限时域状态调节器为例进行讨论。

考虑系统状态方程为

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \qquad (4\text{-}6\text{-}1)$$

其中，$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$，$A$和$B$分别是 $n \times n$ 和 $n \times m$ 维常数系统矩阵和增益矩阵，系统完全可控，且控制变量$u(t)$不受约束。

考虑指定的稳定度α>0，性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} e^{2\alpha t}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]dt \qquad (4\text{-}6\text{-}2)$$

其中Q半正定，R正定。要求最优控制$u^*(t)$，使J达最小值。此问题也称为改进的最优状态调节器问题。

令
$$\begin{aligned} &\tilde{x}(t) = e^{\alpha t}x(t) \\ &\tilde{u}(t) = e^{\alpha t}u(t) \end{aligned} \qquad (4\text{-}6\text{-}3)$$

则有
$$\begin{aligned} &x(t) = e^{-\alpha t}\tilde{x}(t) \\ &u(t) = e^{-\alpha t}\tilde{u}(t) \end{aligned} \qquad (4\text{-}6\text{-}4)$$

并有

$$\dot{x}(t) = -\alpha e^{-\alpha t}\tilde{x}(t) + e^{-\alpha t}\dot{\tilde{x}}(t) \tag{4-6-5}$$

将(4-6-4)、(4-6-5)式代入状态方程(4-6-1)式，可得

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A + \alpha I)\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \tag{4-6-6}$$

将(4-6-4）式代入性能指标，得

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^{\mathrm{T}}(t)R\tilde{u}(t)]dt \tag{4-6-7}$$

(4-6-6）和(4-6-7）为规范的最优状态调节器问题。

可以证明，如果（*A*，*B*）完全可控，则（*A*+*αI*，*B*）完全可控。因此，对于系统(4-6-6），使性能指标(4-6-7）达到最小值的最优控制作用为

$$\tilde{u}^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_\alpha\tilde{x}(t) \tag{4-6-8}$$

其中 $\overline{P}_\alpha$ 为黎卡提代数方程

$$(A + \alpha I)^{\mathrm{T}}\overline{P}_\alpha + \overline{P}_\alpha(A + \alpha I) - \overline{P}_\alpha BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_\alpha + Q = 0 \tag{4-6-9}$$

的对称正定解。

由(4-6-3）、(4-6-4）式可知，对于原系统，最优控制为

$$u^*(t)=e^{-\alpha t}\tilde{u}^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_{\alpha}e^{-\alpha t}\tilde{x}(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_{\alpha}x(t) \qquad \text{(4-6-10)}$$

最优轨线为

$$x^*(t)=e^{-\alpha t}\tilde{x}^*(t)$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{x}^*(t)=0$，而 $\lim\limits_{t\to\infty}x^*(t)=\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\alpha t}\tilde{x}^*(t)$

所以 $x^*(t)$ 比 $\tilde{x}^*(t)$衰减更快，即在最优控制(4-6-10）的作用下，闭环控制系统 $\dot{x}(t)=[A-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_{\alpha}]x(t)$ 具有指定的稳定度$\alpha>0$。

例4.3

给定单输入单输出系统 $\ddot{y}(t)=au(t), \qquad a\neq 0$

要求确定最优控制$u^*(t)$，使性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}e^{2t}[y^2(t)+u^2(t)]dt$$

达到最小值。

解：

此问题为改进无限时域输出调节器问题。令 $\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$

则有状态方程 $\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= au(t) \end{aligned}$ 和输出方程 $y(t) = x_1(t)$

即有 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且有$Q$=1，$R$=1，$\alpha$＝1。

由 $Rank\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = Rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$和 $Rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = Rank\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} = 2$

可知此系统完全可控可观。

将性能指标变换为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} e^{2t}[x_1^{\ 2}(t) + u^2(t)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} e^{2t}\{[x_1(t) \ \ x_2(t)]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u^2(t)]\}dt$$

则问题转换为无限时域状态调节器问题，且满足 $Q'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$半正定、$R=1$正定条件。因此其最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_{\alpha}x(t)=-\begin{bmatrix}0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{P}_{\alpha 11} & \overline{P}_{\alpha 12}\\ \overline{P}_{\alpha 12} & \overline{P}_{\alpha 22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=-a[\overline{P}_{\alpha 12}x_1(t)+\overline{P}_{\alpha 22}x_2(t)]$$

其中 $\overline{P}_{\alpha}$ 为黎卡提代数方程

$$(A+\alpha I)^{\mathrm{T}}\overline{P}_{\alpha}+\overline{P}_{\alpha}(A+\alpha I)-\overline{P}_{\alpha}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_{\alpha}+Q=0$$

的正定对称解。

将 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ ,\\ a\end{bmatrix}$ $Q=1$，$R=1$，$\alpha=1$代入黎卡提方程，最后可解得最优控制为

$$u^*(t)=-\frac{1}{a}(1+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})x_1(t)-\frac{1}{a}(2+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})x_2(t)$$

将最优控制表示为输出反馈，则有

$$u^*(t)=-\frac{1}{a}(1+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})y(t)-\frac{1}{a}(2+\sqrt{2+2\sqrt{1+a^2}})\dot{y}(t)$$

4.7 阶跃干扰作用下的状态调节器问题

前面所讨论的最优控制均无法消除静差，而通过选择性能指标*J*的形式可以得到能克服干扰，消除静差的最优控制。

给定对象状态方程：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B[u(t)+w(t)] \qquad (4\text{-}7\text{-}1)$$

其中：状态变量 $x(t)\in R^n$；控制变量 $u(t)\in R^m$；$w(t)\in R^m$ 为阶跃干扰变量，(A,B) 完全可控，B 的秩为 m。考虑性能指标为：

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+[u(t)+w(t)]^T S[u(t)+w(t)]+\dot{u}^T(t)R\dot{u}(t)\right\}dt \qquad (4\text{-}7\text{-}2)$$

其中 Q 为 $n\times n$ 维半正定对称阵，S、R 分别为 $m\times m, m\times m$ 维正定对称阵。

要求确定最优控制 $u^*(t)$，使 J 最小。

性能指标中设置 $\dot{u}^{\mathrm{T}}(t)R\dot{u}(t)$ 项的含义是：控制作用的变化速度也不宜过大。

令 $\bar{u}(t)=u(t)+w(t) \qquad (4\text{-}7\text{-}3)$

则有 $\dot{\bar{u}}(t) = \dot{u}(t)$ （4-7-4）

构造新状态变量

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix} \tag{4-7-5}$$

为$n+m$维列向量，称为增广向量。 令

$$v(t) = \dot{u}(t) = \dot{\bar{u}}(t) \tag{4-7-6}$$

为新的控制向量，则得到增广系统状态方程为

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}v(t) \tag{4-7-7}$$

其中：$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$为$(n+m)\times(n+m)$ 维矩阵, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$为$(n+m)\times m$

维矩阵，相应的性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[\bar{x}^{\mathrm{T}}(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + v^{\mathrm{T}}(t)Rv(t)]dt \tag{4-7-8}$$

其中，$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$为$(n+m)\times(n+m)$ 维半正定对称阵。

至此，问题转化为最优状态调节器问题。

可以证明，$\left(\bar{A},\bar{B}\right)$完全可控的充要条件是$\left(A,B\right)$完全可控。则增广系统最优控制为

$$
\begin{aligned}
v^*(t) = \dot{u}^*(t) &= -R^{-1}\bar{B}^T\bar{P}\bar{x}(t) \\
&= -R^{-1}[0 \quad I]\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t) \\ \bar{u}(t)\end{bmatrix} \qquad \text{（4-7-9）} \\
&= -R^{-1}\left[\bar{P}_{21}x(t) + \bar{P}_{22}(u^*(t) + w(t)\right]
\end{aligned}
$$

其中 $\bar{P}$ 是黎卡提代数方程

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T P - \bar{P}\bar{B}\bar{P}^{-1}\bar{B}^T\bar{P} + \bar{Q} = 0 \qquad \text{（4-7-10）}$$

的对称正定解，从中可以解出$\bar{P}_{21}$，$\bar{P}_{22}$

令 $K_1 = R^{-1}\bar{P}_{21}$，$K_2 = R^{-1}\bar{P}_{22}$，则有

$$\dot{u}^*(t) = -[K_1 x(t) + K_2(u^*(t) + w(t))] \qquad \text{（4-7-11）}$$

在最优控制下，闭环系统渐近稳定，即

$$\lim_{t\to\infty}\bar{x}(t) = 0$$