

---

## 九. 非线性规划 (Nonlinear Programming)

---

- 
- 非线性规划是研究目标函数和约束条件中至少包含一个非线性函数的约束极值最优化问题。
  - 由于非线性问题的复杂性，非线性规划与线性规划相比在理论和算法上呈现出明显的多样性，成果非常丰富。
  - 非线性规划的理论成果包括约束极值问题到达极值解的充分和必要条件（即最优性条件）、非线性规划的对偶理论等。
  - 非线性规划的算法种类繁多，但本质上都是采用数值计算迭代方法求解非线性方程组。
  - 解非线性规划问题时所用的计算方法最常见的是迭代下降算法，即算法同时具有迭代和下降两种特征：
    - ✓ 迭代：从一点 $x^{(k)}$ 出发，按某种规则算出后继点 $x^{(k+1)}$ ；用 $x^{(k)}$ 代替 $x^{(k+1)}$ ，重复上述过程，产生点列 $\{x^{(k)}\}$ ；
    - ✓ 下降：对某个函数，每次迭代后，后继点的函数值要有所减少。
-

---

□ 评价算法的几个要素

- ✓ 通用性与可靠性
- ✓ 对参数与数据的敏感性
- ✓ 准备与计算的工作量
- ✓ 收敛性

□ 一维搜索算法

- ✓ 可以归纳为两大类：试探法和函数逼近法。
- ✓ 试探法：黄金分割法（**0.618法**）；**Fibonacci法**（斐波那契法）
- ✓ 函数逼近法：牛顿法；割线法；抛物线法；插值法

□ 多维搜索中使用导数的最优化算法（无约束问题）

- ✓ 最速下降法（梯度法）；牛顿法（二阶梯度法）；共轭梯度法；拟牛顿法；.....

□ 多维搜索无约束最优化的直接方法（不用导数）

- ✓ 模式搜索法；**Rosenbrock**算法；单纯形法；.....

□ 有约束最优化方法

- ✓ 可行方向法；惩罚函数法；线性逼近法及二次规划；**SQP**(序贯二次规划)法；.....
-

---

# 十. 多目标数学规划 (Multiobjective Programming)

---

---

实际问题往往难以用一个指标来衡量，需要用一个以上相互间不很协调（甚至相互冲突）的衡量指标，形成多目标规划问题。

多目标规划标准形式：

$$(\text{VP}) \begin{cases} V-\min [f_1(x), \cdots, f_p(x)]^T \\ g_i(x) \geq 0, i=1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

其中  $x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in E^n, p \geq 2$ 。

符号  $V-\min$  表示区别于单目标求最小，指对向量形式的  $p$  个目标求最小。

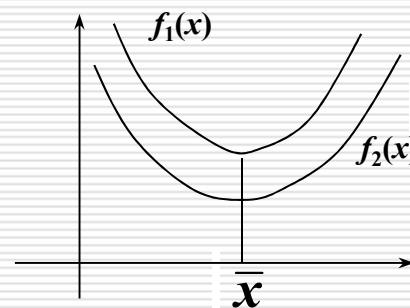
由于实际问题中  $p$  个目标量纲不同，有必要对每个目标事先规范化。

---

## 各种意义下的解集

### (1) 绝对最优解

定义：设  $\bar{x} \in R = \{x | g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ ，若对任意  $j = 1, 2, \dots, p$  以及任意  $x \in R$  均有  $f_j(x) \geq f_j(\bar{x})$ ，则称  $\bar{x}$  为问题(VP)的绝对最优解。



多目标问题的绝对最优解一般不存在。因此，有必要给出其他的“解”的定义：

引入向量不等式符号：设  $F^1 \in E_p, F^2 \in E_p$

其中：  $F^1 = [f_1^1, f_2^1, \dots, f_p^1]^T$ ，  $F^2 = [f_1^2, f_2^2, \dots, f_p^2]^T$

(a)“ $<$ ”  $F^1 < F^2$ ，表示对  $j = 1, 2, \dots, p$ ，均有  $f_j^1 < f_j^2$ ；

(b)“ $\leq$ ”：  $F^1 \leq F^2$ ，意味着对  $j = 1, 2, \dots, p$ ，均有  $f_j^1 \leq f_j^2$  且至少存在某个  $j_0 (1 \leq j_0 \leq p)$ ，使  $f_{j_0}^1 < f_{j_0}^2$

(c)“ $\equiv$ ”：  $F^1 \equiv F^2$ ，意味着对  $j = 1, 2, \dots, p$ ，均有  $f_j^1 \leq f_j^2$ 。

## 各种意义下的解集

---

### (2)有效解（或称Pareto解）

定义：设  $\bar{x} \in R$ ，若不存在  $x \in R$  满足  $F(x) \leq F(\bar{x})$ ，则称为（VP）的有效解（或称Pareto解）。有效解全体记为  $R_{pa}^*$ 。

### (3)弱有效解，弱有效解全体记为 $R_{wp}^*$ 。

(4)记：  $R = \{x | g_i(x) \leq 0, i=1,2,\dots,m\}$ ，有  $R_{pa}^* \subseteq R_{wp}^* \subseteq R$

---

## 处理多目标规划的一些方法

### (1) 约束法

在(VP)中 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ , 找出一个主要目标 $f_k(x)$ , 对其它各目标 $f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_{k+1}(x), \dots, f_p(x)$ , 可事先给定一个所希望的值 $f_1^\circ, \dots, f_{k-1}^\circ, f_{k+1}^\circ, \dots, f_p^\circ$ , 其中 $f_j^\circ \geq \min_{x \in R} f_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, p, j \neq k$ ), 将原多目标问题化为如下规划问题:

$$(P) \begin{cases} \min f_k(x) \\ g_i(x) \geq 0, i=1, 2, \dots, m \\ f_j(x) \leq f_j^\circ, \quad j=1, \dots, k-1, k+1, \dots, p \end{cases}$$

### (2) 分层序列法

把(VP)中的 $p$ 个目标 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ , 按其重要程度排序, 然后按顺序分层求解单目标问题。

如次序为 $f_1(x), f_2(x), \dots$

先求 $f_1(x)$ 最优解:  $(P_1) \quad \min_{x \in R} f_1(x) = f_1^*$



---


$$\begin{aligned}
 &\text{再求第二个: } (P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min f_2(x) = f_2^* \\ x \in R \cap \{x \mid f_1(x) \leq f_1^*\} \end{array} \right\} \text{的最优解} \\
 &\text{最后求第 } p \text{ 个 } (P_p) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min f_p(x) \\ x \in R \cap \{x \mid f_j(x) \leq f_j^*, j = 1, 2, \dots, p-1\} \end{array} \right\} \text{的最优解。}
 \end{aligned}$$

其解记为 $\bar{x}$ ，则 $\bar{x}$ 是在分层序列意义下的最优解。可证明，此 $\bar{x}$ 是有效解。

- (3) 功效系数法——将不同量纲的多目标最优问题转化为求解相应功效系数问题。
- (4) 评价函数法——将多目标最优问题转化为求一个评价函数最优解的问题。

各种处理方法的基本思路都是将多目标规划问题通过某种方式转化为单目标规划问题求解。

---

---

# 十一. 现代优化计算方法

---

---

20世纪80年代初兴起的禁忌搜索、模拟退火、遗传算法、蚁群算法、人工神经网络等算法，与传统的优化算法显著不同，称为现代优化算法，也称智能优化算法、生物进化算法等。

主要解决：传统组合优化问题遇到的NP-hard问题。

计算复杂性概念与多项式时间算法

NP与NP-hard概念

NP—nondeterministic polynomial (非多项式确定)问题

NP概念是由判定问题引入到数学规划问题的

判定问题：一个问题的每一个实例都只有“是”或“否”两种答案。

NP-hard：若NP中任何一个问题可在多项式时间归纳为判定问题A，则称A为NP难或NP-hard。

数学规划问题（组合优化问题）可以转化为判定问题。

对于组合优化问题，若其判定问题是NP-hard的，则知优化问题难度不低于判定问题，称该组合优化问题为NP-hard。

---

## 几种现代优化算法简述：

### ●遗传算法（Genetic algorithm — GA）

20世纪70年代初由美国Michigan大学Holland教授发展起来，模仿生物进化的内在机制——**遗传**和**变异**，在保持物种种群多样性前提下寻找最优种群（适应度函数）。特点：全局优化，简单通用，鲁棒性强，可并行处理。

着重解决的问题：早熟（陷入局部最优解）

### ●蚁群算法

通过模拟蚁群搜索食物时在经过路径留下信息素以形成信息正反馈的群体优化过程机理来寻找最优解，以达到求解比较困难的组合优化问题的目的。

群体优化过程包含两个基本阶段：**适应阶段**和**协作阶段**。在适应阶段，各候选解根据积累的信息不断调整自身结构；在协作阶段，候选解之间通过信息交流以期望产生更好的解。

# 粒子群算法

---

## Particle Swarm Optimization

$$\begin{cases} v_{id}^{k+1} = \omega v_{id}^k + c_1 \zeta_{id} (p_{id}^k - l_{id}^k) + c_2 \eta_{id} (p_{gd}^k - l_{id}^k) \\ l_{id}^{k+1} = l_{id}^k + r v_{id}^{k+1} \end{cases}$$

---

---

- 禁忌搜索

**Glover** 于1986年首次提出。禁忌：禁止重复前面的工作，以避免局部邻域搜索，陷入局部最优的主要不足。原理：用一个禁忌表记录下已经达到过的局部最优点，下一次搜索中利用禁忌表信息不再或有选择地搜索这些点，以此跳出局部最优点。

- 模拟退火

**Metropolis**1953年提出，**Kirkpatrick**1983年成功地用于规划问题中。

模拟金属退火过程中分子随温度下降重新以一定的结构排列，分子停留状态满足**Boltzmann**概率分布，停留在能量小状态的概率比停留在能量大状态的概率大。温度高时，每个状态概率基本相同；温度低时，状态处于能量小的概率大；当温度很低时，状态以概率1停留在最优解（最低能量处）。

模拟退火算法是一种全局最优算法。

现代优化算法**本质**上都是**直接优化**方法，借助于计算机进行数值搜索。

---