河北大学 物理科学与技术学院《激光原理》测试题

第 二 章　开放式光腔与高斯光束

一、简答题

1. 什么是开放式光学谐振腔？开放式光学谐振腔的作用是什么？

   答：在激光技术中广泛采用由两块具有公共轴线的球面镜构成的共轴球面腔，通常认为其侧面没有光学边界。因此将这类没有侧面光学边界的谐振腔为开放式光学谐振腔。开腔的作用是提供轴向光波模的正反馈及保证激光器的单模（或少数轴向模）振荡。

2. 什么是光学谐振腔的模式？腔与模之间的关系如何？

   答：通常将光学谐振腔内可能存在的电磁场的本征态称为腔的模式。从光子的观点平看，腔的模式也就是腔内存在的可以区分的光子状态。腔与模的关系是：一旦给定了腔的具体结构，则其中振荡模式的特征也就随之确定下来。

3. 光腔的纵模是什么？试给出 F-P 腔中纵模的特征。

   答：光腔内可能存在的电磁场本征态称为腔的模式。模沿腔轴线方向（纵向）的电磁场分布称为腔的纵模，通常由纵模序数 q 来表征。F-P 腔中的模式是平面驻波场，沿腔轴线方向形成驻波，驻波的波腹数由 q 决定。

4. 什么是开放式光学谐振腔的横模？

   答：当光场在两腔镜间往返传播时，光场将会在腔镜边缘发生衍射影响其横向分布。在经过足够多次渡越后，能形成一种稳态场：其分布不再受衍射影响，经一次往返便能再现其自身。我们把这种经一次往返能再现的稳态场分布称为开腔的横模（或自再现模）。

二、证明题

5. 已知光腔的光学长度为 L' 平均单程损耗因子为 δ，求证光子在腔内的平均寿命为 $\dfrac{L'}{\delta c}$。

   证明：设一束初始强度为 I_0 的光束在腔内振荡，当该光束在腔内往返 m 次后光强变为

   $$I_m = I_0\left(e^{-2\delta}\right)^m = I_0 e^{-2m\delta}$$

   若记初始时刻为 $t=0$，则到 t 时刻为止，光束在腔内往返的次数 m 应为

   $$m = \frac{t}{\dfrac{2L'}{c}}$$

   由此可以得出 t 时刻的光强为

   $$I(t) = I_0 e^{-2\delta\frac{ct}{2L'}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}$$

其中 $\tau_R = \dfrac{L'}{\delta c}$ 为腔的时间常数。腔内的光子数密度与光强成正比，因此

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}}$$

其中 N_0 为初始时刻的光子数密度。在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 的时间内由于损耗而减少的光子数密度为

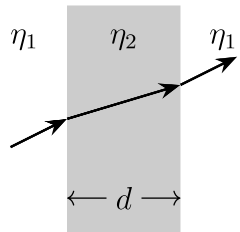
$$-dN = \frac{1}{\tau_R} N_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}} \mathrm{d}t$$

这部分光子的寿命为 t。于是腔内光子的平均寿命

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_{N_0}^{0} t(-\mathrm{d}N) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \frac{1}{\tau_R} N_0 e^{-\frac{t}{\tau_R}} \mathrm{d}t = \tau_R$$

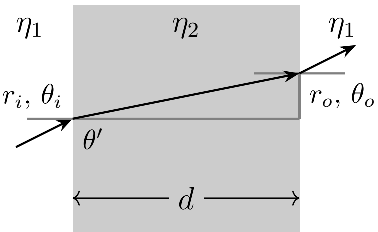
这里利用了积分公式 $\int_0^\infty x e^{-x} \mathrm{d}x = 1$。因此，该腔内光子的平均寿命为 $\tau = \dfrac{L'}{\delta c}$。 □

6. 试证明傍轴光线通过厚度为 d 的平行平面介质如右图所示，光线变换矩阵为



$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta_1}{\eta_2} d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证明： 如右图所示，一条傍轴光线穿过平行平面介质。设光线进入介质前与透出介质后的光线参数分别为



$$\begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_o \\ \theta_o \end{pmatrix}$$

由于介质板两端面相互平行且两侧折射率相同，出射光线与入射光线相互平行，因此 $\theta_o = \theta_i$。从图中几何关系可以看出，出射光线的离轴距离

$$r_o = r_i + d \tan \theta' \approx r_i + d\theta'$$

在入射面处，利用折射定律可知，$\eta_1 \sin \theta_i = \eta_2 \sin \theta'$。在傍轴情况下，该式可表示为 $\eta_1 \theta_i = \eta_2 \theta'$。于是有 $\theta' = \dfrac{\eta_1}{\eta_2} \theta_i$，进而可得

$$r_o = r_i + \frac{\eta_1}{\eta_2} d\theta_i$$

于是光线参数之间的关系可表示为

$$\begin{pmatrix} r_o \\ \theta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta_1}{\eta_2} d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

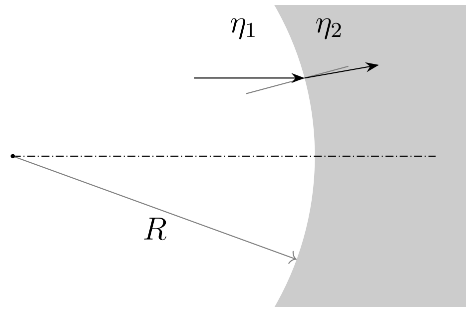
因此，工作介质棒对傍轴光线的变换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\eta_1}{\eta_2} d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

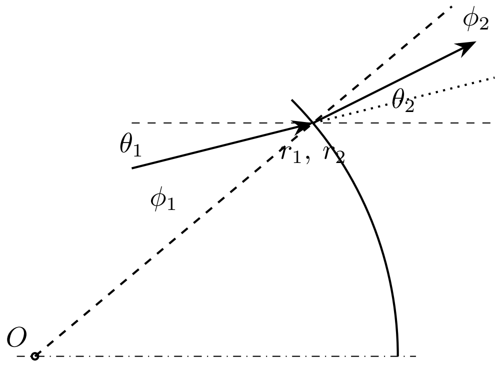
□

7. 如右图所示，求证傍轴光线进入半球面介质的光线变换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \left(1-\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right)\dfrac{1}{R} & \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\end{pmatrix}$$



证明：如图所示，设一束傍轴光线射过介质表面，入射角为 ϕ_1，出射角为 ϕ_2，入射光线参数为 $\begin{pmatrix}r_1\\ \theta_1\end{pmatrix}$，出射光线参数为 $\begin{pmatrix}r_2\\ \theta_2\end{pmatrix}$。



光线折射不改变离轴距离，则有

$$r_2=r_1$$

由图中几何关系可知，出射光线与轴夹角 θ_2 可表示为

$$\theta_2=(\phi_1+\theta_1)-\phi_2$$

在傍轴条件下，由折射定律知 $\eta_1\phi_1=\eta_2\phi_2$，即 $\phi_2=\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\phi_1$。于是有

$$\theta_2=(\phi_1+\theta_1)-\frac{\eta_1}{\eta_2}\phi_1=(\phi_1+\theta_1)-\frac{\eta_1}{\eta_2}\big[(\phi_1+\theta_1)-\theta_1\big]$$

对于图中的傍轴光线有 $(\phi_1+\theta_1)=\dfrac{r_1}{R}$，于是有

$$\theta_2=\frac{r_1}{R}-\frac{\eta_1}{\eta_2}\left[\frac{r_1}{R}-\theta_1\right]=\left(1-\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)\frac{r_1}{R}+\frac{\eta_1}{\eta_2}\theta_1$$

综上，可知出射光线参数与入射光线参数之间的关系为

$$\begin{pmatrix}r_2\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \left(1-\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right)\dfrac{1}{R} & \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\ \theta_1\end{pmatrix}$$

因此，该半球面介质的光线变换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \left(1-\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\right)\dfrac{1}{R} & \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\end{pmatrix}$$

□

8. 试用光腔的往返矩阵证明对称共焦腔为稳定腔。

证明：傍轴光线从对称共焦腔左侧腔镜表面向右传播开始，在腔内往返一周的往返矩阵应写为的变换矩阵可写为

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{R} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{R} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

考虑到共焦腔的凹面镜的曲率半径等于腔长，即 $R=L$，则有

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

而

$$T^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

对于任意傍轴光线 $\begin{pmatrix}r_0\\ i_0\end{pmatrix}$，在腔内往返两周就会回到原状态，即

$$\begin{pmatrix}r_2\\ i_2\end{pmatrix}=T^2\begin{pmatrix}r_0\\ i_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_0\\ i_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_0\\ i_0\end{pmatrix}$$

因此，对于任意傍轴光线在腔内往返意次均不会侧向逸出。故对称共焦腔为稳定腔。 □

9. 若一光学系统位于均匀光学介质中，从左端面到右端面的光线传播矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. 求证该光学系统从右端面到左端面的光线传播矩阵可表示为

$$T'=\begin{pmatrix}d & b\\ c & a\end{pmatrix}$$

证明：若一条傍轴光线通过该光学系统，如右图所示。系统左右两端面上的光线参数分别为

$$\begin{pmatrix}r_i\\ \theta_i\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}r_o\\ \theta_o\end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{pmatrix}r_o\\ \theta_o\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}r_i\\ \theta_i\end{pmatrix}$$

于是有

$$\begin{pmatrix}r_i\\ \theta_i\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}r_o\\ \theta_o\end{pmatrix}\tag{†}$$

其中 T^{-1} 为 T 的逆矩阵。考虑到光线变换矩阵具有一般性质 $|T|=1$，则逆矩阵可表示为

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

另一方面，由光路可逆原理可知，该傍轴光线从右端面原路反向入射回光学系统时，必从系统左端面原路出射。这时该反向传播光线在右左两端面上的光线参数分别为

$$\begin{pmatrix} r_o \\ -\theta_o \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_i \\ -\theta_i \end{pmatrix}$$

利用光线传播矩阵，则有

$$\begin{pmatrix} r_i \\ -\theta_i \end{pmatrix} = T' \begin{pmatrix} r_o \\ -\theta_o \end{pmatrix}$$

将该式与式(†)对比，并考虑到任一傍轴光线均可使这两式成立，则可求得该光学系统的反向传播矩阵为

$$T' = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

□

10. 某共轴球面腔左右两球面反射镜的曲率半径分别为 R_1 与 R_2，从左腔镜到右腔镜的光线传播矩阵可表示为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

求证该光腔的稳定性条件可表示为 $0 < g_1 g_2 < 1$，其中 $g_1 = a - \dfrac{b}{R_1}$，$g_2 = d - \dfrac{b}{R_2}$。

证明：由题意可知，光腔的往返矩阵可表示为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= a\left(d - \frac{2}{R_2}b\right) + bc \\ D &= d\left(a - \frac{2}{R_1}b\right) + b\left[c - \frac{2}{R_1}d - \frac{2}{R_2}\left(a - \frac{2b}{R_1}\right)\right] \end{aligned}$$

根据共轴腔面腔的稳定性条件 $-1 < \dfrac{1}{2}(A+D) < 1$, 则有

$$-1 < \frac{2b^2 - 2abR_1 - 2bdR_2 + bcR_1R_2 + adR_1R_2}{R_1R_2} < 1$$

考虑到光线变换矩阵具有一般性质

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow ad - bc = 1$$

不等式可表示为

$$-1 < \frac{2b^2 - 2abR_1 - 2bdR_2 + 2adR_1R_2 - R_1R_2}{R_1R_2} < 1$$

进一步化简为

$$0 < \frac{b^2 - abR_1 - bdR_2 + adR_1R_2}{R_1R_2} < 1$$

将分子分解因式得

$$0<\frac{(aR_1-b)(dR_2-b)}{R_1R_2}<1$$

最终有

$$0<\left(a-\frac{b}{R_1}\right)\left(d-\frac{b}{R_2}\right)<1$$

因此光腔的稳定性条件可表示为 $0<g_1g_2<1$，其中

$$g_1=a-\frac{b}{R_1}$$
$$g_2=d-\frac{b}{R_2}$$

□

11. 已知光腔的时间常数为 τ_R，求证光腔的品质因子 $Q=2\pi\nu\tau_R$，其中 ν 为谐振频率。

证明：设 $\mathscr{E}$ 为储存在腔内的总能量，P 为单位时间内损耗的能量，则谐振腔 Q 参数的定义为

$$Q=2\pi\nu\frac{\mathscr{E}}{P}$$

如果以 V 表示腔内振荡光束的体积，当光子在腔内均匀分布时腔内的总储能为 $\mathscr{E}=Nh\nu V$，单位时间中损耗的光能为

$$P=-\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t}=-h\nu V\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

由于腔的时间常数为 τ_R，则腔中光子数密度随时间的变化关系为

$$N=N_0\exp\left(-\frac{t}{\tau_R}\right)$$

其中 N_0 为 $t=0$ 时刻的光子数密度。于是有

$$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\tau_R}N$$

将以上结果代入 P 的表达式，再代入 Q 的定义式则有

$$Q=2\pi\nu\frac{Nh\nu V}{h\nu V\dfrac{1}{\tau_R}N}=2\pi\nu\tau_R$$

□

三、综合题

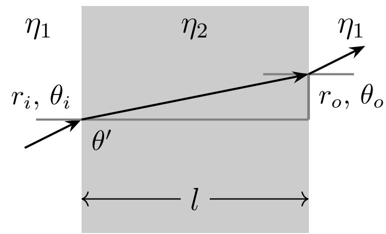
12. 某激光器的谐振腔为共轴球面腔，其中左腔镜为曲率半径为 1 m 的凸面镜，右腔镜为曲率为 2 m 的凹面镜。工作介质由长度为 0.5 m 折射率为 $\eta=1.5$ 的钕玻璃棒构成。钕玻璃棒的轴线与谐振腔轴线重合，两端面均为平面且与轴线垂直。

(1) 请写出工作介质棒对傍轴光线的变换矩阵；

(2) 求腔长 L 在什么范围内该腔是稳定腔。

解：

(1) 如右图所示，一条傍轴光线穿过工作介质棒。光线进入工作介质棒前与透出工作介质棒后的光线参数分别为



$$\begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_o \\ \theta_o \end{pmatrix}$$

由于工作介质棒两端面相互平行且两侧折射率相同，出射光线与入射光线相互平行，因此 $\theta_o = \theta_i$。从图中几何关系可以看出，出射光线的离轴距离

$$r_o = r_i + l\tan\theta' \approx r_i + l\theta'$$

在入射面处，利用折射定律可知，$\eta_1 \sin\theta_i = \eta_2 \sin\theta'$。在傍轴情况下，该式可表示为 $\eta_1\theta_i = \eta_2\theta'$。于是有 $\theta' = \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\theta_i$，进而可得

$$r_o = r_i + \frac{\eta_1}{\eta_2} l\theta_i$$

于是光线参数之间的关系可表示为

$$\begin{pmatrix} r_o \\ \theta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

因此，工作介质棒对傍轴光线的变换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 设工作介质棒左右端面到左右腔镜的距离分别为 l_1 与 l_2。从左腔镜经工作介质棒到右腔镜的光线传播矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L - l + \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意到 $l_1 + l_2 = L - l$。由上式可以看出，腔的等效腔长为 $L - l + \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l$。这时腔的稳定性条件可表示为

$$0 < \left(1 - \frac{L - l + \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L - l + \dfrac{\eta_1}{\eta_2} l}{R_2}\right) < 1$$

其中 R_1 与 R_2 分别代表左右两腔镜的曲率半径。

已知 $R_1 = -1\,\mathrm{m}$，$R_2 = 2\,\mathrm{m}$，$l = 0.5\,\mathrm{m}$，$\eta_1 = 1$，$\eta_2 = 1.5$，代入以上不等式求解得，当腔长满足

$$\frac{7}{6}\,\mathrm{m} < L < \frac{13}{6}\,\mathrm{m} \quad (1.17\,\mathrm{m} < L < 2.17\,\mathrm{m})$$

时，该激光谐振腔为稳定腔。