河北大学 物理科学与技术学院《激光原理》测试题

第 二 章 开放式光腔与高斯光束

一、简答题

1. 什么是高斯光束的自再现变换？球面反射镜对高斯光束实现自再现变换的条件是什么？

答：如果一个高斯光束通过某个光学系统后其结构不发生变化，则称这种变换为自再现变换。当入射在球面镜上的高斯光束波前曲率半径正好等于球面镜的曲率半径时，即反射镜与高斯光束的波前相匹配时，球面反射镜对该高斯光束可以实现自再现变换。

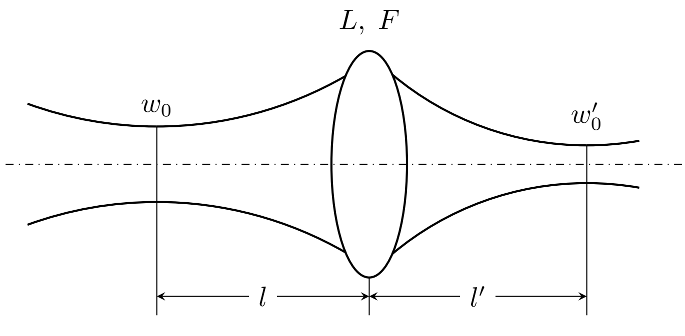
二、证明题

2. 利用单凸透镜对基模高斯光束进行变换，入射高斯光束与透镜共轴。若高斯光束的光腰半径为 w_0，光腰与透镜的距离为 l，透镜的焦距为 F，试利用 $ABCD$ 公式求证出射高斯光束的光腰半径

$$w_0'^2 = \frac{F^2 w_0^2}{(F-l)^2 + \left(\dfrac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

证明：设出射高斯光束的光腰与透镜的距离为 l'，则自入射高斯光束光腰面至出射高斯光束的光腰面的傍轴光线变换矩阵可表示为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{l'}{F} & l' + l\left(1-\dfrac{l'}{F}\right) \\ -\dfrac{1}{F} & 1-\dfrac{l}{F} \end{pmatrix}$$



由 q 参数的定义

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi w^2}$$

可知入射高斯光束光腰处的 q 参数为 $q_0 = i\dfrac{\pi w_0^2}{\lambda}$。注意到光腰处的高斯光束的等相面曲率半径为 ∞。利用 $ABCD$ 公式可以得到出射高斯光束光腰处的 q 参数为

$$q_0' = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$$

则 q_0' 的倒数为

$$\frac{1}{q_0'}=\frac{Cq_0+D}{Aq_0+B}$$

由于 q_0' 为出射高斯光束的光腰处的 q 参数，$1/q_0'$ 的实部应为 0，即

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{q_0'}\right\}=0$$

则有

$$l'=F+\frac{(l-F)F^2}{(l-F)^2+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

将 l' 代回到 $1/q_0'$ 中，再考虑到 q 参数的定义，即可得到

$$w_0'^2=\frac{F^2w_0^2}{(F-l)^2+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

□

3. 求证以基模高斯光束任意两个等相面为镜面所构的光腔均为稳定腔。

证明：设基模高斯光束沿 z 轴正向传播，光腰位于坐标原点，高斯光束的共焦参数为 f。现任取基模高斯光束的两个等相面 c_1 与 c_2，两等相面的顶点分别位于 z_1 与 z_2 处。

两个等相面 c_1 与 c_2 的曲率半径分别为 $R(z_1)=\left(z_1+\frac{f^2}{z_1}\right)$ 和 $R(z_2)=\left(z_2+\frac{f^2}{z_2}\right)$。若以等相面 c_1 为左腔镜，等相面 c_2 为右腔镜，构成光腔。注意到球面腔曲率半径 R 的符号规定：当凹面镜向着腔内时，R 取正值，而当凸面镜向着腔内时，R 取负值。于是，两腔镜的曲率分别为

$$\begin{aligned}R_1&=-R(z_1)=-\left(z_1+\frac{f^2}{z_1}\right)\\R_2&=R(z_2)\quad=\left(z_2+\frac{f^2}{z_2}\right)\end{aligned}$$

而光腔的腔长为 $L=z_2-z_1$。光腔的 g 参数可表示为 $g_1=1-\frac{L}{R_1}$ 和 $g_2=1-\frac{L}{R_2}$。考虑到

$$g_1g_2=\left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right)=\frac{R_1-L}{R_1}\frac{R_2-L}{R_2}=\frac{\left(z_1z_2+f^2\right)^2}{\left(z_1^2+f^2\right)\left(z_2^2+f^2\right)}$$

由上式可知，$0<g_1g_2<1$，满足稳定性条件。因此，以基模高斯光束任意两个等相面为镜面所构的光腔均为稳定腔。 □

4. 某稳定共轴球面腔左右两球面反射镜的曲率半径分别为 R_1 与 R_2，腔长为 L。求证能够在该腔中实现自再现变换的高斯光束在腔镜处的等相面曲率半径等于腔镜的曲率半径。(利用高斯光束 q 参数)

证明：若腔内某参考面处的高斯光束的 q 参数记为 q_m，在腔内往返一周后的 q 参数记为 q_m'。设从该参考面处出发在腔内往返一周的光线变换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

则由高斯光束变换的 $ABCD$ 法则可知

$$q_m'=\frac{Aq_m+B}{Cq_m+D}$$

由于该高斯光束可以在腔中实现自再现变换，因此 $q_m'=q_m$。于是有

$$q_m=\frac{Aq_m+B}{Cq_m+D}$$

由该式可解得 (考虑到 $|T|=1$)

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{q_m}\right\}=\frac{D-A}{2B}$$

由 q 参数的定义可知，高斯光束等相面曲率半径 R_m 与 q_m 满足 $\dfrac{1}{R_m}=\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{q_m}\right\}$。于是有

$$R_m=\frac{2B}{D-A}$$

当参考面选为左腔镜前表面时，光线变换矩阵为

$$T=T_{R_1}T_LT_{R_2}T_L=\begin{pmatrix} 1-\frac{2L}{R_2} & 2L\left(1-\frac{L}{R_2}\right) \\ -\left[\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}\left(1-\frac{2L}{R_1}\right)\right] & -\left[\frac{2L}{R_1}-\left(1-\frac{2L}{R_1}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right] \end{pmatrix}$$

这时 $R_m=-R_1$，即在左端腔镜处自再现高斯光束的等相面曲率半径与腔镜的曲率半径大小相等。注意负号是由于等相曲率半径与左端腔镜曲率半径的符号规定不同而引入。

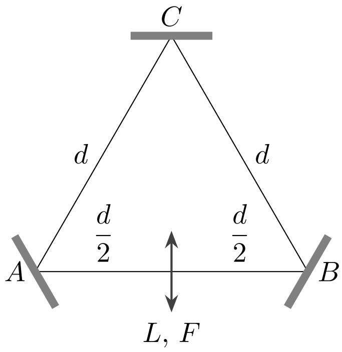
当参考面选为右腔镜前表面时，光线变换矩阵为

$$T=T_LT_{R_1}T_LT_{R_2}=\begin{pmatrix} -\left[\frac{2L}{R_2}-\left(1-\frac{2L}{R_1}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right] & 2L\left(1-\frac{L}{R_1}\right) \\ -\left[\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}\left(1-\frac{2L}{R_1}\right)\right] & 1-\frac{2L}{R_1} \end{pmatrix}$$

这时 $R_m=R_2$，即在右端腔镜处自再现高斯光束的等相面曲率半径与腔镜的曲率半径大小相等。

三、综合题

5. 如右图所示，由三块平面反射镜和一块凸透镜构成折叠腔，其中平面镜间的距离相等均为 d，透镜 L 的焦距为 F。



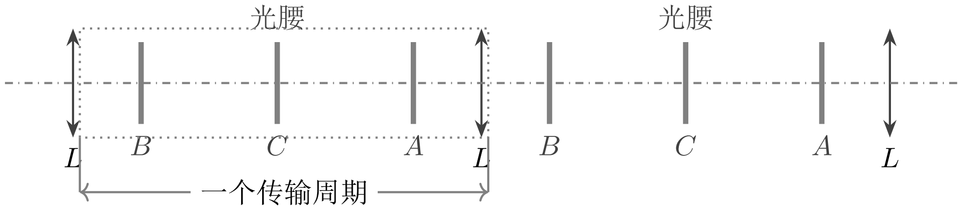
(1) 试画出折叠腔的等效透镜序列。如果光线从薄透镜右侧开始，逆时针传播，请标出一个传输周期；

(2) 求当 d/F 满足什么条件时，该谐振腔为稳定腔；

(3) 当谐振腔为稳定腔时，试指出该腔中高斯光束的光腰位置。

解：

(1) 该谐振腔的等效透镜序列如下图所示。在图中也标出了光线的一个传输周期。



(2) 该该谐振腔中一个传输周期内的光线变换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{F} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3d\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3d\\ -\dfrac{1}{F} & 1-\dfrac{3d}{F}\end{pmatrix}$$

由稳定性条件

$$-1<\frac{A+D}{2}<1$$

知，该腔为稳定腔的条件为

$$-1<\frac{1+1-\dfrac{3d}{F}}{2}<1$$

由上式可得谐振腔为稳定腔时，应满足

$$0<\frac{d}{F}<\frac{4}{3}$$

(3) 此腔可等效为对称球面腔，当谐振腔为稳定腔时，该腔中高斯光束的光腰位于平面镜 C 的表面上。