

河北大学 物理科学与技术学院《激光原理》测试题

第三章 电磁场和物质的共振相互作用

一、简答题

1. 什么是谱线加宽？如何来描述谱线加宽现象？

答：实际工作物质由于受到各种因素的影响，自发辐射并不是单色的，而是分布在中心频率附近的一个频率范围内，这种现象称为谱线加宽。通常采用自发辐射光功率按频率的归一化分布函数，又称为线型函数，来描述谱线加宽的具体行为。

2. 谱线均匀加宽的特点是什么？若均匀加宽线宽为 $\Delta\nu_H$ ，试写均匀加宽的线型函数。试举两个造成谱线均匀加宽的因素。

答：谱线均匀加宽的特点是引起加宽的物理因素对每个原子（分子、离子）都是等同的，每一个发光原子对光谱线内任一频率都有贡献。若线宽为 $\Delta\nu_H$ ，其线型函数可表示为

$$\tilde{g}_H(\nu, \nu_0) = \frac{\frac{\Delta\nu_H}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2}\right)^2}$$

由于激发态具有有限的能级寿命引起的自然加宽与分子热运动引起的碰撞加宽都属于均匀加宽。

3. 谱线非均匀加宽的特点是什么？试举两个造成谱线非均匀加宽的因素。

答：非均匀加宽的特点是原子（分子、原子）体系中每个原子只对谱线内与它的表现中心频率相应的部分有贡献，因而可以区分谱线上的某一频率范围是由哪一部分原子发射的。气体工作物质中的多普勒加宽和固体工作物质中的晶格缺陷加宽均属于非均匀加宽类型。

4. 多普勒加宽是气体工作物质的一种主要加宽机制，试定性解释多普勒加宽产生的原因。

答：考虑到光学多普勒效应，当原子在光传输的方向上的运动速度为 v_z 时，原子自发辐射和受激跃迁时表现出来的中心频率不再是静止时的中心频率 ν_0 ，而是表现中心频率 $\nu'_0 = \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)$ ， $\frac{v_z}{c} \ll 1$ 。由于气体原子总在做热运动，且原子数按热运动速度的分布服从麦克斯韦速度分布律，从而导致了谱线的非均匀加宽，称为多普勒加宽，其线型函数为高斯函数。

5. 什么是总量子效率？试以四能级系统为例解释总量子效率的意义。

答：在四能级系统中， E_3 能级到 E_2 能级无辐射跃迁的量子效率为 $\eta_1 = \frac{S_{32}}{S_{32} + A_{30}}$ ， E_2 能级到 E_1 能级跃迁的荧光效率为 $\eta_2 = \frac{A_{21}}{A_{21} + S_{21}}$ ，则总量子效率为 η_F 为 $\eta_F = \eta_1 \eta_2$ 。总量子效率的意义为：由光泵抽运到 E_3 的粒子，只有一部分通过无辐射跃迁到达激光上能级 E_2 ，另一部分通过其它途径返回基

态。而到达 E_2 能级的粒子，也只有一部分通过自发辐射跃迁到 E_1 能级并发射荧光，其余粒子通过无辐射跃迁到达 E_1 能级。因此，总量子效率可表示为

$$\eta_F = \frac{\text{发射荧光的光子数}}{\text{工作物质从光泵吸收的光子数}}$$

6. 什么是均匀加宽工作物质的反转集居数饱和现象？试解释其产生原因。

答：对于连续泵浦的均匀加宽工作物质，当入射信号光的强度 I_ν 可以与其饱和光强 $I_s(\nu)$ 相比拟时，反转粒子数密度 Δn 会随入射信号光强度 I_ν 的增加而减小。这种现象称为反转粒子数饱和。当入射信号比较弱时，受激跃迁过程对反转粒子数密度 Δn 的影响可以忽略。但是当入射信号光增大一定程度时，受激跃迁几率可以与激光上能级的自发辐射与无辐射跃迁几率相比拟，受激跃迁过程的总效果会使反转粒子数密度 Δn 减少。这就表现为反转粒子数饱和。

7. 什么是增益饱和？均匀加宽工作物质的增益饱和与非均匀加宽工作物质的增益饱和的基本特征是什么。

答：当信号光强度 I_ν 与工作物质的饱和光强 $I_s(\nu)$ 相比拟时，增益系数 $g(\nu, I_\nu)$ 将随信号光强度 I_ν 的增加而减少。这就是增益饱和现象。对于均匀加宽工作物质，饱和效应的强弱与入射光的频率 ν 有关，当入射光频率 ν 越靠近增益曲线中心频率 ν_0 ，饱和效应越强。当频率为 ν 的强信号光入射会使其它所有频率处的弱信号光的增益系数也以同等程度下降。对于非均匀加宽工作物质，饱和效应的强弱与入射光的频率 ν 无关。当频率为 ν 的强信号光入射仅会使该频率附近的弱信号光的增益系数下降，呈现出烧孔现象。

8. 请简述非均匀加宽工作物质的增益系数的计算方法。

答：对非均匀加宽工作物质，在计算增益系数时，必须将粒子按其表现中心频率分类，表现中心频率在 $\nu'_0 \sim \nu'_0 + d\nu'_0$ 范围内的粒子发射一条中心频率为 ν'_0 ，线宽为 $\Delta\nu_H$ 的均匀加宽谱线。这部分粒子对增益系数的贡献 dg 可按均匀加宽增益系数表达式计算，总的增益系数应是具有各种表现中心频率的全部粒子贡献的总和。

9. 解释单纵模多普勒加宽气体激光器（驻波腔）中反转粒子数烧孔效应。

答：令 ϕ_1 表示频率为 ν_1 的某纵模，沿 z 轴正向传播的光束用 ϕ_1^+ 表示，沿 z 轴反向传播的光束用 ϕ_1^- 表示。沿 z 轴正向传播的光波与中心频率为 ν_0 并具有 z 向分速度 v_z 的运动原子作用时，原子的表现中心频率为

$$\nu'_0 = \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right)$$

如果 $\nu_1 = \nu'_0$ ，则 ϕ_1^+ 将引起速度 $v_z = c(\nu_1 - \nu_0)/\nu_0$ 的粒子受激辐射；同理 ϕ_1^- 引起速度 $v_z = -c(\nu_1 - \nu_0)/\nu_0$ 的粒子受激辐射。于是纵模 ϕ_1 将在 $\Delta n(v_z) \sim v_z$ 的曲线上出现两个烧孔。由于运动速度 $v_z = -c(\nu_1 - \nu_0)/\nu_0$ 的粒子的表现中心频率为 $2\nu_0 - \nu_1$ 。因此，纵模 ϕ_1 在 $\Delta n(\nu'_0) \sim \nu'_0$ 的曲线上也引起两个烧孔，中心分别处于 ν_1 和 $2\nu_0 - \nu_1$ ，即两烧孔关于 ν_0 对称。当 $\nu_1 = \nu_0$ 时两烧孔将重合。

二、证明题

10. 若某物质原子跃迁上能级与跃迁下能级的自发辐射寿命分别为 τ_{s_2} 与 τ_{s_1} ，试用量子力学的不确定关系求证该物质的自然加宽的线宽为

$$\Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_{s_2}} + \frac{1}{\tau_{s_1}} \right)$$

证明：原子在能级上的有限寿命所引起的谱线加宽也是量子力学不确定关系的直接结果。若将 τ_{s_i} 理解为原子的时间不确定度，于是原子因自发辐射引起的能量不确定度为

$$\Delta E_i \approx \frac{\hbar}{\tau_{s_i}}$$

当跃迁上下能级的自发辐射寿命分别 τ_{s_2} 与 τ_{s_1} 时，跃迁上下能级的能量不确定度分别为

$$\Delta E_2 \approx \frac{\hbar}{\tau_{s_2}} \quad \Delta E_1 \approx \frac{\hbar}{\tau_{s_1}}$$

于是，原子发光具有的频率不确定量应该为

$$\Delta\nu = \Delta \left(\frac{E_2 - E_1}{h} \right) = \frac{\Delta E_2 + \Delta E_1}{h} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_{s_2}} + \frac{1}{\tau_{s_1}} \right)$$

从谱线加宽的角度来理解，原子发光的频率不确定量就是自然加宽线宽，即

$$\Delta\nu_N = \Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_{s_2}} + \frac{1}{\tau_{s_1}} \right)$$

□

11. 已知气体原子在温度为 T 的热平衡状态下，其热运动速度服从麦克斯韦统计分布，原子数按速度 v_z 的分布函数为

$$p(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_b T}} \exp \left(-\frac{mv_z^2}{2k_b T} \right)$$

其中 m 为气体原子质量， k_b 为玻尔兹曼常数。求证多普勒加宽的线型函数为

$$\tilde{g}_D(\nu, \nu_0) = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_b T}} \exp \left[-\frac{mc^2}{2k_b T \nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2 \right]$$

证明：已知原子数按速度 v_z 的分布函数为

$$p_{v_z}(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_b T}} \exp \left(-\frac{mv_z^2}{2k_b T} \right)$$

由于多普勒效应，当原子沿 z 方向的运动速度为 v_z 时，原子的表现中心频率为

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right), \quad v_z \ll c$$

将运动速度 v_z 表示为表现中心频率 ν 的函数

$$v_z = \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0)$$

于是有 $\frac{dv_z}{d\nu} = \frac{c}{\nu_0}$ 。由概率密度公式可知，原子数按表现中心频率的分布函数为

$$p_\nu(\nu) = p_{v_z} \left[\frac{c}{\nu_0}(\nu - \nu_0) \right] \left| \frac{dv_z}{d\nu} \right| = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_b T}} \exp \left[-\frac{mc^2}{2k_b T \nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2 \right]$$

由于自发辐射光功率 $P(\nu)$ 与原子密度成正比，因此自发辐射光功率按表现中心频率的分布与原子数的分布一致。按照线型函数的定义，线型函数就是自发辐射光功率按表现中心频率的分布函数。因此，多普勒加宽的线型函数 $\tilde{g}_D(\nu, \nu_0)$ 为

$$\tilde{g}_D(\nu, \nu_0) = p_\nu(\nu) = \frac{c}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_b T}} \exp \left[-\frac{mc^2}{2k_b T \nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2 \right]$$

□

12. 在频率为 ν 的单模光场的作用下，受激跃迁概率为 $W_{21} = B_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)Nh\nu$ ，其中 N 为该单模光场的光子数密度。试从爱因斯坦系数之间的关系证明：分配在一个模式中的自发辐射跃迁概率等于在此模式中的一个光子引起的受激跃迁概率。

证明：考虑到爱因斯坦系数之间满足 $B_{21} = \frac{A_{21}}{n_\nu h\nu}$ ，于是受激跃迁概率可表示为

$$W_{21} = \frac{A_{21}}{n_\nu h\nu} \tilde{g}(\nu, \nu_0) Nh\nu = \frac{A_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)}{n_\nu V} NV$$

其中 V 为光腔体积。于是有

$$\frac{W_{21}}{NV} = \frac{A_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)}{n_\nu V}$$

上式右侧分式中的 $A_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)$ 代表分配到频率为 ν 处单位频带内的自发辐射概率，而 $n_\nu V$ 代表频率为 ν 处单位频带内的光波模式数，所以 $\frac{A_{21}\tilde{g}(\nu, \nu_0)}{n_\nu V}$ 代表分配在光腔内频率为 ν 处一个模式内的自发辐射概率。而等式左侧中 NV 代表光腔中频率 ν 处一个模式内的光子数，于是 $\frac{W_{21}}{NV}$ 代表频率 ν 处一个模式内的一个光子引起的受激跃迁概率。于是该等式说明分配在一个模式中的自发辐射跃迁概率等于在此模式中一个光子引起的受激跃迁概率。 □

13. 试用速率方程理论证明，采用光泵浦的方法不能在二能级系统中实现集居数反转（设两能级简并度均为 1）。

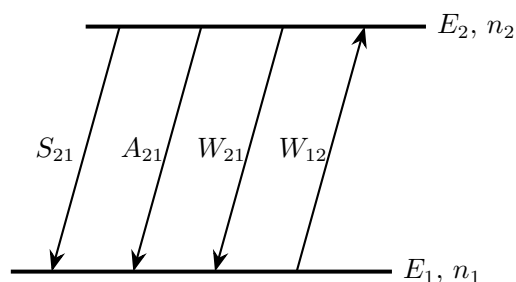
证明：两能级系统的跃迁过程如右图所示，其中

W_{12} 描述光泵浦过程

A_{21} 上能级向下能级的自发辐射过程

S_{21} 上能级向下能级的无辐射跃迁过程

W_{21} 上能级向下能级的受激辐射跃迁过程



上能级粒子数密度随时间的变化速率为

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2 (A_{21} + S_{21})$$

在稳定泵浦的情况下，各能级上的粒子数密度保持稳定，应有 $\frac{dn_2}{dt} = 0$ 。于是

$$0 = n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2 (A_{21} + S_{21})$$

因此可以得到

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{W_{12}}{W_{21} + (A_{21} + S_{21})}$$

其中受激吸收跃迁概率 $W_{12} = B_{12}\rho_\nu$ ，受激跃迁概率 $W_{21} = B_{21}\rho_\nu$ 。由于两能级简并度相同，于是有 $B_{12} = B_{21}$ 由于两能间的受激吸收与受激跃迁均是由泵浦光即引起的，两跃迁概率中的单色能量密度 ρ_ν 也相同。综上可知， $W_{12} = W_{21}$ 。于是有

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{W_{12}}{W_{21} + (A_{21} + S_{21})} < 1$$

因此，在二能级系统中采用光泵浦的方法不能实现集居数反转。 □

三、综合题

14. 速率方程是用于研究激光物理现象的一种重要理论方法：

- (1) 作出激光三能级系统能级跃迁示意图，并说明有关物理量的含义；
- (2) 请写出三能级系统的速率方程组。

解：

- (1) 激光三能级系统主要的跃迁情况，如右图所示，其中：

W_{13} 描述激励过程

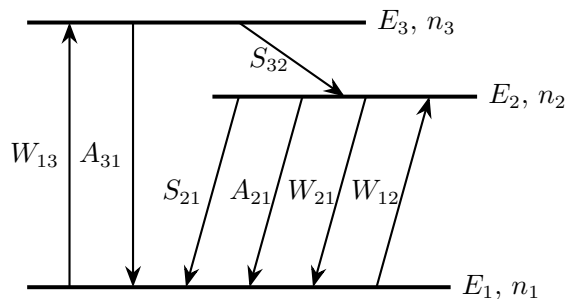
A_{31} 由于自发辐射所引起的消激励过程

S_{32} 高能级向激光上能级的无辐射跃迁过程

A_{21} 激光上能级向激光下能级的自发辐射过程

S_{21} 激光上能级向激光下能级的无辐射跃迁过程

W_{21}, W_{12} 激光上下能级间的受激跃迁过程



- (2) 三能级的速率方程组为：

$$\begin{aligned} \frac{dn_3}{dt} &= n_1 W_{13} - n_3 (S_{32} + A_{31}) \\ \frac{dn_2}{dt} &= - \left(n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1 \right) \sigma_{21}(\nu, \nu_0) v N - n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} \\ n &= n_1 + n_2 + n_3 \\ \frac{dN}{dt} &= \left(n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1 \right) \sigma_{21}(\nu, \nu_0) v N - \frac{N}{\tau_R} \end{aligned}$$

15. 速率方程是用于研究激光物理现象的一种重要理论方法：

- (1) 作出激光四能级系统能级跃迁示意图，并说明有关物理量的含义；
- (2) 请写出四能级系统的速率方程组。

解：

- (1) 激光四能级系统主要的跃迁情况，如右图所示，其中：

W_{03} 描述激励过程

A_{30} 由于自发辐射所引起的消激励过程

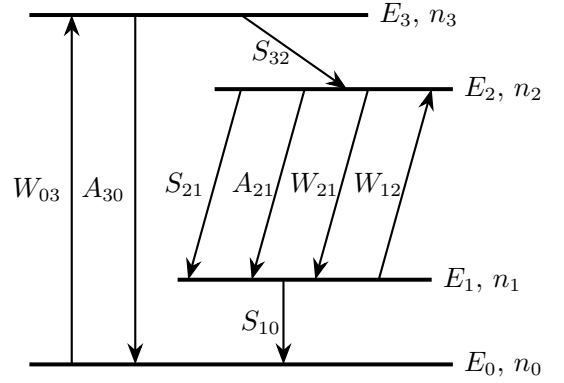
S_{32} 高能级向激光上能级的无辐射跃迁过程

A_{21} 激光上能级向激光下能级的自发辐射过程

S_{21} 激光上能级向激光下能级的无辐射跃迁过程

W_{21}, W_{12} 激光上下能级间的受激跃迁过程

S_{10} 激光下能级向基态能级的无辐射跃迁过程



- (2) 四能级的速率方程组为：

$$\begin{aligned}\frac{dn_3}{dt} &= n_0 W_{03} - n_3 (S_{32} + A_{30}) \\ \frac{dn_2}{dt} &= - \left(n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1 \right) \sigma_{21}(\nu, \nu_0) v N - n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} \\ \frac{dn_0}{dt} &= n_1 S_{10} - n_0 W_{03} + n_3 A_{30} \\ n &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \\ \frac{dN}{dt} &= \left(n_2 - \frac{f_2}{f_1} n_1 \right) \sigma_{21}(\nu, \nu_0) v N - \frac{N}{\tau_R}\end{aligned}$$

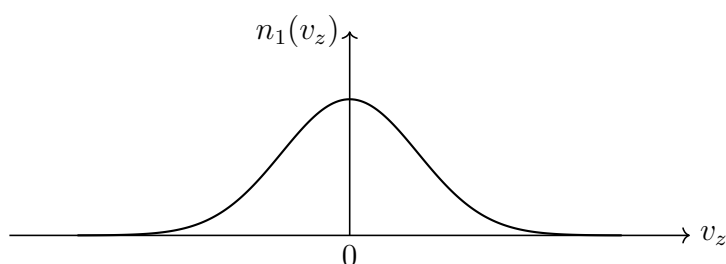
其中 N 为光子数密度。

16. 某种多普勒加宽气体吸收物质被置于驻波腔中，设吸收谱线对应的能级为 E_2 与 E_1 （基态），中心频率为 ν_0 ，线宽为 $\Delta\nu_D$ 。如果光腔中存在频率为 ν 的单模光波场，试定性画出下列情况下基态粒子数密度按速度的分布函数 $n_1(v_z)$ ，并给出说明。

- (1) $\nu \gg \nu_0$ ；
- (2) $\nu - \nu_0 = \frac{1}{2}\Delta\nu_D$ ；
- (3) $\nu = \nu_0$ 。

解：

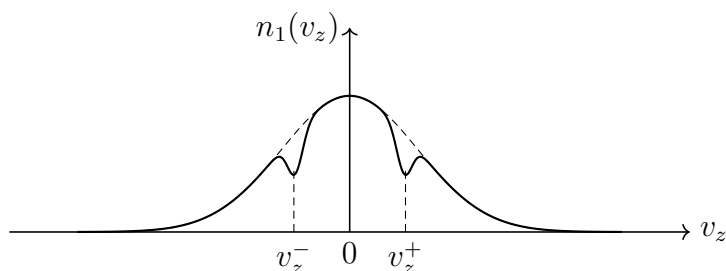
- (1) 由于单模光场的频率远大于吸收气体的中心频率，气体不会吸收光场。因此，当 $\nu \gg \nu_0$ 时，基态粒子数密度按速度的分布函数 $n_1(v_z)$ 服从麦克斯韦分布，称现高斯线型，如下图所示。



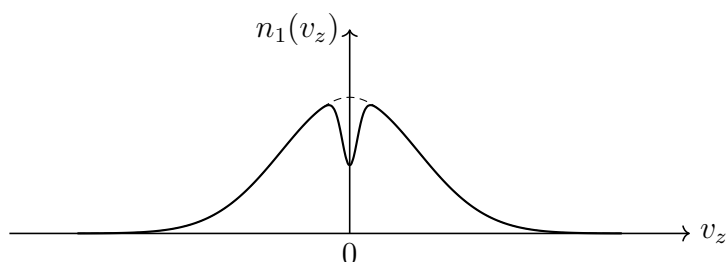
- (2) 当 $\nu - \nu_0 = \frac{1}{2}\Delta\nu_D$ 时, 由于多普勒加宽, 表现中心频率 $\nu'_0 = \nu$ 的气体原子会吸收单模光场从基态 E_1 跃迁到高能级 E_2 , 引起粒子数减少, 从而使得高斯型的分布曲线上出现烧孔。对于沿腔轴正向传播的光波引起的烧孔位置应满足

$$\nu_0 \left(1 + \frac{v_z^+}{c} \right) = \nu$$

而 $\nu = \nu_0 + \frac{1}{2}\Delta\nu_D$, 可得 $v_z^+ = c \frac{\Delta\nu_D}{2\nu_0}$; 类似, 对于沿腔轴反向传播的光波引起的烧孔位置为 $v_z^- = -c \frac{\Delta\nu_D}{2\nu_0}$ 。这时分布曲线如下图所示。



- (3) 当 $\nu = \nu_0$ 时, 沿腔轴正向传播的光波与沿腔轴反向传播的光波均使得 $v_z = 0$ 的气体原子跃迁, 它们所引起的烧孔重合。这时分布曲线如下图所示。



17. 室温下红宝石的一些跃迁概率数据如下: $S_{32} \approx 0.5 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, $A_{31} \approx 3 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$, $A_{21} \approx 0.3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, $S_{21}, S_{31} \approx 0$ 。红宝石工作介质激光上下能级的简并度 $f_1 = f_2 = 4$ 。在连续泵浦下, 试估算抽运概率 W_{13} 为多大时, 红宝石工作物质对波长为 694.3 nm 的弱光信号是透明的。简明起见, 计算中忽略各种损耗。

解:

若红宝石工作物质对中心波长的弱光信号是透明的, 则受激辐射跃迁引起的光子数的增加与受激吸收引起的光子数减少速率相等, 而 $f_1 = f_2$, 则必有 $n_2 = n_1$ 。这时红宝石各能级上粒子数密度的变化速

率可表示为

$$\begin{aligned}\frac{dn_3}{dt} &= n_1 W_{13} - n_3 (S_{32} + A_{31}) \\ \frac{dn_2}{dt} &= -n_2 (A_{21} + S_{21}) + n_3 S_{32} \\ n &= n_1 + n_2 + n_3 \\ n_1 &= n_2\end{aligned}$$

在连续工作状态下, 应有

$$\frac{dn_3}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$$

综上, 即可解出抽运概率

$$W_{13} = (A_{21} + S_{21}) \left(\frac{S_{32} + A_{31}}{S_{32}} \right)$$

将各跃迁概率数据代入则有 $W_{13} = 0.318 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 。因此, 当抽运概率为 $W_{13} = 0.318 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ 时, 红宝石工作物质对波长为 694.3 nm 的弱光信号是透明的。

18. 有一块圆柱形端面抛光红宝石样品, 已知该红宝石样品中铬离子密度 $n = 1.9 \times 10^{19} / \text{cm}^3$, 在 694.3 nm 处的荧光线宽 $\Delta\nu_F = 3.3 \times 10^{11} \text{ Hz}$ 。实验室有以下仪器: 光源一个, 单色仪一台, 光电倍增管及其电源一套, 微安表一块, 直尺一把。试用实验室现有仪器测量出该红宝石样品的吸收截面和自发辐射寿命。(跃迁上下能级简并度相等, 红宝石的折射率为 $\eta = 1.76$)

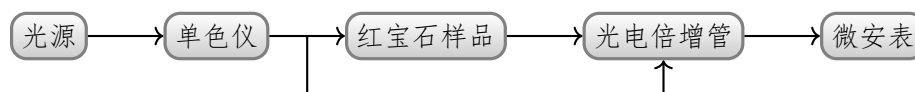
(1) 请画出实验方框图并说明实验步骤;

(2) 阐明实验原理并给出计算公式。

注: 均匀工作质中心频率处的发射截面为 $\sigma_{21} = \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 \nu_0^2 \Delta\nu_F}$ 。

解:

(1) 实验方框图如下



实验步骤如下:

1. 利用直尺测量红宝石棒的长度 l ;
2. 打开光源, 并将光束准直送入单色仪;
3. 调整单色仪, 选出中心波长为 694.3 nm 的准单色光;
4. 使准直后的 694.3 nm 的准单色光沿红宝石棒的轴线入射至红宝石样品;
5. 将光电倍增管与微安表的组合在一起构成光功率计;
6. 将光源亮度调整到合适大小, 然后利用光计功率计分别测量入射至红宝石样品前与从红宝石样品穿出后的光束强度, 分别记为 I_{i1} 与 I_{o1} ;
7. 减小光源亮度, 再次进行测量, 分别记为 I_{i2} 与 I_{o2} , 然后再逐渐减小光源亮度, 测量 N 组实验数据;

8. 关闭各仪器电源，整理实验器材。

- (2) 由于 694.3 nm 为红宝石介质激光上下能级的跃迁的中心波长，当波长为 694.3 nm 的光波通过该介质时会发生受激吸收，吸收系数为

$$\alpha = n\sigma_{12}$$

其中 n 为红宝石中 Cr^{3+} 离子的粒子数密度（这里假定热平衡状态下， Cr^{3+} 离子全部位于基态）， σ_{12} 为红宝石的吸收截面。当入射光强远小于红宝石的饱和光强时，出射光强 I_o 与入射光强 I_i 的关系为

$$I_o = I_i e^{-\alpha l} = I_i e^{-n\sigma_{12}l}$$

其中 l 为红宝石棒的长度。进而有

$$e^{-n\sigma_{12}l} = \frac{I_o}{I_i}$$

由此可以看出，出射光强 I_o 与入射光强 I_i 成正比。因此，将测量得到的 N 组光强数据画图，观察 I_o 随 I_i 的变化情况，截取出线性部分。而后对其进行拟合，计算斜率 k 。于是有

$$e^{-n\sigma_{12}l} = k$$

最终可得到吸收截面 $\sigma_{12} = -\frac{1}{nl} \ln(k)$ 。

由于红宝石介质激光上下能级简并度相同，其发射截面等于吸收截面，即 $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ 。又知发射截面可表示为

$$\sigma_{21} = \frac{v^2 A_{21}}{4\pi^2 \nu_0^2 \Delta\nu_F}$$

从而自发辐射寿命可表示为

$$\tau_{s_2} = \frac{1}{A_{21}} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 \eta^2 \sigma_{21} \Delta\nu_F} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 \eta^2 \sigma_{12} \Delta\nu_F}$$