

河北大学 物理科学与技术学院《激光原理》测试题

第一章 激光的基本原理

一、简答题

1. 什么是光波模式密度？试写出真空中 ν 频率处的光波模式密度。

答：在一个有边界限制的空间内，只能存在一系列独立的具有特定波矢的单色驻波。这种能够存在腔内的驻波称为光波模式。光波模式密度是指在单位体积的谐振腔内，处于某频率处单位频带宽度的模式数目。利用驻波条件可得到空腔中 ν 频率处的光波模式密度为 $n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ 。

2. 什么是光子简并度？光子简并度与光场相干性之间是什么关系？

答：处于同一光子态的光子数（或者说同一模式内的光子数）称为光子简并度。光场的相干性通常用相干光强描述。从相干性的光子描述出发相干光强决定于光子简并度。因此，光子简并度越大，光场的相干性越好。

3. 什么是单色能量密度？若在温度为 T 的热平衡状态下，黑体辐射源在频率 ν 处的光子简并度为 $\bar{n} = \left(e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1\right)^{-1}$ ，试写出黑体辐射源的单色能量密度。

答：单色能量密度的定义为：在单位体积内，频率处于 ν 附近的单位频率间隔中的电磁辐射能量。若在温度为 T 的热平衡状态下，黑体辐射分配到腔内每个模式上的平均能量为 $\mathcal{E} = h\nu\bar{n}$ ，而腔内单位体积中频率 ν 附近单位频率间隔内的光波模式数为 $n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ ，因此黑体辐射源的单色能量密度为

$$\rho_\nu = n_\nu \mathcal{E} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_b T}} - 1}$$

4. 光与原子相互作用包含哪三个基本过程？哪个过程是激光器的物理基础？

答：光与原子共振相互作用包含原子的自发辐射跃迁、受激辐射跃迁和受激吸收跃迁三种过程。这些相互作用中的受激辐射过程是激光器的物理基础。

5. 激光器一般包括哪三个基本单元？各单元的主要作用是什么？

答：激光器一般包括：谐振腔，工作物质与泵浦源三个基本单元。谐振腔的主要作用是提供轴向光波的正向反馈保证激光器的单模（或少数轴向模）振荡。工作物质是激光器的核心，为激光输出提供合适的工作能级。泵浦源的作用是给工作物质以能量，用以将原子由低能级激发到高能级。

二、证明题

6. 在两能级原子模型中，若原子从高能级 E_2 到低能级 E_1 的自发跃迁概率是 A_{21} 。试证明原子在 E_2 能级的自发辐射寿命 $\tau_{s_2} = \frac{1}{A_{21}}$ 。

证明：令 n_2 代表 t 时刻 E_2 能级上的粒子数密度，依自发跃迁概率的定义可知

$$\frac{dn_2}{n_2} = -A_{21}dt$$

两边进行定积分，并设 $t = 0$ 时刻处于 E_2 能级的粒子数密度为 n_{20} ，即

$$\int_{n_{20}}^{n_2(t)} \frac{dn_2}{n_2} = \int_0^t -A_{21}dt$$

于是有

$$n_2(t) = n_{20}e^{-A_{21}t}$$

在 $t \rightarrow t + dt$ 的时间内因自发辐射而减少的 E_2 能级的粒子数密度为

$$-dn_2 = A_{21}n_{20}e^{-A_{21}t}dt$$

这部分粒子的寿命为 t ，于是原子在 E_2 能级的自发辐射寿命为

$$\tau_{s_2} = \frac{1}{n_{20}} \int t(-dn_2) = \frac{1}{n_{20}} \int_0^\infty t A_{21}n_{20}e^{-A_{21}t}dt = \frac{1}{A_{21}}$$

因此，原子在 E_2 能级的自发辐射寿命 $\tau_{s_2} = \frac{1}{A_{21}}$ 。

□

7. 对于空腔体积为 V 的立方体，试用驻波条件求证空腔 V 内的每个模式在波矢空间中占有的体积元为 $\frac{\pi^3}{V}$ 。

证明：按照驻波条件，能够稳定存在于空腔 V 中的电磁波应满足沿腔往返一周相位落后应为 2π 的整数倍。设在直角坐标系 xyz 中空腔分别沿 x, y, z 的尺寸为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ，电磁波的波矢为 $\vec{k} = k_x\hat{e}_x + k_y\hat{e}_y + k_z\hat{e}_z$ 则驻条件的分量形式为

$$k_x 2\Delta x = m2\pi, \quad k_y 2\Delta y = n2\pi, \quad k_z 2\Delta z = q2\pi$$

其中 $m, n, q = 0, 1, 2, \dots$ 分别代表沿三边所含的半波数目。这时波矢 \vec{k} 所满足应满足

$$k_x = m \frac{\pi}{\Delta x}, \quad k_y = n \frac{\pi}{\Delta y}, \quad k_z = q \frac{\pi}{\Delta z}$$

每一组 m, n, q 对应腔内的一种模式（包含两个偏振）。

在由 k_x, k_y, k_z 所张开的波矢空间中，每个模式对应一个点，所有模式点呈周期性排列。每一模式沿 k_x, k_y, k_z 三个方向与相邻模式的间隔分别为

$$\Delta k_x = \frac{\pi}{\Delta x}, \quad \Delta k_y = \frac{\pi}{\Delta y}, \quad \Delta k_z = \frac{\pi}{\Delta z}$$

因此，每个模式在波矢空间的所占的体积为

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi}{\Delta x} \frac{\pi}{\Delta y} \frac{\pi}{\Delta z} = \frac{\pi^3}{V}$$

□

8. 按照驻波条件，能够稳定存在于空腔 V 中的每个模式（包含两个偏振）在波矢空间中所占的体积为 $\frac{\pi^3}{V}$ ，求证空腔 V 中处于 ν 频率附近单位频带内的模式数目为

$$N_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V$$

证明：

- 首先考虑，波矢大小处于 $|\vec{k}| \sim |\vec{k}| + d|\vec{k}|$ 区间的模式数。

在波矢空间中，波矢大小处于 $|\vec{k}| \sim |\vec{k}| + d|\vec{k}|$ 区间的体积为

$$4\pi |\vec{k}|^2 d|\vec{k}|$$

对于驻波模来说所有模式点只位于 $k_x k_y k_z$ 直角坐标系的第一个 1/8 相限，再考虑到一个空间模式包含 2 个偏振模。因此，波矢大小位于 $|\vec{k}| \sim |\vec{k}| + d|\vec{k}|$ 区间的模式数为

$$2 \times \frac{1}{8} \frac{4\pi |\vec{k}|^2 d|\vec{k}|}{\frac{\pi^3}{V}}$$

- 然后再考虑，频率位于 $\nu \sim \nu + d\nu$ 区间内的模式数。

由于 $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{c}\nu$ ，因此频率范围 $\nu \sim \nu + d\nu$ 对应波矢大小位于区间 $\frac{2\pi}{c}\nu \sim \frac{2\pi}{c}\nu + \frac{2\pi}{c}d\nu$ ，该区间在波矢空间所对应的体积为

$$4\pi \frac{4\pi^2}{c^2} \nu^2 \frac{2\pi}{c} d\nu$$

因此，其中的模式数为

$$2 \times \frac{1}{8} \frac{4\pi \frac{4\pi^2}{c^2} \nu^2 \frac{2\pi}{c} d\nu}{\frac{\pi^3}{V}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu$$

于是，在体积为 V 的空腔内 ν 频率处单位频带内的模式数目 N_ν 为

$$N_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V$$

□

三、综合题

9. 一弱光束通过一长度为 10cm、质地均匀的激光工作物质。未加泵浦时该材料对光的吸收为 0.1 cm^{-1} 。

(1) 请计算未加泵浦时出射光强与入射光强的百分比？

(2) 在均匀泵浦的情况下，如果出射光强是入射光强的 2.72 倍，试求该物质的增益系数。（假设光很弱，可以忽略增益或吸收的饱和效应）。

解:

(1) 已知吸收系数的定义为

$$\alpha = -\frac{\mathrm{d}I(z)}{I(z)\mathrm{d}z}$$

若设入射位置为 $z = 0$, 入射光强为 I_0 , 则有

$$\int_{I_0}^{I(z)} \frac{\mathrm{d}I(z)}{I(z)} = -\int_0^z \alpha \mathrm{d}z$$
$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

当 $\alpha = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $z = l = 10 \text{ cm}$ 时

$$\frac{I(l)}{I_0} = e^{-\alpha l} = e^{-10 \times 0.1} = \frac{1}{e} = 36.79\%$$

因此, 未加泵浦时出射光强为入射光强的 36.79%。

(2) 在均匀泵浦下, 光强随传播距离的变化关系可表示为

$$I(z) = I_0 e^{(g-\alpha)z}$$

当通过工作物质后, 出射光强为入射光强的 2.72 倍, 即

$$e^{(g-\alpha)l} = \frac{I(l)}{I_0} = 2.72$$

于是工作物质的增益系数为 $g = \alpha + \ln(2.72)/l = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ 。