2025 年 12 月 16 日作业 (截止: 2025 年 12 月 23 日 08:00)

1. 利用矩阵函数的围道积分定义证明 Cayley-Hamilton 定理.

2. 若 n 是正整数, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: $\det(\exp(A+B)) = \det(\exp(A))\det(\exp(B))$. 举例说明当 $n > 1$ 时 $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ 一般不成立.

3. 求一个 $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 使得 $\exp(A) = I_4$ 且 A 的每个分量都非零.

4. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且对任何 $t \in [0, +\infty)$ 都有 $\exp(tA) \geq 0$. 证明: A 的所有非对角元都非负.

5. 设 n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是非负矩阵. 证明:

$$\rho(A) \leq \rho\left(\frac{A + A^\top}{2}\right).$$

6. (选做) 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正矩阵, 证明:

$$\lim_{m\to\infty} (\mathrm{tr}(A^m))^{1/m} = \rho(A).$$

7. (选做) 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是双随机矩阵, $x \in \mathbb{R}^n$ 是非负向量, 且 $y = Ax$, 证明:

$$\prod_{j=1}^{n} y_j \geq \prod_{j=1}^{n} x_j,$$

这里 x_j, y_j 分别表示 x 和 y 的第 j 个分量.

参考答案

1.

证明.
$$\begin{aligned}p(A) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\det(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial\Omega}\operatorname{adj}(\lambda I-A)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$
由于 $\operatorname{adj}(\lambda I-A)$ 是关于 λ 的多项式矩阵, 在整个复平面上解析，故上式积分为零矩阵, 即 $p(A)=0$. □

2.

证明. 要证 $\det(\exp(A+B))=\det(\exp(A))\det(\exp(B))$，我们只需证
$$\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_i(A+B)}=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_i(A)}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\lambda_i(B)},$$
只需证
$$\mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A+B)}=\mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)},$$
只需证
$$\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B),$$
该式显然成立。

我们知道当 A,B 乘法不可交换时，$\exp(A+B)\neq\exp(A)\exp(B)$ 一般成立。取
$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$
则
$$\exp(A+B)=\exp\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh 1&\sinh 1\\\sinh 1&\cosh 1\end{bmatrix},$$
而
$$\exp(A)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \exp(B)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},$$
故
$$\exp(A)\exp(B)=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\neq\exp(A+B).$$
□

3.

证明. 要使得 $\exp(A)=I_4$，A 的特征值需满足

$$\mathrm{e}^{\lambda_i}=1,\quad i=1,2,3,4.$$

取实数解 $\lambda_i=0$ 大约是不行的，因为这样会引入非常多零元素，最终很难满足“每个分量都非零”的要求。我们可以取复数解 $\lambda_i=2k\pi\mathrm{i}$，其中 k 是非零整数。选好特征值后，我们可以利用相似变换在零元素位置填充垃圾了。但是四阶矩阵相似变换计算量略大，有没有更简单的方法呢？

我们可以尝试递归构造策略。我们先构造一个二阶矩阵 $A_2\in\mathbb{R}^{2\times2}$，使得 $\exp(A_2)=I_2$ 且 A_2 的每个分量都非零。这个二阶矩阵 A_2 的特征值仍为 $2k\mathrm{i}$. 由于实矩阵的复特征值成对出现，A_2 的特征值只能是 $2k\mathrm{i},-2k\mathrm{i}$. 因此，我们可以从这个特征值的实表示入手，取

$$B=\begin{bmatrix}0 & 2\pi\\ -2\pi & 0\end{bmatrix}$$

然后利用相似变换填充垃圾。考虑

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$A_2=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}-2\pi & 2\pi\\ -2\pi & 4\pi\end{bmatrix}$$

显然 A_2 的每个分量都非零，且 $\exp(A_2)=I_2$. 现在考虑利用 Kronecker 乘积构造四阶矩阵。假设 $A=K\otimes A_2$ 符合要求，由 Kronecker 乘积的性质可知

$$\operatorname{spec}(A)=\{\lambda_i(K)\lambda_j(A_2):i,j\in\{1,2\}\}.$$

因此，K 的特征值必须是整数，以保证 A 的特征值仍然是 $2k\mathrm{i}$ 的形式。取

$$K=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

则 K 的特征值为 $2,2$，满足要求。最终我们得到

$$A=K\otimes A_2=\begin{bmatrix}-2\pi & 2\pi & 2\pi & -2\pi\\ -2\pi & 4\pi & 2\pi & 8\pi\\ -2\pi & 2\pi & -6\pi & 6\pi\\ -2\pi & 4\pi & -6\pi & 12\pi\end{bmatrix}$$

显然 A 的每个分量都非零，且 $\exp(A)=I_4$.

$\square$

4.

证明. 考虑
$$A = \lim_{t \to 0^+} \frac{\exp(tA) - I}{t}.$$
由于对于任意 $t \geq 0$，$\exp(tA) \geq 0$，故当 $t \to 0^+$ 时，$\exp(tA) - I$ 的非对角元均趋向于非负数。由此可知，A 的所有非对角元均非负. □

5.

证明. 由 Perron 定理，$\rho(A)$ 是 A 的一个特征值。设 x 是其单位特征向量，考虑 Rayleigh 商
$$\begin{aligned}\rho(A) &= x^\top Ax \\ &= \frac{(x^\top Ax) + (x^\top Ax)^\top}{2} \\ &= x^\top \frac{A + A^\top}{2} x \\ &\leq \rho\left(\frac{A + A^\top}{2}\right).\end{aligned}$$
□

6.

证明.
$$\text{LHS} = \lim_{m \to \infty} (\lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m)^{1/m} = \lambda_{\max}.$$
由 Perron 定理，$\lambda_{\max} = \rho(A)$，且 $\lambda_{\max}$ 是唯一模最大的特征值，故极限存在且等于 $\rho(A)$. □

7.

证明. 两边取对数，只需证
$$\sum_{j=1}^{n} \log y_j \geq \sum_{j=1}^{n} \log x_j.$$
由于 $y = Ax$，有
$$\log y_j = \log\left(\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} x_i\right)$$
由于对数函数是凹函数，利用 Jensen 不等式，有
$$\log y_j \geq \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \log x_i.$$

代入上式，得

$$\sum_{j=1}^{n} \log y_j \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \log x_i = \sum_{i=1}^{n} \log x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i.$$

因此

$$\prod_{j=1}^{n} y_j \geq \prod_{j=1}^{n} x_j.$$

□