

## Lecture 5 线性映射 — 2025.09.30

教授：邵美悦

*Scribe:* 两人间

## 1 大纲

1. 线性映射
2. Sherman-Morrison-Woodbury 公式

## 2 线性映射

**线性映射的定义** 我们常常遇到从一个向量空间到另一个向量空间的变换。例如，将某个二维向量逆时针旋转  $90^\circ$ ，或者将某个三维向量投影到  $xy$  平面上。现在我们聚焦一类特殊的变换：线性映射。

**定义 2.1** (线性映射). 设  $V$  和  $W$  是  $\mathbb{K}$  上的线性空间，设有映射  $L: V \rightarrow W$ ，若它满足以下两条性质：

1. 保持加法：对任意  $u, v \in V$ ，有  $L(u + v) = L(u) + L(v)$ ；
2. 保持数乘：对任意  $v \in V$  和  $\alpha \in \mathbb{K}$ ，有  $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ ；

则称  $L$  是从  $V$  到  $W$  的线性映射（或线性变换）。

特殊地，若  $V = W$ ，则称  $L$  是  $V$  上的线性算子。若  $W = \mathbb{K}$ ，则称  $L$  是  $V$  上的线性泛函。

**例 2.2.** 求导数和求积分是  $\mathbb{R}$  上的特定函数空间里的线性算子。因为它们都保持加法和数乘。

现在我们来看一类特殊的求积分线性映射。

**例 2.3.** 设有函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义映射  $T: f \rightarrow g$  为

$$T[f](t) = \int_0^1 k(s, t)f(s) ds = g(t).$$

根据定积分的性质，容易验证  $T$  保持加法和数乘，因此  $T$  是从所有实值函数到所有实值函数的线性映射。

**例 2.4** (Dirac  $\delta$  函数). 我们已知

$$L[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} k(s)f(s) ds$$

是从所有实值函数到实数的线性泛函。是否所有的线性泛函都可以表示成上述形式呢？不然。考虑如下线性泛函：

$$L[f] = f(0),$$

即取函数在 0 处的值。由于 Riemann 积分对于单个点的变动是不敏感的，因此我们没办法通过积分的形式，将某个点的值提取出来。但如果我们要强行将  $L[f] = f(0)$  写成积分的形式，且为之奈何？物理学家引入了 Dirac  $\delta$  函数的概念，定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)f(s) ds = f(0).$$

在这里， $\delta(s)$  并不是一个真正的函数，而是一个广义函数。事实上，Dirac  $\delta$  函数可以看作是一个极限过程：我们想要通过积分提取出 0 处的函数值，那我们就必须让非 0 点处  $\delta$  函数的值为零——否则积分会受到非 0 点处函数值的影响。为了保持  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) ds = 1$ ，我们只能让  $\delta(0)$  的值趋向于无穷大。这就是我们在数学分析中非常熟悉的“单点突起”类型的积分。从另一个角度， $\delta$  函数也可以看成是函数列的极限：

$$\delta(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(s), \quad \text{其中 } \delta_n(s) = \begin{cases} n, & |s| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |s| \geq \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

如果我们让  $f(x) \equiv 1$ ，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) ds = 1.$$

在微积分中，我们也可以利用积分算子是线性算子，来简化计算。

**例 2.5.** 计算积分

$$u = \int \frac{\sin x}{3 \sin x + 5 \cos x} dx.$$

解. 令

$$v = \int \frac{\cos x}{3 \sin x + 5 \cos x} dx.$$

则有

$$\begin{aligned} 3u + 5v &= x + C_1 \\ -5u + 3v &= \ln(3 \sin x + 5 \cos x) + C_2. \end{aligned}$$

联立解出  $u$  即可。

这种做法在本质上利用了积分算子是线性算子的性质。通过构造辅助变量，我们将原本复杂的积分问题转化为线性方程组的求解问题，从而简化了计算过程。

我们已经定义了什么是线性映射，它们是作用在向量上的“操作”。一个很自然的问题是：这些“操作”本身能否构成一个集合？这个集合有没有什么有趣的代数结构？

考虑所有从向量空间  $V$  到  $W$  的线性映射，我们将其记作  $\mathcal{L}(V, W)$ 。对于两个线性映射  $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ ，我们可以很自然地定义它们的和  $T + S$ ：

$$(T + S)(v) := T(v) + S(v), \quad \forall v \in V.$$

同样，对于一个标量  $c \in \mathbb{K}$  和一个线性映射  $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ，我们可以定义它们的数乘  $cT$ ：

$$(cT)(v) := c \cdot T(v), \quad \forall v \in V.$$

不难验证，这样新定义的  $T + S$  和  $cT$  仍然是  $V \rightarrow W$  的线性映射。

令人惊奇的是，集合  $\mathcal{L}(V, W)$  在我们刚刚定义的加法和数乘运算下，它本身也构成了一个新的向量空间！（它的零向量是零映射，即把所有向量都映到  $0_W$  的映射）。这是一个深刻的发现：我们从研究向量空间  $V$  和  $W$  出发，通过考察它们之间的线性映射，得到了一个新的向量空间  $\mathcal{L}(V, W)$ 。

在所有可能的目标空间  $W$  中，最简单、最基础的是什么？就是我们这个理论体系的基石——底层的数域  $\mathbb{K}$  本身（因为  $\mathbb{K}$  本身也是一个一维向量空间）。当  $W = \mathbb{K}$  时，这些特殊的线性映射（即线性泛函）构成的向量空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$  就显得尤为重要。

**定义 2.6** (对偶空间). 给定向量空间  $V$ ，其上的所有线性泛函构成的向量空间称为  $V$  的对偶空间 (*dual space*)，记作  $V^*$ 。即

$$V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{K}).$$

对偶空间  $V^*$  完整地刻画了如何从向量空间  $V$  中“测量”或“提取”出数值信息。 $V$  中的元素是向量，而  $V^*$  中的元素是作用于向量并产生数值的“测量尺”。它们一个是被“测量”的，一个是用来“测量”的，形成了一种“对偶”关系。

我们已经知道，我们可以使用范数来衡量一个向量的“长度”或者“大小”。一个自然的问题是：我们能否也用某种方式来衡量一个线性映射的“大小”或者“强度”呢？

对于一个向量  $v \in V$ ，我们期望衡量线性映射  $T : V \rightarrow W$  的“大小”，可以考虑这个映射对  $v$  的大小的改变。具体来说，我们可以定义一个线性映射的范数为

**定义 2.7** (算子范数 (operator norm)). 对于线性映射  $T : V \rightarrow W$ ，其算子范数定义为

$$\|T\| := \sup_{\|v\|_V \neq 0} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\|v\|_V=1} \|T(v)\|_W.$$

算子范数  $\|T\|$  衡量了线性映射  $T$  在单位球面上的最大伸缩作用。举个例子， $\mathbb{R}^2$  上的旋转算子  $R_\theta$  只是旋转向量，但并不改变向量的长度，因此  $\|R_\theta\| = 1$ 。而投影算子  $P$  将向量投影到某个子空间

上，通常会缩短向量的长度；如果运气好些，向量正好落于这个子空间上，就不会改变长度。因此  $\|P\| = 1$ 。

我们在第三讲中定义了矩阵的算子范数。矩阵的算子范数定义是

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha}.$$

可以发现，矩阵的算子范数和线性映射的算子范数有着完全相同的定义。这并不奇怪，因为矩阵本质上就是一种线性映射。

在定义了算子范数之后，我们自然会关心一个映射的有界性。我们已经知道，从  $V$  到  $W$  的线性映射全体构成一个向量空间  $\mathcal{L}(V,W)$ ，而我们可以进一步验证：从  $V$  到  $W$  的所有有界线性映射构成的集合  $\mathcal{B}(V,W)$  也是一个向量空间，亦即  $\mathcal{B}(V,W)$  是  $\mathcal{L}(V,W)$  的子空间。有关有界线性算子我们就说到这里，更多内容可以参考泛函分析相关教材。

**线性映射的表示矩阵** 我们从一个实际问题出发：一个线性映射  $T : L \rightarrow V$  是一个抽象的映射规则。对于任意一个向量  $v \in V$ ，如果我们想要用计算机或者纸笔来具体计算  $T(v)$  的结果，该怎么办呢？直接操作抽象的向量  $v$  和映射  $T$  是不现实的。但如果我们将所有东西都坐标化，转换成我们熟悉的数字和数组，计算的可行性就大大提升了。

如果我们找出  $V$  的一组基，即  $V = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ ，那么对于任意  $v \in V$ ，我们可以将  $v$  表示为  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ 。这样，我们就可以将  $v$  与其坐标向量  $(x_1, \dots, x_n)^T$  一一对应。

另一方面，如果我们设存在一个从  $V$  到  $W$  的线性映射  $L$ ，并且  $W$  也有一组基  $\{f_1, \dots, f_m\}$ ，那么，对于  $V$  中任意一个向量  $v$ ，我们都可以将  $L(v)$  表示为  $W$  的基的线性组合。现在我们的问题是：如何从输入坐标  $(x_1, \dots, x_n)^T$  得到输出的坐标  $(y_1, \dots, y_n)^T$ ？要回答这个问题，我们首先需要解决一个更基础的问题：如何将  $L(e_i)$  表示为  $W$  的基的线性组合？不妨设

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^m f_j a_{j,i}.$$

如果我们记  $E = [e_1, \dots, e_n]$ ,  $F = [f_1, \dots, f_m]$ ，那么上式可以写成

$$L(E) = FA,$$

其中  $A = (a_{j,i})_{m \times n}$  是一个  $m \times n$  的矩阵，被称为  $L$  关于基  $E$  和  $F$  的表示矩阵。进一步地，如果我们设矩阵  $L$  是线性映射  $L$  在标准基下的表示矩阵，那么我们有

$$LE = FA.$$

现在，我们回到最初的问题：如何从输入坐标  $(x_1, \dots, x_n)^T$  得到输出的坐标  $(y_1, \dots, y_n)^T$ ？这里我们需要利用一个重要的关系：对于任意  $v \in V$ ，我们有

$$L(v) = L(e_1 x_1 + \dots + e_n x_n) = L(e_1)x_1 + \dots + L(e_n)x_n.$$

如果我们将  $v$  的坐标向量记作  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , 则上式可以写成

$$Lv = LEx = FAx.$$

因此,  $L(v)$  在基  $F$  下的坐标向量为  $y = Ax$ . 这就回答了我们最初的问题: 通过线性映射  $L$ , 我们可以将输入向量  $v$  的坐标  $x$  通过矩阵  $A$  转换为输出向量  $L(v)$  的坐标  $y$ .

**例 2.8.** 我们记  $D$  为求导算子。在三阶多项式空间  $P_3(\mathbb{R})$  上, 若以  $\{1, x, x^2, x^3\}$  为一组基, 则有

$$D[1, x, x^2, x^3] = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由表示矩阵的特征值为零, 我们知道这个求导算子是有界的。

现在我们研究线性映射的复合运算。

**定理 2.9.** 复合映射的表示矩阵等于各个映射的表示矩阵的乘积。

证明. 我们不妨设

$$V \xrightarrow[A_1]{L_1} W \xrightarrow[A_2]{L_2} U.$$

不妨设  $V$  的基拼成的矩阵为  $E$ ,  $W$  的基拼成的矩阵为  $F$ ,  $U$  的基拼成的矩阵为  $G$ , 则有

$$L_1 E = FA_1, \quad L_2 F = GA_2.$$

因此

$$L_2 L_1 E = L_2 FA_1 = L_2 FA_1 = GA_2 A_1.$$

这就证明了复合映射的表示矩阵等于各个映射的表示矩阵的乘积。这也从另一个角度说明了矩阵乘法的合理性: 矩阵乘法正是为了表示线性映射的复合运算而设计的。□

从线性映射出发, 我们可以重新理解一些线性代数的基本概念。

例如, 对于一个恒等映射  $I : V \rightarrow V$ , 它在标准正交基下的表示矩阵为单位阵。如果我们选取两组不同的基  $E$  和  $F$ , 则有

$$IE = FA,$$

其中  $A$  是恒等映射关于基  $E$  和  $F$  的表示矩阵, 亦即从基  $E$  到基  $F$  的过渡矩阵。

对于  $V$  中任意一个向量  $v$ , 设其在基  $E$  下的坐标为  $x$ , 即  $v = Ex$ , 则有

$$v = Ex = IEx = FAx = F(Ax) := Fy.$$

根据上面这个公式，我们可以得到同一个向量  $v$  在不同基下的坐标之间的转换关系：

$$y = Ax,$$

其中  $x$  是  $v$  在基  $E$  下的坐标， $y$  是  $v$  在基  $F$  下的坐标， $A$  是从基  $E$  到基  $F$  的过渡矩阵。

如果  $V$  和  $W$  是同一个一维向量空间，我们取同一组基  $x$ . 设线性映射  $L : V \rightarrow W$  在标准基下的表示矩阵为  $A$ ，从基  $x$  到基  $x$  的表示矩阵为  $\lambda$ ，则有

$$Hx = x\lambda.$$

从几何的角度而言，上式表示了线性映射  $H$  在基  $x$  下的作用方式：它将基向量  $x$  映射到其自身的一个标量倍  $\lambda x$ ；从代数的角度而言，上式给出了矩阵  $H$  的特征值  $\lambda$  和特征向量  $x$  之间的关系。

接下来我们来看另外一个问题。我们知道，每一个矩阵都有一个相抵标准型。那么，这个标准型在线性映射的框架下，有什么意义呢？同样地，我们不妨设线性映射  $T : V \rightarrow W$  在标准基下的表示矩阵为  $L$ ，线性空间  $V$  的基拼成的矩阵为  $E$ ，线性空间  $W$  的基拼成的矩阵为  $F$ ， $T$  关于基  $E$  和  $F$  的表示矩阵为  $A$ ，则有

$$LE = FA.$$

而  $A$  的相抵标准型为  $D$ ，则存在可逆矩阵  $P, Q$ ，使得

$$P^{-1}AQ = D, \Leftrightarrow A = PPDQ^{-1}.$$

因此

$$LE = FPDQ^{-1},$$

亦即

$$L(EQ) = (FP)D.$$

这意味着，我们可以做到，在  $V$  和  $W$  中选取合适的基，使得线性映射  $T$  的表示矩阵为其相抵标准型  $D$ 。

现在我们来看看相似矩阵在线性映射的框架下有什么意义。设有恒等映射  $I : V \rightarrow V$ ， $V$  有两组基  $E$  和  $F$ ， $I$  关于基  $E$  和  $F$  的表示矩阵为  $P$ ，则有

$$IE = FP.$$

现在假设我们有一个线性映射  $L : V \rightarrow V$ ，它在基  $E$  下的表示矩阵为  $A$ ，即

$$LE = EA.$$

则有

$$LF = LEP^{-1} = EAP^{-1} = FPA P^{-1} = F(PAP^{-1}).$$

这就说明了，线性映射  $L$  在基  $F$  下的表示矩阵为  $PAP^{-1}$ . 因此，同一个线性映射在不同基下的表示矩阵是相似矩阵。

**线性映射的像与核** 我们知道，线性映射  $T : V \rightarrow W$  会将  $V$  中的每一个向量都变为  $W$  中的一个向量。那么，所有这些产出的向量  $T(v)$  会填满整个目标空间  $W$  吗？还是说它们只构成了  $W$  的一个子集？这个“产出”的集合长什么样子呢？

这个问题引导我们去定义所有可能输出的集合。这个集合就叫做  $T$  的像或值域。

**定义 2.10** (线性映射的像). 设有线性映射  $T : V \rightarrow W$ ，则  $T$  的像定义为

$$\text{Range}(T) := \{T(v) \in W : \forall v \in V\} \subset W.$$

从直观上来说，“像”就好像是线性映射  $T$  在目标空间  $W$  中的落脚点。这个像不仅仅是一个普通的集合，它本身也是一个向量空间。这使得像空间也拥有了代数结构。像的“大小”我们也称之为秩 (rank)。

**定义 2.11** (线性映射的秩). 设有线性映射  $T : V \rightarrow W$ ，则  $T$  的秩定义为

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Range}(T)).$$

秩衡量了线性映射“扩展”信息的能力。秩越大，说明线性映射能够覆盖目标空间  $W$  的维度就越多，信息传递得也就越充分。

如果  $\text{Range}(T) = W$ ，则称  $T$  是满射 (surjective)。它的像覆盖了整个目标空间。

如果  $\text{Range}(T)$  只是  $W$  的一个真子空间，说明  $T$  在某种程度上“压缩”了空间，丢失了一部分信息。

接下来，我们来考虑丢失的这部分信息。我们知道，线性映射将  $0_V$  映射到  $0_W$ ；那么，有没有可能其他的非零向量也被映射到  $0_W$  呢？如果有，哪些向量被  $T$  “湮灭”成了零向量呢？这个问题引导我们去定义所有被映射为零向量的输入向量的集合。这个集合就叫做  $T$  的核。

**定义 2.12** (线性映射的核). 设有线性映射  $T : V \rightarrow W$ ，则  $T$  的核定义为

$$\text{Ker}(T) := \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subset V.$$

“核”这个概念就是在线性映射  $T$  的视角下，“看起来像零”的所有向量的集合。“核”也不是一个杂乱的集合，它同样是一个向量空间。核空间的大小我们称之为零度 (nullity)。

**定义 2.13** (线性映射的零度). 设有线性映射  $T : V \rightarrow W$ ，则  $T$  的零度定义为

$$\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T)).$$

它衡量了线性映射“压缩”信息的能力。零度越大，说明线性映射湮灭的信息就越多，信息丢失得也就越严重。

如果  $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$ , 即核空间只有零向量, 这说明  $T$  没有丢失任何信息。不同的输入必然得到不同的输出 (可用反证法证明), 因此  $T$  必然是一个单射 (injective)。

反之, 如果  $\text{Ker}(T)$  包含非零向量, 说明  $T$  将多个不同的输入向量 “混淆” 在一起, 映射到了同一个输出向量。这是因为如果  $v_1 - v_2 \in \text{Ker}(T)$ , 那么必定会有  $T(v_1) = T(v_2)$ . 这就造成了信息的丢失。 $T$  也不再是单射。

线性映射的像与核是两个非常重要的概念。像回答了“我们得到了什么”这个问题, 描述了映射的输出范围和维度; 核回答了“我们失去了什么”这个问题, 揭示了映射中信息的丢失和压缩。这两个概念是互补的, 共同深刻地刻画了一个线性映射的本质。它们之间的关系最终由强大的秩-零度定理揭示, 揭示了输入空间的维度、信息损失的维度和有效输出的维度之间的守恒关系。

**定理 2.14 (秩-零度定理).** 设有线性映射  $T : V \rightarrow W$ , 则有

$$\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(V).$$

证明. 设  $\dim V = n, \dim W = m$ . 我们取  $V$  的一组基  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , 并设  $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$  是  $\text{Ker}(T)$  的一组基.

对  $V$  中任意一个向量  $v$ , 我们设

$$v = \sum_{i=1}^n v_i x_i.$$

则有

$$T(v) = \sum_{i=1}^n T(v_i)x_i = \sum_{i=n-r+1}^n T(v_i)x_i.$$

由于线性映射保持线性无关性, 因此  $\{T(v_{n-r+1}), \dots, T(v_n)\}$  是  $\text{Range}(T)$  的一组基。因此  $\text{rank}(T) = r$ . 另一方面, 由于  $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$  是  $\text{Ker}(T)$  的一组基, 因此  $\text{null}(T) = n - r$ . 综上所述, 我们有

$$\text{rank}(T) + \text{null}(T) = r + (n - r) = n = \dim(V).$$

□

**满秩分解** 我们知道, 一个  $m \times n$  的矩阵  $A$  代表了一个从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^m$  的线性映射。我们还知道

$$\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

那么, 如果矩阵的秩  $r$  远小于  $n$  和  $m$ , 这意味着什么? 这意味着, 虽然输入和输出空间的维度很高, 但这个映射的“有效信息”或者“核心作用”实际上只发生在一个低维的  $r$  维空间里。整个变换过程存在一个“瓶颈”, 限制了信息的传递和变化。我们能否把这个过程明确地写出来呢? 即:

1. 一个编码/压缩的过程: 将高维输入向量  $x \in \mathbb{R}^n$  压缩到一个低维的  $r$  维中间表示。

2. 一个解码/重构的过程：从这个低维的中间表示，重构出最终的高维输出向量  $Ax \in \mathbb{R}^m$ .

“压缩”过程是从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^r$  的映射，我们希望它能够保留所有来自行空间的信息。最理想的编码器是一个  $n \times r$  的矩阵  $R$ ，它应该是行满秩的，也就是说，它没有冗余的行，最大程度地保留信息。

“重构”过程是从  $\mathbb{R}^r$  到  $\mathbb{R}^m$  的映射，我们希望它能够构建出完整的像空间。最理想的解码器是一个  $m \times r$  的矩阵  $C$ ，它应当是列满秩的，也就是说，它的列向量本身就是像空间的一组基，没有冗余的维度。

我们的目标就是找到这样的  $C$  和  $R$ ，使得原映射  $A$  可以分解为这两个映射的复合：

$$A_{m \times n} = C_{m \times r} R_{r \times n},$$

其中  $\text{rank}(C) = \text{rank}(R) = \text{rank}(A) = r$ . 这个分解就叫做满秩分解。那么，我们该怎样构造这个分解呢？

我们知道， $A$  的主元列构成了其像空间的一组基。我们直接把这些主元列从原矩阵  $A$  中提取出来，组成一个新的矩阵  $C$ . 根据定义，这个矩阵  $C$  就是  $m \times r$  的，并且是列满秩的。

我们还知道，矩阵  $A$  的行最简阶梯型的非零行构成了其行空间的一组基。我们直接把这些非零行抽取出来，组成一个新的矩阵  $R$ . 根据定义，这个矩阵  $R$  就是  $r \times n$  的，并且是行满秩的。

现在我们有了  $C$  和  $R$ ，为什么一定有  $A = CR$  呢？这是因为， $A$  的任何一列都可以表示为  $C$  的列向量的线性组合，而组合的系数恰好就是  $R$  的对应列。这个关系可以精确地写成

$$A = CR.$$

这就完成了满秩分解。我们最终的结论就是：任何秩为  $r$  的矩阵  $A$ ，都可以被看作是先通过一个行满秩矩阵  $R$  将向量从  $\mathbb{R}^n$  映射到  $\mathbb{R}^r$ （保留核心信息），再通过一个列满秩矩阵  $C$  将向量从  $\mathbb{R}^r$  映射到  $\mathbb{R}^m$ （重构最终图象）的过程。从几何的角度看，满秩分解  $A = CR$  精确地解释了任何线性映射  $T_A$  的内在结构：它本质上是一个投影（到行空间），然后是一个同构（从行空间到列空间），最后是一个嵌入（将列空间放入目标空间）。 $R$  负责投影， $C$  负责同构和嵌入。

**Schur 补** 下面我们基于线性映射的观点，引入与秩相关的另一个重要话题：Schur 补。当然，这种引入并不是最自然的引入方式，或多或少有些强行解释的意味。但谁让本讲的内容是线性映射呢？

我们考虑线性映射  $T : V \rightarrow W$ . 我们知道， $V$  和  $W$  都有其子空间。我们不妨将  $V$  和  $W$  分别分解为两个子空间的直和：

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad W = W_1 \oplus W_2.$$

那么,  $T$  会如何作用于这些子空间呢? 如果我们设  $T$  在标准基下的表示矩阵为  $A$ , 则  $A$  就可以被分解为四个块:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{11}$  是从  $V_1$  到  $W_1$  的映射,  $A_{12}$  是从  $V_2$  到  $W_1$  的映射,  $A_{21}$  是从  $V_1$  到  $W_2$  的映射,  $A_{22}$  是从  $V_2$  到  $W_2$  的映射。

但是, 从  $V_2$  到  $W_2$  的映射可能受到  $V_1$  的影响。我们能否通过一定方式, 消除这种影响, 使得  $V_2$  到  $W_2$  的映射只依赖于  $V_2$  本身, 而不受  $V_1$  的干扰呢? 这就是 Schur 补的核心思想。假设  $A_{11}$  是可逆的, 我们可以通过以下变换来消除  $V_1$  对  $W_2$  的影响:

$$S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

这个矩阵  $S$  就是  $A$  关于块  $A_{11}$  的 Schur 补。Schur 补  $S$  的意义在于, 它描述了在消除  $V_1$  对  $W_2$  影响后的,  $V_2$  到  $W_2$  的“纯净”映射。

当然, 这个解释有些牵强。下面我们给出更加自然的理解方式。

我们知道, 求解线性方程组可以利用 Gauss 消去法。那么, 如果方程  $Ax = b$  中,  $A, x, b$  都天然地可以被分成块, 我们又应该如何求解呢? 设

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

我们能不能尝试模拟高斯消去法, 尝试消去一部分变量呢? 就像 Gauss 消去法中, 我们需要选取主元一样, 这里我们假设  $A_{11}$  是可逆的——它的作用就好像是 Gauss 消去法里的主元。然后, 我们就可以快乐地消去了:

$$A = \begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & S \end{bmatrix}, \quad S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

这样, 我们就将原本的方程组  $Ax = b$  转化为了两个更简单的方程组:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \\ Sx_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1. \end{cases}$$

我们可以先解第二个方程组, 得到  $x_2$ , 然后再代入第一个方程组, 解出  $x_1$ 。这就是 Schur 补的一个重要应用。而在上面, 我们也看到了, 我们可以利用 Schur 补来对矩阵进行 LU 分解, 进而可以利用 LU 分解来高效地求解线性方程组。

**不变子空间** 现在我们来讨论线性映射的另一个重要话题: 不变子空间。设有线性映射  $T : V \rightarrow V$ , 这个映射可能会非常复杂。它在某个基下的表示矩阵可能是没有任何明显规律的稠密矩阵。我

们的终极目标是尽可能地简化我们对  $T$  的理解。何谓“简单”？最简单的矩阵自然是角阵；如果不行，退而求其次，分块角阵也不错；再不济，分块上三角阵也行。我们如何找到一个合适的基，使得  $T$  在这个基下的表示矩阵尽可能地“简单”（最好是分块角的或分块上三角的）呢？

我们已经知道一个非常特殊的情况：特征向量。如果  $v$  是  $T$  的一个特征向量，有  $T(v) = v\lambda$ 。这意味着，由  $v$  张成的一维子空间  $U = \text{span}(v)$  有一个非常好的性质：对于任何在  $U$  中的向量  $u$ ，它的像  $T(u)$  仍然在  $U$  中。

我们可以说，算子  $T$  把子空间  $U$  “封闭”在自身内部。 $T$  在这个子空间  $U$  上的作用就被极大地简化了：仅仅是一个数乘。这个被“封闭”的一维子空间就是我们即将学习的不变子空间的最简单的案例。

既然存在被  $T$  封闭的直线，那么是否存在被  $T$  封闭的更高维的子空间呢？想象一下，如果我们能找到  $V$  的一个子空间  $U$ ，使得  $T$  将  $U$  中的每一个向量都映射回  $U$  内部，那么，我们就可以把注意力暂时从整个复杂的空间  $V$  转移到这个更小、更简单的子空间  $U$  上，去研究  $T$  在  $U$  上的局部行为。这个局部算子  $T|_U : U \rightarrow U$  的性质将会更加简单明了。

上面的想法直接引出了不变子空间的正式定义：

**定义 2.15** (不变子空间). 设  $T : V \rightarrow V$  是一个线性算子。如果  $V$  的一个子空间  $U$  满足

$$T(u) \in U, \quad \forall u \in U,$$

则称  $U$  是  $T$  的一个不变子空间，记作  $T(U) \subseteq U$ .

不变子空间到底好在哪？它好就好在，它直通我们的最初目标——寻找一个简单的矩阵表示。假设我们找到了一个  $k$  维的不变子空间  $U$ . 现在我们用一种巧妙的方式来构造  $V$  的基：

1. 首先，为  $U$  选取一组基  $\{u_1, \dots, u_k\}$ .
2. 然后，将这组基扩展为  $V$  的一组基  $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ .

现在，我们就来看看， $T$  在这组基下的表示矩阵是什么样子的。由于  $U$  是不变子空间，对于基的前  $k$  个向量而言， $T(u_j)$  仍然在  $U$  中，因此它可以表示为  $\{u_1, \dots, u_k\}$  的线性组合，而与  $\{v_i\}$  无关。这就意味着，表示矩阵的前  $k$  列的下半部分全是零。所以，矩阵  $A$  必定具有如下的分块上三角形式：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{11}$  是  $k \times k$  的矩阵，表示  $T$  在不变子空间  $U$  上的局部作用，亦即  $T|_U$  在基  $\{u_1, \dots, u_k\}$  下的表示矩阵。

进一步地，如果整个空间  $V$  可以被分解为两个不变子空间  $U_1, U_2$  的直和，即  $V = U_1 \oplus U_2$ ，那么我们得到的表示矩阵将是分块对角的！

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $A_{11}$  和  $A_{22}$  分别是  $T$  在  $U_1$  和  $U_2$  上的局部作用的表示矩阵。这就大大简化了我们对  $T$  的理解。我们可以分别研究  $A_{11}$  和  $A_{22}$ ，而不需要面对整个复杂的矩阵  $A$ 。这就是不变子空间的强大之处。寻找不变子空间的过程，本质上就是在为线性算子寻找一个“断裂点”，从而将其矩阵表示分解为更小、更易于处理的块。这是通往算子分解和理解其内在结构（如 Jordan 标准型）的关键一步。

### 3 Sherman-Morrison-Woodbury 公式

在许多现实问题中，我们经常会遇到这样的情况：我们可能已经花费了大量的计算资源求得了一个大矩阵  $A$  的逆  $A^{-1}$ ，但后来我们发现，我们还需要对矩阵  $A$  进行一个小小的修正，得到一个新的矩阵  $A'$ 。这个修正可能是由于加入了新的数据、改变了某个参数或者修正了模型。我们是否需要从头重新计算它的逆呢？如果我们能利用已经计算好的  $A^{-1}$ ，只对修正部分进行增量更新，那将大大节省计算资源。

最常见和最重要的一类修正是“低秩修正”，即新的矩阵可以表示为  $A' = A - XB^{-1}Y^*$ ，其中  $X \in \mathbb{R}^{n \times k}, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ，并且通常  $k \ll n$ 。当  $k = 1$  时，这就是最简单的秩一修正： $A' = A - xy^*$ ，其中  $x, y$  是列向量。我们的目标就是：已知  $A^{-1}$ ，如何高效地计算  $A'^{-1}$ ？

我们可以先将  $A^{-1}$  提出来，得到

$$A'^{-1} = (A - XB^{-1}Y^*)^{-1} = (I - A^{-1}XB^{-1}Y^*)^{-1}A^{-1}.$$

现在，我们只需要解决如何计算  $(I - XY^*)^{-1}$  即可。

首先我们可以先来猜一下答案。由 Neumann 级数展开，我们有

$$\begin{aligned} (I - XY^*)^{-1} &= I + XY^* + XY^*XY^* + \dots \\ &= I + X(I + Y^*X + (Y^*X)^2 + \dots)Y^* \\ &= I + X(I - Y^*X)^{-1}Y^*. \end{aligned}$$

当然，这个推导并不严谨，因为我们并没有证明级数的收敛性。但它给了我们一个启发：或许答案就是  $I + X(I - Y^*X)^{-1}Y^*$ 。接下来，我们就来验证这个结果的正确性。

$$\begin{aligned}
(I - XY^*)(I + X(I - Y^*X)^{-1}Y^*) &= I - XY^* + XY^* + XY^*X(I - Y^*X)^{-1}Y^* \\
&= I + X(Y^*X(I - Y^*X)^{-1} - I)(Y^*) \\
&= I + X((I - Y^*X)(I - Y^*X)^{-1} - I)(Y^*) \\
&= I.
\end{aligned}$$

这就验证了我们的猜测是正确的。我们最终得到了一个非常优雅的公式：

$$(I - XY^*)^{-1} = I + X(I - Y^*X)^{-1}Y^*.$$

我们代入之前的式子，得到

$$(A - XB^{-1}Y^*)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}X(B - Y^*A^{-1}X)^{-1}Y^*A^{-1}.$$

这就是著名的 Sherman-Morrison-Woodbury 公式。

**定理 3.1** (Shermann-Morrison-Woodbury 公式). 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是可逆矩阵， $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ， $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$  是可逆矩阵，若  $B - Y^*A^{-1}X$  可逆，则有

$$(A - XB^{-1}Y^*)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}X(B - Y^*A^{-1}X)^{-1}Y^*A^{-1}.$$

那么，这个公式的威力何在呢？公式右侧最关键的部分是计算  $(B - Y^*A^{-1}X)$  的逆。注意到，这个矩阵的大小是  $k \times k$ ，而  $k$  通常远小于  $n$ 。因此，我们只需要花费  $O(k^3)$  的代价来计算这个矩阵的逆，其余部分都是矩阵乘法。整个更新计算的复杂度大约是  $O(k^3 + n^2k)$ ，这个代价应当是远远低于  $O(n^3)$  的。这就是 SMW 公式的威力所在。

我们同样可以注意到，公式中的核心项  $B - Y^*A^{-1}X$  正是 Schur 补。如我们考虑分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & X \\ Y^* & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ Y^*A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B - Y^*A^{-1}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X(B - Y^*A^{-1}X)^{-1} \\ O & I \end{bmatrix},$$

如果我们想要求大矩阵的逆，我们只需要分别求三个矩阵的逆，然后将它们按相反顺序相乘即可。第一个和第三个矩阵的逆都非常简单，而中间的矩阵的逆正是

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & (B - Y^*A^{-1}X)^{-1} \end{bmatrix}.$$

这就再次说明了 Schur 补在这里的核心作用。