MATH10003.01 高等线性代数 Fall 2025

Lecture 4 向量空间 — 2025.09.28

教授：邵美悦

Scribe: 两人间

本讲内容大家在大一都学过，因此本讲内容会比较简略。

1 大纲

1. 域
2. 向量空间

2 域

定义 2.1 (域)**.** 设 $\mathbb{F}$ 是一个非空集合，$+$ 和 $\cdot$ 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的两个二元运算. 如果对任意的 $a,b,c\in\mathbb{F}$，都有

1. 加法交换律：$a+b=b+a$
2. 加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$
3. 存在加法单位元 $0\in\mathbb{F}$，使得 $a+0=a$
4. 对每个 $a\in\mathbb{F}$，存在加法逆元 $-a\in\mathbb{F}$，使得 $a+(-a)=0$
5. 乘法交换律：$a\cdot b=b\cdot a$
6. 乘法结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
7. 存在乘法单位元 $1\in\mathbb{F}, 1\neq 0$，使得 $a\cdot 1=a$
8. 对每个 $a\in\mathbb{F}, a\neq 0$，存在乘法逆元 $a^{-1}\in\mathbb{F}$，使得 $a\cdot a^{-1}=1$
9. 分配律：$a(b+c)=ab+ac$

则称 $\mathbb{F}(+,\cdot)$ 为一个**域**（*field*）。

例 2.2. 常见的域有 $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{C}$.

我们知道，代数数是首系数为 1 的有理系数多项式的根。下面我们研究一种特殊的代数数：$\alpha+\lambda\beta$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$，而 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

例 2.3. *代数数 $\alpha+\sqrt{2}\beta$ 构成一个域。*

证明. 代数数可以等价地表示为

$$\begin{bmatrix}\alpha & 2\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix},\alpha,\beta\in\mathbb{Q}.$$

根据有理数域上 2×2 矩阵的加法和乘法，容易验证代数数 $\alpha+\sqrt{2}\beta$ 满足域的九条公理。

同样地，代数数 $\alpha+\lambda\beta$ 也构成一个域。 □

例 2.4. *代数数的所有有理系数多项式构成一个域。*

证明. 加法和乘法的封闭性易证。我们只需验证乘法逆元的存在性。多项式的乘法逆元指的是：对多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，若存在多项式 $h(x)$ 使得 $f(x)h(x)\equiv 1\pmod{g(x)}$，则称 $h(x)$ 是 $f(x)$ 在模 $g(x)$ 下的乘法逆元。

设 $f(x)$ 是一个有理系数多项式，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素. 根据裴蜀定理，存在有理系数多项式 $a(x),b(x)$ 使得

$$a(x)f(x)+b(x)g(x)=1.$$

因此，$a(x)f(x)\equiv 1\pmod{g(x)}$，即 $a(x)$ 是 $f(x)$ 在模 $g(x)$ 下的乘法逆元。 □

而对于超越数，如 π 和 e，我们也可以构造出相应的域。

例 2.5. *若 α 是超越数，则集合*

$$\{\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}:P,Q\text{ 是有理系数多项式},Q(\alpha)\neq 0\}$$

构成一个域。

证明. 加法和乘法的封闭性易证。我们只需验证乘法逆元的存在性。设 $f(\alpha)=\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$，其中 P,Q 是有理系数多项式，且 $Q(\alpha)\neq 0$. 则

$$f(\alpha)^{-1}=\frac{Q(\alpha)}{P(\alpha)},$$

其中 $P(\alpha)\neq 0$，否则 α 将是代数数，与 α 是超越数矛盾。 □

上面我们所举的例子都是有无限个元素的域。那么，是否存在有限域呢？答案是肯定的，但我们需要对加法和乘法的定义做出一些修改。

例 2.6. *设 $\mathbb{F}=\{0,1\}$，定义加法和乘法如下表所示：*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

则 $\mathbb{F}(+,\cdot)$ 构成一个域，称为**有限域**（*finite field*），记作 $\mathbb{F}_2$. 事实上，在这里我们将 0 视为偶数，将 1 视为奇数，因此加法相当于对两个数的和取模 *2.*

设 $\mathbb{F}=\{0,1,2\}$，定义加法和乘法如下表所示：

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

则 $\mathbb{F}(+,\cdot)$ 构成一个域，记作 $\mathbb{F}_3$.

事实上，有限域的元素个数只能是素数的幂次方。

由例 2.6 可以引出一个有趣的问题：在上面的例题中，$\mathbb{F}_2$ 的加法满足 $1+1=0$，而在 $\mathbb{F}_3$ 中，加法满足 $1+1+1=0$. 那么，我们是否可以定义一个量，来描述域中加法的这种性质呢？

定义 2.7 (域的特征)**.** 如果 p 是素数，且在域 $\mathbb{F}$ 中，p 个 1 相加的结果为 0，则称 $\mathbb{F}$ 的**特征**（*characteristic*）为 p，记为 $\mathrm{char}(\mathbb{F})=p$. 如果无论多少个 1 相加都不为 0，则称 $\mathbb{F}$ 的特征为 0，记为 $\mathrm{char}(\mathbb{F})=0$.

显然，$\mathrm{char}(\mathbb{Q})=\mathrm{char}(\mathbb{R})=\mathrm{char}(\mathbb{C})=0$.

下面，我们给出与域有关的几个重要概念。

定义 2.8 (同态与同构)**.** 设 $\mathbb{F}_1(+,\cdot)$ 和 $\mathbb{F}_2(+,\cdot)$ 是两个域. 如果存在映射 $\varphi:\mathbb{F}_1\to\mathbb{F}_2$，使得对任意的 $a,b\in\mathbb{F}_1$，都有

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),\quad \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b),$$

则称 φ 是从 $\mathbb{F}_1$ 到 $\mathbb{F}_2$ 的一个**同态**（*homomorphism*）.

如果 φ 是一个双射，则称 φ 是从 $\mathbb{F}_1$ 到 $\mathbb{F}_2$ 的一个**同构**（*isomorphism*）.

定义 2.9. （子域）设 $\mathbb{F}_1(+,\cdot)$ 和 $\mathbb{F}_2(+,\cdot)$ 是两个域. 如果 $\mathbb{F}_1\subseteq\mathbb{F}_2$，且 $\mathbb{F}_1$ 在 $\mathbb{F}_2$ 的加法和乘法下封闭，则称 $\mathbb{F}_1$ 是 $\mathbb{F}_2$ 的一个**子域**（*subfield*）.

下面我们证明一个重要的定理，它将上面所提到的两个概念串联起来。

定理 2.10. 特征为零的域一定存在与 $\mathbb{Q}$ 同构的子域。

证明. 设 $\mathbb{F}$ 的零元和单位元分别为 0 和 1. 现在我们需要构造一个映射 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{K}(\mathbb{K}\subset\mathbb{F})$，使得 f 保持 $\mathbb{Q}$ 的加法和乘法，并且存在 f 的逆映射 $f^{-1}:\mathbb{K}\to\mathbb{Q}$.

由于 $\mathbb{F}$ 的特征为 0，因此对任意的正整数 n，我们可以构造映射如下：

$$f(n)=\underbrace{1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}+\cdots+1_{\mathbb{F}}}_{n\text{ 个}}.$$

对 $n=0$，我们构造

$$f(0)=0_{\mathbb{F}}.$$

对负整数 $-n$，我们构造

$$f(-n)=-f(n).$$

显然，f 保持整数的加法和乘法。

下面我们证明 f 在 $\mathbb{F}$ 上存在乘法逆元。当 $n\neq 0$ 时，$f(n)\neq 0_{\mathbb{F}}$，且 f 是单射，因此 $f(n)$ 在 $\mathbb{F}$ 上存在乘法逆元，记为 $f(n)^{-1}$.

现在我们可以将 f 扩展到有理数域 $\mathbb{Q}$ 上：

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)\cdot f(n)^{-1},\quad n\neq 0.$$

显然，f 保持有理数的加法和乘法。于是，我们可以定义集合 $\mathbb{K}$ 为 $\{f(q):q\in\mathbb{Q}\}$. 显然，$\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$ 的加法和乘法下封闭，因此 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个子域。由于 f 是 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{K}$ 的双射，因此存在 f 的逆映射 $f^{-1}:\mathbb{K}\to\mathbb{Q}$.

综上所述，$\mathbb{K}$ 与 $\mathbb{Q}$ 同构。 □

定义 2.11 (数域). 数域是复数域的子集，对四则运算封闭，且至少包含 *0* 和 *1*.

数域的特征为 *0*，一定包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

3 向量空间

下面的内容大家都非常熟悉，因此我省去了很多定理证明的细节。

定义 3.1 (向量空间). 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，V 是一个非空集合. 如果对任意的 $u,v,w\in V$ 和 $a,b\in\mathbb{F}$，都有

1. 加法交换律：$u+v=v+u$

2. 加法结合律：$(u+v)+w=u+(v+w)$

3. 存在加法单位元 $0\in V$，使得 $u+0=u$

4. 对每个 $u\in V$，存在加法逆元 $-u\in V$，使得 $u+(-u)=0$

5. 乘法结合律：$a(bu)=(ab)u$

6. 存在乘法单位元 $1\in\mathbb{F}$，使得 $1u=u$

7. 分配律：$a(u+v)=au+av$

8. 分配律：$(a+b)u=au+bu$

则称 $V(+,\cdot)$ 为一个**向量空间**（*vector space*）。

例 3.2. 在 $(0,1)$ 上的函数全体构成一个实数域上的向量空间。

定义 3.3 (子空间)**.** 设 $V(+,\cdot)$ 是一个向量空间，$W\subseteq V$. 如果 W 在 V 的加法和数乘下封闭，则称 W 是 V 的一个**子空间**（*subspace*）。

命题 3.4. 设 V 是一个向量空间，$V_1,V_2\subset V$ 是 V 的两个子空间，则有

1. $V_1\cap V_2$ 是 V 的一个子空间；

2. $V_1\cup V_2$ 不一定是 V 的一个子空间；

3. V_1+V_2 是 V 的一个子空间。

定义 3.5 (向量张成的子空间)**.** 设 V 是一个向量空间，$v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$，则称

$$\operatorname{span}\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}=\{a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n:a_i\in\mathbb{F},1\le i\le n\}$$

为由 $v_1,v_2,\ldots,v_n$ 张成的子空间。

定义 3.6 (线性相关、线性无关)**.** 设 V 是一个向量空间，$v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$，

- 如果存在不全为零的 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$，使得

  $$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0.$$

  则称 $v_1,v_2,\ldots,v_n$ 线性相关（*linearly dependent*）；

- 如果对任意的 $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$，都有

  $$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0\implies a_1=a_2=\cdots=a_n=0.$$

  则称 $v_1,v_2,\ldots,v_n$ 线性无关（*linearly independent*）。

定义 3.7 (基). 设 V 是一个向量空间，$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$，如果

1. $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$;
2. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 线性无关;

则称 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一个**基**（*basis*）。

定义 3.8 (维数). 设 V 是一个向量空间，若 V 有一个有限基 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，则称 V 是有限维的，且称 n 为 V 的**维数**（*dimension*），记为 $\dim(V) = n$. 若 V 没有有限基，则称 V 是无限维的。无限维向量空间又分为可列维和不可列维两种情况。

例 3.9. 由 $(0, 1)$ 上的全体函数构成的向量空间是无限维的。

定理 3.10 (基扩张定理). 设 V 是一个向量空间，$V \supset V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}(k < n)$，则 $\exists v_{k+1}, \ldots, v_n$，使得

$$V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

定理 3.11 (维数定理). 设 V 是一个向量空间，$V_1, V_2 \subset V$ 是 V 的两个子空间，则有

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

定理 3.12. 向量空间不能表示为两个真子空间的并。当基域的特征为零时，向量空间不能表示为有限个真子空间的并。

证明. 设 V 是一个向量空间，$V_1, V_2 \subset V$ 是 V 的两个真子空间。由于 V_1, V_2 都是 V 的真子空间，因此 $\exists v_1 \in V \setminus V_1, v_2 \in V \setminus V_2$. 则 $v_1 + v_2 \notin V_1$ 且 $v_1 + v_2 \notin V_2$，因此 $v_1 + v_2 \notin V_1 \cup V_2$. 综上所述，$V \neq V_1 \cup V_2$.

下面我们证明当基域的特征为零时，向量空间不能表示为有限个真子空间的并。设 V 是一个向量空间，$\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，且 $V_1, V_2, \ldots, V_k \subset V(k < \infty)$ 是 V 的 k 个真子空间。我们需要证明 $V \neq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$.

我们使用数学归纳法来证明这个结论。当 $k = 1$ 时，结论显然成立。假设当 $k = n - 1$ 时结论成立，我们来证明当 $k = n$ 时结论也成立。

由于 V_n 是 V 的真子空间，因此 $\exists v_n \in V \setminus V_n$. 根据归纳假设，有

$$V \neq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n-1}.$$

因此，$\exists v_{n-1} \in V \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n-1})$.

现在我们考虑向量

$$v = v_{n-1} + m v_n,$$

其中 m 是任意的正整数. 显然，$v \notin V_n$. 如果 $v \in V_i$，其中 $1 \leq i \leq n-1$，则

$$mv_n = v - v_{n-1} \in V_i.$$

由于 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，因此 $v_n \in V_i$，这与 $v_n \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{n-1}$ 矛盾。综上所述，$v \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$，因此 $V \neq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$. □