2025 年秋季学期高等线性代数期末考试

1. 设 $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵，$S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是反 Hermite 矩阵。证明：$\|H+S\|_{\mathrm{F}}^2 = \|H\|_{\mathrm{F}}^2 + \|S\|_{\mathrm{F}}^2$.

2. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换，且满足 $AB = BA$. 证明：A 和 B 存在相同的不变子空间 $\mathcal{V}$，且 $0 < \dim(\mathcal{V}) < n$.

3. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, C \in \mathbb{C}^{m\times n}$. 证明：存在 $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 使得 $C = AXB$ 的充要条件是 $AA^\dagger CB^\dagger B = C$.

4. 设

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 12 & 9 \\ 30 & 16 & 12 \\ 0 & 30 & -40 \end{bmatrix}$$

求在 Frobenius 范数意义下最接近 A 的奇异矩阵。

5. 设

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 4x^2 - 80x + 9y^2 + 9z^2 + 364 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

求 Ω 中离点 $p = [10, 8, 6]^\top$ 最近的点。

6. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集，f 是 Ω 上的凸函数，定义集合

$$\hat{\Omega} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y \geq \exp(f(x)) \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

证明或证伪：$\hat{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的凸集。

7. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的所有行和都为零，所有列和都为零。证明：若 $\exp(A)$ 是非负矩阵，则 $\exp(A)$ 是双随机矩阵。

8. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A, B, AB 均为正规矩阵。证明：BA 也是正规矩阵。

参考答案

除了第 8 题其他都是显然！

—— 邵老师

1.

证明. 由于 H 是 Hermite 矩阵，考虑其谱分解 $H = Q\Lambda Q^*$，其中 $QQ^* = Q^*Q = I$，Λ 为实对角阵。由于 Frobenius 范数具有酉不变性，因此

$$\|H + S\|_{\mathrm{F}} = \|Q\Lambda Q^* + S\|_{\mathrm{F}} = \|\Lambda + Q^*SQ\|_{\mathrm{F}}.$$

由 S 是反 Hermite 矩阵，Q^*SQ 也是反 Hermite 矩阵。设 $M = Q^*SQ$，则有

$$\|H + S\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\Lambda + M\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + m_{i,i}|^2 + \sum_{i \neq j} |m_{i,j}|^2 = \|\Lambda\|_{\mathrm{F}}^2 + \|M\|_{\mathrm{F}}^2.$$

另一方面，由 Frobenius 范数的酉不变性，有

$$\|\Lambda\|_{\mathrm{F}} = \|H\|_{\mathrm{F}}, \quad \|M\|_{\mathrm{F}} = \|S\|_{\mathrm{F}}.$$

因此，我们得出结论

$$\|H + S\|_{\mathrm{F}}^2 = \|H\|_{\mathrm{F}}^2 + \|S\|_{\mathrm{F}}^2.$$

□

另解：考虑使用 Frobenius 范数的迹定义。

证明. 由 Frobenius 范数的定义，有

$$\begin{aligned}
\|H + S\|_{\mathrm{F}}^2 &= \mathrm{tr}((H + S)^*(H + S)) \\
&= \mathrm{tr}(H^*H) + \mathrm{tr}(S^*S) + \mathrm{tr}(H^*S) + \mathrm{tr}(S^*H) \\
&= \|H\|_{\mathrm{F}}^2 + \|S\|_{\mathrm{F}}^2 + \mathrm{tr}(HS) - \mathrm{tr}(SH).
\end{aligned}$$

由迹的循环不变性，有 $\mathrm{tr}(HS) = \mathrm{tr}(SH)$. 因此，

$$\|H + S\|_{\mathrm{F}}^2 = \|H\|_{\mathrm{F}}^2 + \|S\|_{\mathrm{F}}^2.$$

□

2.

证明. 设 λ 是 A 的一个特征值，$\mathcal{V} := \{v \in \mathbb{C}^n : Av = v\lambda\}$. 对任意 $v \in \mathcal{V}$，有

$$A(Bv) = B(Av) = B(v\lambda) = (Bv)\lambda,$$

因此 $Bv \in \mathcal{V}$，即 $\mathcal{V}$ 是 B 的不变子空间。将 B 限制在 $\mathcal{V}$ 上，得到线性变换 $B|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. 由代数基本定理，$B|_{\mathcal{V}}$ 一定有特征向量，即存在 $\mu \in \mathbb{C}$，$w \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ 使得 $Bw = w\mu$. 又由 $w \in \mathcal{V}$ 知 $Aw = w\lambda$. 因此，子空间 $\operatorname{span}\{w\}$ 即为 A 和 B 的公共不变子空间，这个子空间的维数为 1，显然符合题意。 □

3.

证明. **充分性**：若有 $C = AA^\dagger CB^\dagger B$，则取 $X = A^\dagger CB^\dagger$，显然有 $C = AXB$.

必要性：若存在 X 使得 $C = AXB$，则有 $\operatorname{Range}(C) \subset \operatorname{Range}(A)$，$\operatorname{Range}(C^*) \subset \operatorname{Range}(B^*)$.

又由于 $AA^\dagger$ 是到子空间 $\operatorname{Range}(A)$ 的正交投影算子，$B^\dagger B$ 是到子空间 $\operatorname{Range}(B^*)$ 的正交投影算子，因此

$$\begin{aligned} C &= AA^\dagger C \\ C^* &= B^\dagger BC^* \implies C = CB^\dagger B, \quad \text{since } (B^\dagger B)^* = B^\dagger B. \end{aligned}$$

综上所述，有

$$C = AA^\dagger CB^\dagger B.$$

□

4.

做法很多，下面提供我在考场上使用的方法。

证明. 由低秩逼近的原理，我们只需要求出 A 的奇异值分解，然后将最小的奇异值置零即可。直接计算 $A^\top A$ 的特征值是一种方法，但是计算量很大，不建议在考场上尝试。由于此处 A 的结构比较特殊——矩阵中出现了大量的 $4:3$ 比例——这启示我们使用 Givens 旋转来将 A 化为对角阵。

第一列只有两个非零元，操作起来比较方便，因此我们先对第一列的前两行进行 Givens 旋转：考虑

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$G_1 A = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -15 \\ 0 & 30 & -40 \end{bmatrix}$$

或许有同学想要对第二列的后两行作 Givens 旋转。这不是一个好的选择，因为这两个元素的比例是 $2:3$，计算正余弦会比较复杂；另一方面，第三列的后两行比例是 $3:8$，作 Givens 旋转后无法将矩阵化为对角阵。更好的做法是考虑列变换的 Givens 旋转：因为第二行的后两个元素比例是 $4:3$，而第三行后两个元素的比例是 $3:4$，这是有机会将矩阵化为对角阵的。我们考虑

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

则

$$G_1 A G_2 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

因此，A 的奇异值为 $50, 50, 25$. 在 Frobenius 范数意义下最接近 A 的奇异矩阵为

$$B = G_1^\top \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} G_2^\top .$$

B 的具体计算过程在此省略，最终范数差距为

$$\|A - B\|_{\mathrm{F}} = 25.$$

$\square$

5.

证明. 我们先将原方程配方，得

$$4(x-10)^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36.$$

我们不妨直接整体平移，考虑 $p' = [0, 8, 6]^\top$ 和方程 $4x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 36$. 显然离 p' 最近的点落在椭球在 $y-z$ 平面上的截面。该截面是一个圆 $y^2 + z^2 = 4$，因此离 p' 最近的点就落在直线 $z = \frac{3}{4}y$ 上，显然该点坐标为 $[0, 8/5, 6/5]$. 因此，原问题的解为

$$q = \begin{bmatrix} 10 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

$\square$

另解：使用 Lagrange 乘子法。笔者比较笨，考场上一看到这道题就直接用 Lagrange 乘子法了，算了老半天才算出来。

6.

证明. 设 $[x_1, y_1]^\top$, $[x_2, y_2]^\top \in \hat{\Omega}$，设 $\alpha \in [0,1]$, $\alpha+\beta=1$，由于 Ω 是凸集，$x_1\alpha+x_2\beta \in \Omega$. 故只需证

$$y_1\alpha + y_2\beta \geq \exp(f(x_1\alpha + x_2\beta)).$$

由于 f 是凸函数，由 Jensen 不等式，有

$$f(x_1\alpha + x_2\beta) \leq f(x_1)\alpha + f(x_2)\beta.$$

因此只需证

$$y_1\alpha + y_2\beta \geq \exp(f(x_1)\alpha + f(x_2)\beta).$$

由指数函数的凸性，有

$$\exp(f(x_1))\alpha + \exp(f(x_2))\beta \geq \exp(f(x_1)\alpha + f(x_2)\beta).$$

由于 $[x_1, y_1]^\top$, $[x_2, y_2]^\top \in \hat{\Omega}$，即 $y_1 \geq \exp(f(x_1))$，$y_2 \geq \exp(f(x_2))$，因此

$$y_1\alpha + y_2\beta \geq \exp(f(x_1))\alpha + \exp(f(x_2))\beta \geq \exp(f(x_1)\alpha + f(x_2)\beta).$$

综上所述，$\hat{\Omega}$ 是凸集。 □

7.

证明. 由 A 的所有行和为零，设 $e = [1, 1, \ldots, 1]^\top$，则有

$$Ae = 0 \implies \exp(A)e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} e = e.$$

同理，由 A 的所有列和为零，有

$$e^\top A = 0 \implies e^\top \exp(A) = e^\top.$$

又由 $\exp(A)$ 是非负矩阵，故 $\exp(A)$ 是双随机矩阵。 □

8.

证明. 这一题直接处理是非常困难的，主要难点在于矩阵乘法不满足交换律。我们需要换一条路。我们知道，AB 和 BA 虽然大概率不相同，但是它们共享很多核心属性，如：

1. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;
2. AB 和 BA 有相同的非零特征值（计重数）。

既然 AB 是正规矩阵，它的谱性质是非常好的，那么我们能否仅通过特征值来判定 BA 的正规性呢？一个想法是，我们需要一个不等式，该不等式等号成立的充要条件是矩阵正规；然后我们利用 AB 的正规性，将该不等式应用到 BA 上，证明不等式等号成立，从而证明 BA 的正规性。那么，这样的不等式是否存在呢？显然是存在的：

$$\|M\|_{\mathrm{F}}^2 = \|T\|_{\mathrm{F}}^2 \geq \|\operatorname{diag}(T)\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2,$$

其中 M 是任意矩阵，$M = QTQ^*$ 是 M 的 Schur 分解，λ_i 是 M 的特征值。显然，等号成立当且仅当 T 是对角阵，即 M 可酉对角化，亦即 M 正规。

现在，我们来应用这个不等式。由于 AB 是正规矩阵，则

$$\|AB\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(AB)|^2.$$

另一方面，Frobenius 范数可以写成迹的形式，因此

$$\|AB\|_{\mathrm{F}}^2 = \operatorname{tr}((AB)^*(AB)) = \operatorname{tr}(B^*A^*AB).$$

又由迹的循环不变性，有

$$\|AB\|_{\mathrm{F}}^2 = \operatorname{tr}(A^*ABB^*).$$

接下来，我们考虑 BA 的 Frobenius 范数：

$$\|BA\|_{\mathrm{F}}^2 = \operatorname{tr}((BA)^*(BA)) = \operatorname{tr}(A^*B^*BA).$$

由迹的循环不变性，有

$$\operatorname{tr}(A^*B^*BA) = \operatorname{tr}(AA^*BB^*).$$

由于 A 和 B 均为正规矩阵，故 $AA^* = A^*A$，$BB^* = B^*B$. 因此，

$$\operatorname{tr}(AA^*BB^*) = \operatorname{tr}(A^*AB^*B).$$

综上所述，我们得出

$$\|BA\|_{\mathrm{F}}^2 = \|AB\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(AB)|^2.$$

由于 AB 和 BA 有相同的非零特征值（计重数），因此

$$\|BA\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(BA)|^2.$$

由前述不等式，我们得出 BA 是正规矩阵。 $\square$

这种方法被称为**迹技巧** (trace argument)，可有效地规避矩阵乘法不可交换带来的困难，是解决 AB 和 BA 相关问题的常用手段。