Homework–1118

路人甲

2025 年 12 月 27 日

Problem 1. 给定正整数 n 以及 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$，证明以下条件都与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\star = \boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A}$ 等价。

(1) $\boldsymbol{A}$ 可以表示为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} + \mathrm{i}\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ 是 Hermite 阵且 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}$；

(2) $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^n |\lambda_k|^2$，其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

证明. (1) 充分性显然。下证必要性。设有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\star = \boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为正规算子，因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^\star.$$

将 $\boldsymbol{\Lambda}$ 拆分为实部矩阵和虚部矩阵，即

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{real}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{im}},$$

有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{real}}\boldsymbol{Q}^\star + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{im}}\boldsymbol{Q}^\star := \boldsymbol{X} + \mathrm{i}\boldsymbol{Y}.$$

$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的 Hermite 性是显然的。现在我们只需验证它们乘法可交换：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{real}}\boldsymbol{Q}^\star\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{im}}\boldsymbol{Q}^\star \\
&= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{real}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{im}}\boldsymbol{Q}^\star \\
&= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{im}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{real}}\boldsymbol{Q}^\star \\
&= \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}.
\end{aligned}$$

第三个等号利用了实对角矩阵乘法的可交换性。

(2) **必要性**：考虑谱分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^\star$，由于 Frobenius 范数是酉不变范数，我们有

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \|\boldsymbol{\Lambda}\|_{\mathrm{F}} = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

充分性：考虑 Schur 分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^\star$，由于 Frobenius 范数是酉不变范数，我们有

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \|\boldsymbol{T}\|_{\mathrm{F}} \geq \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

由等号成立可知，$\boldsymbol{T}$ 的严格上三角元素都是零元。因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\star = \boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A}$.

□

Problem 2. 计算矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

的奇异值分解。

Solution. 计算

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\star = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

然后计算其谱分解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\star = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^\star\boldsymbol{U}^\star$，有

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}.$$

计算

$$\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

考虑其谱分解 $\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^\star\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\star$.

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

因此 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\star$，$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{V}$ 如上。 □

Problem 3. [极分解] 给定正整数 n，设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为非奇异矩阵。证明：存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 Hermite 正定矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}$，并且该分解是唯一的。

证明. 考虑奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\star.$$

一个自然的构造思路是，我能不能从 $\boldsymbol{U}$ 里面拆分出一个 $\boldsymbol{V}$，这样后半部分就自然是 Hermite 矩阵了。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^\star)(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\star) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}.$$

现在我们需要验证两个结论：

- $\boldsymbol{H}$ 的正定性；
- $\boldsymbol{H}$ 的唯一性。

正定性是显然的——既然 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，$\boldsymbol{\Sigma}$ 自然是正定的，因此 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\star$ 自然也是正定的。

我们用反证法来证明唯一性。假设存在另一种分解 $\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{H}}$，则一方面

$$\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^\star\boldsymbol{Q}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^2,$$

另一方面，我们同理可以算出 $\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{H}}^2$.

由 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}, \tilde{\boldsymbol{H}}$ 正定可知，$\tilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{A}^\star\boldsymbol{A})^{1/2}$ 是唯一的（正定矩阵的正定平方根唯一）。

再由 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}^{-1}$ 可知，$\boldsymbol{Q}$ 唯一。因此极分解唯一。 □

Problem 4. 给定正整数 n，矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$，且 $r = \operatorname{rank}(\boldsymbol{P}) > 0$. 证明：存在 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 以及 n 阶 Hermite 正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\star\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{X}^\star\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_r.$$

思路：矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的幂等性很容易使我们联想到投影算子，但很可惜投影算子还需要满足自伴性条件。不过，根据题目要我们证的条件，我们大约可以猜测出题目的突破口应该还是在于 **投影矩阵**。

我们知道投影矩阵可以写成 $\tilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^\star$ 的形式，其中 $\boldsymbol{W} \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 且 $\boldsymbol{W}^\star\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_r$. 而题目要我们证的是 $\boldsymbol{X}^\star\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_r$，显然我们可以将中间的 $\boldsymbol{B}$ 作一个拆分，得到

$$(\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{X})^\star(\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}_r.$$

而第一个条件，我们也可以将其转化为

$$\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{-1/2} = (\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{X})(\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{X})^\star.$$

因此，我们只需证存在 Hermite 正定阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{-1/2}$ 是投影矩阵。

在上面的分析中，我们并没有利用到 $\boldsymbol{P}$ 的幂等性。因此，我们考虑使用幂等性来说明 $\tilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{-1/2}$ 是投影矩阵。由于 $\tilde{\boldsymbol{P}}$ 的幂等性是显然的，我们只需要证明自伴性，即 $\tilde{\boldsymbol{P}} = \tilde{\boldsymbol{P}}^{\star}$，亦即 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\star}$.

这个结论乍一看比较难证。我们不妨“幻想”一下，我们加个什么条件，结论就会变得好证呢？我们注意到左边是一个比较对称的结构，如果我们能够将 $\boldsymbol{P}$ 也能分解成一个比较对称的结构，问题应该就能够得到简化。什么分解比较对称呢？自然是谱分解。但是很遗憾，存在谱分解 $\boldsymbol{P}$ 一定要是正规的，这个条件是我们不可能能证出来的——题目只告诉我们幂等，幂等是推不出正规的。谱分解是一种酉相似变换，如果我们把条件放宽，只要求相似于对角阵，不要求酉矩阵，这样是否可行呢？

我们先来验证一下：如有 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$，是否能推出 $\exists \boldsymbol{B} \succ 0$，使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\star}$.

$$\mathrm{LHS} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$$
$$\mathrm{RHS} = \boldsymbol{S}^{-\star}\boldsymbol{\Lambda}^{\star}\boldsymbol{S}^{\star}.$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{\star}$ 是显然的——因为 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$ 的特征值只可能为 0, 1. 因此，我们只需要取 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-\star}\boldsymbol{S}^{-1}$ 就可以保证左边和右边相等了。$\boldsymbol{B}$ 的正定性也是显然的。

因此，问题的关键就落在了是否存在相似分解 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ 上。只要把这个问题说清楚这道题就做完了。我们考虑 Jordan 标准型分解 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}^{-1}$，现在我们的任务就是证明 $\boldsymbol{J}$ 是对角阵，即所有的 Jordan 块都是一阶块。

我们利用反证法来说明 $\boldsymbol{J}$ 的所有 Jordan 块都是一阶块。假设 $\boldsymbol{J}$ 存在至少二阶块 $\boldsymbol{J}_i$. 由 $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ 知，$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{J}$，进而每个 Jordan 块都满足 $\boldsymbol{J}_i^2 = \boldsymbol{J}_i$. 下面我们依据 $\boldsymbol{J}_i$ 的特征值进行分类讨论。

Case 1：若 $\boldsymbol{J}_i$ 的特征值为零，则 $\boldsymbol{J}_i$ 为幂零 Jordan 块，$\boldsymbol{J}_i^2 \neq \boldsymbol{J}_i$.

Case 2：若 $\boldsymbol{J}_i$ 的特征值为一，则 $\boldsymbol{J}_i = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}$，其中 $\boldsymbol{N}$ 是幂零 Jordan 块。我们有

$$\boldsymbol{J}_i^2 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N})^2 = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^2 \neq \boldsymbol{I} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{J}_i.$$

因此，$\boldsymbol{J}$ 的所有块都是一阶块，亦即 $\boldsymbol{J}$ 是对角的。这样，我们就证明了相似分解 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$ 的存在性。

具体证明细节由读者自行完善!

Problem 5. 已知 m, n 是正整数，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 满足 $\|\boldsymbol{B}\|_2 < 1$. 令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\star} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

证明：$\boldsymbol{A}$ 正定，并且

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \frac{1 + \|\boldsymbol{B}\|_2}{1 - \|\boldsymbol{B}\|_2}.$$

证明. 考虑合同变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}^\star & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ 0 & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}^\star\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}.$$

因此我们只需研究

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ 0 & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}^\star\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

的正定性。等价地，我们只需研究 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}^\star\boldsymbol{B}$ 的正定性。考虑

$$\boldsymbol{x}^\star\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^\star\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\star\boldsymbol{B}^\star\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|_2^2-\|\boldsymbol{B}x\|_2^2.$$

于是，我们只需要比较 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 与 $\|\boldsymbol{B}x\|_2$ 的大小关系。想必看到这里大家都能联想到 2–范数的定义：

$$\|\boldsymbol{B}\|=\sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{B}x\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\geq\frac{\|\boldsymbol{B}x\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$

因此

$$\|\boldsymbol{B}x\|_2\leq\|\boldsymbol{B}\|_2\|\boldsymbol{x}\|_2<\|\boldsymbol{x}\|_2.$$

因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 正定，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定。

这一技术在数值算法 11 月 17 日作业的第 4 题中亦有应用。

接下来我们来计算 $\boldsymbol{A}$ 的条件数。由于 2–范数是酉不变范数，我们可以考虑先对 $\boldsymbol{A}$ 作一些酉变换来简化范数的计算。变换的关键在于 $\boldsymbol{B}$，单位阵其实无关紧要。那么我们该如何处理 $\boldsymbol{B}$ 呢？我们很自然地能够想到利用奇异值分解来对 $\boldsymbol{B}$ 进行变换，从而实现对 $\boldsymbol{A}$ 的酉相似变换。具体地

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^\star & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \\ & \boldsymbol{V}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{\Sigma}\\ \boldsymbol{\Sigma}^\star & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}^\star & \\ & \boldsymbol{V}^\star\end{bmatrix}.$$

对于 $\boldsymbol{A}^{-1}$，我们只要对上式求个逆就行了。因此，如果我们设

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{\Sigma}\\ \boldsymbol{\Sigma}^\star & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}$$

那么

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\|\boldsymbol{S}\|_2\|\boldsymbol{S}^{-1}\|_2.$$

由于 2-范数等于最大奇异值，而 $\boldsymbol{S}$ 是正定矩阵，奇异值就是特征值，因此上式会等于 $\boldsymbol{S}$ 的最大特征值和最小特征值之比。因此，我们只需要求解 $\boldsymbol{S}$ 的特征值即可。

考虑将 $\boldsymbol{S}$ 进行进一步的分块：

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_\star & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{m-r} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Sigma}_\star & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix}$$

要求 $\boldsymbol{S}$ 的特征值，只需要考虑

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_\star & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Sigma}_\star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

的特征值。因此，考虑特征方程

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\lambda,\quad \boldsymbol{y}=[\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

易见

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{y}_4=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\Sigma}_\star\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{y}_1\lambda\\ \boldsymbol{\Sigma}_\star\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}_3\lambda\end{cases}$$

后两个式子联立，有

$$\boldsymbol{\Sigma}_\star^2\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}_1\lambda^2.$$

因此 $\boldsymbol{\lambda}=\pm\sigma_1,\ldots\pm\sigma_r$，对应的特征向量 $\boldsymbol{y}$ 满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{y}_4=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{y}_1=\operatorname{sign}(\lambda)\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{e}_j/\sqrt{2}\end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{S}$ 的特征值从小到大分别为

$$\operatorname{spec}(\boldsymbol{S})=\{1+\sigma_1,\ldots,1+\sigma_r,1,\ldots,1,1-\sigma_r,\ldots,1-\sigma_1\}$$

因此

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\|\boldsymbol{S}\|_2\|\boldsymbol{S}^{-1}\|_2=\frac{1+\sigma_1}{1-\sigma_1}=\frac{1+\|\boldsymbol{B}\|_2}{1-\|\boldsymbol{B}\|_2}.$$

$\square$

Problem 6. (选做) 若 $a = [a_1, a_2, a_3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量, 证明: 绕 a 逆时针旋转 θ 的旋转变换的表示矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} a_1^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & a_1a_2(1-\cos\theta)-a_3\sin\theta & a_1a_3(1-\cos\theta)+a_2\sin\theta \\ a_1a_2(1-\cos\theta)+a_3\sin\theta & a_2^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & a_2a_3(1-\cos\theta)-a_1\sin\theta \\ a_1a_3(1-\cos\theta)-a_2\sin\theta & a_2a_3(1-\cos\theta)+a_1\sin\theta & a_3^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}.$$

证明. 对任意向量 $x \in \mathbb{R}^3$，我们将其分解为平行于 a 的分量和垂直于 a 的分量：

$$x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \quad x_{\parallel} = (aa^{\mathrm{T}})v, \quad x_{\perp} = x - x_{\parallel}.$$

绕 a 逆时针旋转 θ 后，$x_{\parallel}$ 不变，而 $x_{\perp}$ 在垂直于 a 的平面上旋转 θ. 这里我们需要引入第三个方向来建立直角坐标系。既然 a 和 $v_{\perp}$ 垂直，那么 $w = a \times v_{\perp} = a \times v$ 就是平面上的另一个正交轴。于是，$v_{\perp}$ 旋转后的结果就是

$$v'_{\perp} = v_{\perp}\cos\theta + (a \times v)\sin\theta.$$

我们将两个分量合成，得到

$$v' = v_{\parallel} + v'_{\perp} = (aa^{\mathrm{T}})v + (I - aa^{\mathrm{T}})v\cos\theta + (a \times v)\sin\theta.$$

现在，我们需要将上式矩阵化。其中的关键就是把叉乘写出矩阵形式。我们知道 $a \times v = Kv$，其中

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$v' = [(\cos\theta)I + (1-\cos\theta)aa^{\mathrm{T}} + \sin\theta K]v.$$

展开矩阵项，即可得到题目中的结果。 □

Problem 7. (选做) 证明：任何复方阵都可以分解成一个正投影矩阵和一个非奇异矩阵的乘积。

证明. 由于题目设计正交性和奇异性，我们很自然地能够想到利用奇异值分解来实现这个分解。考虑精简的奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}_r\boldsymbol{V}_1^{\star},$$

由于 $\boldsymbol{U}_1$ 是 $\mathrm{Range}(\boldsymbol{A})$ 的一组正交基，因此正投影矩阵呼之欲出：

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\star})(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}_r\boldsymbol{V}_1^{\star}).$$

但后一项显然是 $\boldsymbol{A}$，它可能是奇异矩阵，因此我们需要对其进行调整。我们考虑满的奇异值分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\star.$$

$\boldsymbol{A}$ 的奇异性只可能来自于 $\boldsymbol{\Sigma}$，因此我们可以向 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的零奇异值位置填充垃圾，使其变成非奇异矩阵。可以注意到，这样做并不会影响到分解的正确性，因为我们在前面乘了一个正投影矩阵，那些垃圾成分都在其正交补空间内，都被过滤掉了。因此结论成立。 $\square$

Problem 8. (选做) 已知 n 是正整数，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是复对称矩阵，证明：存在酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 以及半正定对角阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$.