

2025 年 11 月 11 日作业 (截止: 2025 年 11 月 18 日 08:00)

1. 若 n 是大于 1 的整数, $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. 举例说明下列情况可能发生:
 - (a) $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$.
 - (b) $(A^k)^\dagger \neq (A^\dagger)^k$, 其中 k 是正整数.
 - (c) A^\dagger 的非零特征值的倒数不是 A 的特征值.
2. 已知 m, n, k 是正整数, $X \in \mathbb{C}^{m \times k}$ 是列满秩矩阵, $Y \in \mathbb{C}^{k \times n}$ 是行满秩矩阵, 证明: $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.
3. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermite 矩阵, 其 (i, j) 元素为 $a_{i,j}$. 证明: 每个圆盘

$$\mathcal{D}_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{i,i}|^2 \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|^2 \right\}$$

中都至少含有 A 的一个特征值.

4. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 Hermite 矩阵, $v \in \mathbb{C}^n$, 证明:

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A + vv^*) \leq \lambda_{i+1}(A), \quad (1 \leq i < n).$$

5. 已知 m, n 是正整数且 $1 \leq m < n$. 若 n 阶 Hermite 正定矩阵 A 可分块表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, 证明: $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 正定, 并且

$$\|S\|_2 \|S^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

6. (选做) 证明: 对于任何复矩阵 A 都有

$$A^\dagger = \lim_{\delta \rightarrow 0+} (A^* A + \delta I)^{-1} A^* = \lim_{\delta \rightarrow 0+} A^* (A A^* + \delta I)^{-1}.$$

7. (选做) 若 a, b, c 是实数, 证明:

$$-\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2) \leq 3ab + bc + ca \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{4}(a^2 + b^2 + 2c^2).$$

参考解答

1

证明. (a) 为方便计算, 下设 $n = 3$. 取 $A = e_1e_1^\top$, $B = ee^\top$. 则

$$\begin{aligned} A &= I(e_1e_1^\top)I &&\Rightarrow A^\dagger = A \\ B &= U\Lambda U^\top, \quad \Lambda = \text{diag}\{3, 0, 0\} &&\Rightarrow B^\dagger = U\Lambda^\dagger U^\top = \frac{1}{9}B \\ AB &= I(\sqrt{3}e_1e_1^\top)U^\top &&\Rightarrow (AB)^\dagger = U(\sqrt{3}e_1e_1^\top). \end{aligned}$$

而 $B^\dagger A^\dagger = \frac{1}{9}Be_1e_1^\top$. 显然 $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$.

(b) 我们需要找一个非正规矩阵。我们希望能够找到一个幂等矩阵 A , 但 A^\dagger 不是幂等的。取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

则

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

显然 $A^2 = A$, 但

$$(A^\dagger)^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \neq A^\dagger.$$

因此 $(A^2)^\dagger \neq (A^\dagger)^2$.

(c) 我们直接复用上面的矩阵 A . 其非零特征值为 1, 而 A^\dagger 的非零特征值为 $1/2$, 显然 2 不是 A 的特征值。

可以验证, 当 $AA^\dagger = A^\dagger A$ 时, 上述三种情况均不会发生。 \square

2

证明. 下面我们证明一个引理:

1. 列满秩矩阵 X 的广义逆满足 $X^\dagger X = I_k$.
2. 行满秩矩阵 Y 的广义逆满足 $YY^\dagger = I_k$.

证明: 我们只证明列满秩情况, 行满秩情况可由列满秩情况转置得到。由于 X 列满秩, X^\dagger 可表示为

$$X^\dagger = (X^*X)^{-1}X^*.$$

因此

$$X^\dagger X = (X^* X)^{-1} X^* X = I_k.$$

下面我们证明 $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$. 我们直接将其代入 Penrose 方程组验证即可, 不再赘述。

□

3

证明. 题中对 λ 和 $a_{i,i}$ 进行了比较。这似乎表明, 我们是考虑用 $a_{i,i}$ 来近似 λ . 右端项如果写成矩阵形式, 就是

$$\|(A - a_{i,i}I)e_i\|_2^2 = \|Ae_i - e_i a_{i,i}\|_2^2.$$

这表明, 此处我们是在用 $a_{i,i}$ 来近似特征值 λ , 而用 e_i 来近似特征向量 x , 右端项就是残差的范数平方。题目要我们证的结论, 就是说特征值的误差可以由残差的误差控制。事实上, 我们有如下引理:

引理: 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是正规矩阵, 则

$$\min_{\lambda \in \text{spec}(A)} |\lambda - \mu| \leq \|Ax - x\mu\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = 1, \mu \in \mathbb{C}.$$

证明: 考虑将右端项展开, 得到

$$\|Ax - x\mu\|_2^2 = x^*(A - \mu I)^*(A - \mu I)x.$$

由于 A 是正规矩阵, $A - \mu I$ 也是正规矩阵, 因此 $(A - \mu I)^*(A - \mu I)$ 是 Hermite 矩阵。由 Rayleigh 商定理知

$$\|Ax - x\mu\|_2^2 = R(x) \geq \min_{\lambda \in \text{spec}(A)} |\lambda - \mu|^2.$$

取平方根即得所需结论。

回到题目中, 我们直接应用引理, 取 $x = e_i$, $\mu = a_{i,i}$ 即可得到所需结论。

□

4

证明. vv^* 的特征值满足:

$$0 = \lambda_1(vv^*) = \dots = \lambda_{n-1}(vv^*) < \lambda_n(vv^*) = \|v\|_2^2.$$

由 Weyl 不等式

$$\lambda_i(A + vv^*) \geq \lambda_i(A) + \lambda_1(vv^*) = \lambda_i(A).$$

原始形式的 Weyl 不等式告诉我们

$$\lambda_i(A + vv^*) \leq \lambda_{i+1}(A) + \lambda_{n-1}(vv^*) = \lambda_{i+1}(A).$$

如果不使用原始形式的 Weyl 不等式，我们可以考虑使用 Courant–Fischer 极小极大定理。由于我们想要的是上界，我们考虑使用

$$\lambda_i(A + vv^*) = \min_{\dim S=i} \max_{x \in S, \|x\|_2=1} x^*(A + vv^*)x.$$

取 $S_{i+1} = \text{span}(u_1, \dots, u_{i+1})$ ，其中 u_i 是 A 的第 i 个单位特征向量。由于我们希望把扰动项的影响降到最低，我们考虑

$$\mathcal{S}_0 = \{S_0 : S_0 \subset S_{i+1}, v^*x = 0 (\forall x \in S_0)\}.$$

显然 $\forall S_0 \in \mathcal{S}_0$, $\dim S_0 \geq i$. 因此我们可以取一个 $S \in \mathcal{S}_0$ 使得 $\dim S = i$. 由 $S \subset S_{i+1}$ 可知

$$\max_{x \in S, \|x\|_2=1} x^*Ax \leq \lambda_{i+1}(A).$$

同时由 $v^*x = 0$ 可知 $x^*vv^*x = 0$. 因此

$$\lambda_i(A + vv^*) \leq \max_{x \in S, \|x\|_2=1} x^*(A + vv^*)x = \max_{x \in S, \|x\|_2=1} x^*Ax \leq \lambda_{i+1}(A).$$

综上，我们得到了所需结论。 \square

5

证明. 显然 S 是 Schur 补，因此我们考虑下面的合同变换：

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{2,1}A_{1,1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

由 A 正定可知 S 也正定。为计算范数，我们考虑 A 的逆：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{2,1}A_{1,1}^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & S^{-1} \end{bmatrix}$$

因此 S^{-1} 是 A^{-1} 的子块。由 Cauchy 交错定理可知 $\|S^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2$.

而由 S 的定义我们知道

$$S = A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2} = A_{2,2} - A_{1,2}^*A_{1,1}^{-1}A_{1,2}.$$

由 $A_{1,1}$ 正定，有

$$A_{2,2} \succeq S \implies \|S\|_2 \leq \|A_{2,2}\|_2 \leq \|A\|_2.$$

综上，

$$\|S\|_2\|S^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

\square

这个证法充分利用了 Schur 补的性质。这个证法是助教在课上提到的。我第一次做这道题时，使用了另外一种方法：

证明. 要证 $\|S\|_2\|S^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$ ，我们只需证

$$\frac{\lambda_m(S)}{\lambda_1(S)} \leq \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_1(A)}.$$

我们只需证

$$\lambda_1(A) \leq \lambda_1(S), \quad \lambda_m(S) \leq \lambda_n(A).$$

由 Rayleigh 商定理可知

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &= \min_{\|z\|_2=1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^* A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \\ &= \min_{\|z\|_2=1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{2,1}A_{1,1}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \min_{\|z\|_2=1} \begin{bmatrix} x + A_{1,1}^{-1}A_{1,2}y \\ y \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + A_{1,1}^{-1}A_{1,2}y \\ y \end{bmatrix} \\ &= \min_{\|z\|_2=1} (x + A_{1,1}^{-1}A_{1,2}y)^* A_{1,1} (x + A_{1,1}^{-1}A_{1,2}y) + y^* S y \\ &\leq \min_{\|y\|_2 \leq 1} y^* S y \quad \text{取 } x = -A_{1,1}^{-1}A_{1,2}y \\ &\leq \frac{y^* S y}{y^* y} = \lambda_1(S). \end{aligned}$$

同理可证

$$\lambda_n(A) \geq \lambda_m(S).$$

因此

$$\|S\|_2\|S^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

□

6

证明. 考虑 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^*$ ，则有

$$A^*A = V\Sigma^*\Sigma V^*, \quad AA^* = U\Sigma\Sigma^*U^*.$$

因此

$$(A^*A + \delta I)^{-1}A^* = V(\Sigma^*\Sigma + \delta I)^{-1}\Sigma^*U^* \rightarrow V\Sigma^\dagger U^* = A^\dagger, \quad \text{as } \delta \rightarrow 0.$$

同理

$$A^*(AA^* + \delta I)^{-1} \rightarrow A^\dagger, \quad \text{as } \delta \rightarrow 0.$$

因此

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (A^* A + \delta I)^{-1} A^* = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} A^* (A A^* + \delta I)^{-1} = A^\dagger.$$

□

7

证明. 考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

则原问题可化为

$$x^*(-1.5B)x \leq x^*Ax \leq x^* \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{4} B \right) x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

我们只需证

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{x^*Ax}{x^*Bx} \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

这实际上是广义特征值的数值域问题。我们只需要求解特征方程

$$Ax = Bx\lambda.$$

我们直接考虑行列式

$$\det(A - \lambda B) = 0$$

化简得

$$(2\lambda + 3)(4\lambda^2 - 6\lambda - 1) = 0.$$

因此广义特征值为

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{4}, \quad \lambda_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{4}.$$

因此

$$-\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2) \leq 3ab + bc + ca \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{4}(a^2 + b^2 + 2c^2).$$

□