2025 年 11 月 11 日作业 (截止: 2025 年 11 月 18 日 08:00)

1. 已知 n 是正整数，$\mathcal{V}$ 是 n 维内积空间，若 $\mathcal{V}$ 中的向量 x 与 $\mathcal{V}$ 的一组基 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 的每个向量都正交，证明：$x = 0$.

2. 若 n 是正整数，$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 (i,j) 元素为 $a_{i,j}$，证明 Hadamard 不等式

$$|\det(A)|^2 \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2.$$

3. 若 n 是正整数，$a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$，证明：

$$\|a-b\|_2^2 + \|b-c\|_2^2 + \|c-d\|_2^2 + \|d-a\|_2^2 \ge \|a-c\|_2^2 + \|b-d\|_2^2.$$

4. 已知 n 是正整数，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定矩阵。证明：对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$y^\top A^{-1} y + x^\top A x \ge 2 y^\top x.$$

探究等号成立的充要条件。

5. 若 T 是有限维内积空间到自身的保持内积的变换，证明：T 一定是线性变换。

6. (选做) 若 n 是大于 1 的正整数，证明：$\mathbb{R}^n$ 上的 l^4-范数 $\|\cdot\|_4$ 不能由内积诱导。

7. (选做) 证明 Legendre 多项式

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} (\lambda^2 - 1)^n, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

在内积

$$\langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle = \int_{-1}^{1} f(\lambda) g(\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

下两两正交。

8. (选做) 是否存在所有元素的绝对值都相等的 8 阶实正交矩阵？若存在，请举出一例；若不存在，请给出理由。

1.

证明. 设 $V=[v_1,\dots,v_n]$. 由向量 x 与基 $v_1,v_2,\dots,v_n$ 的每个向量都正交可知

$$V^\star x=0.$$

因此 $x\in \mathrm{Ker}(V^\star)$. 又由 $\mathrm{Ker}(V^\star)=\mathrm{Range}(V)^\perp$ 可知 x 只能是零向量，即 $x=0$. □

2.

证明. 考虑 QR 分解 $A^*=QR$，其中 $Q^*Q=QQ^*=I_n$，R 为上三角阵.

$$\det(A^*)=\det(Q)\det(R)=\det(R)=\prod_{i=1}^n r_{ii}.$$

下面我们证明 $|r_{ii}|^2\le\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2$. 设 r_i 为矩阵 R 的第 i 列，则

$$|r_{ii}|^2\le\|r_i\|_2^2=\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2.$$

这是因为 2–范数具有酉不变性。因此

$$|\det(A)|^2\le\prod_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2.$$

本题之所以使用 QR 分解，是因为 Hadamard 不等式要求我们将行列式与原始列向量联系起来，而 QR 分解是列向量的渐近构造，它天然地联系起了原始列向量与正交化后的列向量。如果我们把行列式看成是平行六面体的体积，那么 Hadamard 不等式告诉我们，正交化后的列向量所张成的平行六面体的体积最大，也就是说正交是使得空间撑得最开的状态。 □

3.

证明. 由平行四边形恒等式知，以下三式成立：

$$\|a-c\|_2^2+\|a+c-2b\|_2^2=2\|a-b\|_2^2+2\|b-c\|_2^2 \tag{1}$$

$$\|a-c\|_2^2+\|a+c-2d\|_2^2=2\|c-d\|_2^2+2\|d-a\|_2^2 \tag{2}$$

$$2\|a+c-2b\|_2^2+2\|a+c-2d\|_2^2=4\|b-d\|_2^2+4\|a+c-2(b+d)\|_2^2 \tag{3}$$

由 (1) (2) (3) 可得

$$\|a-b\|_2^2+\|b-c\|_2^2+\|c-d\|_2^2+\|d-a\|_2^2\ge\|a-c\|_2^2+\|b-d\|_2^2.$$

□

4.

证明. 要证
$$y^\top A^{-1}y + x^\top Ax \geq 2y^\top x$$
只需证
$$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} A^{-1} & A \\ A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$
只需证
$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -I \\ -I & A \end{bmatrix}$$
半正定即可。考虑合同对角化
$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -I \\ -I & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A \\ -A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A \\ -A & I \end{bmatrix}$$
显然 $\begin{bmatrix} A^{-1} & -I \\ -I & A \end{bmatrix}$ 对称半正定。
下面考虑等号成立条件：
$$\begin{bmatrix} I & -A \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - Ax \\ x \end{bmatrix}$$
显然当且仅当 $y = Ax$ 时等号成立. □

上面这个证法利用分块矩阵的合同变换来证明一个分块矩阵半正定，代数味比较浓厚。我们也可以用更几何的方式来理解这个不等式。在线性代数初级课程中，矩阵一般被视为变换；但在内积空间中，对称正定矩阵应该被视为度量。从这个角度出发，我们有如下证法。

证明. 由于左端的 A^{-1} 破坏了对称性，我们考虑变换 $y = Az$，于是左边变为
$$z^\top Az + x^\top Ax \geq 2z^\top Ax.$$
把 A 视为度量，我们可以定义 A–内积和 A–范数：
$$\langle u, v\rangle_A = u^\top Av, \quad \|u\|_A = \langle u, u\rangle_A.$$
于是我们只需证
$$\|z\|_A^2 + \|x\|_A^2 \geq 2\langle z, x\rangle_A.$$
这正是完全平方差公式在 A–内积下的表现形式：
$$\|z - x\|_A^2 = \|z\|_A^2 - 2\langle z, x\rangle_A + \|x\|_A^2 \geq 0.$$
等号成立当且仅当 $z = x$，即 $y = Ax$. □

5.

证明. 在内积空间中，要证明两个向量 a 和 b 相等，最强力的方法是去证明差值 $a-b$ 的范数为零。

先证 T 保持加法。对于任意 $x, y \in \mathcal{V}$，我们要证

$$T(x+y)=T(x)+T(y).$$

我们只需证

$$\|T(x+y)-(T(x)+T(y))\|_2^2=0.$$

展开该范数的平方，有

$$\begin{aligned}
\|T(x+y)-(T(x)+T(y))\|_2^2 &= \langle T(x+y)-(T(x)+T(y)), T(x+y)-(T(x)+T(y))\rangle \\
&= \langle T(x+y), T(x+y)\rangle - \langle T(x+y), T(x)+T(y)\rangle - \\
&\quad \langle T(x)+T(y), T(x+y)\rangle + \langle T(x)+T(y), T(x)+T(y)\rangle \\
&= \langle T(x+y), T(x+y)\rangle - \langle T(x+y), T(x)\rangle - \\
&\quad \langle T(x+y), T(y)\rangle - \langle T(x), T(x+y)\rangle - \langle T(y), T(x+y)\rangle + \\
&\quad \langle T(x), T(x)\rangle + \langle T(x), T(y)\rangle + \langle T(y), T(x)\rangle + \langle T(y), T(y)\rangle
\end{aligned}$$

由于 T 保持内积，上式可化简为

$$\begin{aligned}
\|T(x+y)-(T(x)+T(y))\|_2^2 &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x+y, x\rangle \\
&\quad - \langle x+y, y\rangle - \langle x, x+y\rangle - \langle y, x+y\rangle \\
&\quad + \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x+y-(x+y)\|_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

再证 T 保持数乘。对于任意 $x \in \mathcal{V}$ 和标量 α，我们要证

$$T(x\alpha)=T(x)\alpha.$$

我们只需证

$$\|T(x\alpha)-T(x)\alpha\|_2^2=0.$$

展开该范数的平方，有

$$\begin{aligned}
\|T(x\alpha)-T(x)\alpha\|_2^2 &= \langle T(x\alpha)-T(x)\alpha, T(x\alpha)-T(x)\alpha\rangle \\
&= \langle T(x\alpha), T(x\alpha)\rangle - \langle T(x\alpha), T(x)\alpha\rangle - \langle T(x)\alpha, T(x\alpha)\rangle + \langle T(x)\alpha, T(x)\alpha\rangle
\end{aligned}$$

由于 T 保持内积，上式可化简为

$$\begin{aligned}
\|T(x\alpha)-T(x)\alpha\|_2^2 &= \langle x\alpha, x\alpha\rangle - \langle x\alpha, x\rangle\overline{\alpha} - \langle x, x\alpha\rangle\alpha + \langle x, x\rangle|\alpha|^2 \\
&= |\alpha|^2\|x\|_2^2 - |\alpha|^2\|x\|_2^2 - |\alpha|^2\|x\|_2^2 + |\alpha|^2\|x\|_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

综上，T 是线性变换。 $\square$

6.

证明. 我们只需证 l^4–范数不满足平行四边形恒等式即可。取

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\|x+y\|_4^2 + \|x-y\|_4^2 = (|1|^4 + |1|^4)^{1/2} + (|1|^4 + |-1|^4)^{1/2} = 2^{3/2},$$

而

$$2\|x\|_4^2 + 2\|y\|_4^2 = 2(|1|^4)^{1/2} + 2(|1|^4)^{1/2} = 4.$$

显然 $2^{3/2} \neq 4$，因此 l^4–范数不满足平行四边形恒等式，不能由内积诱导。 □

7.

证明. 若 $m \neq n$，我们考虑

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}(\lambda^2-1)^m \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}(\lambda^2-1)^n \mathrm{d}\lambda.$$

不失一般性，设 $m < n$，则对上式积分分部 n 次可得

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}(\lambda^2-1)^m \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}(\lambda^2-1)^n \mathrm{d}\lambda &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}(\lambda^2-1)^m \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}}(\lambda^2-1)^n \\
&= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m}(\lambda^2-1)^m \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}}(\lambda^2-1)^n \Big|_{-1}^{1} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}\lambda^{m+1}}(\lambda^2-1)^m \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}}(\lambda^2-1)^n \mathrm{d}\lambda \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}\lambda^{m+1}}(\lambda^2-1)^m \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\lambda^{n-1}}(\lambda^2-1)^n \mathrm{d}\lambda \\
&= \cdots \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}\lambda^{m+n}}(\lambda^2-1)^m \cdot (\lambda^2-1)^n \mathrm{d}\lambda = 0.
\end{aligned}$$

因此 Legendre 多项式在内积下两两正交。 □

8.

证明. 考虑二阶列正交矩阵

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

它的所有元素的绝对值都相等。于是，四阶列正交矩阵可以表示为

$$H_4 = H_2 \otimes H_2.$$

这是因为 Kronecker 积保持列正交性，即

$$H_4^\top H_4 = (H_2 \otimes H_2)^\top (H_2 \otimes H_2) = (H_2^\top H_2) \otimes (H_2^\top H_2) = cI_2 \otimes cI_2 = c^2 I_4.$$

类似地，八阶列正交矩阵可以表示为

$$H_8 = H_4 \otimes H_2.$$

最后作归一化处理即可得到所有元素的绝对值都相等的八阶实正交矩阵。 $\square$