2025 年 12 月 9 日作业 (截止: 2025 年 12 月 16 日 08:00)

1. 设 n 为正整数, 给定 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^\top x + \alpha = 0\}$, 其中 $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}$. 求 $\mathbb{R}^n$ 中的一点 x_0 到该超平面的距离.

2. 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 若 Γ 是三角形 ABC 的内切圆, D, E, F 分别是 Γ 在 BC, CA, AB 边上的切点. 证明 AD, BE, CF 三线共点, 并求出该点关于三角形 ABC 的重心坐标.

3. 若 n 是正整数, 给定实对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 在由 n 阶实对称半正定矩阵的全体构成的闭凸锥 $\mathcal{S}_+^n = \{X = CC^\top : C \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ 中求 Frobenius 范数意义下离 A 最近的矩阵.

4. 给定欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的三角形 $A_1A_2A_3$ 以及一点 P_0. 将 P_k 绕 A_{k+1} 逆时针旋转 120° 得到 P_{k+1}, ($k = 0, 1, 2, \ldots$, 此处约定 $A_{k-3} = A_k$), 可以得到点列 $P_1, P_2, \ldots$. 证明: 若 $P_{2025} = P_0$, 则三角形 $A_1A_2A_3$ 是正三角形.

5. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 证明: A 的数值域

$$w(A) = \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

是 $\mathbb{C}$ 的凸集.

6. (选做) 已知在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的四点 P, Q, R, S 关于某个给定的四面体 $ABCD$ 的重心坐标分别为 $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$, $(q_1 : q_2 : q_3 : q_4)$, $(r_1 : r_2 : r_3 : r_4)$, $(s_1 : s_2 : s_3 : s_4)$, 证明: P, Q, R, S 共面的充要条件

$$\det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} = 0.$$

7. (选做) 若 n 是正整数, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸集, 函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足对任何 $x_1, x_2 \in \Omega$ 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

证明: 对任何 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Omega$ 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

参考答案

1

证明. 设 $w^\top x+\alpha=0$. 点 x_0 到超平面的距离可以表示为向量 x_0-x 在法向量 w 上的投影长度：

$$d=\frac{w^\top(x_0-x)}{\|w\|_2}=\frac{w^\top x_0+\alpha}{\|w\|}.$$

□

2

证明. 由切线长定理可知:

$$AF=AE,\quad BD=BF,\quad CE=CD.$$

因此：

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

根据 Ceva 定理，三线 AD, BE, CF 共点。设该点为 I. 由

$$S_{\triangle BIC}:S_{\triangle AIC}:S_{\triangle AIB}=a:b:c,$$

可知该点的重心坐标为 $\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$. □

3

证明. 考虑谱分解 $A=Q\Lambda Q^*$. 由 Frobenius 范数的酉不变性，有

$$\|A-X\|_{\mathrm{F}}=\|Q(\Lambda-Q^*XQ)Q^*\|_{\mathrm{F}}=\|\Lambda-Y\|_{\mathrm{F}},\quad Y=Q^*XQ.$$

最优的 Y 一定也是对角阵，否则我们可以通过将非对角元置零来减小 Frobenius 范数。由于合同变换不改变半正定性，Y 也是半正定的，因此 Y 的对角元非负。显然当 $Y=\Lambda_+$ 时，该范数取得最小值，其中 Λ_+ 是 Λ 的正部。于是，S_+^n 中离 A 最近的矩阵为 $X=Q\Lambda_+Q^*$. □

4

证明. 不妨设 A_1, A_2, A_3, P_k 对应的复数分别是 $a_1, a_2, a_3, p_k\in\mathbb{C}$，其中 $k=0,1,\dots$

由题意

$$p_{k+1}-a_{k+1}=\omega(p_k-a_{k+1}),\quad \omega=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}.$$

亦即

$$p_{k+1} = \omega p_k + (1-\omega) a_{k+1}.$$

ω 满足

$$\omega^3 = 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

我们把前三项写出来：

$$\begin{aligned}
&p_1 = \omega p_0 + (1-\omega) a_1, \\
&p_2 = \omega^2 p_0 + \omega(1-\omega) a_1 + (1-\omega) a_2, \\
&p_3 = p_0 + \omega^2(1-\omega) a_1 + \omega(1-\omega) a_2 + (1-\omega) a_3 = p_0 + (1-\omega)(\omega^2 a_1 + \omega a_2 + a_3).
\end{aligned}$$

这说明 p_k 每隔三项是一个等差数列。因此 $p_{2025} = p_0$ 等价于

$$(1-\omega)(\omega^2 a_1 + \omega a_2 + a_3) = 0,$$

即

$$\omega^2 a_1 + \omega a_2 + a_3 = 0.$$

左右同乘 ω，得到

$$a_1 + \omega^2 a_2 + \omega a_3 = 0.$$

两式相减：

$$(\omega^2 - 1) a_1 + \omega(1-\omega) a_2 + (1-\omega) a_3 = 0.$$

两边同时除以 $1-\omega$，得到

$$(1+\omega) a_1 = \omega a_2 + a_3.$$

由此可知

$$a_1 - a_3 = \omega(a_2 - a_1).$$

这说明三角形 $A_1A_2A_3$ 的边在复平面上满足旋转 120° 的关系，因此该三角形是正三角形。 $\square$

5

证明. 设 $\xi = x^* A x$，$\eta = y^* A y$，其中 $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. 显然 x 和 y 线性无关。由于直接找到 z 使得 $\xi\alpha + \eta\beta = z^* A z$ 比较困难，我们考虑在二维子空间 $\mathcal{V} = \operatorname{span}\{x, y\} = \operatorname{span} Q$ 上找合适的 z. 因此我们考虑 Rayleigh–Ritz 投影 $Q^* A Q$ 的数值域 $w(B)$. 进一步地，我们可以再作用一个酉相似变换，使得最终的矩阵是 Schur 型。现在我们只需要考虑一个 2×2 的上三角矩阵 B 的数值域 $w(B)$. 而由于平移不改变数值域的形状，我们不妨设 $\operatorname{tr}(B) = 0$，否则可以对 B 减去 $\operatorname{tr}(B) I$. 因此，我们不妨设

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

现在设有单位向量 $x \in \mathbb{C}^2$，则它可以参数化为

$$x = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} \cos\theta \\ e^{i\beta} \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi/2].$$

因此

$$x^* B x = e^{-i\alpha} (e^{-i\alpha} x)^* B (e^{-i\alpha} x) e^{i\alpha}.$$

这说明数值域关于原点旋转不变。不失一般性，我们可以设 $\alpha = 0$. 于是

$$x = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi} \sin\theta \end{bmatrix}$$

则

$$x^* B x = a \cos(2\theta) + \frac{b}{2} e^{i\phi} \sin(2\theta).$$

由此可见，数值域是一个椭圆。由于椭圆是凸集，因此 $w(B)$ 是凸集，因此 $w(A)$ 也是凸集。 □

6

证明. 设 A, B, C, D 对应的齐次坐标分别为 a, b, c, d，则 P, Q, R, S 的齐次坐标分别为

$$[p, q, r, s] = [a, b, c, d] \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix}.$$

P, Q, R, S 共面等价于 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RS}$ 线性相关，这又等价于齐次坐标线性相关，即

$$\det([p, q, r, s]) = 0.$$

由行列式的性质可知

$$\det([p, q, r, s]) = \det([a, b, c, d]) \cdot \det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix}.$$

由于 A, B, C, D 不共面，$\det([a, b, c, d]) \neq 0$. 因此 P, Q, R, S 共面等价于

$$\det \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} = 0.$$

□

7

证明. 我们用 Cauchy 归纳法证明这个结论。对于 $n=2$ 的情况，结论显然成立。假设对于某个 $k \geq 2$，结论对所有 2 的小于等于 k 次幂成立，即对 $n=2,\ldots,2^k$ 均成立。现在我们来证明结论对 2^{k+1} 也成立。

给定 $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}} \in \Omega$，我们将它们分成两组，每组 2^k 个元素，我们有

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2}+\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right).$$

由归纳假设可知

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k},$$
$$f\left(\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_{2^k+1})+\cdots+f(x_{2^{k+1}})}{2^k}.$$

因此

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}.$$

由数学归纳法可知，结论对所有 n 是 2 的幂次成立。

接下来，假设结论对某个正整数 $m \geq 2$ 成立，我们来证明结论对 $m-1$ 也成立。给定 $x_1, \ldots, x_{m-1} \in \Omega$，我们构造

$$x_m = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}}{m-1} \in \Omega.$$

由假设可知

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}+x_m}{m}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{m-1})+f(x_m)}{m}.$$

代入 x_m 的定义，得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}}{m-1}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{m-1})}{m-1}.$$

由数学归纳法可知，结论对所有正整数 n 成立。 □