2022 年秋季学期高等线性代数期末考试

1. 是否存在实方阵 A 使得 $A^4 + I = 0$, 为什么?

2. 若 n 是大于 1 的正整数, $x, y \in \mathbb{C}^n$ 满足 $y^*x \neq 0$. 证明:

$$\left\| I_n - \frac{xy^*}{y^*x} \right\|_2 = \frac{\|x\|_2 \|y\|_2}{|y^*x|}.$$

3. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$. 证明: A 可对角化.

4. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵, $v \in \mathbb{C}^n$, 证明:

$$\lambda_i(A) \leq \lambda_i(A + vv^*) \leq \lambda_{i+1}(A), \quad (1 \leq i < n).$$

此处约定特征值按升序编号, 即 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

5. 若 n 是正整数, $A, E \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 证明:

$$\exp(A + E) - \exp(A) = \int_0^1 \exp((1-s)A)E\exp(s(A+E))\,\mathrm{d}s.$$

6. 已知 n 是正整数. 若 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 都是正矩阵, 且满足 $0 < A < B$. 证明: $\rho(A) < \rho(B)$.

7. 在三角形 ABC 中, P, Q 分别为边 AB, AC 上的动点, 满足 $|PB| \cdot |QC| = |PA| \cdot |QA|$. 设 BQ 和 CP 交于三角形 ABC 内的一点 M. 试确定动点 P, Q 的位置, 使 $S_{\triangle MBC}/S_{\triangle ABC}$ 最大.

8. 若 n 是正整数, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 证明: A 一定可以表示成有限个酉矩阵的线性组合.