

数值分析2012年复习总结

任课教师 王希云

第二章 数值分析基本概念

教学内容:

1. 误差与有效数字

误差、误差限、相对误差、相对误差限和有效数字的定义及相互关系;

误差的来源和误差的基本特性;

误差的计算(估计)的基本方法。

2. 算法的适定性问题

数值分析中的病态和不稳定性问题;

病态问题和不稳定算法的实例分析。

3. 数值计算的几个注意问题

数值计算的基本概念

● 误差概念和分析

误差的定义:

设 x 是精确值, p 是近似值, 则定义两者之差是绝对误差:

$$\Delta_a = |x - p|$$

由于精确值一般是未知的,因而 Δ 不能求出来,但可以根据测量误差或计算情况估计它的上限

$$|x-p| < \varepsilon$$

ε 称为绝对误差限。

相对误差定义为绝对误差与精确值之比

$$\Delta_r = \frac{\Delta_a}{|x|}$$
$$\Delta_r = \frac{\Delta_a}{|x|} < \eta \quad \text{称为相对误差限}$$

- **误差的来源:**

- 舍入误差**

- 将无限位字长的精确数处理成有限位字长近似数的处理方法称为舍入方法。带来舍入误差。

- 截断误差**

- 用数值法求解数学模型时,往往用简单代替复杂,或者用有限过程代替无限过程所引起的误差。

- **有效数字**

- 对于

- $$a = a_0 a_1 \dots a_m . a_{m+1} \dots a_{m+n} (a_0 \neq 0)$$

- 的近似数, 若 $|\Delta| \leq 0.5 \times 10^{-n}$,

则称 a 为具有 $m+n+1$ 位有效数字的有效数，其中每一位数字都叫做 a 的有效数字。有效数和可靠数的最末位数字称为可疑数字

有效数位的多少直接影响到近似值的绝对误差与相对误差的大小。

推论 1 对于给出的有效数，其绝对误差限不大于其最末数字的半个单位。

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m$$

$$|\Delta| = |x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

推论 2 对于给出的一个有效数，其相对误差限可估计如下：

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m$$

$$|\Delta_r(x)| \leq \frac{5}{a_1} \times 10^{-n}$$

例：计算 $y = \ln x$ 。若 $x \approx 20$ ，则取 x 的几位有效数字可保证 y 的相对误差 $< 0.1\%$ ？

● 数值计算的算法问题

“良态”问题和“病态”问题

在适定的情况下，若对于原始数据很小的变化 δX ，对应的参数误差 δy 也很小，则称该数学问题是良态问题；若 δy 很大，则称为病态问题。

病态问题中解对于数据的变化率都很大，因此数据微小变化必将导致参数模型精确解的很大变化。

数学问题的性态完全取决于该数学问题本身的属性，在采用数值方法求解之前就存在，与数值方法无关。

稳定算法和不稳定算法

如果用数值方法计算时，误差在计算过程中不扩散的算法称为稳定算法。否则称为不稳定算法。

● 数值计算应注意的问题

避免相近二数相减；

避免小分母；

避免大数吃小数；

选用稳定的算法。

绝对误差的运算：

$$\varepsilon(x_1 \pm x_2) = \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2)$$

$$\varepsilon(x_1 x_2) \approx |x_1| \varepsilon(x_2) + |x_2| \varepsilon(x_1)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{|x_1| \varepsilon(x_2) + |x_2| \varepsilon(x_1)}{|x_2|^2}$$

$$\varepsilon(f(x)) \approx |f'(x)| \varepsilon(x)$$

第三章 线性方程组求解的数值方法

教学内容:

1. 高斯消元法

消元法的实现过程;

主元问题。

2. 矩阵分解

矩阵 LU 分解的一般计算公式;

利用 LU 分解的线性方程组求解方法;

Cholesky 分解;

Matlab 的 Cholesky 分解函数。

3. 向量范数与矩阵范数

向量范数及其性质;

矩阵函数及其性质;

常用范数形式。

4. 线性方程组的迭代法求解

迭代求解的思路;

Jacobi 迭代法;

高斯-赛德尔迭代法;

迭代法的收敛性。

5. 方程组的病态问题与误差分析

线性方程组解的误差分析;

条件数和方程组的病态性。

消元法:

问题:

消去法是按照系数矩阵的主对角线上的元素（主元）进行消元。从而可能出现:

(1) 某个主元为零，导致消元过程无法进行。

(2) 当某个主元的绝对值很小时，计算结果误差很大。

定理:

若 A 的所有顺序主子式 均不为 0，则高斯消元无需换行即可进行到底，得到唯一解。

全主元消去法

每一步选绝对值最大的元素为主元素。

$$|a_{i_k j_k}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \neq 0 ;$$

列主元消去法

省去换列的步骤，每次仅选一列中最大的元。

$$|a_{i_k, k}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}| \neq 0$$

矩阵三角分解法

由 *Gauss* 消去法加上列主元 (或全主元) 有 LU 分解:

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ & \cdots & \cdots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

计算公式:

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, \quad i = 2, \dots, n$$

对 $k = 2, 3, \dots, n$ 计算

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}, \quad j = k, \dots, n$$

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) / u_{kk}, \quad i = k+1, \dots, n$$

算法:

(1) 解 Y : $y_1 = b_1$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

(2) 解 x : $x_n = y_n / u_{nn}$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) / u_{ii},$$

$$i = n-1, \dots, 1$$

Cholesky 分解:

定理:

设矩阵 A 对称正定, 则存在非奇异下三角阵 L 使得 $A=LL^T$ 。若限定 L 对角元为正, 则分解唯一。

Matlab 中的 Cholesky 分解函数:

chol ()

向量和矩阵的范数

为了研究线性方程组近似解的误差估计和迭代法的收敛性, 引进向量 (矩阵) 的范数的概念。

向量范数

定义:

R^n 空间的向量范数 $\|\cdot\|$ 对任意 $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$ 满足下列条件:

- (1) $\|\bar{x}\| \geq 0$; $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (正定性)
- (2) $\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\| \quad \alpha \in C$ (齐次性)
- (3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (三角不等式)

常用范数:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

矩阵范数

定义:

$R^{n \times m}$ 空间的向量范数 $\|\cdot\|$ 对任意 $A, B \in R^{n \times m}$ 满足下列条件:

件:

$$(1) \|A\| \geq 0; \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$(2) \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$$

$$(3) \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$(4) * \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

常用矩阵范数:

Frobenius 范数:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

由向量范数 $\|\cdot\|_p$ 导出关于矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 的 p 范数:

$$\|A\|_p = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p} = \max_{\|\vec{x}\|_p=1} \|A\vec{x}\|_p$$

特别有: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (行和范数)

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (列和范数)

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ (谱范数)

谱半径:

矩阵 A 的谱半径记为

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$, 其中 λ_i 为 A 的特征根。

定理:

对任意算子范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

定理:

若 A 对称, 则有

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

定理:

若矩阵 B 对某个算子范数满足 $\|B\| < 1$, 则必有

(1) $(I \pm B)$ 可逆。

$$(2) \quad \|(I \pm B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

解线性方程组的迭代法

研究内容:

- 如何建立迭代公式?
- 收敛速度?
- 向量序列的收敛条件?
- 误差估计?

思路:

对线性方程组 $Ax = b$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 非奇异矩阵, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$

构造其形如 $x = Mx + g$

的同解方程组, 其中 M 为 n 阶方阵, $g \in R^n$ 。

任取初始向量 $x^{(0)} \in R^n$, 代入迭代公式

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

产生向量序列 $\{x^{(k)}\}$, 当 k 充分大时, 以 $x^{(k)}$ 作为方程组 $Ax = b$ 的近似解, 这就是求解线性方程组的单步定常线性迭代法。 M 称为迭代矩阵。

收敛问题:

雅可比 (Jacobi) 迭代法

高斯—塞德尔迭代法

迭代法的收敛性

谱半径小于 1.

迭代法的误差估计:

if $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \|M\| < 1,$

$\{x^{(k)}\} \rightarrow x^*, \text{ then}$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|M\|^k}{1 - \|M\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

If $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + g, \|M\| < 1,$

$\{x^{(k)}\} \rightarrow x^*, \text{ then}$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|M\|}{1 - \|M\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

误差分析:

问题的提出:

设 A 为非奇异矩阵, 非齐次方程组

$$Ax = b$$

的准确解为 x , 当 A 和 b 有一个小的扰动 $\delta A, \delta b$ 时,

方程组有准确解 $x + \delta x$, 即

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

我们需要研究 δx 与 $\delta A, \delta b$ 之间的关系。

● b 有扰动, A 无扰动

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq (\|A\| \|A^{-1}\|) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

● A 有扰动, b 有扰动

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x\| \\ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \|\delta A\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \approx \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \end{aligned}$$

● A 有扰动, b 有扰动

类似推导, 可得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

定义:

$$\text{条件数: } \text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

条件数与所取的矩阵范数有关。

常用的条件数有:

$$(1) \quad \text{cond}(A)_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty}$$

$$(2) \quad \text{cond}(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$$

条件数的性质:

1. 对任何非奇异矩阵 A , $\text{cond}(A) \geq 1$

2. 对非奇异矩阵 A 和常数 $c \neq 0$, 有

$$\text{cond}(cA) = \text{cond}(A)$$

3. 对正交矩阵 A $\text{cond}(A)_2 = 1$

结论:

当条件数很大时, 方程组 $Ax = b$ 是病态问题; 当条件数较小时,
方程组 $Ax = b$ 是良态问题。

第四章 函数的数值逼近

1. 代数多项式插值问题

插值多项式的存在唯一性;

插值基函数和插值多项式的一般形式;

插值的误差分析;

多项式插值的 Runge 现象。

2. 分段低次插值

分段线性插值;

Hermite 插值和分段 Hermite 插值。

3. 三次样条插值

样条插值的定义;

三次样条函数的计算;

Matlab 中的插值函数。

4. 曲线拟合的最小二乘法

曲线拟合的最小二乘法法;

多项式拟合方法;

Matlab 中的多项式拟合函数;

5. 最佳平方逼近

权内积;

正交多项式的最佳平方逼近。

插值问题:

函数解析式未知, 或计算复杂, 用函数 $p(x)$ 去近似代替它, 使得

$$p(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

函数 $p(x_i)$ 称为插值函数。

x_0, x_1, \dots, x_n 称为插值节点或简称节点。

插值节点所界的区间称为插值区间。

$p(x_i) = y_i$ 称为插值条件。

多项式的插值问题

构造 n 次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

使满足 $P_n(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$

讨论的主要内容:

- 如何求出插值函数;
- 插值函数的存在性;
- 收敛性和误差估计。

拉格朗日插值

插值多项式的存在唯一性:

结论

通过 $n+1$ 个节点的 n 阶插值多项式唯一存在。

一次基函数

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$$
$$l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

二次基函数

$$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$
$$l_k(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})}$$
$$l_{k+1}(x) = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}$$

拉格朗日插值多项式的一般形式:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

插值公式:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)
 \end{aligned}$$

插值的误差分析:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

分段低次插值

分段线性插值

$$I_h(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1} \quad (x_k \leq x \leq x_{k+1})$$

若用插值基函数表示, 则:

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \quad x \in [a, b]$$

其中: $l_j(x)$ 满足 $l_j(x_k) = \delta_{jk}$

$$l_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

收敛性:

$$|f(x) - I_h(x)| \leq l_k(x)|f(x) - f_k| + l_{k+1}(x)|f(x) - f_{k+1}|$$

$$\leq (l_k(x) + l_{k+1}(x))\omega(h_k) \leq \omega(h)$$

$$\text{其中, } \omega(h) = \max_{|x-x'| \leq h} |f(x') - f(x'')|$$

当 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$

因此, 只要 $f(x) \in C[a, b]$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$$

埃尔米特插值

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1}$$

求插值基函数 $\alpha_i(x), \beta_i(x), (i=0, 1, \dots, n)$

满足:

(1) $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 是 $2n+1$ 次多项式。

(2) $\alpha_i(x_k) = \delta_{i,k}$, 且 $\alpha_i'(x_k) = 0, (i, k = 0, 1, \dots, n)$

(3) $\beta_i'(x_k) = \delta_{i,k}$, 且 $\beta_i(x_k) = 0, (i, k = 0, 1, \dots, n)$

于是:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + m_i \beta_i(x)]$$

利用拉格朗日插值基函数

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

得到

$$\alpha_i(x) = \left(1 - 2(x-x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right) l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + m_i \beta_i(x)]$$

Hermite 插值的余项

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x)$$

三次样条插值

第五章

数值积分

1. 插值型求积公式

线性和二次求积公式;

求积公式的代数精度;

求积公式的误差分析;

复合求积公式;

高斯求积公式;

MATLAB 中的数值积分函数。

2. 积分方程的数值求解

积分方程的数值求解的思路分析;

积分方程的数值求解方法介绍。

n 次代数精度

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

对于任意不超过 n 次的代数多项式都准确成立, 而对某一个 m+1 次代数多项式不成立,。

梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

辛普森公式

$$S = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] :$$

复化梯形公式

$$T_n = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \right]$$

截断误差: $|R_N(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$

复化辛普森公式

$$S_n = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

截断误差: $|R_N[f]| \leq \frac{b-a}{2880} h^4 M_4, \quad M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$

高斯求积公式

定义

求积公式 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 含有 $2n+2$ 个

待定参数 $x_k, A_k (k=0, 1, \dots, n)$, 适当选择这些参数使其具有 $2n+1$ 次代数精度。这类求积公式称为高斯公式。 $x_k (k=0, 1, \dots, n)$ 是高斯点。

高斯点的确定方法

Matlab 积分函数

函数名	功能
quad	采用 Simpson 计算积分。精度高，较常用
quad8	采用 8 样条 Newton-Cotes 公式计算积分。精度高，最常用
trapz	采用梯形法计算积分。精度差，速度快

积分方程的数值求解

*Fredholm*积分方程:

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) y(s) ds + f(t)$$

求解思路

用数值积分代替积分

由
$$\int_a^b k(x, s) y(s) ds = \sum_{k=1}^n A_k k(x, x_k) y(x_k)$$

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^n A_k k(x, x_k) y(x_k) + f(x)$$

$$y(x_j) = \lambda \sum_{k=1}^n A_k k(x_j, x_k) y(x_k) + f(x_k)$$

$$(I - \lambda K) \vec{y} = \vec{f}$$

第六章

常微分方程初值问题

1. 求解方法

欧拉方法；龙格—库塔方法

2. 稳定性与收敛性分析

欧拉公式：

$$\begin{cases} y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ x_k = x_0 + kh \end{cases} (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

局部截断误差是 $O(h^2)$ 。

改进欧拉公式：

$$\begin{cases} \text{预报值} & \bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ \text{校正值} & y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})] \end{cases}$$

或表示成：
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k))]$$

平均形式：

$$\begin{cases} y_p = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_c = y_k + hf(x_{k+1}, y_p) \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

局部截断误差是 $O(h^3)$ 。

龙格—库塔方法

一般地，RK方法设近似公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^p c_i K_i \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j) \quad (i=2, 3, \dots, p) \end{cases}$$

其中 a_i, b_{ij}, c_i 都是参数，确定它们的原则是使近似公式在 (x_n, y_n) 处的Taylor展开式与 $y(x)$ 在 x_n 处的Taylor展开式的前面项尽可能多地重合。

第七章 非线性方程求解

教学内容:

1. 二分法
2. 收敛性分析
3. 牛顿法

二分法:

1. 准备: 计算端点值 $f(a), f(b)$
2. 二分: 计算中点值 $f((a+b)/2)$
3. 判断: 若 $f((a+b)/2)=0$, $(a+b)/2$ 是根;

若 $f((a+b)/2) f(a) < 0$, 用 $(a+b)/2$ 代替

b ;

否则, 用 $(a+b)/2$ 代替 a , 转向 (2)

收敛性:

二分法的收敛性

$$|x - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

一般迭代法的收敛性:

几个收敛定理

牛顿迭代法:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$