第 7 章教学要求：

1. 理解点估计的概念，掌握矩估计法与最大似然估计法.

2. 了解无偏性、有效性、一致性等点估计量的评价准则.

3. 理解区间估计的概念，会求单个正态总体均值与方差的置信区间，会求两个正态总体均值差与方差比的置信区间.

第 7 章　参数估计

在研究总体时，经常会面对这样的问题：总体的分布已知，但分布中有未知参数，而为了研究总体，需要知道这些参数．研究如何用样本所提供的信息来估计未知参数（也说未知参数的真值），即是参数估计问题．参数估计有两种基本形式：点估计和区间估计.

参数估计是统计推断的重要组成部分.

§7.1 点估计

利用样本统计量及其观测值，给出总体 X 的分布中(一个或多个)未知参数的估计即为**点估计**.

定义 7.1　设 $f(x,\theta)$ 为总体 X 的分布，其中 θ 是未知参数（这里 θ 代表全部未知参数）；$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该样本的一组观测值．如果统计量 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观测值 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 被当作 θ 的估计值，则称 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的一个**点估计值**，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个**点估计量**.

例如，

7.1.1 点估计的方法

矩估计法和最大似然估计法是两种基本的点估计方法.

1. 矩估计法

事实一：所有分布的原点矩一般都是分布中参数的函数.

例如，参数为 λ 的泊松分布，其均值和方差都为 λ；区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，其均值和方差分别为 $(a+b)/2$ 和 $(b-a)^2/12$．而期望和方差又都可以由一、二阶原点矩表示，因此许多分布的一、二阶原点矩都是分布中未知参数的函数.

事实二：辛钦大数定理指出，若总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$ $(k=1,2,\cdots)$ 存在，那么 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)$．这说明样本 k 阶原点矩能比较好地估计总体 X 的 k 阶原点矩.

综合两方面，则

(1) 可以建立一个关于未知参数的方程（若只有一个未知参数）或方程组（若未知参数多于一个）．具

体建立过程如下：

设 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 是总体 X 分布中的全部未知参数， X 的 i $(i=1,2,\cdots,k)$ 阶原点矩存在，且 $E(X^i)=g_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$, $i=1,2,\cdots,k$；又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该样本的样本值，那么令

$$g_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_i,\ i=1,2,\cdots,k. \tag{7.1}$$

(2) 解此方程或方程组得到的解

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n),\ i=1,2,\cdots,k$$

就是未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的一个点估计量，称为**矩估计量**. 而

$$\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots,k$$

是未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的一个点估计值，称为**矩估计值**.

这种利用样本原点矩得到未知参数的点估计的方法称为**矩估计法**.

注意：(1) 由 (7.1) 式知，矩估计量（或矩估计值）$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ 都是 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的函数，由 $A_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^i \xrightarrow{P} E(X^i)$, $i=1,2,\cdots,k$ 知，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ 依概率收敛于待估参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的真值.

(2) 如果 $E(X)$ 的表达式中不含未知参数 θ，则求 $E(X^2)$，……直到某个 $E(X^r)$ 的表达式中含有 θ 为止.

例 7.1 (P182)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值， X 的均值 μ 与方差 σ^2 ($\sigma^2\neq 0$) 均存在，但 μ，σ^2 未知，求 μ，σ^2 的矩估计.

解　分析：有两个未知参数 μ 和 σ^2，所以需要计算总体的 1、2 阶原点矩，建立关于 μ，σ^2 的方程组.

$E(X)=\mu, E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$. 令

$$\begin{cases} \mu=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i, \\ \sigma^2+\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2. \end{cases}$$

由此得 μ 和 σ^2 的一个矩估计量

$$\hat{\mu}=\bar{X}, \tag{7.2}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2. \tag{7.3}$$

与矩估计值

$$\hat{\mu}=\bar{x},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

例 7.1 的结果表明，任何总体的均值和方差的矩估计表达式均为 (7.2) 式与 (7.3) 式，并不因总体分布的不同而有差异.

例 7.2（P_{184}） 已知总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ（$0<\theta<1$）为未知参数. 今取得一组样本值 1, 2, 1，求 θ 的矩估计值.

解 分析：有一个未知参数 θ，所以只需计算总体的 1 阶原点矩，建立关于 θ 的方程.

$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=-2\theta+3$.

令

$$-2\theta+3=\frac{1}{3}(1+2+1),$$

得 θ 的一个矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$.

例 7.3（P_{184}） 设 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中 $\theta(\theta>-1)$ 为未知参数；$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的样本值. 求 θ 的矩估计.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$. 令

$$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，而 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$ 则是 θ 的矩估计值.

矩估计法可以不涉及总体的分布类型，但要求知道总体的原点矩，且未知参数都可以表示为总体原点矩的函数.

2. 最大似然估计法

矩估计法可以不涉及总体的分布类型，但分布类型其实是很有用的信息. 最大似然估计法是在总体的分布类型为已知的前提下，利用分布类型来构造未知参数点估计的一种方法.

先来看一个例子.

设某一事件 A 在一次试验中发生的概率为 p，而且事件 A 在连续两次的独立试验中都发生了. 假如 p 只可以取 0.6 与 0.9 中的一个，人们则通常会认为 p 应该取 0.9. 这是因为基于这样一个简单又公认的事实：$0.6^2<0.9^2$.

这个例子所体现的正是最大似然估计方法的基本思想，而这个思想基于**小概率原理**：

(1) 概率很小的事件在一次试验中几乎是不出现的；

(2) 概率很小的事件在次数很多的重复试验中几乎是一定会出现的.

根据最大似然估计方法的基本思想，对最大似然估计法作如下表述：

设已知总体 X 的分布为 $f(x_i;\theta)$，其中 θ 为未知参数(这里 $f(x;\theta)$ 或为离散型随机变量的分布律，或为连续型随机变量的概率密度函数)； $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本观测值. 把样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 出现的概率称为**样本似然函数**，记作 $L(\theta)$，使 $L(\theta)$ 达到最大值的 θ 的取值 $\hat{\theta}$ 则称为 θ 的**最大似然估计值**. $\hat{\theta}$ 一般是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，记为 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 θ 的**最大似然估计量**.

下面就离散型与连续型两种总体情形分别作进一步讨论.

1. X 为离散型总体

设 X 的分布律为

$$f(x;\theta)=P\{X=x\},$$

其中 θ 为未知参数. 那么由样本的独立同分布性可知，观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的出现概率为

$$\begin{aligned}&P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}\\&=P\{X_1=x_1\}\cdot P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}\\&=P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}\\&=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),\end{aligned}$$

故总体为离散型随机变量的样本似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta). \tag{7.4}$$

习惯写法：

$$L(\theta)=P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}.$$

注意：由于 $\ln L(\theta)$ 与 $L(\theta)$ 关于 θ 同增同降，具有相同的最大值点，所以在许多情况下，对 $\ln L(\theta)$ 求最大值点会比较方便.

例 7.4(P185) 设 $X\sim B(m,p)$，其中 $p(0<p<1)$ 为未知参数；$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值. 求 p 的最大似然估计.

解 似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{nm-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}.$$

对 $L(p)$ 取对数，有

$$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)+\ln(\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}).$$

令 $\dfrac{d}{dp}\ln L(p)=0$，即

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}\left(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0\text{，}$$

由此得 p 的最大似然估计值

$$\hat{p}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{m}\bar{x}\text{.}$$

p 的最大似然估计量则为

$$\hat{p}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{m}\bar{X}\text{.}$$

例如，当 $m=5,n=10$， $x_1=x_3=x_5=x_7=x_8=x_9=1$ 而其余 x_i 均为 0 时， $\bar{x}=\frac{6}{10}$， $\hat{p}=\frac{\bar{x}}{m}=\frac{3}{25}$. $\frac{3}{25}$ 即是参数 p 的一个最大似然估计值.

注意到，当 $m=1$ 时， X 服从 0–1 分布，这时最大似然估计值 $\hat{p}=\bar{x}$ 即是 n 次抽样中事件 A 发生的频率. 因此频率是概率的最大似然估计值.

2. X 是连续型总体

设 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)$，其中 θ 为未知参数，那么由样本的独立同分布性可知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)\text{.}$$

而"观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 出现的概率"是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的取值在观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的非常小的邻域 G 内（不妨设为边长分别为 $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$ 的 n 维立方体）取值的概率，而这个概率为

$$\begin{aligned}P\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in G\}&=\iint\underset{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G}{\cdots}\int f(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta)dt_1dt_2\cdots dt_n\\&\approx f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_n\\&=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)\Delta x_i=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)\cdot\prod_{i=1}^{n}\Delta x_i.\end{aligned}$$

由于 $\prod_{i=1}^{n}\Delta x_i$ 与 θ 无关，所以要使 $\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)\Delta x_i$ 达到最大值，只须 $\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)$ 达到最大值即可. 因此总体为连续型随机变量的样本的似然函数可设为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i;\theta)\text{.}\qquad(7.5)$$

例 7.5（P187） 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 为未知参数； $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的观测值. 求 μ,σ^2 的最大似然估计.

解 X 的概率密度函数为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\text{.}$$

似然函数则为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

取对数，有

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 .$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=0, \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0,$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0, \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0. \end{cases}$$

由此得 μ,σ^2 的最大似然估计值

$$\begin{cases} \hat{\mu}=\bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \end{cases}$$

μ,σ^2 的最大似然估计量则为

$$\begin{cases} \hat{\mu}=\bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2. \end{cases}$$

例 7.6（P$_{187}$） 设 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，其中 $a,b(a<b)$ 为未知参数；$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值，试求 a,b 的最大似然估计.

解 X 的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

似然函数则为

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\frac{1}{(b-a)^n}, \quad (a\le \min_{1\le i\le n} x_i \le \max_{1\le i\le n} x_i\le b).$$

因为当 $b-a>0$ 时， $\dfrac{\partial L(a,b)}{\partial a}=n(b-a)^{-(n-1)}>0,$ $\dfrac{\partial L(a,b)}{\partial b}=-n(b-a)^{-(n-1)}<0$，所以 $L(a,b)$ 关于 a 单调增，关于 b 单调减. 因此 a 越大 b 越小， $L(a,b)$ 就越大.

考虑到每个 x_i 满足 $a\le x_i\le b$，故 $a\le \min_{1\le i\le n} x_i$ $b\ge\max_{1\le i\le n} x_i$，所以当 $\hat{a}=\min_{1\le i\le n} x_i$, $\hat{b}=\max_{1\le i\le n} x_i$ 时， $L(a,b)$ 取到最大值 $L(\hat{a},\hat{b})$. 因此 $\hat{a}=\min_{1\le i\le n} x_i$, $\hat{b}=\max_{1\le i\le n} x_i$ 分别是 a,b 的最大似然估计值，$\hat{a}=\min_{1\le i\le n} X_i$, $\hat{b}=\max_{1\le i\le n} X_i$ 则分别是 a,b 的最大似然估计量.

在统计问题中常常先使用最大似然估计法，当使用不方便时，再用矩估计法.

7.1.2　点估计量的评价准则

同一参数可以有不同的估计量，例如，若总体为$U(0,\theta)$，则θ的矩估计量为$2\bar{X}$，而最大似然估计量为$\max\limits_{1\le i\le n} X_i$. 事实上，任何统计量原则上都可以作为未知参数的估计量. 因此客观上就存在判断同一参数的不同估计量孰优孰劣的问题.

常见的估计量评价准则有无偏性、有效性和相合性.

1. 无偏性

“零误差”估计称为无偏估计. 什么是零误差估计?

θ的估计量$\hat{\theta}$一般是随机变量. 对于不同的样本观测值，估计值$\hat{\theta}$一般不等于θ，而是在θ的真值附近波动，因此把$\hat{\theta}$值当作θ会有偏差($\hat{\theta}-\theta$可以是正的，也可以是负的). 我们希望多次测得的估计值的平均数与θ相差无几，即$\hat{\theta}-\theta$的平均数为零，这相当于说，估计量的均值是θ. 这就是估计量的无偏性准则.

定义 7.2　设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的一个估计量，如果$E(\hat{\theta})$存在，且

$$E(\hat{\theta})=\theta\text{，}\tag{7.6}$$

则称$\hat{\theta}$为θ的**无偏估计量**，也称$\hat{\theta}$作为θ的估计具有**无偏性**；否则称$\hat{\theta}$是θ的**有偏估计量**.

定义 7.3　设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\theta$的一个估计量，如果$E(\hat{\theta})$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta\text{，}\tag{7.7}$$

则称$\hat{\theta}$为θ的**渐进无偏估计量**.

无偏估计量显然是渐进无偏估计量.

例 7.7(P189)　设X的期望μ与方差σ^2存在，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，证明：样本均值$\bar{X}$和样本方差S^2分别是μ,σ^2的无偏估计量，而$S_n^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$是$\sigma^2$的渐进无偏估计量.

证　$E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu=\mu$，

所以样本均值$\bar{X}$是总体期望μ的无偏估计量.

又

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\bar{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i{}^2\right)-nE\left(\bar{X}^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[D(X_i)+(E(X_i))^2\right]-n\left[D(\bar{X})+(E(\bar{X}))^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\sigma^2,$$

所以样本方差 S^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计量.

因

$$E(S_n^2)=E\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)=\frac{n-1}{n}E(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

故 S_n^2 不是总体方差 σ^2 的无偏估计量. 但

$$\lim_{n\to\infty}E(S_n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2,$$

因此 S_n^2 是总体方差 σ^2 的渐进无偏估计量.

本例表明：对总体 X 而言，其样本均值 $\bar{X}$ 是 $E(X)$ 的无偏估计量，样本方差 S^2 是 $D(X)$ 的无偏估计量.

即

$$E(\bar{X})=E(X),\ \ E(S^2)=D(X).$$

例 7.8(续例 7.6)(P$_{189}$)　当 $a=0$ 时，证明 $\frac{n+1}{n}\hat{b}$ 是 b 的无偏估计量.

证　由 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{b}, & 0\le x\le b,\\ 1, & x>b\end{cases}$$

及 § 3.6 中的内容可知，$\hat{b}$ 的分布函数为

$$F_{\hat{b}}(x)=[F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^n}{b^n}, & 0\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

因此 $\hat{b}$ 的密度函数为

$$f_{\hat{b}}(x)=\begin{cases}\frac{n}{b^n}x^{n-1}, & 0\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由 $E(\hat{b})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{b}}(x)dx=\int_0^b\frac{n}{b^n}x^n dx=\frac{n}{n+1}b$，有

$$E\left(\frac{n+1}{n}\hat{b}\right)=b.$$

所以 $\frac{n+1}{n}\hat{b}$ 是 b 的无偏估计量.

2. 有效性

怎样比较同一参数的多个无偏估计量孰优孰劣呢？

在样本容量相同的条件下，设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个无偏估计量，如果 $\hat{\theta}_1$ 的观测值比 $\hat{\theta}_2$ 的更集中在 θ 附近，那么就认为 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 对 θ 的估计更好．据此提出无偏估计量的有效性准则．

定义 7.4 设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是未知参数 θ 的无偏估计量，如果

$$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)\,, \tag{7.8}$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效．

例 7.9（P190） 设 X_1,X_2,X_3 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，验证：

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3,$$
$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3,$$
$$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$$

都是 μ 的无偏估计量，并比较它们的有效性．

解 $E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{3}{10}E(X_2)+\frac{1}{2}E(X_3)=\mu$，

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{1}{4}E(X_2)+\frac{5}{12}E(X_3)=\mu\,,$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{3}E(X_3)=\mu\,,$$

所以 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计量．又

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{25}D(X_1)+\frac{9}{100}D(X_2)+\frac{1}{4}D(X_3)=\frac{38}{100}\sigma^2\,,$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{9}D(X_1)+\frac{1}{16}D(X_2)+\frac{25}{144}D(X_3)=\frac{50}{144}\sigma^2\,,$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)+\frac{1}{9}D(X_3)=\frac{1}{3}\sigma^2\,,$$

所以 $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 有效， $\hat{\mu}_3$ 比 $\hat{\mu}_2$ 有效， $\hat{\mu}_3$ 比 $\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$ 都有效．

3. 相合性（一致性）

无偏、有效的估计量是否就是好的估计量呢？

无偏性和有效性都是在样本容量为有限的前提下讨论的，在样本容量有限的条件下，无偏估计量的观测值一般不等于未知参数．§6.1 中的格利文科定理指出，样本容量越大，经验分布函数越逼近总体分布函数. 因此希望无偏估计量的观测值随着样本容量的增大，越来越逼近未知参数．据此在大样本前提下提出了估计量的相合性准则．

定义 7.5 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的一个估计量，如果对于任意的正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right| \geq \varepsilon\right\}=0, \tag{7.9}$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**相合估计量**.

该定义表明，$\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量是指 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ.

相合性是对估计量的一个基本要求．不具备相合性的估计量不予考虑.

由辛钦大数定理知道，如果 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)=\mu_k$ 存在，则当 $n\to\infty$ 时， X 的样本 k 阶原点矩 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 依概率收敛于 μ_k．因此，样本 k 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的相合估计量，从而矩估计量是相合估计量.

例 7.10（P_{191}）

作业（P_{192}）：1.-3.　5.-6.　8.-12.　4.　7.　13*.-14*.

§7.2 区间估计

7.2.1 置信区间

未知参数的点估计量是随机变量，其估计值一般不等于未知参数，估计的精度也无从衡量．考虑由样本给出未知参数的一个估计范围（称为**估计区间**），并使其包含未知参数真值的可靠性达到一定的要求，是对未知参数的另一种估计方法——参数的**区间估计**.

定义 7.6　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本， X 的分布 $f(x,\theta)$ 中含有未知参数 θ．对给定的数 $\alpha(0<\alpha<1)$，若有统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2)$ 使得

$$P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}\geq 1-\alpha, \tag{7.10}$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的**置信度（置信水平）**为 $1-\alpha$ 的**双侧置信区间**，称 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是该双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**.

(7.10)式的直观意义是：反复抽样多次，每一组样本值均可以确定一个置信区间，由伯努利大数定理知，在这些区间中，包含 θ 真值的约占 100$(1-\alpha)$%，不包含 θ 真值的仅占 100α%左右．例如，若 $\alpha=0.01$，反复抽样 1000 次，那么在 1000 个置信区间中包含 θ 真值的约占 990 个，不包含 θ 真值的约占 10 个.

置信度 $1-\alpha$ 是指参数 θ 的真值在置信区间内的可靠程度（可信度）．置信区间的长度则是对**估计精度**的度量．置信区间的长度越短，表示估计的精度越高．我们一般给出的是“最小双侧置信区间”.

置信区间原理：按定义，置信区间不唯一，当 $P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha$ 时， $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 即是一个“最小”双侧

置信区间，置信上限和下限是双侧 α 分位数.

容易得到分位数的随机变量主要有标准正态分布变量、χ^2 变量、t 变量和 F 变量，所以若仅含未知参数(如 θ)的某样本函数(如 $Y(\theta)$)是这几个变量之一，那么由

$$P\{Y_{1-\alpha/2} < Y(\theta) < Y_{\alpha/2}\} = 1-\alpha,$$

可以等价地得到

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1-\alpha,$$

于是就求得了 θ 的一个双侧置信区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

例 7.11 (P_{194}) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中参数 σ^2 已知，但 μ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 由 $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，令

$$P\{-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha,$$

则有

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha.$$

从而得到 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right).$$

例如，若取 $\alpha = 0.05$，则有 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. 当 $\sigma = 1, n = 16, \bar{x} = 5.20$ 时，有 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96 = 0.49$，于是得到一个区间 $(4.71, 5.69)$.

注意：$(4.71, 5.69)$ 已不是随机区间，但习惯上仍称它为置信区间. 认为 $P\{4.71 < \mu < 5.69\} = 0.95$ 是错误的. 事实上，要么 $\mu \in (4.71, 5.69)$，此时 $P\{4.71 < \mu < 5.69\} = 1$；要么 $\mu \notin (4.71, 5.69)$，此时 $P\{4.71 < \mu < 5.69\} = 0$.

注意：置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间不唯一. 如：$\left(\bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.02}, \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.03}\right)$ 也是 μ 的置信度为 0.95 的置信区间. 但前一个置信区间的长度 $2 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 比一个置信区间的长度 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.02} + z_{0.03}) = 3.94 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 短，前者的估计精度高于后者.

有这样一些实际问题，例如，国家幸福指数的一个指标是国民的平均寿命，寿命长是人们所希望的，国民的平均寿命不应该低于某个值. 又如在在检测系统误差时，系统误差越接近 0 越好，关键的是误差的绝对值不应该超过某限定值，等等. 这些问题只涉及一个上限或下限，谓之单侧区间估计问题.

若有统计量 $\hat{\theta}_3=\hat{\theta}_3(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使得

$$P\{\theta<\hat{\theta}_3\}\geq 1-\alpha\,,$$

则称随机区间 $(-\infty,\hat{\theta}_3)$ 是 θ 的**置信度(置信水平)**为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，称 $\hat{\theta}_3$ 是该单侧置信区间的**单侧置信上限**.

若有统计量 $\hat{\theta}_4=\hat{\theta}_4(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使得

$$P\{\theta>\hat{\theta}_4\}\geq 1-\alpha\,,$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_4,+\infty)$ 是 θ 的**置信度(置信水平)**为 $1-\alpha$ 的**单侧置信区间**，称 $\hat{\theta}_4$ 是该单侧置信区间的**单侧置信下限**.

在例 7.11 中，若令

$$P\{Z<z_\alpha\}=1-\alpha\,,$$

则有

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<z_\alpha\right\}=1-\alpha\,,$$

$$P\left\{\mu>\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\right\}=1-\alpha\,.$$

于是得到 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,+\infty\right). \tag{7.11}$$

其中 $\hat{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ 是该置信区间的置信下限.

同理可得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的另一个单侧置信区间

$$\left(-\infty,\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\right). \tag{7.12}$$

其中 $\hat{\mu}=\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ 是该置信区间的置信上限.

求置信区间的一般步骤(单侧类似)：

(1) 弄清楚已知条件，确定要进行区间估计的未知参数(比如 θ)；

(2) 寻求一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，它必须含有参数 θ，而不含其它未知参数．该函数的分布必须已知，且不依赖于未知参数 θ.

(3) 设 $G=g(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$ 是符合(2)中条件的函数，那么对于给定的置信度 $1-\alpha$，确定两个常数 λ_1，λ_2，使

$$P\{\lambda_1<G<\lambda_2\}=1-\alpha\,.$$

一般选取使 $P\{G<\lambda_1\}=P\{G>\lambda_2\}=\frac{\alpha}{2}$ 成立的 λ_1，λ_2；

(4) 如果能由不等式 $\lambda_1<g(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<\lambda_2$ 得到如下形式的等价不等式

$$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\,,$$

那么由 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 所确定的区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 就是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间.

当总体为正态分布时，(2) 中的函数一般在 § 6.4 中的定理 6.2、定理 6.3 和定理 6.4 中的样本函数中选，因为这些函数的分布已知，且它们的分位数通过查表容易得到.

7.2.2 单个正态总体均值与方差的区间估计

本小节以下均假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) 方差 σ^2 已知.

选 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$， μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right). \tag{7.13}$$

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的两个单侧置信区间分别为

$$\left(-\infty,\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right) \quad 和 \quad \left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},\ +\infty\right).$$

例 7.12 某车间生产滚珠的直径 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 从某一天的产品中随机地抽取 6 个，测得直径(单位：毫米)如下：

14.70， 15.21， 14.90， 14.91， 15.32， 15.32.

如果已知这天产品直径的方差为 0.05，试求这天产品直径的平均值的置信度为 0.95 的置信区间.

(2) 方差 σ^2 未知.

选 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$， μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right). \tag{7.14}$$

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),\ +\infty\right) \quad 和 \quad \left(-\infty,\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right).$$

例 7.13 有一大批罐头，从中随机抽取 16 个，称得它们的质量（单位：克）为

506， 508， 499， 503， 504， 510， 497， 512，

514， 505， 493， 496， 506， 502， 509， 496.

设罐头的质量近似地服从正态分布，求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

2. 方差 σ^2 的置信区间

(1) 均值 μ 已知.

选 $\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$ ， σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right). \tag{7.15}$$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)},\ +\infty\right) \quad 和 \quad \left(0,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}\right).$$

(2) 均值 μ 未知.

选 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$， σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right). \tag{7.16}$$

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},+\infty\right) \quad 和 \quad \left(0,\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right).$$

在实际中，总体均值未知的情况比较常见.

例 7.14 随机地取某种炮弹 9 发做试验，得到炮口速度的样本标准差 $s=11$ m/s. 设炮口速度服从正态分布. 求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 0.95 的单侧置信上限.

7.2.3 两个正态总体均值差与方差比的区间估计

在两个正态总体的情形下，人们关心的未知参数往往是均值差 $\mu_1-\mu_2$ 与方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ，因为它们可以反映两个正态总体之间的异同.

在本小节中均假设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本， $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是来自总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两个样本相互独立. 以 $\bar{X}$，S_1^2 表示第一个总体的样本均值和样本方差，以 $\bar{Y}$，S_2^2 表示第二个总体的样本均值和样本方差.

1. 均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(1) 方差 σ_1^2，σ_2^2 已知.

选 $U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$， $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,,\ \bar{X}-\bar{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right). \tag{7.17}$$

按例 7.11 的作法，可得到均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,,+\infty\right) \quad 和 \quad \left(-\infty\,,\ \bar{X}-\bar{Y}+z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

例 7.15 设两个总体 $X\sim N(\mu_1,4)$，$Y\sim N(\mu_2,6)$，独立地从这两个总体中分别抽取样本容量为 16 和 24 的样本，样本均值分别为 16.9 和 15.3．求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间．

(2) 方差 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知．

选 $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$， $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right). \tag{7.18}$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha}\left(n_1+n_2-2\right)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\,,\ +\infty\right)$$

和

$$\left(-\infty\,,\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha}\left(n_1+n_2-2\right)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

例 7.16 为提高某一化学生产过程的得率，希望采用一种新的催化剂．为慎重起见，在实验工厂先进行试验．设采用原来的催化剂进行了 $n_1=8$ 次试验，得率的平均值 $\bar{x}=91.73$，样本方差 $s_1^2=3.89$；采用新的催化剂也进行了 $n_2=8$ 次试验，得率的平均值 $\bar{y}=93.75$，样本方差 $s_2^2=4.02$．假设两总体均服从正态分布，方差相等，且两样本相互独立，试求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的单侧置信上限.

2. 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

(1) 均值 μ_1，μ_2 已知．

选 $F=\dfrac{n_1\sigma_1^2}{n_2\sigma_2^2}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}\sim F(n_2,n_1)$， $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{1-\alpha/2}(n_2,n_1),\ \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right). \tag{7.19}$$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{1-\alpha}(n_2,n_1),+\infty\right) \quad 和 \quad \left(0,\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha}(n_2,n_1)\right).$$

例 7.17 已知总体 $X\sim N(24,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(20,\sigma_2^2)$，从这两个总体中独立地抽到两组样本值：

总体 X：23，22，26，24，22，25；

总体 Y：22，18，19，23，17.

求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

(2) 均值 μ_1，μ_2 未知.

选 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的一个双侧置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1),\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right). \tag{7.20}$$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\alpha}(n_2-1,n_1-1),\ +\infty\right) \quad 和 \quad \left(0,\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)\right).$$

例 7.18 从甲、乙两个生产蓄电池的工厂的产品中，分别独立地抽取一些样品，测得这些样品的蓄电池的电容量为

甲厂：144，141，138，142，141，143，138，137；

乙厂：142，143，139，140，138，141，140，138，142，136.

假设两个工厂生产的蓄电池电容量分别服从正态分布 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，求方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的置信区间.

7.2.4 非正态总体参数的区间估计

对非正态总体参数作区间估计时，寻找样本的函数遇到了很大困难．但由中心极限定理可知，来自总体的样本容量为 n 的样本均值 $\bar{X}$ 近似地服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2/n)$（其中 μ,σ^2 是非正态总体的均值和方差）．所以当样本容量 n 充分大时，单个正态总体均值的置信区间(7.13)即是 μ 的近似置信区间（当 σ^2 未知时，则用样本标准差 S 替代(7.13)式中的 σ），并由此可以得到能用 μ 表示的参数的近似置信区间．这种利用大样本来对非正态总体的参数作区间估计的方法称为**大样本法**.

作业(P_{206})：1.-5.