第 1 章教学要求：

1. 了解样本空间，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.
2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质.
3. 会计算古典型概率和几何型概率.
4. 掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式.
5. 理解事件的独立性概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法.
6. 理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

第 1 章　随机事件与概率

确定性现象与不确定性现象

在一定条件下，必然发生或必然不发生的现象称为**确定性现象**.

例如，

在一定条件下，事先不能确定发生与否的现象称为**不确定性现象**.

例如，

不确定性现象又分随机现象与模糊现象，具有统计规律性的就称为**随机现象**.

统计规律性是指随机现象的结果在个别试验中呈现出偶然性，但在大量重复的试验中呈现出某种规律性.

例如，“百发百中”，“十拿九稳”.

研究随机现象的数学分支——概率论与数理统计.

§1.1 随机事件

1.1.1 样本空间

人们通过所谓的随机试验研究随机现象.

随机试验——是具有二个明显特点：①可重复性；②可知性与不可知性的试验，简称试验. 用 E 表示.

样本空间——由随机试验的所有可能结果组成的集合. 记作 Ω.

样本点——试验的每个可能结果，即样本空间中的元素. 记作 ω.

例 1.1-例 1.6(P_4)　E_1～E_6，Ω_1～Ω_6.

** 同一试验，不同的试验目的可导致样本空间不同.

1.1.2 随机事件及其运算

随机事件——由随机试验的结果(即样本点)组成的(真子)集合，即所谓的可能发生或可能不发生的事件. 用 A,B,C,...等表示.

基本事件——仅由一个样本点组成的集合.

必然事件和不可能事件是两个特殊的“随机事件”，它们是“随机事件的极限”情形(见下章讲解).

必然事件——每次试验都会发生的事件，即由所有样本点组成的集合 Ω.

不可能事件——是每次试验都不会发生的事件，即不包含任何样本点的集合，空集 Φ.

如果试验的结果(即样本点)在事件 A 中，则称**事件 A 发生**.

例如，见 P_4-P_5.

概率论的重要研究课题之一是希望从简单事件的概率推算出复杂事件的概率，而这首先需要研究事件间的关系与运算.

事件间的关系与事件的运算

设 E 是一个随机试验, Ω 是 E 的样本空间，A,B,A_i(i=1,2,...)均为 Ω 的子集合.

(1) $A\subset B$ 称为**事件 B 包含事件 A**. 其概率含义是：A 发生必然导致 B 发生.

$A=B$，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$，称为**事件 A 与事件 B 相等**.

例如，

(2) $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$称为**事件 A 与事件 B 的和事件**. 其概率含义是：当且仅当 A,B 至少有一个发生，事件 $A\cup B$ 才发生.

例如，

一般地，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 是 n 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的和事件，表示这 n 个事件至少有一个发生的事件；$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 是可列无穷个事件 $A_1,A_2,\ldots$的和事件，表示这可列无穷个事件至少有一个发生的事件.

(3) $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为**事件 A 与事件 B 的积事件**. 其概率含义是：当且仅当 A 与 B 同时发生，事件 $A\cap B$ 才发生. $A\cap B$ 也写作 AB.

例如，

一般地，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 是 n 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的积事件，表示这 n 个事件同时发生的事件；$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列无穷个事件 $A_1,A_2,\ldots$的积事件，表示这可列无穷个事件同时发生的事件.

(4) $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为**事件 A 与事件 B 的差事件**. 其概率含义是：当且仅当 A 发生而 B 不发生，事件 A-B 才发生.

例如，

(5) 如果 $A\cap B=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的或**互斥**的. 其概率含义是：A 与 B 不能同时发生.

例如，基本事件是两两互不相容的事件.

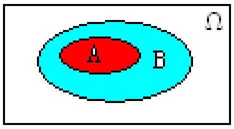
(6) 如果 $A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\Phi$，则称 A 与 B 互为**对立事件**或**互逆事件**. 其概率含义是：每次试验，事件 A,B 有一个且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\bar{A}$，即 $\bar{A}=B$.

例如，

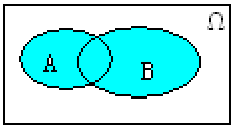
** 显然,对立事件一定是互斥事件，但互斥事件却不一定是对立事件.

对事件的运算顺序作如下约定：先括号，然后逆，再交，最后是并与差.

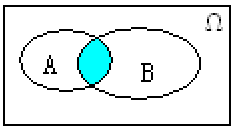
事件间的关系与事件运算的文图(Venn)表示：



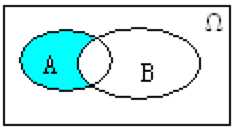
$A\subset B$



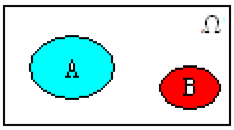
$A\cup B$



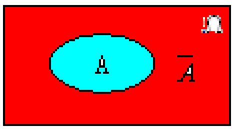
$A\cap B$



A-B



$A\cap B=\Phi$



A, $\bar{A}$

事件的运算定律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德•摩根定律：$\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B},\ \overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$，

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

显然，还有以下运算规律：

(5) $A\bigcup\Omega=\Omega,\ A\bigcap\Omega=A,\ A\bigcup\varnothing=A,\ A\bigcap\varnothing=\varnothing$；

(6) $A\bigcup A=A,\ A\bigcap A=A$；

(7) $A,B\subset A\bigcup B,\ A\bigcap B\subset A,B$；

(8) 若 $A\subset B$，则 $\bar{A}\supset\bar{B}$，

$$A\bigcup B=B,\ A\bigcap B=A,$$

$$B=A\bigcup(B-A),\ A\bigcap(B-A)=\varnothing;$$

(9) $A-B\subset A$； $(A-B)\bigcap B=\varnothing$； $A-B=A-AB=A\bar{B}$.

例 1.7(P_7) 某工程队承包建造了 3 幢楼房，设 A_i 表示"第 i 幢楼房经验收合格", i=1,2,3. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 只有第 1 幢楼房经验收合格；

(2) 恰有 1 幢楼房经验收合格；

(3) 至少有 1 幢楼房经验收合格；

(1) 至多有 1 幢楼房经验收合格.

解 (1) "只有第 1 幢楼房经验收合格"包含"第 2,3 幢楼房经验收不合格"的意思，因此这个事件可表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) "恰有 1 幢楼房经验收合格"是指仅有一个合格，而另两个经验收不合格的意思，因此可表示为

$$(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\bigcup(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)\bigcup(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3).$$

(3) "至少有 1 幢楼房经验收合格"是指 A_1,A_2,A_3 至少发生其一，因此可表示为

$$A_1\bigcup A_2\bigcup A_3.$$

(4) "至多有 1 幢楼房经验收合格"是指(2)表示的事件与 3 幢均不合格事件的并，因此可表示为

$$(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\bigcup(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)\bigcup(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\bigcup(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3).$$

练习题:

1. 掷一颗骰子，观察掷出的点数，事件 A 表示"奇数点"，事件 B 表示"点数小于 5"，C 表示"小于 5 的偶数点".用集合列举表示法表示下列事件：$\Omega,A,B,A+B,A-B,B-A,AB,AC,\bar{A}+B$.

2. 一人连续向某目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i(i=1,2,3)次射击时击中目标.试用文字叙述下列事件：

$A_1 +$; A_2 ; $+$ A_2 ;

$A_3\overline{A}_2;\overline{A_1+A_2};\overline{A}_1\overline{A}_2;\overline{A}_2+\overline{A}_3;\overline{A_2A_3};\overline{A}_2+\overline{A}_3;\overline{A_2A_3};A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$.

作业(P_8)：1. 3.-4.

§1.2 随机事件的概率

1.2.1 频率与概率

刻画随机事件在一次试验中发生的可能性大小的数值即为概率. 问题的关键是怎么找到这个数值.

1. 频率

定义 1.1 在相同的条件下，进行 n 次相同的试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

$f_n(A)$有如下性质：

(1) $0\le f_n(A)\le 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

例 1.8 (P_9)

该例表明，频率(值)即可随着试验组别的不同而不同，也会随着试验次数的不同而改变，故频率不是我们要寻找的概率. 但频率随着试验次数的增加逐渐地稳定于某个值，这个值即是概率. 这种频率的稳定性即是试验的统计规律性.

频率的大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率大，说明事件 A 发生频繁，表明事件 A 在一次试验中发生的可能性就大；频率小，说明事件 A 发生量小，表明事件 A 在一次试验中发生的可能性就小. 因此，频率具有表征事件在一次试验中发生的可能性大小的特征.

频率的稳定性表明，以频率 $f_n(A)$近似地表示事件 A 发生的可能性大小是合适的，这在自然科学与社会科学中已被广泛地使用.

例 1.9 (P_9)

例 1.10（P_{10}）

2. 概率

频率的稳定值符合频率的性质，由此抽象出概率的一般定义.

定义 1.2（概率的公理化定义）　设 E 是随机试验，Ω 是其样本空间. 对 E 的每个事件 A 赋予一个实数 P(A)，如果集合函数 P(·)满足如下三个条件：

(1)非负性：对每个事件 A，有 $P(A)\geq 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：对于可列无穷个两两互斥的事件 $A_1,A_2,\ldots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$

则 P(A)称为**事件 A 的概率**.

1.2.2 概率的运算性质

由概率的定义，可以推导出概率的一些重要性质（P_{11}）：

性质 1　$P(\Phi)=0$.

性质 2（有限可加性）　若 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是两两互斥的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\qquad(1.1)$$

性质 3　对任意事件 A，有

$$P(\bar{A})=1-P(A).\qquad(1.2)$$

性质 4(加法公式)　对于任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).\qquad(1.3)$$

对于任意三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\qquad(1.4)$$

更一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

证明过程中得到减法公式

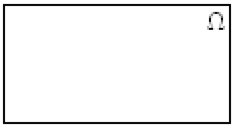
$$P(B-A)=P(B)-P(AB).\qquad(1.5)$$

性质 5　设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有 P(A)≤P(B).

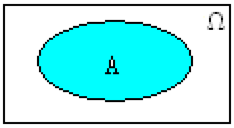
推论　若 $A\subset B$，则 P(A-B)=0, P(B-A)=P(B)-P(A).

性质 6　对于任意事件 A，有 P(A)≤1.

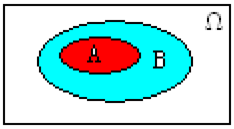
概率与概率性质的**文图解释**：



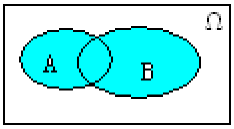
P(Ω)=1



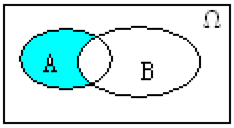
0≤P(A)≤1



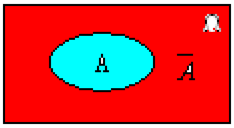
P(A)≤P(B)



P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(AB)



P(A-B)=P(A)-P(AB)



P($\bar{A}$)=1-P(A)

提问：说出概率定义中的三个条件：________________________.

概率的取值范围：____________.

若 $A\subset B$，有哪些概率结果：_____________________. 你怎样证明这些结果？

A 与 $\bar{A}$ 的概率关系：____________.

写出两个事件的加法公式：_________________.　你怎样证明这个结果？

写出三个事件的加法公式：________________________________.

例 1.11 (P_{12})　设 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{2}$，在如下条件下分别求 $P(\bar{A}B)$.

(1) A,B 互斥；(2) $A\subset B$；(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解　因为 $\bar{A}B=B-AB$，所以 $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$.

(1) 当 A,B 互斥时，AB=Φ，有 P(AB)=0，$P(\bar{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}$；

(2) 当 $A\subset B$ 时，AB=A，所以 $P(\bar{A}B)=P(B)-P(A)=\frac{1}{6}$；

(3) $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{8}$.

练习题：

1.以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 为

(A) “甲滞销，乙畅销”；　　(B) “甲、乙均畅销”；

(C) “甲滞销”；　　(D) “甲滞销或乙畅销”.

2.已知随机事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 P(A)=p，求 P(B).

3.已知 P(A)=0.4,P(B)=0.3, P(A∪B)=0.6，求 $P(A\bar{B})$.

作业(P_{13})：3.-6.　1.-2.　7.

§1.3 古典概型与几何概型

“等可能性”是早期处理的概率问题最突出的特点，具体指随机试验的各种可能结果具有等可能性. 古典概型和几何概型是两个常见的等可能概率模型，这两个概率模型下的事件不需要通过试验便可求得概率.

1.3.1 古典概型

如果试验 E 具有如下两个特点：

(1)样本空间 Ω 包含有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_n\}$；

(2)每个样本点在一次试验中以相等的可能性出现，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n},$$

则称试验 E 为**古典概型**.

对于例 1.1-例 1.6，哪些是古典概型试验？

答：E_1, E_2.

如何计算古典概型试验的随机事件概率？

古典概型概率公式：

$$P(A)=\frac{n_A}{n}, \tag{1.6}$$

其中 n_A 是事件 A 包含的样本点数，n 是样本空间 Ω 包含的样本点数.

有放回抽取、不放回抽取　排列、组合(P_{14})

例 1. 12（P_{14}）

例 1.13(P_{15}) (分房、电脑派位、生日模型)

例 1.14(P_{16}) (摸球、抽签、抽奖模型)

例 1.15(P_{16}) (超几何模型)

例 1.16(P_{17}) (小概率原理)

(1)理解小概率原理；(2)对于实际问题，找到解答问题的思路或设计出解决问题的方法，计算概率，然后依概率结果下结论或做出正确的判断.

练习题：

1．从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：A_1={三个数字中不含 0 和 5}，A_2={三个数字中不含 0 或 5}，A_3={三个数字中含 0 但不含 5}.

1. 3. 2 几何概型

保留等可能性，将有限推广到无限，即是**几何概型**.

例 1.17(P_{17})

例 1.18(P_{17})

例 1.19(P_{17})

上面三例中的样本空间 Ω 分别是一维、二维和三维区域，可用长度、面积或体积来度量. 样本点按"某种"等可能性出现，且有无限多，具有这样特点的试验称为**几何概型**. 几何概型中的样本点是等可能出现的含义是：当 A 是样本空间 Ω 的一个子集时，P(A)与 A 的位置和形状无关，只与 A 的度量(长度、面积、体积)成正比.

几何概型概率公式：

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{1.7}$$

其中 m(A)表示 A 的长度、面积或体积，m(Ω)是样本空间 Ω 的长度、面积或体积.

例 1.20(P_{18})

例 1.21(P_{18})

作业（P_{19}-P_{20}）：1. −5.　6. −9.

§1.4 条件概率

条件概率是概率论中一个重要而实用的概念. 先通过一个简单的例子来认识条件概率.

例如，100 个产品中 60 个为一等品，30 个为二等品，10 个废品.规定一、二等品为合格品. 如果从合格品中任取一件，那么取到一等品的概率为 60/90，这是合格品中的一等品率，而 60/100 是这批产品中的一等品率.两者显然是不同的，前者是附加了条件的一等品率，即所谓的条件概率：在一个事件 A（取到合格品）已发生的条件下，另一事件 B（取到一等品）发生的概率，通常记作 $P(B|A)$.因此，

$$P(B|A)=\frac{60}{90}=\frac{60/100}{90/100}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

简单地说，条件概率就是附加了条件的概率.

总结：对于一般的古典概型问题，总有

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}/n_\Omega}{n_A/n_\Omega}=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad (n_A>0). \tag{1.8}$$

缩小空间法　　原始空间法

其中 n_A 是事件 A 包含的样本点数，n_{AB} 是事件 A 中含有的事件 B 的样本点数(即事件 AB 的样本点数)，n_Ω 是样本空间 Ω 的样本点数.

在一般场合，取(1.7)式的左、右端作为条件概率的定义.

定义 1.3　设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.9}$$

称为**在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率**.

条件概率 $P(\cdot|A)$亦符合概率定义中的三个条件，即

(1) 对于每一个事件 B，有 $P(B|A)\ge 0$；

(2) $P(\Omega|A)=1$；

(3) 对于两两互不相容的事件 $B_1,B_2,\ldots$，有

$$P((B_1\cup B_2\cup\cdots)|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)+\cdots.$$

所以条件概率是概率，具有与概率相同的一些性质：

(1) $P(\Phi|A)=0$.

(2) 若 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P((B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)+\cdots+P(B_n|A).$$

(3) 对任意事件 B，有 $P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)$.

(4) 对任意两个事件 B,C，有

$$P((B\cup C)|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(B\cap C|A).$$

(5) 若 $C\subset B$ 则 $P(C|A)\le P(B|A)$.

推论 若 $C\subset B$，则 $P((C-B)|A)=0$，

$$P((B-C)|A)=P(B|A)-P(C|A).$$

(6) 对任意事件 B，有 $P(B|A)\le 1$.

例 1.22(P_{21})

解 方法一——原始空间法

方法二——缩小空间法

将条件概率公式(1.9)变形，得到概率的**乘法公式**：

$$P(AB)=P(A)P(B|A),\quad (当\ P(A)\ge 0) \tag{1.10}$$

及

$$P(AB)=P(B)P(A|B),\quad (当\ P(B)\ge 0) \tag{1.11}$$

乘法公式可以推广到多个事件的情形：

若 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB), \tag{1.12}$$

若 $P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{1.13}$$

例 1.23(P_{22})

例 1.24(P_{23})

练习题：

1. 设 A,B 为两个随机事件，且 $A\supset B$，则下列式子正确的是

(A) $P(A+B)=P(A)$；　　(B) $P(AB)=P(A)$；

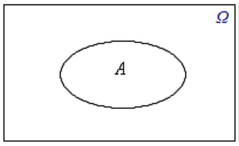
(C) $P(A-B)=P(B)-P(A)$；　　(D) $P(B|A)=P(B)$.

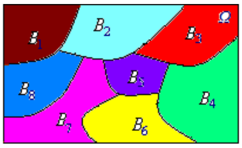
作业(P_{23}-P_{24})：1.-5.　7.　6.　8.

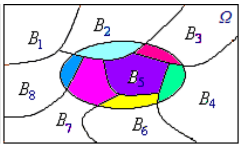
§1.5 全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式是两个计算事件概率的公式，公式的背景如下图所

示：







$$A=A\cap\Omega=A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_8)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_8)$$

$$P(A)=P(AB_1)+\cdots+P(AB_8)=P(B_1)P(A|B_1)+\cdots+P(B_8)P(A|B_8)$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+\cdots+P(B_8)P(A|B_8)},\quad i=1,2,\cdots,8.$$

定义 1.4 设 Ω 是试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\ldots,B_n$ 是 E 的一组事件. 若

(1) $B_i\cap B_j=\varnothing,\quad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$；

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$，

则 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 称为 Ω 的一个**划分**，或称为试验 E 的一个**完备事件组**.

划分的性质：若 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 是 Ω 的一个划分，那么在每次试验中，事件 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 有一个且只有一个发生.

定理 1.1(全概率公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\ldots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\ldots,n)$，则有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)\cdots+P(B_n)P(A|B_n).\qquad(1.14)$$

例 1.25(P_{24})

定理 1.2(贝叶斯(Bayes)公式) 设试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\ldots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\ldots,n)$，则有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},\quad i=1,2,\cdots,n.\qquad(1.15)$$

最简单的 n=2 时的情形，见书 P_{26}.

先验概率、后验概率(P_{26}).

例 1.26(P_{26})

例 1.27(P_{26})

作业(P_{27}-P_{28})：1.　3.　5.-7.　　4.

§1.6 事件的独立性

1.6.1 两个事件相互独立

条件概率公式在应用时有时会遇到下面例题中的情形.

例 1.28（P_{28}）

该题中出现了等式 P(B|A)=P(B)，即（条件）A 的发生未影响 P(B|A)的大小；换句话说，P(B|A)的大小与（条件）A 发生无关，只与 B 发生有关，就是 B 发生的概率 P(B).

同理，有 P(A|B)=P(A)，即 B 的发生（条件）未影响 P(A|B)的大小.

一般来说，条件通常会影响条件概率的值. 例 1.28 的结果其实是两个事件间的一种特殊状态——独立的表现，是两个事件互不影响发生的必然结果.

注意到，由等式 P(B|A)=P(B)及条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，可以写出 P(AB)= P(A)P(B)，下面以此为定义式给出两个事件独立的概念.

定义 1.5　设 A,B 是两个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B), \tag{1.16}$$

则称 A,B **相互独立**，简称 A,B 独立.

以(1.16)式定义两个事件相互独立，一方面不排斥零概率事件，另一方面 A 与 B 的地位对称能更好地体现“相互”的意思.

相互独立的两个事件具有如下性质.

定理 1.3　若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$　也相互独立.

事件相互独立与事件互斥是不同的概念. 容易知道，若 P(A)>0,P(B)>0，则 A,B 独立与 A,B 互斥不能同时成立.

在实际中，一般是根据问题的实际意义来判断两个事件的发生是否相互有影响.如果没有影响，则认为两个事件相互独立，即(1.16)式成立. 例如，我国南方甲地粮食增产，北方乙地粮食减产，这两个事件相互没有影响，故是相互独立的. 天大旱，粮食减产. 某

地因天大旱影响了粮食的收成，因此天大旱与粮食减产不是相互独立的.

在实际中，若两个事件相互没影响或影响微弱，就认为它们是相互独立的，否则认为不独立．这同样适用多个事件相互独立的判断．利用独立性，可以比较容易地计算积事件的概率.

例 1.29(P_{29})

例 1.30(P_{29})

1.6.2 多个事件相互独立

类似地可以定义三个事件的相互独立.

如果三个事件 A,B,C 满足

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases} \tag{1.17}$$

则称 **A,B,C 两两独立**.

如果三个事件 A,B,C 不仅满足(1.17)式，还满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \tag{1.18}$$

则称 **A,B,C 相互独立**.

显然，相互独立一定两两独立，但两两独立却不一定相互独立.

例 1.31(P_{30})

一般地，对于 n 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，如果对任意的

$$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n \quad (1<k\le n),$$

都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ **相互独立**.

n 个相互独立的事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 有与两个相互独立事件相似的性质，即将其中的任意 k $(1<k\le n)$个事件换成对立事件后的 n 个事件也相互独立.

例 证明：事件 A,B,C 相互独立的充分必要条件为 A,B,C 两两独立，且以下三式

$$P(ABC)=P(AB)P(C),$$

$$P(ABC)=P(BC)P(A),$$

$$P(ABC)=P(AC)P(B)$$

至少有一个成立.

独立性在可靠性分析中有许多应用.

例 1.32(P_{31})

练习题:

1. 设事件 A,B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下述结论肯定正确的是

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容;　　　　(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容;

(C) P(AB)=P(A)P(B);　　　　(D) P(A-B)=P(A).

2.若事件 A,B 同时出现的概率 P(AB)=0，则正确的是

(A) A 与 B 不相容;　　　　(B) AB 是不可能事件;

(C) AB 未必是不可能事件;　　　　(D) P(A)=0 或 P(B)=0.

注意：P(AB)=0 推不出 AB=Φ，P(AB)=1 推不出 AB=Ω.

1. 6. 3 伯努利(Bernoulli)概型

在许多问题中，我们感兴趣的只是试验中某个事件是否发生．这种只关心某个事件是否发生的试验称为**伯努利(Bernoulli)试验**，可表示为 $P(A)=p, P(\bar{A})=1-p(0<p<1)$，称为**伯努利概型**. 一个伯努利试验独立地做 n(n≥2)次，n 个试验合在一起称为 **n 重伯努利试验**.

“一个伯努利试验独立地做 n 次”的含义是，每次试验的 P(A)=p 保持不变，且各次试验相互独立.

n 重伯努利试验的例子(P_{33}).

在 n 重伯努利试验中，人们主要关心事件 A 发生指定次数的概率.

设 B_k 表示“n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次”(k=0,1,2,…,n)，并记 $P(B_k)=p_n(k)$．由于 n 个试验是相互独立的，因此事件 A 在指定的 k 个试验中发生，而在其余的 n-k 个试验中不发生的概率为 $p^k(1-p)^{n-k}$．由于这种指定方式有 C_n^k 个，且对应的 C_n^k 个事件两两互斥，因此

$$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (1.19)$$

例 1.33(P_{33})

例 1.34(P_{34})

作业(P_{34}-P_{35})：1.　2.　4.　7.　9.　10.　　3.　5.−6.