高级宏观经济学作业一

邓皓天　2023310114

一、RBC模型的求解和模拟。 假设家庭的最优化目标是最大化终生效用：$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$，其中$c_t$、$l_t$分别表示消费和劳动时间，$\beta$表示折现因子。家庭的即期效用函数是消费c和闲暇$(1-l)$的增函数和凹函数：

$$u(c_t, l_t) = \gamma \ln c_t + (1-\gamma) \ln (1-l_t),$$

家庭在要素市场上提供劳动l、出租资本k，获得相应报酬，并将其收入用于消费和储蓄s。储蓄可以无成本地转换为投资：$i_t = s_t$。资本按固定比率δ折旧，其积累方程为：

$$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t.$$

假设厂商具有柯布道格拉斯（CD）生产技术：

$$y_t = f(k_t, l_t) = a_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

其中a_t表示全要素生产率，服从AR(1)过程，$\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$，其中$0 < \rho < 1$。

1. 请写出家庭的预算约束。

2. 请写出家庭最优化问题的拉格朗日函数。

3. 求解家庭最优化问题的一阶条件，并利用消费的一阶条件消去拉格朗日乘子。

4. 请写出厂商的利润最大化问题并求解一阶条件。

5. 将所有一阶条件及生产率冲击假设整理为包含变量$\{c_t, l_t, k_t, w_t, r_t, a_t, y_t, i\}$的七个方程构成的均衡系统。

6. 对数线性化模型均衡系统。

7. 找出模型中的控制变量和状态变量。

   以下步骤均需要使用计算机操作，请根据题目说明报告计算结果。

8. 校准模型。按下表对模型涉及的六个参数进行赋值:

参数	取值	含义
α	0.4	资本份额
β	0.98	贴现因子
γ	0.4	家庭偏好
δ	0.05	资本折旧率
ρ	0.9	TFP自回归系数
σ	0.01	TFP标准差

   根据均衡系统和参数值计算模型变量的稳态值，请写出计算过程，并报告所有内生变量稳态值的计算结果。

9. 消去对数线性化均衡系统中的静态变量r，l，w，y，整理成线性差分方程组，并整理成如下形式:

$$X_{t+1} = wX_t + R\varepsilon_{t+1} \tag{1}$$

   请说明推导过程，并报告矩阵w和R的计算结果。

10. 对矩阵w进行特征分解得到$w = P\Lambda P^{-1}$，从而把差分方程系统的系数矩阵转化为对角矩阵。请说明计算过程，并报告矩阵P和Λ的计算结果。

11. 把大于1的特征值对应的变量向前迭代获得最优政策路径。请说明计算过程并报告对应鞍点路径的系数矩阵。

12. 把政策路径代入原均衡系统得到状态变量的转移路径。请说明计算过程并报告对应转移路径的系数矩阵。

13. 根据鞍点路径画出模型变量的脉冲反应图。

14. 给定随机冲击，利用MATLAB生成25000个随机数，对模型变量进行模拟。去掉前5000个值，消除初始值的影响，得到变量的模拟时间序列，并计算模拟序列的方差，协方差矩阵和自相关矩阵。

15. 根据鞍点路径计算模型变量的均值、方差、标准差、协方差矩阵和自相关矩阵。

提示：协方差矩阵：

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= EY_tY_t' = \Phi\Gamma(-1) + \Psi\Psi'\sigma^2 \\ &= \Phi\Gamma(0)\Phi' + \Psi\Psi'\sigma^2 \\ vec[\Gamma(0)] &= [I - \Phi\otimes\Phi]^{-1} vec(\Psi\Psi')\sigma^2 \\ \Gamma(i) &= \Phi^i\Gamma(0)\end{aligned}$$

自相关矩阵：

$$P(i) = D^{-1}\Gamma(i)D^{-1}$$

其中D为对角矩阵，对角元素为变量标准差。

答：

1. 家庭的预算约束为：

$$c_t + g_Z k_{t+1} = (1 + r_t)k_t + w_t l_t$$

2. 家庭最优化问题的拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\{\gamma\ln c_t + (1-\gamma)\ln(1-l_t) + \lambda_t[(1+r_t)k_t + w_t l_t - c_t - g_Z k_{t+1}]\}$$

3. 消去λ_t之后的一阶条件：

$$\frac{\gamma w_t}{c_t}=\frac{1-\gamma}{1-l_t}$$
$$E_t\frac{\beta}{c_{t+1}}\left(1+r_{t+1}\right)=\frac{g_Z}{c_t}$$

4. 厂商的利润最大化问题：

$$\max_{k_t,l_t} a_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}-\left(r_t+\delta\right)k_t-w_t l_t$$

一阶条件：

$$y_t=a_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$
$$r_t=\alpha\frac{y_t}{k_t}-\delta$$
$$w_t=(1-\alpha)\frac{y_t}{l_t}$$

5. 均衡系统：

$$\frac{\gamma w_t}{c_t}=\frac{1-\gamma}{1-l_t}$$
$$E_t\frac{\beta}{c_{t+1}}\left(1+r_{t+1}\right)=\frac{g_Z}{c_t}$$
$$y_t=a_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$
$$r_t=\alpha\frac{y_t}{k_t}-\delta$$
$$w_t=(1-\alpha)\frac{y_t}{l_t}$$
$$\ln a_{t+1}=\rho\ln a_t+\varepsilon_t$$
$$y_t=c_t+g_Z k_{t+1}-(1-\delta)k_t$$

6. 对数线性化系统：

$$\frac{l}{1-l}\hat{l}_t=\hat{w}_t-\hat{c}_t$$
$$-\hat{c}_t=-\hat{c}_{t+1}+\frac{r}{1+r}\hat{r}_{t+1}$$
$$\hat{y}_t=\hat{a}_t+\alpha\hat{k}_t+(1-\alpha)\hat{l}_t$$
$$\frac{r}{r+\delta}\hat{r}_t=\hat{y}_t-\hat{k}_t$$
$$\hat{w}_t=\hat{y}_t\hat{l}_t$$
$$\hat{a}_{t+1}=\rho\hat{a}_t+\varepsilon_{t+1}$$
$$\hat{y}_t=\frac{c}{y}\hat{c}_t+\frac{g_Z}{y}\hat{k}_{t+1}\frac{(1-\delta)k}{y}\hat{k}_t$$

7. 状态变量：a_t和k_t；控制变量：其余变量。

8. 稳态下，外生变量$a_t = 1$，$g_Z = 1$，稳态系统为：

$$\frac{\gamma w}{c} = \frac{1-\gamma}{1-l}$$
$$g_z = \beta(1+r)$$
$$y = c + g_Z k - (1-\delta)k$$
$$r = \alpha\frac{y}{k} - \delta$$
$$w = (1-\alpha)\frac{y}{l}$$

- $g_z = \beta(1+r) \Rightarrow r = \frac{g_z}{\beta} - 1$
- $r = \alpha\frac{y}{k} - \delta \Rightarrow \frac{k}{y} = \frac{\alpha}{r+\delta}$
- $y = c + g_Z k - (1-\delta)k \Rightarrow \frac{c}{y} = 1 - (g_z - 1 + \delta)\frac{k}{y}$
- 生产函数$y = ak^{\alpha}l^{1-\alpha}$，$a = 1$，可得$\frac{l}{y} = \left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$。
- $w = (1-\alpha)\frac{y}{l}$
- $\frac{\gamma w}{c} = \frac{1-\gamma}{1-l}, w = (1-\alpha)\frac{y}{l} \Rightarrow l$

计算结果：

$$\bar{y} = 1.1412$$
$$\bar{c} = 0.8171$$
$$\bar{k} = 6.4836$$
$$\bar{l} = 0.3584$$
$$\bar{i} = 0.3242$$

9. 消去对数线性化系统中的$\hat{y}_t$、$\hat{w}_t$、$\hat{r}_t$和$\hat{i}_t$

$$\left(\frac{l}{1-l} + \alpha\right)\hat{l}_t = \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t - \hat{c}_t$$
$$\hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t + \frac{r+\delta}{1+r}\left[\hat{a}_{t+1} + (1-\alpha)\left(\hat{l}_{t+1} - \hat{k}_{t+1}\right)\right]$$
$$g_Z\frac{k}{y}\hat{k}_{t+1} = \hat{a}_t + (1-\alpha)\hat{l}_{t^-} - \frac{c}{y}\hat{c}_t + \left[\alpha + \frac{(1-\delta)k}{y}\right]\hat{k}_t$$
$$\hat{a}_{t+1} = \rho\hat{a}_t + \varepsilon_{t+1}$$

令$\xi \equiv \frac{1}{\frac{l}{1-l}+\alpha}$，$\phi \equiv \frac{r+\delta}{1+r}$，则

$$\hat{l}_t = \xi \hat{a}_t + \alpha \xi \hat{k}_t - \xi \hat{c}_t$$

代入欧拉方程可得:

$$[1+\phi(1-\alpha)\xi]\hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t + \phi[1+(1-\alpha)\xi]\hat{a}_{t+1} + \phi(1-\alpha)(\alpha\xi-1)\hat{k}_{t+1}$$

代入资源约束方程可得:

$$g_Z \frac{k}{y}\widehat{k}_{t+1} = [1+(1-\alpha)\xi]\hat{a}_t + \left[(1-\alpha)\alpha\xi + \alpha + (1-\delta)\frac{k}{y}\right]\hat{k}_{t^-} \left[(1-\alpha)\theta\xi + \frac{c}{y}\right]\hat{c}_t$$

结合外生冲击的定义式可整理为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_Z\frac{k}{y} & 0 \\ -\phi[1+(1-\alpha)\xi] & \phi(1-\alpha)(1-\alpha\xi) & 1+\phi(1-\alpha)\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 1+(1-\alpha)\xi & (1-\alpha)\alpha\xi+\alpha+(1-\delta)\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{y}} & -(1-\alpha)\theta\xi - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{y}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{t}} \\ \hat{\mathrm{k}}_{\mathrm{t}} \\ \hat{\mathrm{c}}_{\mathrm{t}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{t}+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可化简为

$$BX_{t+1} = AX_{\mathrm{t}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \varepsilon_{\mathrm{t}+1}$$

其中，$w = B^{-1}A$，$R = B^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$。计算结果为:

$$w = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0 & 0 \\ 0.2862 & 1.0645 & -0.2362 \\ 0.0902 & -0.0246 & 0.9641 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0 \\ 0.1075 \end{bmatrix}$$

10.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1038 & 0 & 0 \\ -0.8708 & -0.8578 & -0.9852 \\ -0.4806 & -0.5139 & 0.1714 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9230 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1056 \end{bmatrix}$$

11. 将差分方程组左右两边同时乘以P^{-1}，将系数矩阵转化为对角矩阵:

$$\tilde{x}_{t+1} = \Lambda\tilde{x}_t + U\varepsilon_{t+1}$$

其中，$\tilde{x}_t = P^{-1}X_t$，$U = P^{-1}R$。因此$\lambda_2 > 1$，则鞍点路径要求$\tilde{x}_{3t} = 0$，否则该路径将发散，所以对应的鞍点路径为:

$$\hat{c}_t = -p_{33}^{-1}\begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} \equiv M_c\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}$$

鞍点路径的系数矩阵$M_c = \begin{bmatrix} 0.3954 & 0.5991 \end{bmatrix}$;

12. 把政策路径代入均衡系统可得状态变量的转移路径为:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}\varepsilon_{A_{t+1}}$$
$$= \begin{bmatrix} w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix}\hat{c}_t + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon_{A_{t+1}}$$

将$\hat{c}_t = -p_{33}^{-1}\begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} \equiv M_c\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}$代入可得:

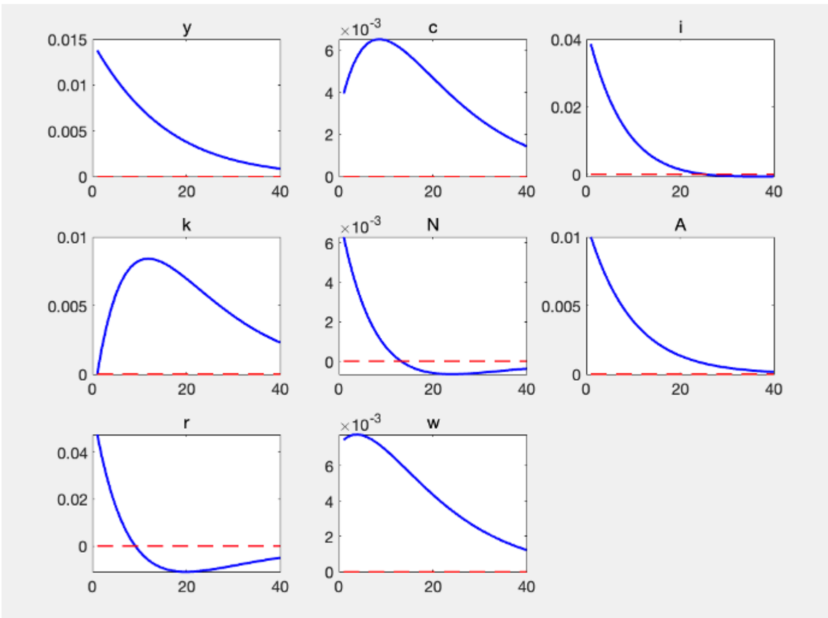
$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{bmatrix} = \left(-p_{33}^{-1}\begin{bmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon_{A_{t+1}}$$
$$\equiv M_s\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon_{A_{t+1}}$$

对应转移路径的系数矩阵$M_s = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0 \\ 0.1928 & 0.9230 \end{bmatrix}$。

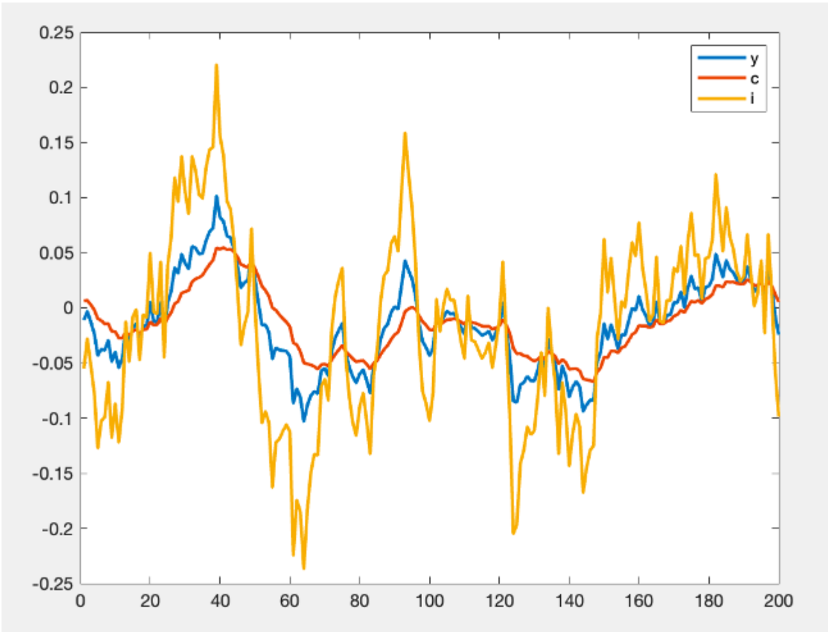
13. 所有变量的鞍点路径整合的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1.3784 & 0.2754 \\ 0.3954 & 0.5991 \\ 3.8557 & -0.5405 \\ 0.6306 & -0.2077 \\ 4.7554 & -2.4999 \\ 0.7478 & 0.4831 \end{bmatrix}$$

脉冲反应图为



14. 模拟时间序列示意图



方差为：

$$\begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0009 & 0.0061 & 0.0001 & 0.0081 & 0.0010 & 0.0005 & 0.0014 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵为：

$$\begin{bmatrix}
0.0015 & 0.0010 & 0.0028 & 0.0003 & 0.0013 & 0.0012 & 0.0009 & 0.0011 \\
0.0010 & 0.0009 & 0.0015 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0009 & 0.0005 & 0.0011 \\
0.0028 & 0.0015 & 0.0061 & 0.0008 & 0.0051 & 0.0020 & 0.0018 & 0.0013 \\
0.0003 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0001 & 0.0009 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0000 \\
0.0013 & -0.0001 & 0.0051 & 0.0009 & 0.0081 & 0.0004 & 0.0012 & -0.0010 \\
0.0012 & 0.0009 & 0.0020 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0011 \\
0.0009 & 0.0005 & 0.0018 & 0.0002 & 0.0012 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0005 \\
0.0011 & 0.0011 & 0.0013 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0011 & 0.0005 & 0.0014
\end{bmatrix}$$

自相关系数矩阵为：

$$
\begin{bmatrix}
1.0000 & 0.9035 & 0.9136 & 0.7107 & 0.3780 & 0.9679 & 0.9779 & 0.7717 \\
0.9035 & 1.0000 & 0.6512 & 0.3406 & -0.0553 & 0.9822 & 0.7939 & 0.9698 \\
0.9136 & 0.6512 & 1.0000 & 0.9353 & 0.7217 & 0.7821 & 0.9785 & 0.4466 \\
0.7107 & 0.3406 & 0.9353 & 1.0000 & 0.9200 & 0.5110 & 0.8421 & 0.1011 \\
0.3780 & -0.0553 & 0.7217 & 0.9200 & 1.0000 & 0.1331 & 0.5633 & -0.2970 \\
0.9679 & 0.9822 & 0.7821 & 0.5110 & 0.1331 & 1.0000 & 0.8939 & 0.9068 \\
0.9779 & 0.7939 & 0.9785 & 0.8421 & 0.5633 & 0.8939 & 1.0000 & 0.6217 \\
0.7717 & 0.9698 & 0.4466 & 0.1011 & -0.2970 & 0.9068 & 0.6217 & 1.0000
\end{bmatrix}
$$

15. 均值：

$$
\begin{bmatrix}
0.1321 \\
-0.2020 \\
-1.1265 \\
1.8693 \\
-1.0260 \\
0 \\
-3.8918 \\
0.6473
\end{bmatrix}
$$

方差：

$$
\begin{bmatrix}
0.0015 \\
0.0009 \\
0.0060 \\
0.0001 \\
0.0080 \\
0.0010 \\
0.0005 \\
0.0014
\end{bmatrix}
$$

标准差：

$$\begin{bmatrix} 0.0390 \\ 0.0292 \\ 0.0774 \\ 0.0114 \\ 0.0895 \\ 0.0319 \\ 0.0229 \\ 0.0378 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵

$$\begin{bmatrix}
0.0015 & 0.0010 & 0.0028 & 0.0003 & 0.0013 & 0.0012 & 0.0009 & 0.0011 \\
0.0010 & 0.0009 & 0.0015 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0009 & 0.0005 & 0.0011 \\
0.0028 & 0.0015 & 0.0060 & 0.0008 & 0.0050 & 0.0019 & 0.0017 & 0.0013 \\
0.0003 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0001 & 0.0009 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0000 \\
0.0013 & -0.0001 & 0.0050 & 0.0009 & 0.0080 & 0.0004 & 0.0012 & -0.0010 \\
0.0012 & 0.0009 & 0.0019 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0011 \\
0.0009 & 0.0005 & 0.0017 & 0.0002 & 0.0012 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0005 \\
0.0011 & 0.0011 & 0.0013 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0011 & 0.0005 & 0.0014
\end{bmatrix}$$

自相关矩阵：

$$\begin{bmatrix}
1.0000 & 0.9036 & 0.9136 & 0.7104 & 0.3772 & 0.9679 & 0.9779 & 0.7721 \\
0.9036 & 1.0000 & 0.6514 & 0.3405 & -0.0558 & 0.9823 & 0.7941 & 0.9699 \\
0.9136 & 0.6514 & 1.0000 & 0.9352 & 0.7212 & 0.7821 & 0.9784 & 0.4470 \\
0.7104 & 0.3405 & 0.9352 & 1.0000 & 0.9198 & 0.5108 & 0.8419 & 0.1012 \\
0.3772 & -0.0558 & 0.7212 & 0.9198 & 1.0000 & 0.1325 & 0.5626 & -0.2973 \\
0.9679 & 0.9823 & 0.7821 & 0.5108 & 0.1325 & 1.0000 & 0.8940 & 0.9070 \\
0.9779 & 0.7941 & 0.9784 & 0.8419 & 0.5626 & 0.8940 & 1.0000 & 0.6221 \\
0.7721 & 0.9699 & 0.4470 & 0.1012 & -0.2973 & 0.9070 & 0.6221 & 1.0000
\end{bmatrix}$$

二、在标准的RBC模型中分析消费习惯和劳动供给的跨期替代弹性。

假设家庭的单期效用函数为：

$$u\left(c_t, c_{t-1}, n_t\right) = \log\left(c_t - \eta c_{t-1}\right) - a\frac{n_t^{1+\gamma}}{1+\gamma}, \quad 0 < \eta < 1.$$

预算约束为：$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)\, k_t \le A_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$。其中：$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$。

1. 请写出模型的均衡条件。
2. 求解模型的稳态。
3. 写出模型一阶条件的对数线性化系统。
4. 假设稳态年利率为4%，年折旧率为10%。资本的收入份额为1/3，$\eta = 0.5$，$\rho = 0.9$。据此设定模型的参数值，分析脉冲反应函数，并根据η在{0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99}这几个取值下模型动态的变化讨论该参数的作用。（本小题需要使用MATLAB和Dynare软件包。）
5. 当γ值在$[0.5, 2.5]$之间（取100个点）变化时，模型鞍点路径中劳动供给的系数如何变化，作图并讨论其经济含义。（本小题需要使用MATLAB和Dynare软件包。）

答：

1. 家庭最大化终身效用的折现值：

   $$\max_{c_t, n_t, k_{t+1}} \; E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln\left(c_t - \eta c_{t-1}\right) - \alpha \frac{n_t^{1+r}}{1+r}\right]$$
   $$\text{s.t. } C_t + g_Z k_{t+1} = \left(1+r_t\right) k_t + w_t n_t$$

   拉格朗日函数为：

   $$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{\ln\left(c_t - \eta c_{t-1}\right) - \alpha \frac{n_t^{1+r}}{1+r} + \lambda_t [\left(1+r_t\right) k_t + w_t n_t - c_t - g_Z k_{t+1}]\}$$

   均衡条件：

- 对c_t求导：$\lambda_t = \frac{1}{c_t - \eta c_{t-1}} - \frac{\eta\beta}{c_{t+1} - \eta c_t}$
- 对n_t求导：$\lambda_t = \frac{\alpha n_t^{\gamma}}{w_t}$
- 对k_{t+1}求导：$\beta\lambda_{t+1}\left(1 + r_{t+1}\right) = \lambda_t g_Z$

厂商最大化利润：

$$\max_{k_t, n_t} A_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - \left(r_t + \delta\right) k_t - w_t n_t$$

均衡条件：

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} {n_t}^{1-\alpha}$$
$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta$$
$$w_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{n_t}$$

2. 稳态时：

$$n_t^{\gamma} = \frac{w}{a} \frac{1-\eta\beta}{(1-\eta)c}$$
$$g_Z = \beta(1+r)$$
$$y = c + g_z k - (1-\delta)k$$
$$\gamma = \alpha \frac{y}{k} - \delta$$
$$w = (1-\alpha)\frac{y}{n}$$

外生变量A_t不变，因此$g_Z = 1$，$A = 1$。

- $r = \frac{g_Z}{\beta} - 1$
- $\frac{k}{y} = \frac{\alpha}{\gamma + \delta}$
- $\frac{c}{y} = 1 - (g_Z - 1 + \delta)\frac{k}{y}$
- $y = Ak^{\alpha}n^{1-\alpha} \Rightarrow (\frac{k}{y})^{\alpha}(\frac{n}{y})^{1-\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{n}{y} = (\frac{k}{y})^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
- $w = (1-\alpha)\frac{y}{n}$
- $n^{\gamma} = \frac{w}{a}\frac{1-\eta\beta}{(1-\eta)c} \Rightarrow (\frac{n}{y} \cdot y)^{\gamma} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{y}{n} \cdot \frac{1-\eta\beta}{1-\eta} \cdot \frac{y}{c} \cdot \frac{1}{y}$，带入$\frac{n}{y}$和$\frac{c}{y}$可解得$y$。

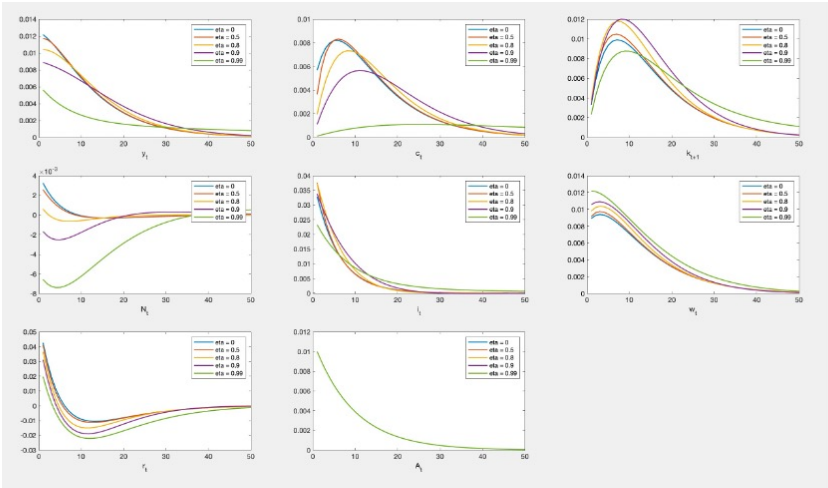
3.

$$\frac{a \cdot n_t^\gamma}{w_t} = \frac{1}{c_t - \eta c_{t-1}} - \frac{\eta\beta}{c_{t+1} - \eta c_t}$$
$$\frac{n_t^\gamma}{w_t} g_Z = \beta \frac{n_{t+1}^\gamma}{w_{t+1}} (1 + r_{t+1})$$
$$y_t = A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$$
$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta$$
$$w_t = (1-\alpha) y_t / n_t$$
$$\ln A_{t+1} = P_A \ln A_t + \epsilon_{At}$$
$$i_t = g_t k_{t+1} - (1-\delta) k_t$$
$$y_t = C_t + i_t$$

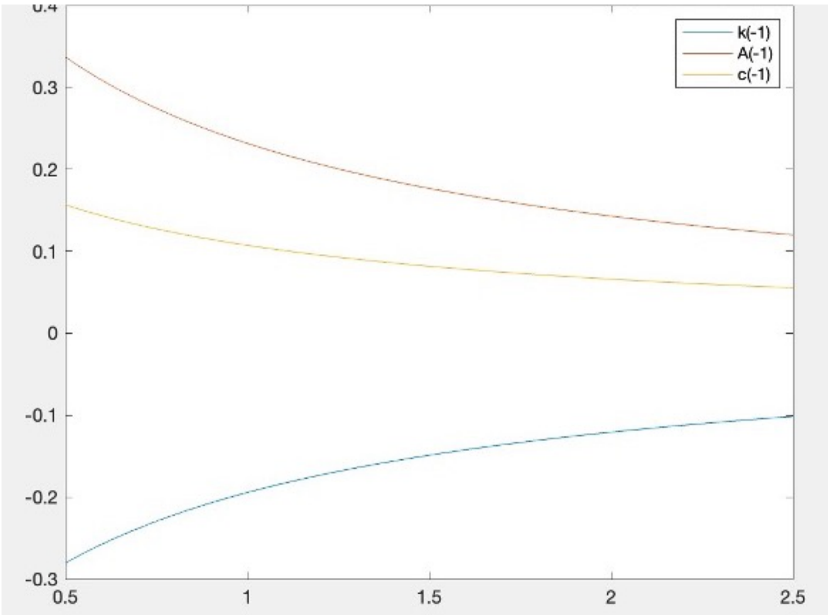
对数线性化系统:

$$\gamma \hat{n}_t - \hat{w}_t = \frac{\eta\beta \hat{c}_{t-1} - \left(1+\eta^2\beta\right)\hat{c}_t + \eta \hat{c_{t-1}}}{(-\eta\beta)(1-\eta)}$$
$$\gamma n_t - \hat{w}_t = r\hat{n}_{t+1} - \hat{w}_{t+1} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\hat{r}_{t+1}$$
$$\hat{y}_t = \hat{A}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t$$
$$\frac{\gamma}{\gamma+\delta}\hat{r}_t = \hat{y}_t - \hat{k}_t$$
$$\hat{w}_t = \hat{y}_t - \hat{n}_t$$
$$\hat{A}_{t+1} = P_A \hat{A}_t + \epsilon_{A_{t+1}}$$
$$\hat{\delta}_t = \frac{g_Z}{g_Z - 1 + \delta}\hat{k}_{t+1} - \frac{1-\delta}{g_z - 1 + \delta}\hat{k}_t$$
$$\hat{y}_t = \frac{c}{y}\hat{c}_t + \frac{i}{y}\hat{i}_t$$

4. 随着η增大，产出、消费、资本存量对技术冲击的反应变得越来越平缓。技术对劳动的冲击由正转负。当$\eta = 0.8$时，冲击的影响最为缓和；而当$\eta = 0.99$时，技术对消费的影响非常平缓，不再呈现驼峰状。从效用函数的角度看，η度量了上一期消费负效应的程度，η的值越大，消费者的消费习惯越稳固，其消费行为也越一致，也就是需要更多的当期消费来匹配过去的消费习惯。当$\eta = 0.99$时，消费者的消费习惯十分稳固，对技术冲击对反应也就不再敏感。



5. 技术和消费的系数大于0，资本存量的系数小于0，随着 γ 的增大，三个系数的绝对值均减小，说明技术冲击对劳动供给的影响越来越小。由于$\lambda = \frac{\alpha n^{\gamma}}{w}$，因此$\frac{1}{\gamma} = \frac{d(\ln n)}{d\ln w}$为劳动的弹性，随着$\gamma$增大，劳动的供给弹性变小，劳动对工资的敏感程度降低，所以面对技术冲击时家庭不愿意改变劳动供给，系数绝对值也就减小了。



三、考虑Calvo 定价模型。已知厂商i面临的产品需求函数为$Y_{it}=\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\varepsilon}Y_t$。假设厂商每期可以选择最优价格的概率为$1-\gamma$，从而厂商的最优定价问题为：

$$\max_{p_{it}} E_t\sum_{s=0}^{\infty}\gamma^s\Lambda_{t+s}\left[\frac{P_{it}}{P_{t+s}}-mc_{t+s}\right]Y_{it+s}$$

其中$\Lambda_{t+s}\equiv\beta^s\frac{C_t}{C_{t+s}}$表示随机折现因子。

1. 请写出厂商定价的一阶条件。
2. 把最优定价的表达式写为$P_{it}^*=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{X_{1t}}{X_{2t}}$，写出$X_{1t}$和$X_{2t}$的迭代方程形式，并验证当$\gamma=0$时，$P_{it}^*=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}mc_{it}P_t$。

答：

1. 厂商最优定价问题

$$\max_{p_{it}} E_t\sum_{s=0}^{\infty}\gamma^s\beta^s\frac{c_t}{c_{t+s}}\left[\frac{P_{it}}{P_{t+s}}-mC_{t+s}\right]\cdot\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\varepsilon}Y_{t+s}$$

   一阶条件：

$$E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\gamma\beta)^s\frac{c_t}{c_{t+s}}\cdot P_{t+s}^{\varepsilon}\left[(1-\varepsilon)\frac{P_{it}}{P_{t+s}}+\varepsilon mc_{t+s}\right]Y_{t+s}=0$$

2. 将一阶条件改写为$P_{it}^*=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{X_{1t}}{X_{2t}}$

$$P_{0t}^*=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\gamma\beta)^s c_t\cdot P_{t+s}^{c}\cdot mY_{t+s}}{E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\gamma\beta)^s\frac{c_t}{c_{t+s}}P_{t+s}^{e-1}Y_{t+s}}$$

   因此，

$$X_{1t}=E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\gamma\beta)^s c_t\cdot P_{t+s}^{c}\cdot mY_{t+s}=c_tP_t^{\varphi}mY_t+\gamma\beta X_{1t+1}$$

$$X_{2t}=E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\gamma\beta)^s\frac{c_t}{c_{t+s}}P_{t+s}^{e-1}Y_{t+s}=P_t^{\varphi-1}Y_t+\gamma\beta X_{2t+1}$$

   当$\gamma=0$时，

$$P_{it}^*=\frac{\varphi}{\varphi-1}\cdot\frac{c_{it}\cdot P_t^{\varphi}\cdot mY_t}{\frac{c_t}{c_t}\cdot P_{t+s}^{\varphi-1}Y_t}=\frac{\varphi}{\varphi-1}\cdot c_{it}mP_t$$