第二节　　随机时间序列分析模型

一、时间序列模型的基本概念及其适用性

二、随机时间序列模型的平稳性条件

三、随机时间序列模型的识别

四、随机时间序列模型的估计

五、随机时间序列模型的检验

- 经典计量经济学模型与时间序列模型
- 确定性时间序列模型与随机性时间序列模型

一、时间序列模型的基本概念及其适用性

1、时间序列模型的基本概念

随机时间序列模型（time series modeling）是指仅用它的过去值及随机扰动项所建立起来的模型，其一般形式为

$$X_t=F(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, \mu_t)$$

建立具体的时间序列模型，需解决如下三个问题：

(1)模型的具体形式

(2)时序变量的滞后期

(3)随机扰动项的结构

例如，取线性方程、一期滞后以及白噪声随机扰动项（ $\mu_t=\varepsilon_t$），模型将是一个**1阶自回归过程AR(1):**

$$X_t=\varphi X_{t-1}+\varepsilon_t$$

这里， ε_t特指一白噪声。

一般的**p**阶自回归过程**AR(p)**是

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\ldots+\varphi_p X_{t-p}+\mu_t \qquad (*)$$

(1)如果随机扰动项是一个白噪声($\mu_t=\varepsilon_t$)，则称(*)式为一**纯AR(p)过程**（**pure AR(p) process**），记为

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\ldots+\varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t$$

(2)如果μ_t不是一个白噪声，通常认为它是一个q阶的**移动平均**（**moving average**）**过程MA(q)**:

$$\mu_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

该式给出了一个纯**MA(q)过程**（**pure MA(p) process**）。

将纯AR(p)与纯MA(q)结合，得到一个一般的**自回归移动平均（autoregressive moving average）过程ARMA（p,q）**：

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\ldots+\varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

该式表明：

（1）一个随机时间序列可以通过一个自回归移动平均过程生成，即该序列可以由其自身的过去或滞后值以及随机扰动项来解释。

（2）如果该序列是平稳的，即它的行为并不会随着时间的推移而变化，**那么我们就可以通过该序列过去的行为来预测未来。**

这也正是随机时间序列分析模型的优势所在。

2、时间序列分析模型的适用性

- 经典回归模型的问题：
- 迄今为止，对一个时间序列Xt的变动进行解释或预测，是通过某个单方程回归模型或联立方程回归模型进行的，由于它们以因果关系为基础，且具有一定的模型结构，因此也常称为**结构式模型（structural model）**。
- 然而，如果Xt波动的主要原因可能是我们无法解释的因素，如气候、消费者偏好的变化等，则利用结构式模型来解释Xt的变动就比较困难或不可能，因为要取得相应的量化数据，并建立令人满意的回归模型是很困难的。
- 有时，即使能估计出一个较为满意的因果关系回归方程，但由于对某些解释变量未来值的预测本身就非常困难，甚至比预测被解释变量的未来值更困难，这时因果关系的回归模型及其预测技术就不适用了。

在这些情况下，我们采用另一条预测途径：通过时间序列的历史数据，得出关于其过去行为的有关结论，进而对时间序列未来行为进行推断。

例如，时间序列过去是否有明显的增长趋势，如果增长趋势在过去的行为中占主导地位，能否认为它也会在未来的行为里占主导地位呢？

或者时间序列显示出循环周期性行为，我们能否利用过去的这种行为来外推它的未来走向？

●随机时间序列分析模型，就是要通过序列过去的变化特征来预测未来的变化趋势。

使用时间序列分析模型的另一个原因在于：

如果经济理论正确地阐释了现实经济结构，则这一结构可以写成类似于ARMA(p,q)式的时间序列分析模型的形式。

例如，对于如下最简单的宏观经济模型：

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 C_{t-1} + \mu_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

这里，Ct、It、Yt分别表示消费、投资与国民收入。

Ct与Yt作为内生变量，它们的运动是由作为外生变量的投资It的运动及随机扰动项μt的变化决定的。

上述模型可作变形如下：

$$C_t = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} C_{t-1} + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1} \mu_t$$

$$Y_t = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} Y_{t-1} + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{1}{1-\alpha_1} I_t - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} I_{t-1} + \frac{1}{1-\alpha_1} \mu_t$$

- 两个方程等式右边除去第一项外的剩余部分可看成一个综合性的随机扰动项，其特征依赖于投资项I_t的行为。
- 如果$\mathbf{I_t}$是一个白噪声，则消费序列C_t就成为一个**1阶自回归过程AR(1)**，而收入序列Y_t就成为一个**(1,1)阶的自回归移动平均过程ARMA(1,1)**。

二、随机时间序列模型的平稳性条件

1、AR(p)模型的平稳性条件

自回归移动平均模型（ARMA）是随机时间序列分析模型的普遍形式，自回归模型（AR）和移动平均模型（MA）是它的特殊情况。

关于这几类模型的研究，是**时间序列分析的重点内容**：**主要包括模型的平稳性分析、模型的识别和模型的估计**。

随机时间序列模型的平稳性，可通过它所生成的随机时间序列的平稳性来判断。

如果一个p阶自回归模型AR(p)生成的时间序列是平稳的，就说该AR(p)模型是平稳的，

否则，就说该AR(p)模型是非平稳的。

考虑p阶自回归模型AR(p)

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\ldots+\varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t \qquad (*)$$

- 引入**滞后算子（lag operator ）L**：

$$LX_t=X_{t-1},\ L^2X_t=X_{t-2},\ \ldots,\ L^pX_t=X_{t-p}$$

(*)式变换为

$$(1-\varphi_1 L-\varphi_2 L^2-\ldots-\varphi_p L^p)X_t=\varepsilon_t$$

记$\Phi(L)=(1-\varphi_1 L-\varphi_2 L^2-\ldots-\varphi_p L^p)$，则称多项式方程

$$\Phi(z)=(1-\varphi_1 z-\varphi_2 z^2-\ldots-\varphi_p z^p)=0$$

为AR(p)的特征方程(characteristic equation)。

可以证明，如果该特征方程的所有根在单位圆外（根的模大于1），则AR(p)模型是平稳的。

例9.2.1 AR(1)模型的平稳性条件。

对1阶自回归模型AR(1)

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

方程两边平方再求数学期望，得到Xt的方差

$$E(X_t^2) = \varphi^2 E(X_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2E(X_{t-1}\varepsilon_t)$$

由于X_t仅与ε_t相关，因此，$E(X_{t-1}\varepsilon_t)=0$。如果该模型稳定，则有$E(X_t^2)=E(X_{t-1}^2)$，从而上式可变换为：

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}$$

在稳定条件下，该方差是一非负的常数，从而有 $|\varphi|<1$。

而AR(1)的特征方程

$$\Phi(z)=1-\varphi z=0$$

的根为 $z=1/\varphi$

AR(1)稳定，即 $|\varphi|<1$，意味着特征根大于1。

例9.2.2 AR(2)模型的平稳性。

对AR(2)模型

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\varepsilon_t$$

方程两边同乘以Xt，再取期望得：

$$\gamma_0=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_2+E(X_t\varepsilon_t)$$

又由于

$$E(X_t\varepsilon_t)=\varphi_1 E(X_{t-1}\varepsilon_t)+\varphi_2 E(X_{t-2}\varepsilon_t)+E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$$

于是

$$\gamma_0=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_2+\sigma_\varepsilon^2$$

同样地，由原式还可得到

$$\gamma_1=\varphi_1\gamma_0+\varphi_2\gamma_1$$

$$\gamma_2=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_0$$

于是方差为

$$\gamma_0=\frac{(1-\varphi_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\varphi_2)(1-\varphi_1-\varphi_2)(1+\varphi_1-\varphi_2)}$$

由平稳性的定义，该方差必须是一不变的正数，于是有

$$\varphi_1+\varphi_2<1, \quad \varphi_2-\varphi_1<1, \quad |\varphi_2|<1$$

这就是**AR(2)的平稳性条件**，或称为**平稳域**。它是一顶点分别为（-2,-1），（2,-1），（0,1）的三角形。

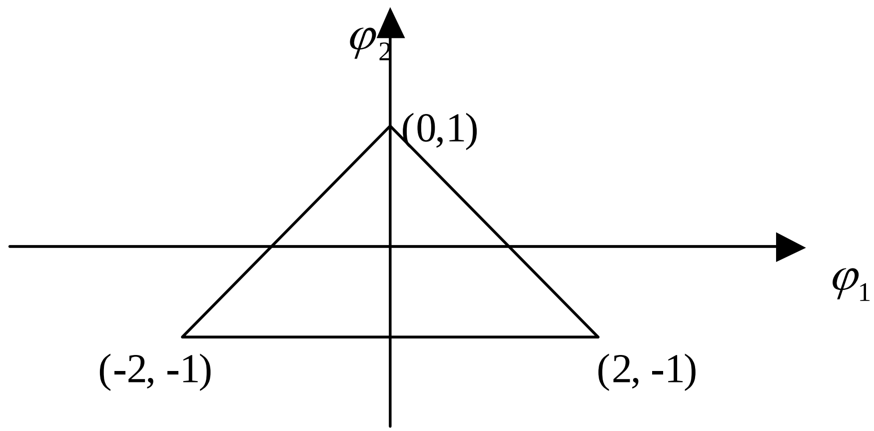


图 **9.2.1　　AR(2)**模型的平稳域

AR(2)模型

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

对应的特征方程$1-\varphi_1 z-\varphi_2 z^2=0$ 的两个根z_1、z_2满足：

$$z_1 z_2=-1/\varphi_2 \quad , \quad z_1+z_2 =-\varphi_1/\varphi_2$$

解出φ_1，φ_2

$$\varphi_2 = -\frac{1}{z_1 z_2} \qquad \varphi_1 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$$

由AR(2)的平稳性，$|\varphi_2|=1/|z_1||z_2|<1$，则至少有一个根的模大于1，不妨设$|z_1|>1$，有

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_1 z_2} = 1 - (1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_2}) < 1$$

$$(1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_2}) > 0$$

于是$|z_2|>1$。由 $\varphi_2 - \varphi_1 <1$可推出同样的结果。

对高阶自回模型AR(p)来说，多数情况下没有必要直接计算其特征方程的特征根，但有一些有用的规则可用来检验高阶自回归模型的稳定性：

(1)AR(p)模型稳定的必要条件是：

$$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_p<1$$

(2) 由于φ_i (i=1, 2, …p) 可正可负，**AR(p)模型稳定的充分条件是：**

$$|\varphi_1|+|\varphi_2|+\ldots+|\varphi_p|<1$$

2、MA(q)模型的平稳性

对于移动平均模型MR(q)：

$X_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$

其中ε_t是一个白噪声，于是

$$E(X_t)=E(\varepsilon_t)-\theta_1E(\varepsilon_{t-1})-\cdots-\theta_qE(\varepsilon_q)=0$$

$$\gamma_0=\mathrm{var}\left(X_t\right)=(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1=\mathrm{cov}(X_t,X_{t-1})=(-\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_3+\cdots+\theta_{q-1}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2$$

……

$$\gamma_{q-1}=\mathrm{cov}(X_t,X_{t-q+1})=(-\theta_{q-1}+\theta_1\theta_q)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_q=\mathrm{cov}(X_t,X_{t-q})=-\theta_q\sigma_\varepsilon^2$$

当滞后期大于q时，Xt的自协方差系数为0。

因此:有限阶移动平均模型总是平稳的。

3、ARMA(p,q)模型的平稳性

由于ARMA (p,q)模型是AR(p)模型与MA(q)模型的组合：

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\ldots+\varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\ldots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

而**MA(q)**模型总是平稳的，因此**ARMA (p,q)**模型的平稳性取决于**AR(p)**部分的平稳性。

当**AR(p)**部分平稳时，则该**ARMA(p,q)**模型是平稳的，否则，不是平稳的。

最后

（1）一个平稳的时间序列总可以找到生成它的平稳的随机过程或模型；

（2）一个非平稳的随机时间序列通常可以通过差分的方法将它变换为平稳的，对差分后平稳的时间序列也可找出对应的平稳随机过程或模型。

因此，如果我们将一个非平稳时间序列通过d次差分，将它变为平稳的，然后用一个平稳的ARMA(p,q)模型作为它的生成模型，则我们就说该原始时间序列是一个自回归单整移动平均（autoregressive integrated moving average）时间序列，记为ARIMA(p,d,q)。

例如，一个ARIMA(2,1,2)时间序列在它成为平稳序列之前先得差分一次，然后用一个ARMA(2,2)模型作为它的生成模型的。

当然，一个ARIMA(p,0,0)过程表示了一个纯AR(p)平稳过程；一个ARIMA(0,0,q)表示一个纯MA(q)平稳过程。

三、随机时间序列模型的识别

所谓随机时间序列模型的识别，就是对于一个平稳的随机时间序列，找出生成它的合适的随机过程或模型，即判断该时间序列是遵循一纯AR过程、还是遵循一纯MA过程或ARMA过程。

所使用的工具主要是时间序列的自相关函数（autocorrelation function，**ACF**）及偏自相关函数（partial autocorrelation function，**PACF**）。

1、AR(p)过程

(1) 自相关函数ACF

1阶自回归模型AR(1)

$X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$

的k阶滞后自协方差为：

$$\gamma_k = E(X_{t-k}(\varphi X_{t-1} + \varepsilon_t)) = \varphi\gamma_{k-1} = \varphi^k \gamma_0 \qquad \kappa=1,2,\ldots$$

因此，AR(1)模型的自相关函数为

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \varphi^k \qquad \kappa=1,2,\ldots$$

由**AR(1)**的稳定性知**|φ|<1**，因此，k→∞时，呈指数形衰减，直到零。这种现象称为拖尾或称AR(1)有无穷记忆（infinite memory）。

注意，φ<0时，呈振荡衰减状。

2 阶自回归模型AR(2)

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\varepsilon_t$$

该模型的方差γ_0以及滞后1期与2期的自协方差γ_1，γ_2分别为

$$\gamma_0=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_2+\sigma_\varepsilon^2 \qquad \begin{aligned}\gamma_1&=\varphi_1\gamma_0+\varphi_2\gamma_1\\ \gamma_2&=\varphi_1\gamma_1+\varphi_2\gamma_0\end{aligned}$$

类似地, 可写出一般的**k期滞后自协方差**：

$$\gamma_k=E(X_{t-k}(\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\varepsilon_t))=\varphi_1\gamma_{k-1}+\varphi_2 r_{k-2} \qquad (K=2,3,\ldots)$$

于是, AR(2)的**k 阶自相关函数**为：

$$\rho_k=\varphi_1\rho_{k-1}+\varphi_2\rho_{k-2} \qquad (K=2,3,\ldots)$$

其中 :$\rho_1=\varphi_1/(1-\varphi_2)$, $\rho_0=1$

如果AR(2)稳定，则由$\varphi_1+\varphi_2<1$知$|\rho_k|$衰减趋于零，呈拖尾状。

至于衰减的形式，要看AR(2)特征根的实虚性，若为实根，则呈单调或振荡型衰减，若为虚根，则呈正弦波型衰减。

一般地，**p阶自回归模型AR(p)**

$$X_t=\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\dots \varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t$$

k期滞后协方差为:

$$\gamma_k = E(X_{t-K}(\varphi_1 X_{t-1}+\varphi_2 X_{t-2}+\cdots+\varphi_p X_{t-p}+\varepsilon_t))$$
$$=\varphi_1\gamma_{k-1}+\varphi_2\gamma_{k-2}+\cdots+\varphi_p\gamma_{k-p}$$

从而有自相关函数：

$$\rho_k=\varphi_1\rho_{k-1}+\varphi_2\rho_{k-2}+\cdots+\varphi_p\rho_{k-p}$$

可见，无论k有多大，ρ_k的计算均与其1到p阶滞后的自相关函数有关，因此呈拖尾状。

如果AR(p)是稳定的，则$|\rho_k|$递减且趋于零。

事实上，自相关函数

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p \rho_{k-p}$$

是一p阶差分方程，其通解为 $\rho_k = \sum_{i=1}^{p} C_i z_i^k$

其中：$1/z_i$是AR(p)特征方程Φ(z)=0的特征根，由AR(p)平稳的条件知，$|z_i|<1$；

因此，当$1/z_i$均为实数根时，ρ_k呈几何型衰减（单调或振荡）；

当存在虚数根时，则一对共扼复根构成通解中的一个阻尼正弦波项，ρ_k呈正弦波衰减。

（2）偏自相关函数

自相关函数ACF(k)给出了X_t与X_{t-1}的总体相关性，但总体相关性可能掩盖了变量间完全不同的隐含关系。

例如，在AR(1)随机过程中，X_t与X_{t-2}间有相关性可能主要是由于它们各自与X_{t-1}间的相关性带来的：

$$\rho_2 = \varphi^2 = \rho_1^2 = E(X_t X_{t-1}) E(X_{t-1} X_{t-2})$$

即自相关函数中包含了这种所有的“间接”相关。

与之相反，X_t与X_{t-k}间的偏自相关函数(partial autocorrelation，简记为PACF)则是消除了中间变量X_{t-1}，…，X_{t-k+1}带来的间接相关后的直接相关性，它是在已知序列值X_{t-1}，…，X_{t-k+1}的条件下，X_t与X_{t-k}间关系的度量。

在AR(1)中，

从X_t中去掉X_{t-1}的影响，则只剩下随机扰动项ε_t，显然它与X_{t-2}无关，因此我们说X_t与X_{t-2}的偏自相关系数为零，记为

$$\rho_2^* = Corr(\varepsilon_t, X_{t-2}) = 0$$

同样地，**在AR(p)过程中**，对所有的k>p，X_t与X_{t-k}间的偏自相关系数为零。

AR(p)的一个主要特征是**:k>p**时，$\boldsymbol{\rho_k^* = Corr(X_t, X_{t-k}) = 0}$

即$\boldsymbol{\rho_k}$*****在**p**以后是截尾的。

一随机时间序列的识别原则:

若Xt的偏自相关函数在p以后截尾，即k>p时，$\rho_k^*=0$，而它的自相关函数ρ_k是拖尾的，则此序列是自回归AR(p)序列。

需指出的是，

在实际识别时，由于样本偏自相关函数r_k^*是总体偏自相关函数ρ_k^*的一个估计，由于样本的随机性，当**k>p**时，r_k^*不会全为0，而是在0的上下波动。但可以证明，当**k>p**时，r_k^*服从如下渐近正态分布：

$$r_k^* \sim N(0,1/n)$$

式中n表示样本容量。

因此，如果计算的r_k^*满足

$$|r_k^*| < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

我们就有95.5%的把握判断原时间序列在p之后截尾。

2、MA(q)过程

对MA(1)过程

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

可容易地写出它的自协方差系数：

$$\gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = -\theta\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = 0$$

于是，MA(1)过程的自相关函数为：

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{(1+\theta^2)}$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \cdots = 0$$

可见，当**k>1**时，ρ_k**>0**，即X_t与X_{t-k}不相关，MA(1)自相关函数是截尾的。

MA(1)过程可以等价地写成ε_t关于无穷序列X_t，X_{t-1}，… 的线性组合的形式：

$$\varepsilon_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \cdots$$

或

$$X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} - \cdots + \varepsilon_t \qquad (*)$$

(*)是一个AR(∞)过程，它的偏自相关函数非截尾但却趋于零，因此**MA(1)的偏自相关函数是非截尾但却趋于零的。**

注意：

(*)式只有当$|\theta|<1$时才有意义，否则意味着距Xt越远的X值，对Xt的影响越大，显然不符合常理。

因此，我们**把$|\theta|<1$称为MA(1)的可逆性条件(invertibility condition)或可逆域。**

一般地，q阶移动平均过程MA(q)

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

其自协方差系数为

$$r_k = E(X_t X_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2) & 当k=0 \\ \sigma_\varepsilon^2(-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q) & 当1\le k\le q \\ 0 & 当k>q \end{cases}$$

相应的自相关函数为

$$\rho_k = \frac{r_k}{r_0} = \begin{cases} 1 & 当k=0 \\ (-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q)/(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2) & 当1\le k\le q \\ 0 & 当k>q \end{cases}$$

可见，当k>q时，**X_t与X_{t-k}**不相关，即存在截尾现象，因此，**当k>q时，ρ_k=0是MA(q)的一个特征**。

于是：可以根据自相关系数是否从某一点开始一直为0来判断MA(q)模型的阶。

与MA(1)相仿，可以验证MA(q)过程的偏自相关函数是非截尾但趋于零的。

MA(q)模型的识别规则：若随机序列的自相关函数截尾，即自q以后，$\rho_k=0$（ $k>q$ ）；而它的偏自相关函数是拖尾的，则此序列是滑动平均MA(q)序列。

同样需要注意的是：在实际识别时，由于样本自相关函数r_k是总体自相关函数ρ_k的一个估计，由于样本的随机性，当**k>q**时，r_k不会全为0，而是在0的上下波动。但可以证明，当**k>q**时，r_k服从如下渐近正态分布：

$$r_k \sim N(0,1/n)$$

式中n表示样本容量。

因此，如果计算的r_k满足： $|r_k| < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

我们就有95.5%的把握判断原时间序列在q之后截尾。

3、ARMA(p, q)过程

ARMA(p,q)的自相关函数，可以看作MA(q)的自相关函数和AR(p)的自相关函数的混合物。

当**p=0**时，它具有截尾性质；

当**q=0**时，它具有拖尾性质；

当**p**、**q**都不为**0**时，它具有拖尾性质

从识别上看，通常：

ARMA(p，q)过程的偏自相关函数（**PACF**）可能在**p**阶滞后前有几项明显的尖柱（**spikes**），但从**p**阶滞后项开始逐渐趋向于零；

而它的自相关函数（**ACF**）则是在**q**阶滞后前有几项明显的尖柱，从**q**阶滞后项开始逐渐趋向于零。

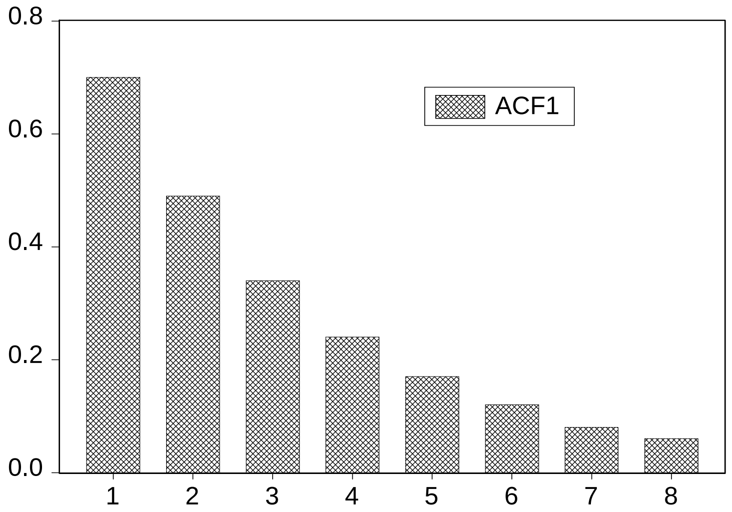
表 9.2.1　　ARMA(p,q)模型的 ACF 与 PACF 理论模式

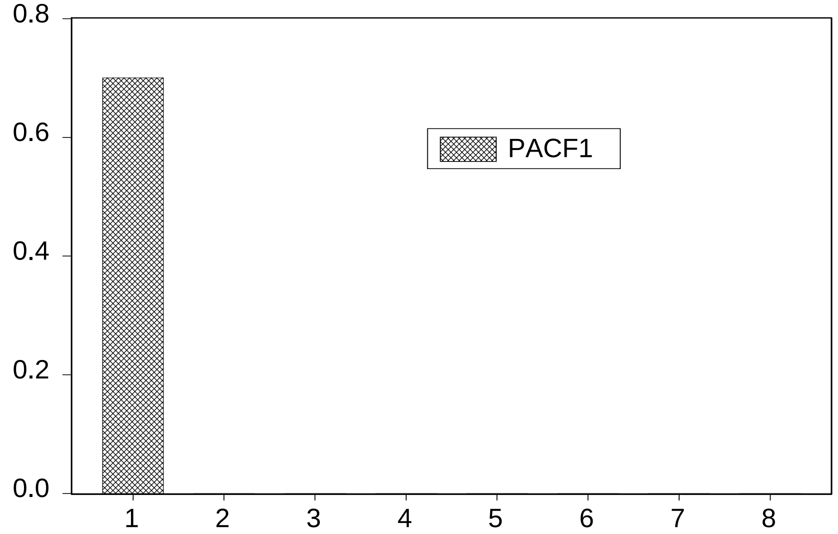
模型	ACF	PACF
白噪声	$\rho_k = 0$	$\rho_k^* = 0$
AR(p)	衰减趋于零（几何型或振荡型）	P 阶后截尾： $\rho_k^* = 0$， k>p
MA(q)	q 阶后截尾：， $\rho_k = 0$， k>q	衰减趋于零（几何型或振荡型）
ARMA(p,q)	q 阶后衰减趋于零（几何型或振荡型）	p 阶后衰减趋于零（几何型或振荡型）

图 9.2.2　ARMA(p,q)模型的 ACF 与 PACF 理论模式

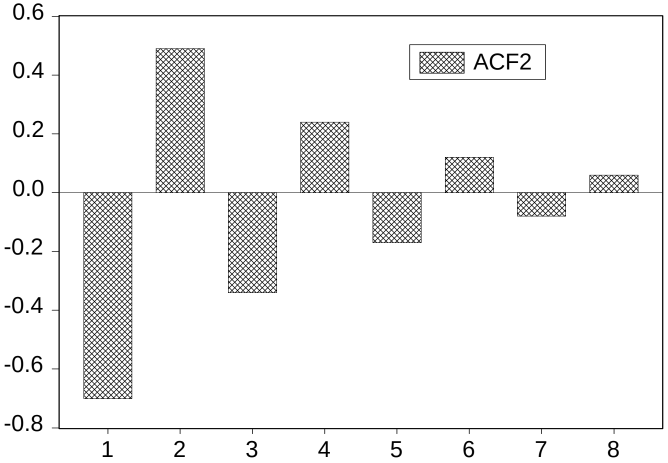
ACF　　　　　　　　　　　　　　PACF

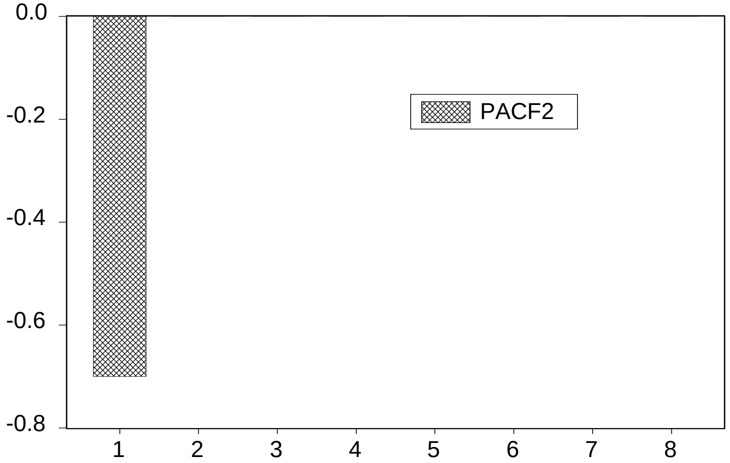
模型 1：　$X_t = 0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$



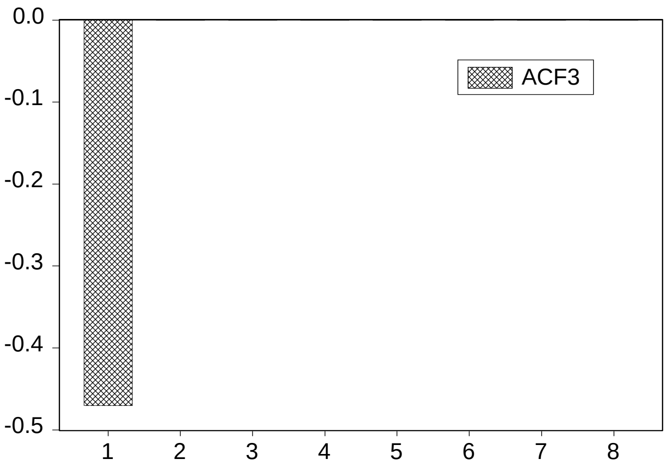


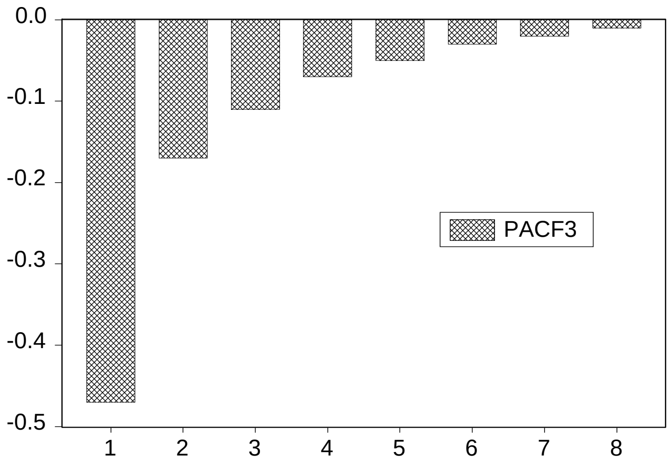
模型 2： $X_t = -0.7X_{t-1} + \varepsilon_t$



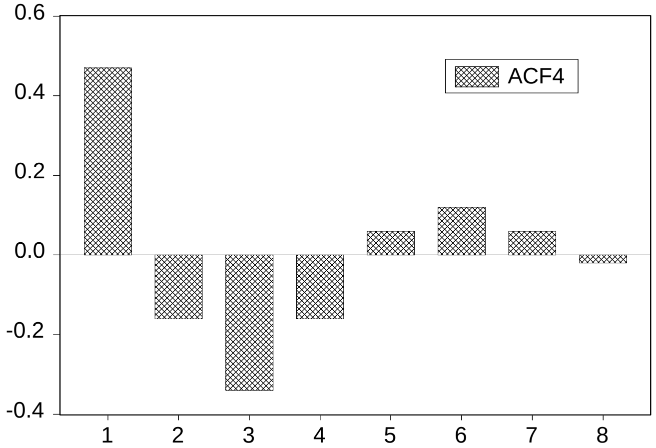


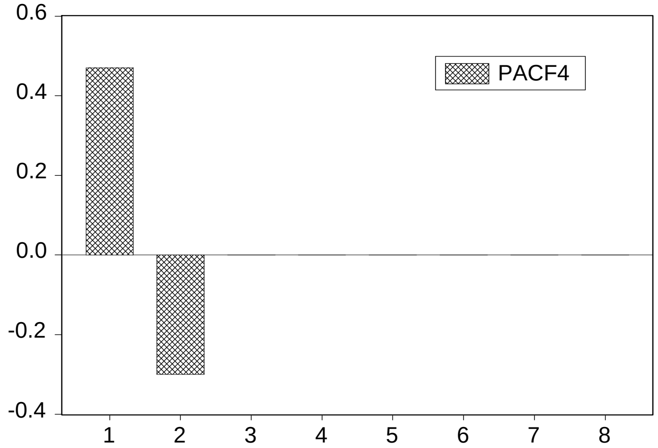
模型 3： $X_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$



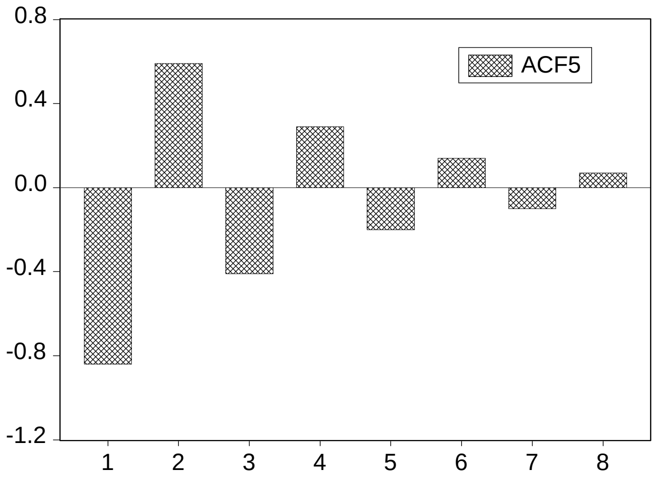


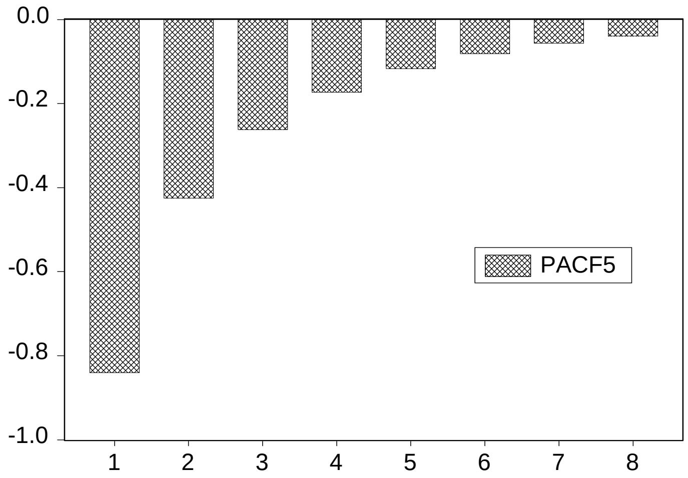
模型 4： $X_t = 0.7X_{t-1} - 0.49X_{t-2} + \varepsilon_t$



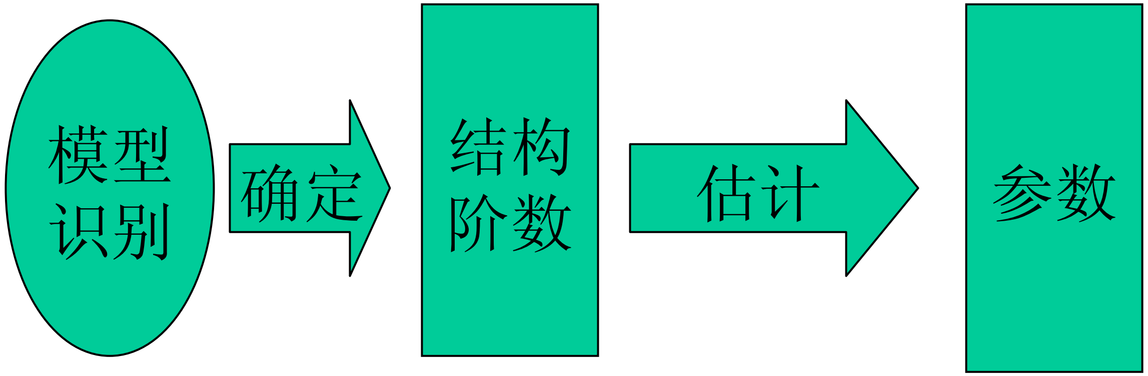


模型 5： $X_t = -0.7X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$





四、随机时间序列模型的估计



AR(p)、MA(q)、ARMA(p,q)模型的估计方法较多，**大体上分为3类：**

（1）最小二乘估计；

（2）矩估计；

（3）利用自相关函数的直接估计。

下面有选择地加以介绍。

1. AR(p)模型的Yule Walker方程估计

在AR(p)模型的识别中，曾得到

$$\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p\rho_{k-p}$$

利用$\rho_k=\rho_{-k}$，得到如下方程组：

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2\rho_1 + \cdots + \varphi_p\rho_{p-'1}$$

$$\rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_p\rho_{p-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\rho_p = \varphi_1\rho_{p-1} + \varphi_2\rho_{p-1} + \cdots\varphi_p\rho_{p-k}$$

此方程组被称为**Yule Walker**方程组。**该方程组建立了AR(p)模型的模型参数$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$与自相关函数$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$的关系，**

利用实际时间序列提供的信息，首先求得自相关函数的估计值 $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \cdots, \hat{\rho}_p$

然后利用**Yule Walker**方程组，求解模型参数的估计值 $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \cdots, \hat{\varphi}_p$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_0 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & & & \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & \hat{\rho}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}$$

由于 $\varepsilon_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p}$ 于是

$$\sigma_\varepsilon^2 = E\varepsilon_t^2 = \cdots = \gamma_0 - \sum_{i,j=1}^{p} \varphi_i \varphi_j \gamma_{j-i}$$

从而可得σ_ε^2的估计值 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\gamma}_0 - \sum_{i,j=1}^{p} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \hat{\gamma}_{j-i}$

在具体计算时，$\hat{\rho}_k$ 可用样本自相关函数r_k替代。

2. MA(q)模型的矩估计

将MA(q)模型的自协方差函数中的各个量用估计量代替，得到：

$$\hat{\gamma}_k = \begin{cases} \hat{\sigma}_\varepsilon^2(1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2+\cdots+\hat{\theta}_q^2) & \text{当}k=0 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2(-\hat{\theta}_k+\hat{\theta}_1\hat{\theta}_{k+1}+\cdots+\hat{\theta}_{q-k}\hat{\theta}_q) & \text{当}1\le k\le q \\ 0 & \text{当}k>q \end{cases} \qquad (*)$$

首先求得自协方差函数的估计值，(*)是一个包含(q+1)个待估参数

$$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\cdots\hat{\theta}_q,\hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

的非线性方程组，可以用直接法或迭代法求解。

常用的迭代方法有线性迭代法和**Newton-Raphsan**迭代法。

（1）MA(1)模型的直接算法

对于MA(1)模型，（*）式相应地写成

$$\begin{cases}\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2(1+\hat{\theta}_1^2) \\ \hat{\gamma}_1 = -\hat{\sigma}_\varepsilon^2\hat{\theta}_1\end{cases}$$

于是

$$\hat{\theta}_1 = -\hat{\gamma}_1 / \hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

有 $\hat{\sigma}_\varepsilon^4 - \hat{\gamma}_0\hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\gamma}_1^2 = 0$ 或 $\hat{\gamma}_0^{-1}\hat{\sigma}_\varepsilon^4 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\rho}_1^2 = 0$

于是有解

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{2}(1 \pm \sqrt{1-4\hat{\rho}_1^2})$$

$$\hat{\theta}_1 = -\hat{\gamma}_1 / \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = -2\hat{\rho}_1 / (1 \pm \sqrt{1-4\hat{\rho}_1^2})$$

由于参数估计有两组解，可根据可逆性条件$|\theta_1|<1$来判断选取一组。

（2）MA(q)模型的迭代算法

对于q>1的MA(q)模型，一般用迭代算法估计参数：

由（*）式得

$$
\begin{cases}
\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\dfrac{\hat{\gamma}_{0}}{1+\hat{\theta}_{1}^{2}+\cdots+\hat{\theta}_{q}^{2}} \\
\hat{\theta}_{k}=-\left(\dfrac{\hat{\gamma}_{k}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}-\hat{\theta}_{1}\hat{\theta}_{k+1}-\hat{\theta}_{2}\hat{\theta}_{k+2}-\cdots-\hat{\theta}_{q-k}\hat{\theta}_{q}\right)
\end{cases}
\qquad (**)
$$

第一步，给出 $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2},\hat{\theta}_{1},\hat{\theta}_{2},\cdots,\hat{\theta}_{k}$ 的一组初值，比如

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(0)=\hat{\gamma}_{0} \qquad \hat{\theta}_{1}(0)=\hat{\theta}_{2}(0)=\cdots\hat{\theta}_{k}(0)=0$$

代入（**）式，计算出第一次迭代值

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(1)=\hat{\gamma}_{0} \qquad \hat{\theta}_{k}(1)=-\hat{\gamma}_{k}/\hat{\gamma}_{0}$$

第二步，将第一次迭代值代入（**）式，计算出第二次迭代值

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(2)=\hat{\gamma}_{0}/(1+\hat{\theta}_{1}^{2}(1)+\cdots+\hat{\theta}_{q}^{2}(1))$$

$$\hat{\theta}_{k}(2)=-(\hat{\gamma}_{k}\big/\hat{\gamma}_{0}-\hat{\theta}_{1}(1)\hat{\theta}_{k+1}(1)-\cdots-\hat{\theta}_{q-k}(1)\hat{\theta}_{q}(1))$$

按此反复迭代下去，直到第m步的迭代值与第m-1步的迭代值相差不大时（满足一定的精度），便停止迭代，并用第m步的迭代结果作为（**）的近似解。

3. ARMA(p, q)模型的矩估计

在ARMA(p,q)中共有(p+q+1)个待估参数$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p$与$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$以及$\sigma_\varepsilon^2$，其估计量计算步骤及公式如下：

第一步，估计$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p$

$$\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_1\\ \hat{\varphi}_2\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\rho}_q & \hat{\rho}_{q-1} & \cdots & \hat{\rho}_{q-p+1}\\ \hat{\rho}_{q+1} & \hat{\rho}_q & \cdots & \hat{\rho}_{q-p}\\ \vdots & & & \\ \hat{\rho}_{q+p-1} & \hat{\rho}_{q+p-2} & \cdots & \hat{\rho}_q\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}_{q+1}\\ \hat{\rho}_{q+2}\\ \vdots\\ \hat{\rho}_{q+p}\end{bmatrix}$$

$\hat{\rho}_k$ 是总体自相关函数的估计值，可用样本自相关函数r_k代替。

第二步，改写模型，求$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$以及$\sigma_\varepsilon^2$的估计值

将模型

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

改写为：

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (*)$$

令 $\tilde{X}_t = X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \cdots - \hat{\varphi}_p X_{t-p}$

于是(*)可以写成：

$$\tilde{X}_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

构成一个MA模型。按照估计MA模型参数的方法，可以得到$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$以及$\sigma_\varepsilon^2$的估计值。

4. AR(p)的最小二乘估计

假设模型AR(p)的参数估计值已经得到，即有

$$X_t = \hat{\varphi}_1 X_{t-1} + \hat{\varphi}_2 X_{t-2} + \cdots + \hat{\varphi}_p X_{t-p} + \hat{\varepsilon}_t$$

残差的平方和为：

$$S(\hat{\varphi}) = \sum_{t=p+1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2 = \sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \cdots - \hat{\varphi}_p X_{t-p})^2 \qquad (*)$$

根据最小二乘原理，所要求的参数估计值是下列方程组的解：

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\varphi}_j} = 0$$

即

$$\sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \hat{\varphi}_1 X_{t-1} - \hat{\varphi}_2 X_{t-2} - \cdots - \hat{\varphi}_p X_{t-p}) X_{t-j} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,p \qquad (**)$$

解该方程组，就可得到待估参数的估计值。

为了与AR(p)模型的Yule Walker方程估计进行比较，将(**)改写成：

$$\frac{\hat{\varphi}_1}{n}\sum_{t=p+1}^{n}X_{t-1}X_{t-j}+\frac{\hat{\varphi}_2}{n}\sum_{t=p+1}^{n}X_{t-2}X_{t-j}+\cdots+\frac{\hat{\varphi}_p}{n}\sum_{t=p+1}^{n}X_{t-p}X_{t-j}=\frac{1}{n}\sum_{t=p+1}^{n}X_tX_{t-j}$$

j=1,2,…,p

由自协方差函数的定义，并用自协方差函数的估计值

$$\hat{\gamma}_k=\frac{1}{n}\sum_{t=p+1}^{n-k}X_{t+k}X_t$$

代入，上式表示的方程组即为：

$$\hat{\varphi}_1\hat{\gamma}_{j-1}+\hat{\varphi}_2\hat{\gamma}_{j-2}+\cdots+\hat{\varphi}_p\hat{\gamma}_{j-p}=\hat{\gamma}_j \qquad \text{j=1,2,…,p}$$

或 $$\hat{\varphi}_1r_{j-1}+\hat{\varphi}_2r_{j-2}+\cdots+\hat{\varphi}_pr_{j-p}=r_j \qquad \text{j=1,2,…,p}$$

解该方程组，得到：

$$\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_1\\ \hat{\varphi}_2\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_0 & r_1 & \cdots & r_{p-1}\\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{p-2}\\ \vdots & & & \\ r_{p-1} & r_{p-2} & \cdots & r_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_p\end{bmatrix}$$

即为参数的最小二乘估计。

Yule Walker方程组的解

$$\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_1\\ \hat{\varphi}_2\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1}\\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_0 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2}\\ \vdots & & & \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & \hat{\rho}_0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\\ \vdots\\ \hat{\rho}_p\end{bmatrix}$$

比较发现，当n足够大时，二者是相似的。 σ_ε^2的估计值为：

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n}\varepsilon_t^2=\frac{S}{n-p}$$

需要说明的是，在上述模型的平稳性、识别与估计的讨论中，**ARMA(p,q)**模型中均未包含常数项。

如果包含常数项，该常数项并不影响模型的原有性质，因为通过适当的变形，可将包含常数项的模型转换为不含常数项的模型。

下面以一般的ARMA(p,q)模型为例说明。

对含有常数项的模型

$$X_t = \alpha + \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

方程两边同减$\alpha/(1-\varphi_1-\ldots-\varphi_p)$，则可得到

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

其中 $x_i = X_i - \alpha/(1-\varphi_1 - \cdots - \varphi_p) \qquad i = t, t-1, \cdots, t-p$

五、模型的检验

1、残差项的白噪声检验

由于ARMA(p,q)模型的识别与估计是在假设随机扰动项是一白噪声的基础上进行的，因此，如果估计的模型确认正确的话，残差应代表一白噪声序列。

如果通过所估计的模型计算的样本残差不代表一白噪声，则说明模型的识别与估计有误，需重新识别与估计。

在实际检验时，主要检验残差序列是否存在自相关。

可用**QLB**的统计量进行$\chi 2$检验：在给定显著性水平下，可计算不同滞后期的**QLB**值，通过与$\chi 2$分布表中的相应临界值比较，来检验是否拒绝残差序列为白噪声的假设。

若大于相应临界值，则应拒绝所估计的模型，需重新识别与估计。

2、AIC与SBC模型选择标准

另外一个遇到的问题是，在实际识别ARMA(p,q)模型时，需多次反复偿试，有可能存在不止一组（p,q）值都能通过识别检验。

显然，**增加p与q的阶数，可增加拟合优度，但却同时降低了自由度。**

因此，**对可能的适当的模型，存在着模型的“简洁性”与模型的拟合优度的权衡选择问题。**

常用的模型选择的判别标准有：赤池信息法（Akaike information criterion，简记为**AIC**）与施瓦兹贝叶斯法（Schwartz Bayesian criterion，简记为**SBC**）：

$$AIC = T\ln(RSS) + 2n$$

$$SBC = T\ln(RSS) + n\ln(T)$$

其中，n为待估参数个数（p+q+可能存在的常数项），T为可使用的观测值，RSS为残差平方和（Residual sum of squares）。

在选择可能的模型时，**AIC与SBC**越小越好

显然，如果添加的滞后项没有解释能力，则对RSS值的减小没有多大帮助，却增加待估参数的个数，因此使得AIC或SBC的值增加。

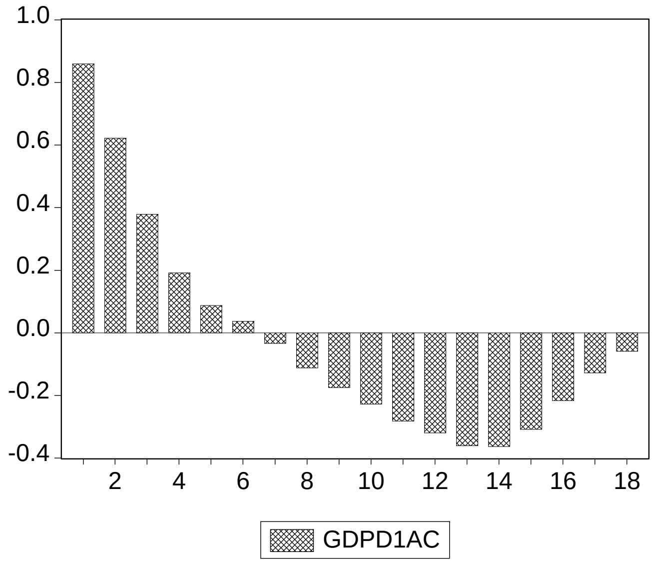
需注意的是：在不同模型间进行比较时，必须选取相同的时间段。

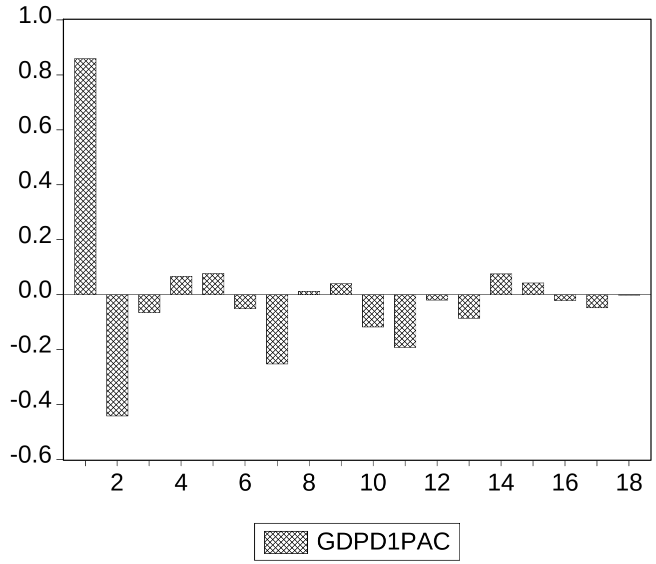
例9.2.3 中国支出法GDP的ARMA(p,q)模型估计。

由第一节知：中国支出法GDP是非平稳的，但它的一阶差分是平稳的，即支出法GDP是I(1)时间序列。

可以对经过一阶差分后的GDP建立适当的ARMA(p,q)模型。

记GDP经一阶差分后的新序列为GDPD1，该新序列的样本自相关函数图与偏自相关函数图如下：





图形：样本自相关函数图形呈正弦线型衰减波，而偏自相关函数图形则在滞后两期后迅速趋于0。因此**可初步判断该序列满足2阶自回归过程AR(2)。**

自相关函数与**偏自相关函数**的**函数值：**

相关函数具有明显的拖尾性；

偏自相关函数值在k>2以后，$|r_k^*| \prec 2/\sqrt{22} \approx 0.426$

可认为：偏自相关函数是截尾的。再次验证了一阶差分后的GDP满足AR(2)随机过程。

表 **9.2.2** 中国 **GDP** 一阶差分序列的样本自相关函数与偏自相关函数

k	r_k	r_k^*	k	r_k	r_k^*	k	r_k	r_k^*
1	0.859	0.859	7	-0.034	-0.252	13	-0.361	-0.086
2	0.622	-0.441	8	-0.112	0.012	14	-0.363	0.076
3	0.378	-0.065	9	-0.175	0.04	15	-0.308	0.043
4	0.191	0.066	10	-0.228	-0.117	16	-0.216	-0.022
5	0.087	0.077	11	-0.282	-0.192	17	-0.128	-0.048
6	0.036	-0.051	12	-0.32	-0.02	18	-0.059	-0.002

设序列GDPD1的模型形式为

$$GDPD1_t = \varphi_1 GDPD1_{t-1} + \varphi_2 GDPD1_{t-2} + \varepsilon_t$$

有如下Yule Walker 方程：

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.859 \\ 0.859 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.859 \\ 0.622 \end{pmatrix}$$

解为： $\hat{\varphi}_1 = 1.239, \hat{\varphi}_2 = -0.442$

用OLS法回归的结果为：

$$GDPD1_t = 1.593 GDPD1_{t-1} - 0.653 GDPD1_{t-2} + \varepsilon_t$$

（7.91） (-3.60)

$r^2=0.8469$ $R^2=0.8385$ DW=1.15

有时，在用回归法时，也可加入常数项。

本例中加入常数项的回归为：

$$GDPD1_t = 909.59 + 1.495 GDPD1_{t-1} - 0.678 GDPD1_{t-2} + \varepsilon_t$$

（1.99）　（7.74）　　　（-3.58）

r^2 =0.8758　R^2 =0.8612　DW.=1.22

- ## 模型检验

下表列出三模型的残差项的自相关系数及Q_{LB}检验值。

模型1与模型3的残差项接近于一白噪声，但模型2存在4阶滞后相关问题，Q统计量的检验也得出模型2拒绝所有自相关系数为零的假设。因此:

模型1与3可作为描述中国支出法GDP一阶差分序列的随机生成过程。

表 **9.2.3** 模型残差项的自相关系数及 **Q** 检验值

	模型1		模型2		模型3	
K	Resid-ACF	Q	Resid-ACF	Q	Resid-ACF	Q
1	0.382	3.3846	0.258	1.5377	0.257	1.5263
2	0.014	3.3893	-0.139	2.0077	-0.040	1.5646
3	-0.132	3.8427	-0.246	3.5677	-0.059	1.6554
4	-0.341	7.0391	-0.529	11.267	-0.328	4.6210
5	-0.170	7.8910	-0.300	13.908	-0.151	5.2864
6	0.253	9.9097	0.271	16.207	0.345	9.0331
7	0.144	10.613	0.158	17.051	0.155	9.8458
8	0.057	10.730	0.116	17.541	0.076	10.059
9	-0.019	10.745	0.097	17.914	0.011	10.064
10	-0.146	11.685	-0.036	17.969	-0.123	10.728
11	-0.233	14.329	-0.136	18.878	-0.230	13.319
12	-0.049	14.461	0.064	19.104	-0.012	13.328

- **用建立的AR(2)模型对中国支出法GDP进行外推预测。**

模型1可作如下展开：

$$GDP_t - GDP_{t-1} = \varphi_1 (GDP_{t-1} - GDP_{t-2}) + \varphi_2 (GDP_{t-2} - GDP_{t-3})$$

$$GDP_t = (1+\varphi_1) GDP_{t-1} + (\varphi_2 - \varphi_1) GDP_{t-2} - \varphi_2 GDP_{t-3}$$

于是，当已知t-1、t-2、t-3期的GDP时，就可对第t期的GDP作出外推预测。

模型3的预测式与此相类似，只不过多出一项常数项。

对2001年中国支出法GDP的预测结果（亿元）

	预测值	实际值	误差
模型1	95469	95933	-0.48%
模型3	97160	95933	1.28%

例9.2.4 中国人均居民消费的ARMA(p,q)模型

由于中国人均居民消费（CPC）与人均国内生产总值（GDPPC）这两时间序列是非平稳的，因此不宜直接建立它们的因果关系回归方程。

但它们都是I(2)时间序列，因此可以建立它们的ARIMA(p,d,q)模型。

下面只建立中国人均居民消费（CPC）的随机时间序列模型。

中国人均居民消费（CPC）经过二次差分后的新序列记为CPCD2，其自相关函数、偏自相关函数及Q统计量的值列于下表：

表 9.2.4　CPCD2 序列的自相关函数、偏自相关函数与 Q 统计量值

k	ACF	PACF	Q	k	ACF	PACF	Q
1	0.125	0.125	0.269	7	0.196	0.014	6.286
2	-0.294	-0.314	1.882	8	-0.218	-0.335	8.067
3	-0.034	0.060	1.906	9	-0.010	0.024	8.072
4	-0.213	-0.350	2.919	10	0.102	-0.147	8.650
5	-0.258	-0.193	4.576	11	-0.071	0.001	9.025
6	0.131	0.017	5.057	12	0.006	-0.119	9.029

在5%的显著性水平下，通过Q统计量容易验证该序列本身就接近于一白噪声，因此可考虑采用零阶MA(0)模型：

$$CPCD2_t = \varepsilon_t$$

由于k=2时，$|r_2| = |-0.29| > 1/\sqrt{14}$

因此，也可考虑采用下面的MA模型：

$$CPCD2_t = \varepsilon_t - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

当然，还可观察到自相关函数在滞后4、5、8时有大于0.2的函数值，因此，可考虑在模型中增加MA(4)、MA(5)、MA(8)。不同模型的回归结果列于表9.2.5。

可以看出:**在纯MA模型中，模型4具有较好的性质，但由于MA(5)的t检验偏小，因此可选取模型3。**

表 9.2.5　中国居民人均消费水平的 ARMA 模型

模型	a	MA(2)	MA(4)	MA(5)	MA(8)	AR(1)	R2	SSR	AIC
1	24.57						0	93137.4	8.94
2	32.4	-0.89					0.42	53699.9	8.54
	(3.62)	(-7.43)							
3	14.07	-0.72	-1.71				0.7	28128.8	8.03
	(8.75)	(-3.07)	(-5.08)						
4	11.73	-1.09	-1.99	-1.3			0.82	17480.8	7.7
	(17.81)	(-3.38)	(-4.61)	(-1.58)					
5	11.79	-1.07	-1.91	-1.25	-0.34		0.81	17402.7	7.84
	(14.93)	(-3.10)	(-2.56)	(-1.42)	(-0.15)				
6	14.95	-0.66	-1.27		-1.99		0.75	22924.2	7.97
	(5.16)	(-2.14)	(-1.77)		(-1.29)				
7	214.25	-2.53	-2.45		-6.52	1.39	0.99	8943.7	7.06
	(63.83)	(-2.25)	(-2.53)		(-2.23)	(98.26)			

最后，给出通过模型3的外推预测。

模型3的展开式为：

$$\Delta^2 CPC_t = \Delta CPC_t - \Delta CPC_{t-1} = (CPC_t - CPC_{t-1}) - (CPC_{t-1} - CPC_{t-2})$$
$$= CPC_t - 2CPC_{t-1} + CPC_{t-2} = 14.07 + \varepsilon_t - 0.72\,\varepsilon_{t-2} - 1.71\varepsilon_{t-4}$$

即 $CPC_t = 2CPC_{t-1} - CPC_{t-2} + 14.07 + \varepsilon_t - 0.72\varepsilon_{t-2} - 1.71\varepsilon_{t-4}$

由于ε_t表示预测期的随机扰动项，它未知，可假设为0，于是t期的预测式为：

$$CPC_t = 2CPC_{t-1} - CPC_{t-2} + 14.07 - 0.72\hat{\varepsilon}_{t-2} - 1.71\hat{\varepsilon}_{t-4}$$

$\hat{\varepsilon}_{t-2}$ $\hat{\varepsilon}_{t-4}$ 为模型3中滞后2期与滞后4期的相应残差项的估计值。

表9.2.6列出了采用模型3对中国居民人均居民消费水平的2期外推预测。

为了对照，表中也同时列出了采用§2.10的模型的预测结果。

表 9.2.6　　中国居民人均消费水平 2 期外推预测比较（单位：元）

	实际值	ARMA模型		因果关系模型	
		预测值	相对误差（%）	预测值	相对误差（%）
1997	2834	3048	7.6	2822	-0.4
1998	2972	3407	14.6	2977	0.2