金融经济学
第七讲

上海财经大学金融学院

第七讲 连续时间套利定价理论

§7.1 布朗运动

- 布朗运动最早是由英国生物学家布朗 (**Brown**) ，于 **1827** 年在观察花粉颗粒在液体中做无规则运动时发现的。爱因斯坦对这种无规则运动作了物理学分析，并首先建立了布朗运动的数学模型。在每一瞬间，花粉颗粒在三个方向、六个面都受到随机冲击，冲击可以看作是正态分布的（二项分布的近似）。因此每个瞬时，花粉颗粒的运动可以看成是正态分布。
- 在经济学中第一个提出可以用布朗运动来刻画股票价格变动的是 **Louis Bachelier** （ **1900** ），他可能也是第一个对布朗运动进行研究的人。 **Ito** 的随机微分方程及后来建立在半鞅上的更一般的随机微分方程理论，为金融学家进行衍生产品定价提供了可能。 **Black & Scholes** 、 **Merton** 等人的工作，给出了期权等衍生产品的精确价格公式，同时也使得布朗运动和随机分析的工具得到了巨大发展。

第七讲 连续时间套利定价理论

- 一、 **Brown** 运动的数学表述
- 定义：称为是一个标准的布朗运动（ **B.M.** ），如果它满足：
- （ **1** ）$B_0 = 0$ ；
- （ **2** ）$B_t - B_s$ 与 F_s 独立，$\forall t \ge s$ 。
- （ **3** ）$B_{t+h} - B_t$ 的分布与 **t** 无关，具有零均值，且
- $$\lim_{h \to 0^+} E|B_{t+h} - B_t|^3 / h = 0$$
- （ **4** ）函数 $t \mapsto B_t$ 几乎处处连续。
- 定理：对于一个标准的 **B.M.** ，我们有：
- $$\sigma^2(t) = E|B_t|^2 = at$$ ，
- 特别地， **a** 可以取 **1** 。

第七讲 连续时间套利定价理论

- 推论：当 $t \to 0$ 时，$B_{t+s} - B_s$ 的分布服从正态分布，其分布函数为：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \sim N(0,t)$$

- 定理：如果 是一个 **B.M.** ，则
- （1） B_t 是一个 **B.M.** ；

$(\frac{1}{c} B_{c^2 t})$

- （2） 是一个 **B.M.** ；

$(tB_{1/t})$

- （3） 是一个 **B.M.** ；

$-B_t$

- （4） $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ 是一个 **B.M.** 。
- 定义：随机过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 称为是一个鞅（上鞅、下鞅），如果该随机过程满足：
- $E[X_t \mid F_s] = (<,>) X_s$ $\forall t \geq s$ ， 。

第七讲 连续时间套利定价理论

- 二、随机微分方程和 **Ito** 公式
- 定义：一个随机过程 $\{X(t)\}$ 的变化如果可以用如下方程来刻画：
- $$dX = \alpha[X(t),t]dt + \sigma[X(t),t]dB_t$$ ；
- 则该随机过程被称为 **Ito** 过程。该方程称为随机微分方程，$\alpha(X(t),t)$ 被称为漂移项，$\sigma(X(t),t)$ 被称为扩散项。
- 定理 **7.6**（ **Ito** 引理）：假定 **X** 是一个 **Ito** 过程，满足：
- $$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$ ，
- 令是一个二次连续可微的函数，则随机过程 $Y_t = f(X_t, t)$ 也是一个 **Ito** 过程，满足：
- $$dY_t = [f_x(X_t,t)\mu_t + f_t(X_t,t) + \tfrac{1}{2} f_{XX}(X_t,t)\sigma_t^2]dt + f_X(X_t,t)\sigma_t dB_t$$
- 上式被称为 **Ito** 公式。

第七讲 连续时间套利定价理论

§7.2 Black-Scholes 期权定价公式

- 1、 模型的建立：
- 考虑一个证券（股票），不考虑红利收益，其价格过程可以表示为： $S_t = x\exp(\alpha t + \sigma B_t)$ $t \ge 0$
- α σ ， 。
- 其中 x>0、 和 都是常数，该过程被称为几何布朗运动，有时也被称为对数正态分布的，因为对任意的 t， $\ln S_t = \ln x + \alpha t + \sigma B_t$ 是正态分布。
- 因为函数二次连续可微，所以S是一个 Ito 过程。由 Ito 公式，得： $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$
- $S_0 = x$，
- $\mu = \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2$ ，
- 其中

第七讲 连续时间套利定价理论

- 考虑一个无风险资产（债券），其价格过程为 β_t，定义为：
- $$\beta_t = \beta_0 e^{rt} \quad , \ t \geq 0 \quad ,$$
- 其中 $\beta_0 > 0$ 和 **r** 是常数， β_0 为债券的初始价格， **r** 为无风险利率。β_t 是一个平凡的 **Ito** 过程，可以表示为：
- $$d\beta_t = r\beta_t dt \quad 。$$
- 考虑一个标的在股票上的欧式看涨期权，其操作价格为 **K** ，成熟日为 **T** ，在 **t<T** 时期权价格 X_t 是未知的，在 **T** 时 $Y_T = \max(S_T - K, 0)$ 。直观地，期权价格应该是标的资产和时间的函数，即：
- $$Y_t = C(S_t, t) \text{。}$$
- 定义：一个由股票和债券构成的交易策略 (a,b) 称为是自融资的 **(self-financing)** ，如果它不产生红利收益（红利收益既不是正的，也不是负的），即：$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_\tau dS_\tau + \int_0^t b_\tau d\beta_\tau$$

第七讲 连续时间套利定价理论

- 定理：在无套利条件下，假定存在由股票和债券构成自融资策略 (a,b)，满足：
- $$a_T S_T + b_T \beta_T = y_T$$ ，
- 则有：
- $$Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t$$ 。
- 2、 **Black-Scholes** 公式推导
- 应用 **Ito** 公式，有：
- $$dY_t = \mu_Y(t)dt + C_S(S_t,t)\sigma S_t dB_t$$ 。
- 其中系数 $\mu_Y(t)$ 满足：
- $$\mu_Y(t) = C_S(S_t,t)\mu S_t + C_t(S_t,t) + \tfrac{1}{2} C_{SS}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2$$
- 如果一个自融资策略与期权收益相等，则有

$$Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t = C(S_t,t) \qquad t \in [0,T]$$

第七讲 连续时间套利定价理论

- 利用 **Ito** 公式，有：
- $$dY_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t$$

$$= (a_t \mu S_t + b_t \beta_t r)dt + a_t \sigma S_t dB_t$$

- 由此得：

$$C_S(S_t, t) = a_t$$

- 由此得：　$b_t \beta_t = C(S_t, t) - C_S(S_t, t) S_t$
- 所以有：　$a_t \mu S_t + b_t \beta_t r = C_S(S_t, t)\mu S_t + C_t(S_t, t) + \frac{1}{2} C_{SS}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2$

$$-rC(S_t, t) + C_t(S_t, t) + rS_t C_S(S_t, t) + \frac{1}{2} C_{SS}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 = 0$$

第七讲 连续时间套利定价理论

- 定理：一个标的在股票S_t上、操作价格为 **K**、成熟日为 **T** 的欧式看涨期权的价格是如下偏微分方程（ **PDE** ）的解：
- $$-C(x,t)+C_t(x,t)+rxC_x(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(x,t)=0$$
- 满足边界条件：
- $$C(x,T)=\max(x-K,0)$$ 。
- 其中 $(x,t)\in(0,\infty)\times[0,T)$ 。
- 定理蕴涵，一个欧式看涨期权的价格可以通过求解上述 **PDE** 来得到。容易证明，**Black-Scholes** 公式：
- $$C(x,t)=x\Phi(z)-e^{-r(T-t)}K\Phi(z-\sigma\sqrt{T-t})$$ ，
- 是上述偏微分方程的解。其中 **z** 满足：
- $$z=\frac{\ln(x/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ ，
- 函数 Φ 是标准正态分布的累计分布函数。