第一章 基本概念[1]

§ 1.1 偏好的期望效用表示

在金融经济学中，我们需要研究人们在不确定条件下的消费-投资决策和市场上资产价格的决定，这涉及到面对不确定的选择对象时人们的判别标准。

在十七世纪现代概率理论的发展中，帕斯卡(Blaise Pascal)和费尔玛(Pierre de Fermat)等大数学家假定，在一个随机回报为$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$、相对应的概率为$(p_1,p_2,\ldots,p_n)$的赌博中，人们关心的是它的期望回报$E[\tilde{x}]=\sum x_i p_i$。但该假定在 1728 年被 N. 伯努利(Nicholas Bernoulli)所给出的一个例子所否定，该例子现在被称为著名的圣.彼得堡悖论(St. Petersburg Paradox)：

假定一位个体面对一个抛硬币的赌博游戏，第一次抛出正面时该个体得到 1 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第二次硬币。第二次抛出正面得到 2 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第三次硬币。第三次抛出正面得到 4 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第四次硬币。第四次抛出正面得到 8 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第五次硬币，…。问该个体愿意支付多少财富来参与该赌博游戏？

按照帕斯卡和费尔玛等人的思路，个体愿意支付的财富等于该赌博游戏的期望回报。在该赌博游戏中，期望回报满足：

$$E[\tilde{x}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\ldots=+\infty,$$

即个体愿意支付正无穷的财富，来参与该赌博游戏。这个结论显然是不合理的，因此被看作是一个悖论，叫做圣.彼得堡悖论。

该悖论的解决由 N. 伯努利的堂兄弟 D. 伯努利(Daniel Bernoulli，1738/1954)给出。D. 伯努利认为，对个体而言，200 元的收益并不等于 100 元收益的两倍，他假定个体决策时会使用一个现在被称为 von Neumann 和 Morgenstern 期望效用函数的概念 u(.)，从而个体决策时不是直接计算游戏收益的期望值$E[\tilde{x}]=\sum x_i p_i$，而是计算游戏收益的期望效用值$E[u(\tilde{x})]=\sum u(x_i)p_i$。因此与上述游戏相当的财富值$\xi$应该满足：

$$u(w+\xi)=\frac{1}{2}u(w+1)+\frac{1}{4}u(w+2)+\frac{1}{8}u(w+4)+\ldots。$$

[1] 本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002).、杨云红（2000）、王江（2006）等教材及相关论文。

此处w是个体当前的财富值。如果效用函数取对数效用形式$u(w) = lnw$，当前财富值取$w = 50000$元，则$\xi \approx 9$。因此，即使该游戏的期望收益趋于无穷，但对个体而言，该游戏的价值仅仅 9 元。

上述分析表明，由于不确定性的存在，我们需要引入期望效用函数的概念。通常，偏好的期望效用表示有两种推导方式：第一种推导方式由 von Neumann 和 Morgenstern(1953)给出，他们的推导建立在个体对彩票选择的假定之上，其中彩票的收益和概率是预先指定的，因此他们的期望效用理论是一种客观期望效用理论；另一种推导方式由 Savage(1972)给出，在他的处理中，概率是在特定公理体系下推导出来的，而不是预先给定的，因此 Savage 的理论是一种主观期望效用理论。下面我们介绍的是 von Neumann 和 Morgenstern(1953)的期望效用表示理论。

1.1.1 不确定条件下的选择问题

一、消费计划与偏好关系

考虑一个一期经济，假定个体在时间 0 时做出投资决策，时间 1 时将所有财富用于消费。为简化讨论，假定时间 1 时只有一种消费品。由于经济中存在着不确定性，比如世界油价的飙升、局部战争的发生、恐怖事件的出现等等，个体所持有的金融资产在时间 1 时的回报依赖于不确定的经济环境。这些影响时间 1 回报的因素，例如整个经济和股票发行企业所在行业的景气程度、石油价格水平、公司利润和人们的信息指数等，在时间 0 时都是不知道的。

通常我们可以用一个概率空间(Ω, F, P)来刻画这种不确定的经济环境。其中Ω中的元素$\omega \in \Omega$称作**自然状态**，是对从时间 0 到时间 1 的不确定环境的一个刻画，Ω为这些自然状态的全体，P刻画了各个自然状态发生的概率，在 von Neumann 和 Morgenstern(1953)的讨论中，该概率是预先给定的，是客观概率。个体在时间 0 作投资决策时，可供选择对象的全体记为X，X由所有可行消费计划构成。

定义 1.1.1：一个消费计划是不同自然状态下消费数量的一个完备刻画。

每个消费计划都可以用一个可测函数$x: \Omega \to Z(Z \subseteq R)$来刻画，当自然状态$\omega$发生时，$x(\omega)$表示该状态下的可行消费数量。消费计划$x$是一个随机变量，在数学上常用$\tilde{x}$来表示，它可以是股票、债券等各种金融资产及其组合。如果对任意自然状态$\omega \in \Omega$，我们有$x(\omega)$等于常数，则x是一个确定性的消费计划。

例 1.1.1：假定经济中有五个自然状态ω_1、ω_2、…、ω_5，每个自然状态都以相同的概率出现，表 1.1.1 给出了三个消费计划x、y和z在不同自然状态下的消费量。其中x是一个确定性的消费计划，y和z是两个或有消费计划，其时间 1 回报依赖于自然状态的实现。 ●

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$x(\omega)$	3	3	3	3	3
$y(\omega)$	1	5	3	4	3
$z(\omega)$	5	3	4	1	3

（表 1.1.1）：消费计划

给定可供选择消费计划的全体 X，我们可以在 X 上定义一个二项关系“$\succeq$”，其中$x \succeq y$代表“x 至少要比 y 好”，$x \succ y$代表“x 严格地好于 y”，$x \sim y$ 代表“x 和 y 是无差异的”。

定义 1.1.2：称一个二项关系是一个**偏好关系**，如果该二项关系服从：

（1）完备性：任意$x, y \in X$，有$x \succeq y$或$y \succeq x$；

（2）反身性：任意$x \in X$，有 $x \sim x$ ；

（3）传递性：任意$x, y, z \in X$，如果$x \succeq y$，$y \succeq z$，则有$x \succeq z$。

在一定条件下，例如偏好关系满足连续性，我们可以给出偏好关系的效用函数表示（见 Mas-Colell、Whinston 和 Green(1995)或 Varian(1992)）。

定义 1.1.3：一个函数$H: X \to R$称为是偏好关系"$\succeq$"的效用函数表示，如果对任意$x, y \in X$，有$x \succeq y \Leftrightarrow H(x) \geq H(y)$。

二、彩票与期望效用函数

事实上，个体在做决策时最为关注的并非是未来哪个事件会发生，而是未来能得到多少消费品，概率有多大。以上面的例 1.1.1 为例，或有消费计划y和z都是以 0.2 的概率得到 1 单位消费品，0.2 的概率得到 4 单位的消费品，0.2 的概率得到 5 单位的消费品，0.4 的概率得到 3 单位的消费品。由于个体决策时自然状态还未显示出来，虽然时间 1 时在自然状态显示后从这两个消费计划中可以得到的消费品数量并不相等，但在时间 0 时这两个消费计划对个体而言是完全等价的。因此这两个消费计划对时间 0 的个体来说是无差异的。

记经济中所有可能实现的消费量的全体为：

$$Z \equiv \{x(\omega) | \forall x \in X, \omega \in \Omega\}。 \quad (1.1.1)$$

则任意一个消费计划$x \in X$，存在一个定义在Z上的概率密度函数p_x与之对应，满足：

$$p_x(z) = Prob\{\omega | x(\omega) = z, \omega \in \Omega\}。 \quad (1.1.2)$$

相应地，累计概率分布为$F_x(z) = Prob\{\omega | x(\omega) \leq z, \omega \in \Omega\}$。

例 1.1.1（续）：在例 1.1.1 中，经济中可实现消费量的全体 Z={1、3、4、5}；消费计划 x 对应的概率分布p_x可以表示为：

$$p_x(1) = p_x(4) = p_x(5) = 0，p_x(3) = 1；$$

消费计划 y 对应的概率分布p_y可以表示为：

$$p_y(1) = p_y(4) = p_y(5) = 0.2，p_y(3) = 0.4；$$

消费计划 z 对应的概率分布p_z可以表示为：

$$p_z(1) = p_z(4) = p_z(5) = 0.2，p_z(3) = 0.4。$$ ●

这样我们在或有消费计划与定义在 Z 上的概率分布之间建立了一个对应关系：

$$(\Omega, P) \xrightarrow{x} (Z, Px^{-1})；$$

每一个$x \in X$，对应着 Z 上的一个概率分布Px^{-1}；反过来，Z 上的一个概率

分布Px^{-1}可以有多个消费计划与之相对应，这些消费计划有相同的分布，它们是无差异的。我们将 Z 上概率分布的全体记为：

$$\Psi=\{Z上的概率分布\}。$$

这样一来，定义在 X 上的偏好关系可以简化为定义在Ψ上的偏好关系。Ψ中每一个概率分布都可以被看作是一个彩票。

对任意的$z\in Z$，记P_z为在点 z 处退化的概率分布，满足：

$$P_z(z')=\begin{cases}1 & 如果z'=z\\ 0 & 如果z'\neq z\end{cases}, \tag{1.1.3}$$

则P_z是一个确定性的消费计划，其持有者在任意状态都可以得到 z 单位的消费品。

如果 Z 是一个有限集合，记$z^0=max\{z|z\in Z\}$，$z_0=min\{z|z\in Z\}$，则在Ψ中可以定义两个确定性的彩票P_{z^0}和P_{z_0}，满足对任意的$p\in\Psi$，有$P_{z^0}\succeq p\succeq P_{z_0}$。

例 1.1.1（续）：在例 1.1.1 中，可以有四个确定性消费计划P_1、P_3、P_4和P_5，这四个消费计划分别以 100%的概率得到 1 单位、3 单位、4 单位和 5 单位消费品。考虑到

$$z^0=max(1,3,4,5)=5，z_0=min(1,3,4,5)=1，$$

因此经济中存在一个最好的消费计划P_{z^0}和一个最坏的消费计划P_{z_0}，满足：

$$P_{z^0}(z')=\begin{cases}1 & 如果z'=z^0=5\\ 0 & 如果z'\neq z^0=5\end{cases};$$

$$P_{z_0}(z')=\begin{cases}1 & 如果z'=z_0=1\\ 0 & 如果z'\neq z_0=1\end{cases}。$$

●

von Neumann 和 Morgenstern(1953)在个体投资决策建立在对彩票选择的假定下，给出了定义在Ψ上的期望效用表示理论。对于定义在Ψ上的偏好关系“$\succeq$”，存在一个期望效用函数$E[u(.)]$，满足：

$$对任意x,y\in X，x\succeq y \Leftrightarrow p_x\succeq p_y$$

$$\Leftrightarrow E[u(\tilde{x})]\geq E[u(\tilde{y})]，$$

其中$E[u(x)]=\int_\Omega u(x)dP=\int_Z u(z)dF_x(z)$。

特别地，当 Z 是一个可数集合时，期望效用函数可以简化为：

$$E[u(x)] = \sum_{z \in Z} u(z)p(z)。$$

例 1.1.2: 旅游时购买意外伤害险的回报依赖于是否发生意外伤害事件，而后者具有不确定性。假定旅客的期望效用函数为$E[ln(.)]$，假定买保险的成本为ρ，w为不发生危险的财富价值，$w-h$为发生危险的财富价值，假定发生危险的概率为p，则不发生危险的概率为$1-p$，假定买保险后发生危险时的补偿为$\hat{h}$，则个体是否买保险可以通过比较买保险后的期望效用值$(1-p)\,ln(w-\rho)+p\,ln(w-\rho-h+\hat{h})$与不买保险时的期望效用值$(1-p)\,ln\,w+p\,ln(w-h)$来实现：

当$(1-p)\,ln(1-\frac{\rho}{w})+p\,ln(1+\frac{\hat{h}-\rho}{w-h})>0$时，购买保险是划算的，否则不购买保险是划算的。●

1.1.2 期望效用函数的存在性

一、复合彩票

定义： 称彩票$ap+(1-a)r$是一个由彩票p和r构成的复合彩票，如果该彩票以a的概率得到彩票p，以$1-a$的概率得到彩票r。

复合彩票也可以看作是一个普通彩票，如果彩票p和r定义在集合 Z 上，则复合彩票$ap+(1-a)r$也定义在 Z 上，且对任意的$z\in Z$，其概率密度为$ap(z)+(1-a)r(z)$，因此复合彩票也可以看作是一个简单彩票。

例 1.1.3：假定p_x和p_y为定义在 Z={1、3、4、5}上的彩票，如例 1.1.1（续）刻画，彩票p_x的概率分布可以表示为：

$$p_x(1)=p_x(4)=p_x(5)=0，p_x(3)=1；$$

彩票p_y的概率分布可以表示为：

$$p_y(1)=p_y(4)=p_y(5)=0.2，p_y(3)=0.4；$$

则复合彩票$\frac{1}{2}p_x+\frac{1}{2}p_y$代表 1/2 概率得到彩票$p_x$，1/2 概率得到彩票$p_y$，该复合彩票可以改写为一个简单彩票$p_w$，其概率分布可以表示为：

$p_y(1) = p_y(4) = p_y(5) = 0.1$，$p_y(3) = 0.2$。 ●

反过来，一个简单彩票可以也可以写成几个简单彩票构成的复合彩票，在例 1.1.3 中的简单彩票p_w就可以改写为$\frac{1}{2}p_x + \frac{1}{2}p_y$。特别地，一个简单彩票可以改写为由一些确定性彩票的复合而成。例如，例 1.1.3 中的彩票p_y可以改写为：

$$p_y = \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{5}P_4 + \frac{1}{5}P_5 + \frac{2}{5}P_3,$$

即以 1/5 的概率分别得到确定性彩票P_1、P_4和P_5，以 2/5 的概率得到确定性彩票P_3。这可以进一步推广到更一般的情形，即得如下引力：

引理 1.1.1：任意一个彩票都可以改写为一些确定性彩票的混合彩票，即如果p是定义在 Z 上的一个彩票，则彩票p可以改写为：

$$p = \sum_{z\in Z} p(z)P_z,$$

其中$p(z)$为该彩票得到z的概率，而P_z是与z相对应的确定性消费计划。

证明：要证明该引理，只需证明对任意的$z' \in Z$，有$p(z') = \sum_{z\in Z} p(z)P_z(z')$。注意到$P_z(z') = \begin{cases} 1 & z' = z \\ 0 & z' \neq z \end{cases}$。因此$\sum_{z\in Z} p(z)P_z(z') = p(z')$，证毕。■

公理 1:（独立性公理）对任意$p,q,r \in \Psi$，$a \in (0,1]$，如果$p \succ q$，则有$ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r$。

独立性公理蕴涵，个体对这两个复合彩票的偏好程度不依赖于新引入的彩票 r，即消费者对特定事件中消费的满意程度不会随其它事件的发生而变化。

公理 2:（Archimedean 公理）对任意$p,q,r \in \Psi$，如果$p \succ q \succ r$，则存在$a,b \in (0,1]$，使得$ap + (1-a)r \succ q \succ bp + (1-b)r$。

公理 2 来自于数学中的 Archimedean 公理，该公理认为，对任意两个大于零的数 z 和z'，不管z'有多大，总存在一个正整数 k，满足$kz > z'$。此处公

理 2 蕴涵，任意满足$p \succ q \succ r$的消费计划 p、q 和 r，不管 p 有多好，总存在一个概率 b，q 要比复合彩票$bp+(1-b)r$来得好；同样地，也不管 r 有多坏，总存在一个概率 a，q 要比复合彩票$ap+(1-a)r$来得坏。

在公理 1 和公理 2 下，定义在Ψ上的偏好关系具有以下性质：

1、 如果$p \succ q$，$0 \le a < b \le 1$，则$bp+(1-b)q \succ ap+(1-a)q$；

2、 如果$p \succeq q \succeq r$，$p \succ r$，则存在唯一的$a^* \in [0,1]$，满足

$$q \sim a^*p+(1-a^*)r;$$

3、 如果$p \succ q$，$r \succ s$，$a \in [0,1]$，则$ap+(1-a)r \succ aq+(1-a)s$；

4、 如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则$p \sim ap+(1-a)q$；

5、 如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则对任意的$r \in \Psi$，有 ：

$$ap+(1-a)r \sim aq+(1-a)r。$$

二、期望效用函数的存在性

von Neumann 和 Morgenstern(1953)的期望效用表示定理建立在独立性公理和 Archimedean 公理之上。

定理 1.1.1：定义在Ψ上的偏好关系 “$\succeq$” 存在期望效用表示，当且仅当该偏好关系满足公理 1 和公理 2；该效用表示精确到一个仿射变换，即如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数，则对于任意的$c > 0$和d，$\hat{u} = cu + d$也是一个 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数。

证明：（充分性）此处我们在Z是个有限集的假定下进行讨论，当Z是无限集合时，有兴趣的读者可阅 Fishburn(1970)。当Z是个有限集合时，Ψ中存在两个最好的和最坏的彩票P_{z^0}和P_{z_0}，任意的$p \in \Psi$，有$P_{z^0} \succeq p \succeq P_{z_0}$。下面我们分两种情形来讨论：

1、$P_{z^0} \sim P_{z_0}$：在这种情形中，任意的$p, q \in \Psi$，有$p \sim q \sim P_{z^0} \sim P_{z_0}$。定义$u(z) = k$，$k$是任意的常数，则$u(z)$是一个满足要求的 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

2、$P_{z^0} \succ P_{z_0}$：对任意$p \in \Psi$，我们可以定义$H(p) = a$，其中$a \in [0,1]$，满足$aP_{z^0} + (1-a)P_{z_0} \sim p$。$H(p)$是使得复合彩票$aP_{z^0} + (1-a)P_{z_0}$与$p$无差异的权重。根据性质 2，这样的 a 是唯一的，所以对任意的$p \in \Psi$，$H(p)$是

定义好了的，满足：

$$p \succeq q \quad \Leftrightarrow \quad H(p)P_{z^0} + (1 - H(p))P_{z_0} \succeq H(q)P_{z^0} + (1 - H(q))P_{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(p) \geq H(q)。 \tag{1.1.4}$$

所以$H(p)$是偏好关系“$\succeq$”的一个效用表示。下面我们来证明$H(p)$可以改写成一个期望效用函数$\sum_z u(z)p(z)$。

对任意$p, q \in \Psi$，$a \in [0,1]$，由性质 5 得：

$$\begin{aligned} ap + (1-a)q \sim \; & a[H(p)P_{z^0} + (1 - H(p))P_{z_0}] \\ & +(1-a)[H(q)P_{z^0} + (1 - H(q))P_{z_0}] \\ \sim \; & (aH(p) + (1-a)H(q))P_{z^0} \\ & +(1 - aH(p) - (1-a)H(q))P_{z_0}。 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

因为$H(.)$是定义好了的，由(1.1.5)得：

$$H(ap + (1-a)q) = aH(p) + (1-a)H(q)， \tag{1.1.6}$$

所以 H 是线性的。

根据引理 1.1.1，考虑到任意彩票$p \in \Psi$，p可以表示为$\sum_{z \in Z} p(z)P_z$，所以我们有：

$$H(p) = H(\textstyle\sum_{z \in Z} p(z)P_z) = \sum_{z \in Z} p(z)H(P_z)。 \tag{1.1.7}$$

在 Z 上定义函数$u(.)$，满足：

$$u(z) \equiv H(P_z)，\ \forall z \in Z。 \tag{1.1.8}$$

则根据(1.1.7)，我们有：

$$H(p) = \textstyle\sum_{z \in Z} p(z)u(z) = E[u(z)]。 \tag{1.1.9}$$

此处$u(.)$即为 von Neumann- Morgenstern 效用函数，$E[u(.)]$即为偏好的期望效用表示。

（必要性）如果偏好关系“$\succeq$”存在一个期望效用表示

$$E[u(z)] = \textstyle\sum_{z \in Z} p(z)u(z)，$$

则对任意$p, q, r \in \Psi$，如果$p \succ q$，则有$\sum_{z \in Z} p(z)u(z) > \sum_{z \in Z} q(z)u(z)$，如果$a \in (0,1]$，则有：

$$\sum_{z \in Z}[ap(z) + (1-a)r(z)]u(z) > \sum_{z \in Z}[aq(z) + (1-a)r(z)]u(z)$$

因此我们有$ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r$，独立性公理成立。

对任意$p, q, r \in \Psi$， $p \succ q \succ r$，在上述期望效用表示下，我们有：

$$\sum_{z\in Z} p(z)u(z) > \sum_{z\in Z} q(z)u(z) > \sum_{z\in Z} r(z)u(z)。$$

存在 $a \in (0,1]$，满足：$a\sum_{z\in Z} p(z)u(z) + (1-a)\sum_{z\in Z} r(z)u(z) > \sum_{z\in Z} q(z)u(z)$，所以我们有：

$$\sum_{z\in Z}[ap(z) + (1-a)r(z)]u(z) > \sum_{z\in Z} q(z)u(z),$$

即$ap + (1-a)r \succ q$。类似地可证明存在$b \in (0,1]$，满足$q \succ bp + (1-b)r$。

从上面的证明可以看出，如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数，则$\hat{u} = cu + d$也是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

证明完毕。■

二、多期经济中的期望效用函数

考虑一个多期禀赋经济，整个消费过程横跨$T+1$期，$t = 0,1,2,\cdots T$，记$z = (z_0, z_1, \ldots, z_T)$为个体可行的消费向量，其中$z_t$为 t 期消费量，记$Z$为$z$的全体。假定$Z$有限， $p(.)$为定义在Z上的概率，$p(.)$的全体记为Ψ。类似地，我们可以证明如下定理：

定理 1.1.2：定义在Ψ上的一个偏好关系"$\succeq$"满足独立性公理和公理 Archimedean，当且仅当存在一个存在期望效用表示，当且仅当存在一个 von Neumann- Morgenstern 效用函数$u(.)$，满足：

$$\sum_{z\in Z} u(z_0, \ldots, z_T)p(z = z_0, \ldots, z_T) \geq \sum_{z\in Z} u(z_0, \cdots, z_T)q(z = z_0, \ldots, z_T)$$

$\Leftrightarrow\ p \succeq q$，　　任意$p, q \in \Psi$，

其中$p(z = z_0, \ldots, z_T)$指从时间 0 到 T 的消费等于$(z_0, \ldots, z_T)$的概率。

证明：略。

如果 von Neumann- Morgenstern 效用函数是时间可加的(time-additive)，则存在一列函数$\{u_t(.)\}_{t=0}^{T}$，满足：

$$u(z_0, \ldots, z_T) = \sum_{t=0}^{T} u_t(z_t)。\tag{1.1.10}$$

在许多时候，上述效用函数可以进一步简化为一个几何贴现效用函数：

$$u(z_0, \ldots, z_T) = \sum_{z=0}^{T} \beta^t u(z_t),\quad 0 < \beta < 1。\tag{1.1.11}$$

其中β为贴现因子。上述贴现形式称为几何贴现，由 Samuelson(1937)引入，通过将未来效用一期一期地贴现到现期，得到一个终生贴现效用函数，从而

为跨时决策问题的解决提供了理论基础。在几何贴现下，任一时间点上将下一期效用贴现到该时间点的贴现因子是个常数，这蕴涵人们在今天对明天和处于明天对后天的耐心程度是一致的。在贴现因子是个常数的假定下，个体贴现呈现出几何级数的形式，所以这种贴现方法通常被称为几何贴现，因其简单易用，且近似地刻画了个体决策心理而为经济学家们广泛使用。

1.1.3 对理性选择的偏离：四个悖论

个体选择行为的完全理性和期望效用函数的存在性（两个公理）是现代金融理论的基础，本书一到七章的讨论都建立在该基础之上。但越来越多的研究表明，当存在不确定性行为时，个体决策并不是完全理性的，或者与期望效用理论并不一致（见 Machina(1987)、Tversky 和 Kahneman(1981)、Slovic 和 Lichtenstein(1983)等。下面我们介绍几个相关的悖论。

一、悖论 1（概率匹配）

把 20 个红球和 10 个黑球一起放入一个袋子，随机地从袋子中取出一个球再放回去，猜测所取出的球是红色的，还是黑色的，猜中的话可以得到 10 元 RMB 的奖励。

在重复猜奖中，实验发现绝大多数个体趋向于 2/3 的时间选择猜红球，1/3 的时间猜黑球。很显然这不是最优的，最优选择应该是总是猜红球。

二、悖论 2（偏好反转）

考虑两个选择问题：（1）设想你可以得到 2 万人民币的财富和一个选择权，你可以选择(a)额外再得到 5 千人民币，(b)25%的概率额外再得到 2 万人民币，75%的概率没有额外收入。（2）设想你可以得到 4 万人民币的财富和一个选择权，你可以选择(a)放弃 1 万 5 千人民币，(b)75%的概率放弃 2 万人民币，25%的概率没有额外损失。

在试验中发现，大多数个体在面对问题（1）时会选择(a)，在面对问题（2）时会选择(b)。但事实上这两个选择问题所产生的回报是相同的，是 100%的概率得到 2 万 5 千人民币，还是 25%的概率得到 4 万人民币，75%的概率得到 2 万人民币。

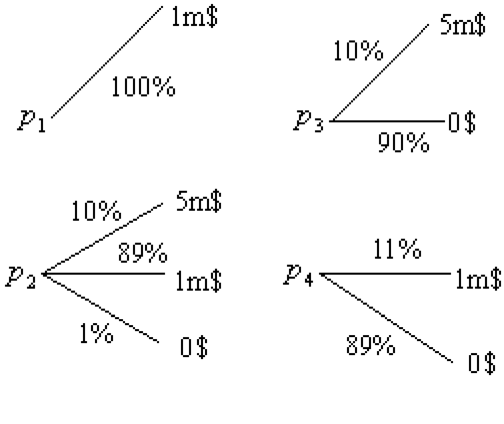
三、悖论 3（Ellsberg(1961)悖论）

在密闭的缸 I 中有 50 个红球和 50 个黑球，在缸 II 中有 100 个不知道比例的红球与黑球。考虑两个摸球游戏：（I）个体从缸中摸到一个红球时可以赢得 100RMB，个体可以选择从缸 I 中摸（R_I）还是从缸 II 中摸（R_{II}）；（II）个体从缸中摸到一个黑球时可以赢得 100RMB，个体可以选择从缸 I 中摸（B_I），还是从缸 II 中摸（B_{II}）。

实验发现，绝大多数个体会选择R_I和B_I，但这与偏好的理性选择行为是不一致的。从逻辑上讲，个体在R_I和R_{II}中更偏爱R_I，等价于在B_I和B_{II}中更偏爱B_{II}，因此如果绝大多数个体选择R_I的话，应该只有很少的个体会选择B_I才对，这说明真实经济中个体决策中存在非理性的成分。

四、悖论 4（Allais 悖论）

Allais 悖论由 Allais（1953）给出。考虑如图 1.1 所示的两对彩票：在第一对彩票中，持有彩票p_1，个体可以以 100%的概率得到 1000000 美元；持有彩票p_2，个体可以以 10%的概率得到 5000000 美元，以 89%的概率得到 1000000 美元，1%的概率得到 0 美元。第二对彩票中，持有彩票p_3，个体可以以 10%的概率得到 5000000 美元，90%的概率得到 0 美元；持有彩票p_4，个体可以以 11%的概率得到 1000000 美元，89%的概率得到 0 美元。



(图 1.1.1)：Allais 悖论。

在第一对彩票中，大多数人会选择p_1；在第二对彩票中，大多数人会选择彩票p_3。这种现象与独立性公理矛盾，这一点可以从下面的分析中看出：

$$p_1 \sim 0.11(\$1\text{m}) + 0.89(\$1\text{m}), \tag{1.1.12}$$

$$p_2 \sim 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$1m), \tag{1.1.13}$$

因此$p_1 \succ p_2$等价于

$$0.11(\$1m) + 0.89(\$1m) \succ 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$1m)。 \tag{1.1.14}$$

根据独立性公理，这蕴涵：

$$p_1 \succ \frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)。 \tag{1.1.15}$$

根据独立性公理，(1.1.15)等价于：

$$0.11(\$1m) + 0.89(\$0m) \succ 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$0m),$$

即$p_4 \succ p_3$。

从以上四个悖论可以看出，本节所介绍的选择行为的完全理性和期望效用函数的存在性法则是存在疑问的，如何对经典理论进行修正和拓展，属于行为金融学的范畴，我们把它留到第八章中作进一步的讨论。

§1.2 风险回避及其度量

在金融理论中，我们经常涉及风险回避（Risk Aversion）的概念。风险回避概念的提出，最早可以追溯到 1738 年瑞士著名数学家 Bernoulli 以拉丁文所撰写的题为“*Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*”（即“Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk”）的论文；现代风险理论的给出，应该归功于 Arrow(1963、1965 和 1971)、Pratt(1964)等的研究。下面我们来介绍 Arrow 和 Pratt 等人的工作。

1.2.1 风险回避

在金融理论中，我们经常涉及风险回避的概念（Risk Aversion），即个体厌恶风险的存在。个体为什么是风险回避的?下面我们用一个简单例子来加以剖析。

例 1.2.1 考虑一个个体决策问题，假定一个已经饿了两天的个体面临一个选择，他可以选择（1）马上得到一个热包子，（2）50%的概率得到两个热包子，50%的概率继续挨饿。一般说来，绝大多数个体都会选择（1）。

尽管两种选择的期望收益相等，但个体获得的期望效用并不相等。假定存在期望效用函数$u(.)$，则期望效用之差可以刻画为：

$$\Delta u = u(1) - \frac{1}{2}[u(0) + u(2)]$$

$$= \frac{1}{2}\{[u(1) - u(0)] - [u(2) - u(1)]\}$$

$$= \frac{1}{2}(u'(\xi_1) - u'(\xi_2))。$$

其中$\xi_1 \in (0,1)$，$\xi_2 \in (1,2)$。如果个体边际效用是递减的，则有：

$$\Delta u = \frac{1}{2}(u'(\xi_1) - u'(\xi_2)) > 0$$

所以如果个体是完全理性的，边际效用是递减的，且存在期望效用函数，则个体放弃消费一个热包子的边际效用损失要远大于消费第二个包子带来的边际效用增加，从而个体会选择（1）。 ●

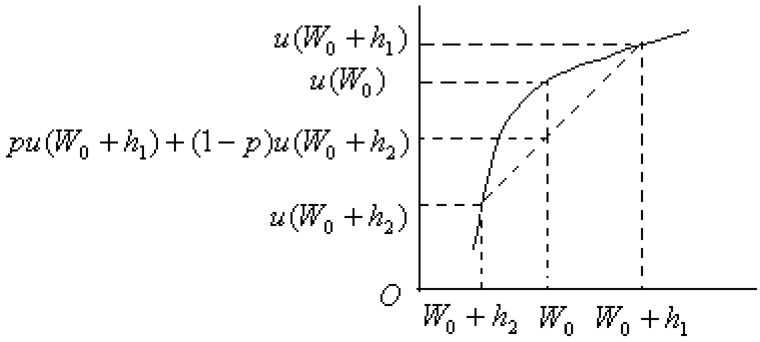
定义：一位个体称为是**风险回避的**，如果在任何财富水平W_0下，该个体不愿意接受任意期望回报为零的彩票，或认为接不接受是无所谓的：即$\forall W_0$，$\forall \tilde{z}$满足$E\tilde{z} = 0$，有$Eu(W_0 + \tilde{z}) \le u(W_0)$。一位个体称为是**严格风险回避的**，如果在任何财富水平w下，该个体都不愿意接受任意期望回报为零的彩票：即$\forall W_0$，$\forall \tilde{z}$满足$E\tilde{z} = 0$，有$Eu(W_0 + \tilde{z}) < u(W_0)$。

如果取彩票$\tilde{z}$为以概率 p 得到一个正的回报h_1，以概率 1-p 得到一个负的回报h_2，且满足$ph_1 + (1-p)h_2 = 0$，则（严格）风险回避等价于：

$$u(W_0) = u[p(W_0 + h_1) + (1-p)(W_0 + h_2)$$

$$\ge (>) pu(W_0 + h_1) + (1-p)u(W_0 + h_2); \qquad (1.2.1)$$

因此当个体是（严格）风险回避的，则其效用函数是（严格）凹的；反过来也成立，如图 1.2.1 所示。



（图 1.2.1）：风险回避与凹的效用函数。

当 von Neumann-Morgenstern 效用函数$u(.)$二次可微时，由 Taylor 法则，(1.2.1)蕴涵：

$$u(W_0) \geq (p+1-p)u(W_0) + u'(W_0)(ph_1 + (1-p)h_2)$$
$$+u''(W_0)(ph_1^2 + (1-p)h_2^2) + o(h_1^2, h_2^2)。$$

整理得：

$$u''(W_0)(ph_1^2 + (1-p)h_2^2) \leq 0。\quad (1.2.2)$$

所以个体的风险回避蕴涵效用函数的凹性，如果存在二阶导数，则二阶导数小于零，即边际效用递减。

1.2.2 风险回避的度量

一个风险回避的个体不喜欢均值为零的风险，并不蕴涵他不进行风险资产投资，只要风险资产的期望回报率足够高。同样地，如果购买保险的成本太高，风险回避的个体可能会放弃购买保险而选择承受风险。不同个体在期望收益和可以承受的风险之间的替代关系是不同的，同样一份风险，同样的保险费，有些个体愿意通过保险购买来回避风险，有些个体却宁愿承受风险，为此我们需要对个体的风险回避程度进行刻画。

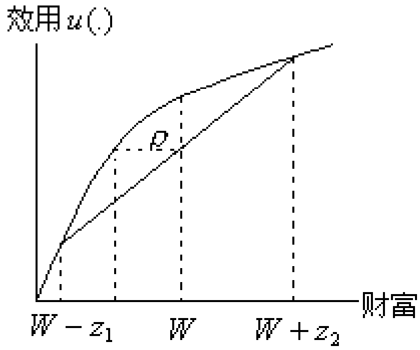
一、风险溢金

给定一个均值为零的风险$\tilde{z}$，我们来估计个体愿意支付多少风险溢金，以避免该风险。如果个体的初始财富为W，效用函数为u，则风险溢金必须

满足：

$$E[u(w+\tilde{z})]=u(w-\rho), \qquad (1.2.3)$$

如图 1.2.2 所示。



(图 1.2.2)：给定风险下的风险溢金

当$\tilde{z}$充分小时，对(1.2.3)作二阶 Taylor 近似，忽略$o(E[\tilde{z}^2])$和$o(\rho)$，有：

$$u(W)+u'(W)E[\tilde{z}]+\frac{1}{2}u''(W)\sigma_z^2\approx u(W)+u'(W)\rho, \qquad (1.2.4)$$

如果$E[\tilde{z}]=0$，则上式整理得：

$$\rho\cong-\frac{1}{2}\frac{u''(W)}{u'(W)}\sigma_z^2。 \qquad (1.2.5)$$

上式由 Arrow(1963)和 Pratt(1964)分别独立给出，称为 Arrow-Pratt 近似。

类似地，当个体额外承受这样一个风险时，他需要得到的补偿费可以表示为：

$$E[u(w+v+\tilde{z})]=u(w); \qquad (1.2.6)$$

对上式进行二阶 Taylor 展开，则得：

$$u(W)+u'(W)(v+E[\tilde{z}])+\frac{1}{2}u''(W)E[(v+\tilde{z})^2]+o(E[\tilde{z}^2],v^2)=u(W),$$

当$\tilde{z}$比较小、均值为零时，忽略$o(E[\tilde{z}^2])$和$o(\rho)$，上式可以简化为：

$$v\cong-\frac{1}{2}\frac{u''(W)}{u'(W)}\sigma_z^2。 \qquad (1.2.7)$$

由此我们可以得到如下定理：

定理 1.2.1：对于均值为零的小风险$\tilde{z}$，个体为避免该风险所愿意支付的风险溢金可以表示为：

$$\rho \cong -\frac{1}{2}\frac{u''(W)}{u'(W)}\sigma_z^2$$

该风险溢金等于个体额外承受该风险时所需要的补偿。

二、绝对风险回避系数

根据上一小节的讨论，给定一个均值为零的风险，个体为避免该风险愿意支付的风险溢金由该风险的方差σ_z^2和$-u''(W)/u'(W)$决定。当风险尺度比较小时，该风险的方差σ_z^2越大，个体愿意支付的风险溢金越高；$-u''(W)/u'(W)$越大，个体愿意支付的风险溢金越高，$-u''(W)/u'(W)$刻画了个体对风险的厌恶程度被称为 Arrow-Pratt 绝对风险回避系数。

定义：$R_A(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$被称为 Arrow-Pratt 意义下的绝对风险回避系数。

由定理 1.1.1，个体偏好的期望效用表示精确到一个仿射变换，因此给定个体偏好，个体的绝对风险回避系数是唯一的，不随效用函数的选取而变化。事实上，绝对风险回避系数刻画了效用函数的弯曲程度，在仿射变换下保持不变。

定义：称效用函数展示减的绝对风险回避，如果$R_A(.)$是个严格减的函数；类似地称效用函数展示增的绝对风险回避，如果$R_A(.)$是个严格增的函数；称效用函数是常数绝对风险回避的，如果$R_A(.)$是个常数。

定理 1.2.2：给定一个均值为零、充分小的风险$\tilde{z}$，个体为避免该风险愿意支付的风险溢金$\rho(W)$依赖于初始财富W，满足：

如果$\frac{d\rho(W)}{dW} < 0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW} < 0$，$\forall W$；

如果$\frac{d\rho(W)}{dW} > 0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW} > 0$，$\forall W$；

如果$\frac{d\rho(W)}{dW} = 0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW} = 0$，$\forall W$；

证明：由(1.2.20)式，当风险$\tilde{z}$充分小，均值为零时，有：

$$\rho(W) = \frac{1}{2}R_A(W)\sigma_z^2,$$

对上式两边关于W求导数，我们有：

$$\frac{d\rho(W)}{dW} = \frac{1}{2}\frac{dR_A(W)}{dW}\sigma_z^2,$$

因此对于$\forall W$，我们有：

如果$\frac{d\rho(W)}{dW}<0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW}<0$；如果$\frac{d\rho(W)}{dW}>0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW}>0$；如果$\frac{d\rho(W)}{dW}=0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW}=0$。

证毕。■

推论 1.2.1：减的绝对风险回避蕴涵$u'''(W)>0$。

证明：$\frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{-u'''(W)u'(W)+(u''(W))^2W}{(u'(W))^2}<0$

所以$u'''(W)>[(u''(W))^2W]/u'(W)>0$。 ■

定义：考虑两位个体i和k，称个体i比个体k更加风险回避，如果$R_A^i(W)>R_A^k(W)$，对任意 W 成立。

定理 1.2.3：给定两位风险回避、不饱和（边际效用大于零）的个体i和k，下属三个条件是相互等价的：

a) 在相同初始财富下，为避免任意给定的一个充分小，均值为零的风险，个体i愿意支付比个体k更高的风险溢金；

b) $R_A^i(W)>R_A^k(W)$，对任意 W 成立；

c) 存在一个严格增、凹的函数$G(.)$，满足：$u_i(W)=G(u_k(W))$，$\forall W$。

证明：由 Arrow-Pratt 近似，(a)和(b)的等价性是显然的。

（b）和（c）的等价性：因为个体i和k的效用函数严格增、严格凹，所以$u_k(z)$存在逆函数$u_k^{-1}(z)$，定义：

$$G(y)=u_i(u_k^{-1}(y)), \tag{1.2.8}$$

则有$u_i(W)=G(u_k(W))$。

对$u_i(W)=G(u_k(W))$两边关于y求导，得：

$$u_i'(W)=G'(u_k(W))u_k'(W)。 \tag{1.2.9}$$

由$u_i(W)$和$u_k(W)$严格单调增，(1.2.9)蕴涵$G'(.)>0$。

对(1.2.9)两边再次关于y求导，得：

$$u_i''(W)=G''(u_k(W))(u_k'(W))^2+G'(u_k(W))u_k''(W), \tag{1.2.10}$$

将(1.2.10)除以(1.2.9)，整理得：

$$R_A^i(W) = -\frac{G''(u_k(W))}{G'(u_k(W))} u_k{}'(W) + R_A^k(W)。 \qquad (1.2.11)$$

$b \Rightarrow c$：如果对任意 W 有$R_A^i(W) > R_A^k(W)$，根据(1.2.11)我们有：

$$\frac{G''(u_k(W))}{G'(u_k(W))} u_k{}'(W) < 0。 \qquad (1.2.12)$$

因为$G'(.) > 0$，$u_k{}'(.) > 0$，所以$G''(.) < 0$，即$G(.)$是个严格凹、严格增的函数。

$c \Rightarrow b$：如果对任意 W，$G''(W) < 0$，考虑到$G'(.) > 0$，$u_k{}'(.) > 0$，由(1.2.11)得：

$$R_A^i(W) = -\frac{G''(u_k(W))}{G'(u_k(W))} u_k'(W) + R_A^k(W) > R_A^k(W)。$$

证明完毕。■

三、相对风险回避系数

绝对风险回避系数可以改写为：

$$R_A(W) = -\frac{du'(W)}{dW}\frac{1}{u'(w)},$$

它可以看作是边际效用的衰减率，即单位财富量的上升所导致的边际效用的下降。通过量纲计算可以看出，绝对风险回避系数的单位与财富单位相同，如果财富以 RMB 为单位，则绝对风险回避系数以 RMB 的倒数为单位，如果财富以美元为单位，则绝对风险回避系数也应该以美元的倒数为单位，不同的财富单位将导致不同的绝对风险回避系数。

在测度灵敏性时，经济学家通常偏爱无单位的量。为此，我们将相对风险回避系数与边际效用对财富的弹性联系在一起。

定义： $R_R(W) \equiv -\frac{du'(W)/u'(W)}{dW/W}$称为 Arrow-Pratt 意义下的相对风险回避系数。

相对风险回避系数$R_R(.)$可以表示为：

$$R_R(W) \equiv -\frac{du'(W)/u'(W)}{dW/W} = \frac{-Wu''(W)}{u'(W)} = WR_A(W)， \qquad (1.2.13)$$

因此相对风险回避系数是绝对风险回避系数和初始财富量的乘积。

定义：称效用函数展示减的相对风险回避，如果$R_R(.)$是个严格减的函数；类似地称效用函数展示增的相对风险回避，如果$R_R(.)$是个严格增的函数；称效用函数是常数相对风险回避的，如果$R_R(.)$是个常数。

绝对风险回避系数与风险溢金（的绝对量）是通过 Arrow-Pratt 近似联系在一起的，下面我们给出一个类似的近似关系，通过该关系将相对风险回避系数和风险溢金（的相对值）联系在一起。

假定个体的初始财富量为W，给定一个均值为零的风险$\tilde{z}$，下面来估计个体愿意支付初始财富量的百分之几，以避免该风险，我们将该百分比看作风险溢金的相对值，它必须满足：

$$E[u(w(1+\tilde{z}))] = u(w(1-\hat{\rho}), \qquad (1.2.14)$$

当$\tilde{z}$比较小时，通过二次 Taylor 近似整理得：

$$\hat{\rho} \cong \frac{1}{2} R_R(W)\sigma_z^2。 \qquad （1.2.15）$$

因此，为避免给定的均值为零的、尺度比较小的风险，个体愿意损失的财富份额正比于风险的方差和个体的相对风险回避系数。类似于定理 1.2.2，由(1.2.15)，我们有如下推论。

推论：$\tilde{\rho}$依赖于初始财富W；当该风险的尺度充分小时，对$\forall W$，我们有：

$\frac{d\tilde{\rho}(W)}{dW} < 0 \Leftrightarrow \frac{dR_R(W)}{dW} < 0$；

$\frac{d\tilde{\rho}(W)}{dW} > 0 \Leftrightarrow \frac{dR_R(W)}{dW} > 0$；

$\frac{d\tilde{\rho}(W)}{dW} = 0 \Leftrightarrow \frac{dR_R(W)}{dW} = 0$。

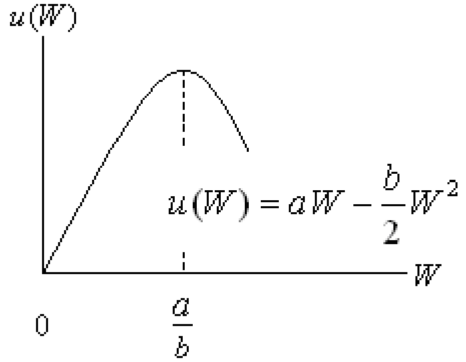
1.2.3 几种常见的效用函数

下面介绍金融经济学中几种常用的凹效用函数，这些效用函数结构相对简单，使得经济模型可以解析求解。

一、 凹的二次效用函数

二次效用函数可以表示为：

$$u(W)=aW-\frac{b}{2}W^2,\ a>0b>0; \tag{1.2.16}$$



（图 1.2.3）：二次效用函数

其一阶导数、二阶导数分别为：

$$u'(W)=a-bW;$$

$$u''(W)=-b。$$

考虑到消费品或财富的边际效用通常是非负的（即消费品或财富是不饱和的），W的取值范围为[0,a/b]，其函数图形见 1.2.3。

因为$R_A(W)=\frac{b}{a-bW}$，$\frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{b^2}{(a-bW)^2}>0$，所以二次效用函数展示增的绝对风险回避。$R_R(W)=\frac{bW}{1-bW}$是个增函数，所以展示增的相对风险回避系数。

二次效用函数

二、负指数效用函数

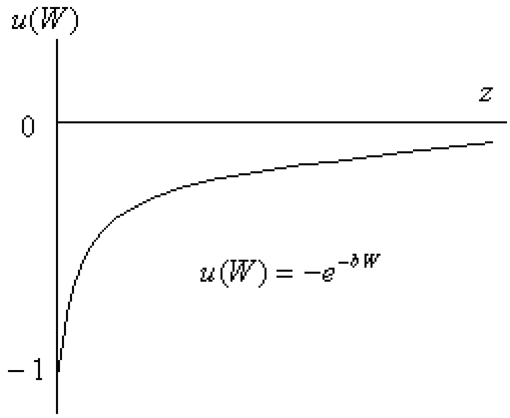
负指数效用函数可以表示为：

$$u(W)=-e^{-bW},\quad b\geq 0\ ; \tag{1.2.17}$$

其图形如 1.2.4 所示，其一阶导数和二阶导数可以分别表示为：

$$u'(W)=be^{-bW}>0;$$

$$u''(W)=-b^2e^{-bW}<0。$$



（图 1.2.4）：负指数效用函数

因为$\lim_{W\to+\infty} u(W) = 0$，所以负指数效用函数有上界。其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以表示为：

$R_A(W) = b$， $dR_A(W)/dW = 0$；

$R_R(W) = bW$， $dR_R(W)/dW = b > 0$。

所以负指数效用函数展示出常数绝对风险回避、增的相对风险回避。

三、幂效用函数

狭义幂效用函数可以表示为：

$$u(W) = \frac{W^{1-\theta}-1}{1-\theta}，\ \theta > 0。 \qquad (1.2.18)$$

当θ趋向于 1 时，利用 l'Hopital 法则，上式可以简化为：

$$u(W) = ln\,W。 \qquad (1.2.18')$$

狭义幂效用函数的一阶和二阶导数分别为：

$u'(W) = W^{-\theta}$， $u''(W) = -\theta W^{-\theta-1}$。

所以其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以分别表示为：

$R_A(W) = \theta/W$， $dR_A(W)/dW = -\theta/W^2 < 0$；

$R_R(W) = \theta$， $dR_R(W)/dW = 0$。

因此狭义幂效用函数展示出减绝对风险回避和常数相对风险回避，狭义幂效用函数又被称为常数相对风险回避的效用函数，或 CRRA（constant relative risk aversion）效用函数。

广义幂效用函数可以表示为：

$$u(W)=\frac{(A+BW)^{1-1/B}}{B-1}，B>0，A\neq 0， \quad (1.2.18")$$

其中$W>max[-A/B,0]$。其一阶导数和二阶导数分别为：

$$u'(W)=(A+BW)^{-1/B}，$$

$$u''(W)=-(A+BW)^{-\frac{1}{B}-1}。$$

所以其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以分别表示为：

$$R_A(W)=\frac{1}{A+BW}，\quad \frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{-B}{(A+BW)^2}<0；$$

$$R_R(W)=\frac{W}{A+BW}，\frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{A}{(A+BW)^2}=sign(A)。$$

广义幂效用函数展示出减的绝对风险回避，当$A>0$时，展示出增的相对风险回避，当$A<0$时展示出减的相对风险回避，当$A=0$时，广义幂效用函数退化为具有常数相对风险回避的狭义幂效用函数。

1.2.4 静态最优投资决策与比较静态分析

一、 静态最优组合问题及求解

考虑一个两期的静态投资组合选择问题，假定个体效用函数严格增、严格凹，t=0 时个体可以在 J 种风险资产和一种无风险资产上进行投资。记第j种风险资产上的随机回报率为$\tilde{r}_j$，$j=1,2,\ldots,J$，无风险资产上的回报率为r_f。假定个体初始财富量为W_0，a_j为个体投资在第j种风险资产上的财富量，则个体在 t=1 时的随机财富量为：

$$\widetilde{W}=(W_0-\textstyle\sum_j a_j)(1+r_f)+\sum_j a_j(1+\tilde{r}_j)=W_0(1+r_f)+\sum_j a_j(\tilde{r}_j-r_f)，$$

个体的最优投资组合决策问题可以表示为：

$$\max_{\{a_j\}}E[u(W_0(1+r_f)+\textstyle\sum_j a_j(\tilde{r}_j-r_f))]， \quad (1.2.19)$$

求解得一阶条件为：

$$E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j-r_f)]=0，j=1,2,\ldots,J。 \quad (1.2.20)$$

当个体是风险货币的（效用函数严格凹）时，上述一阶条件是一个充分必要条件。

推论：当个体是风险回避的、不饱和的，个体愿意投资风险资产，则存在j，满足：$Pr\,o\,b\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} \in (0,1]$。

证明：如果上述条件不成立，则我们有：

$$Pr\,o\,b\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} = 0。$$

如果$Pr\,o\,b\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} = 0$，则有：

$$\begin{aligned} E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)] &= E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)|\tilde{r}_j - r_f > 0] \times prob\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} \\ &\quad + E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)|\tilde{r}_j - r_f \leq 0] \times prob\{\tilde{r}_j - r_f \leq 0\} \\ &= E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)|\tilde{r}_j - r_f \leq 0] \\ &< 0。\end{aligned}$$

与(1.2.20)式矛盾，所以推论成立。

定理 1.2.3：一个风险回避的、不饱和的投资者愿意从事风险投资，当且仅当至少有一种风险资产的期望回报率超过无风险利率。

证明：（充分性）假定存在风险资产j，其期望回报率严格大于无风险利率，即$E[\tilde{r}_j - r_f] > 0$，因此我们有：

$$E[u'(W_0(1 + r_f))(\tilde{r}_j - r_f)] > 0，$$

这蕴涵当个体的风险资产投资为零时，增加第j种风险资产上的投资可以提高个体效用，因此风险回避的、不饱和的投资者愿意从事风险投资。

（必要性）我们通过证明上述命题的否命题来证明逆命题。如果所有风险资产的期望回报率都低于无风险利率，则有：

$$E[u'(W_0(1 + r_f))(\tilde{r}_j - r_f)] < 0，j = 1,2,\ldots,J$$

这蕴涵如果个体还没有投资风险资产，则该个体投资风险资产会降低效用，因此风险回避的、不饱和的投资者不会从事风险投资。证毕。 ■

需要说明的是，在上述充分性的证明中，风险资产j的期望回报率严格大于无风险利率，蕴涵个体会进行风险资产投资，但并不表明最优时第j种风险资产上的投资一定严格大于 0，因为可能有其他风险资产更加吸引人。

例 1.2.2：假定经济中有 3 种资产，两种风险资产a_1、a_2和一种无风险资产 b，假定无风险资产回报率满足$r_f = 0.05$，风险资产a_1、a_2的随机回报率可以刻画为：

$$\tilde{r}_1 = \begin{cases} 0.10 & \omega_1 \\ 0.03 & \omega_2 \end{cases}, \qquad \tilde{r}_2 = \begin{cases} 0.11 & \omega_1 \\ 0.04 & \omega_2 \end{cases}$$

其中ω_1和ω_2是两个等概率的自然状态。很显然，$E[\tilde{r}_1] = 0.065 > r_f$，但资产$a_2$的回报率要严格地高于资产$a_1$，因此个体在资产$a_1$上的投资量不可能大于0。

二、一种风险资产和一种无风险资产的情形

当经济中只有一种风险资产和一种无风险资产时，一阶条件(1.2.20)可以简化为：

$$E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)] = 0, \tag{1.2.21}$$

其中$\widetilde{W}$可以表示为$\widetilde{W} = W_0(1 + r_f) + a(\tilde{r} - r_f)$，$a$和$\tilde{r}$分别为投资在风险资产上的财富量和风险资产的随机回报率。

下面我们来给出几个重要的定理，不同于 1.2.2 中的讨论，此处定理的推导不需要风险尺度的充分小，因此定理在全局意义上成立。

定理 1.2.4 (Arrow (1970))：假定个体是风险回避的、不饱和，且风险资产的期望回报率超过无风险利率。如果在整个定义域内如果效用函数展示减的绝对风险回避，则风险资产是一种正常品(normal good)；如果效用函数展示增的绝对风险回避，则风险资产是一种次品(inferior good)；效用函数是常数绝对风险回避的，则个体对风险资产的需求不依赖于个体初始财富。即：

$$\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} < 0，\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dW_0} > 0，\forall W_0；$$

$$\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} > 0，\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dW_0} < 0，\forall W_0；$$

$\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} = 0$，$\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dW_0} = 0$，$\forall W_0$。

证明：决策最优时我们有一阶条件：

$$E[u'(W_0(1+r_f) + a(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0。$$

两边对W_0求导，得：

$$E[u''(\widetilde{W})(1 + r_f + \frac{da}{dW_0}(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0,$$

整理得：

$$\frac{da}{dW_0} = -\frac{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)](1 + r_f)}{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)^2]},$$

所以我们有：

$$sign(\frac{da}{dW_0}) = sign(E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)])。$$

如果个体效用函数展示减的绝对风险回避，即$\frac{dR_A(z)}{dz} < 0$，则有：

$$\begin{cases} R_A(\widetilde{W}) \le R_A(W_0(1+r_f)) & 如果\tilde{r} \ge r_f \\ R_A(\widetilde{W}) > R_A(W_0(1+r_f)) & 如果\tilde{r} < r_f \end{cases}。$$

当$\tilde{r} \ge r_f$时，$-\frac{u''(\widetilde{W})}{u'(\widetilde{W})} \le R_A(W_0(1+r_f))$，因此有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f) \ge -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f);$$

类似地，当$\tilde{r} < r_f$时，我们有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f) \ge -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)。$$

所以我们有：

$$E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)] \ge -R_A(W_0(1+r_f))E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)] = 0。$$

由此得：$\frac{da}{dW_0} > 0$。

其它两种情形可类似得到。 ■

定理 1.2.5：假定个体是风险回避的、不饱和，且至少有一种风险资产的期望回报率超过无风险利率。在整个定义域内如果效用函数展示减的相对风险回避，则个体对风险资产需求的财富弹性严格大于 1；如果效用函数展示增的绝对风险回避，则个体对风险资产需求的财富弹性严格小于 1；如果效用函数是常数绝对风险回避的，则个体对风险资产需求的财富弹性等于 1。即：

$\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} < 0$，$\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a} > 1$，$\forall W_0$；

$\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} > 0$，$\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a} < 1$，$\forall W_0$；

$\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} = 0$，$\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a} = 1$，$\forall W_0$；

证明：将表达式$\frac{da}{dW_0} = -\frac{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)](1+r_f)}{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}$代入$\eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a}$中，整理得：

$$\eta = 1 + \frac{W_0(1+r_f)E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)] + aE[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}{-aE[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}$$

$$= 1 + \frac{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W}]}{-aE[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}$$

如果个体效用函数展示减的相对风险回避，即$dR_R(z)/dz < 0$，要证明$\eta > 1$，只需证明$E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W}] > 0$。

当$\tilde{r} \geq r_f$时，$-\frac{u''(\widetilde{W})\widetilde{W}}{u'(\widetilde{W})} \leq R_A(W_0(1+r_f))$，因此有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W} \geq -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f);$$

类似地，当$\tilde{r} < r_f$时，我们有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W} > -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)。$$

因此$E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W}] > -R_A(W_0(1+r_f))E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)] = 0$。

其它两种情形可类似证明。 ■

定理 1.2.6(Pratt(1964))：$R_A(.)$是一个全局意义上的风险回避系数，即如果存在两位风险回避的个体i和k，有$R_A^i(W) > R_A^k(W)$，对任意 W 成立，则在相同的初始财富下，为避免任意一个随机损失，个体i愿意支付比个体k更高的风险溢金。

证明：事实上我们只需证明，对任意的风险资产$\tilde{r}$，个体k将所有财富都投资在该资产上，而个体i不一定会这样做。

假定存在一种风险资产$\tilde{r}$，个体k将所有财富都投资在该资产上，则有：

$E[u_k'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)] = 0$。

因为$R_A^i(W) > R_A^k(W)$，对任意 W 成立，根据定理 1.2.3，存在一个严格增、严格凹的函数$G(.)$，满足$u_i(W) = G(u_k(W))$。

$$E[u_i{'}(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)]$$
$$= E[G'(u_k(W_0(1+\tilde{r})))u_k{'}(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)]$$
$$= E[G'(u_k(W_0(1+\tilde{r})))u_k{'}(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)|\tilde{r}-r_f \geq 0]prob\{\tilde{r} \geq r_f\} + E[G'(u_k(W_0(1+\tilde{r})))u_k{'}(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)|\tilde{r}-r_f < 0]prob\{\tilde{r} < r_f\}$$
$$< G'(u_k(W_0(1+r_f)))E[u_k{'}(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)]$$
$= 0$。 ■

三、多种风险资产和一种无风险资产的情形

当经济中风险资产的品种多于一种时，上述讨论并不一定成立。例如，即使个体效用函数展示减的相对风险回避，个体对特定风险资产需求的财富弹性可能会小于或等于 1，其原因是随着个体财富量的上升，个体的风险资产投资组合会发生变化。

Cass 和 Stiglitz(1970)研究了个体风险资产投资组合不随初始财富量变化的充分必要条件。在该条件下，个体初始财富量的变化仅导致了风险资产组合和无风险资产之间权重的变化，风险资产组合内部权重不变。Cass 和 Stiglitz(1970)将这种现象称之为二基金货币分离。

定义：个体展示二基金货币分离，如果他总是选择持有相同的风险资产投资组合；当初始财富量变化时，仅改变该组合和无风险资产之间的权重。

定理 1.2.7(Cass 和 Stiglitz(1970))：个体效用函数展示二基金货币分离，当且仅当该效用函数满足：

$$-\frac{u'(W)}{u''(W)} = a + bW。 \quad (1.2.22)$$

证明：此处仅证明充分性，必要性的证明比较复杂，有兴趣的读者可参考 Cass 和 Stiglitz（1970）。

我们可以将个体投资在第 j 种风险资产上的财富量表示为：

$$a_j = \alpha_j(W_0)(a + b(1 + r_f)W_0),\ j = 1,2, \ldots J。 \qquad (1.2.23)$$

因此 t=1 时的随机财富量可以表示为：

$$\widetilde{W} = W_0(1 + r_f) + \sum_j \alpha_j(W_0)(a + b(1 + r_f)W_0)(\tilde{r}_j - r_f)。$$

如果我们能证明$d\alpha_j(W_0)/dW_0 = 0$，$j = 1,2, \ldots J$，则$a_j/a_k = \alpha_j/\alpha_k$，对任意$j, k = 1,2, \ldots J$成立，即风险资产投资组合不依赖于初始财富量的变化。

由(1.2.22)，我们有：

$$u''(\widetilde{W}) = \frac{u'(\widetilde{W})}{a+b[(1+r_f)W_0 + \sum_j(\tilde{r}_j - r_f)\alpha_j b}$$

$$= \frac{u'(\widetilde{W})}{(a+b(1+r_f)W_0)(1+\sum_j(\tilde{r}_j - r_f)\alpha_j b)}。 \qquad (1.2.23)$$

对一阶条件$E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)] = 0$，$j = 1,2, \ldots J$关于$W_0$求导，整理得：

$$E\left\{\begin{bmatrix} (\tilde{r}_1 - r_f)^2 & \cdots & (\tilde{r}_1 - r_f)(\tilde{r}_J - r_f) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{r}_J - r_f)(\tilde{r}_1 - r_f) & \cdots & (\tilde{r}_J - r_f)^2 \end{bmatrix} u''(\widetilde{W})(a + b(1 + r_f)W_0)\right\}\begin{pmatrix} \frac{d\alpha_1}{dW_0} \\ \vdots \\ \frac{d\alpha_J}{dW_0} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} E\{u''(\widetilde{W})(\tilde{r}_1 - r_f)(1 + r_f)[1 + \sum_j(\tilde{r}_j - r_f)\alpha_j b]\} \\ \vdots \\ E\{u''(\widetilde{W})(\tilde{r}_J - r_f)(1 + r_f)[1 + \sum_j(\tilde{r}_j - r_f)\alpha_j b]\} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1+r_f}{a+b(1+r_f)W_0}\begin{pmatrix} E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_1 - r_f)] \\ \vdots \\ E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_J - r_f)] \end{pmatrix}$$

$$= 0。$$

上式中第二个等号通过将(1.2.23)式代入得到，第三个等号可根据一阶条件得到。

考虑到矩阵$\begin{pmatrix} (\tilde{r}_1 - r_f)^2 & \cdots & (\tilde{r}_1 - r_f)(\tilde{r}_J - r_f) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{r}_J - r_f)(\tilde{r}_1 - r_f) & \cdots & (\tilde{r}_J - r_f)^2 \end{pmatrix}$在遍历意义下是

非奇异的，因此上述向量方程存在唯一的零解，即对任意$j=1,2,\dots,J$，有$d\alpha_j/dW_0=0$。 ■

根据上面的讨论，当$a\neq 0$时，风险资产之间的组合权重不随初始财富量的变化而变化，但风险资产组合与无风险资产之间的相对权重随着个体初始财富量的变化而变化，我们称之为部分分离(partially separated)；当$a=0$时，所有资产之间的相对权重独立于个体的初始财富量，我们称之为完全分离(completely separated)。求解微分方程(1.2.22)，我们有：

$$(ln\,u'(W))'=\begin{cases}-\frac{1}{a} & 当b=0\text{ 时}\\ (-\frac{1}{b}ln(a+bW))' & 当b\neq 0\text{ 时}\end{cases};$$

因此满足(1.2.22)的边际效用函数可以表示为：

$$u'(W)=\begin{cases}ce^{-\frac{W}{a}} & b=0\\ c(a+bW)^{-\frac{1}{b}} & b\neq 0\end{cases}。\tag{1.2.24}$$

上式可以简化为：

$$u'(W)=(A+BW)^C,\tag{1.2.25a}$$

或

$$u'(W)=A\,exp(BW),\tag{1.2.25b}$$

为了保证效用函数严格增、严格凹，在(1.2.25a)中参数必须满足$B>0$、$C>0$、$W\geq max(0,-A/B)$或$A>0$、$B<0$、$C>0$、$W\in[0,-A/B)$，在(1.2.25b)中参数必须满足$A>0$、$B<0$、$W\geq 0$。

§ 1.3 资产的随机占优

上一节我们讨论了风险回避概念，并给出了个体风险回避程度的比较。这一节我们引入随机占优(Stochastic Dominance)的概念，来对资产的优劣进行比较。需要说明的是，并非所有风险资产都是可以进行比较的，而且这种比较依赖于个体偏好。

1.3.1 一阶随机占优

定义：称风险资产 A 一阶随机占优(First Degree Stochastic Dominance)于风险资产 B，如果对于所有具有单调增、连续效用函数的个体都觉得资产 A 要优于资产 B，或觉得两者是无差异的[2]。

为简化讨论，我们假定资产 A 和资产 B 的随机回报率在 0 和 1 之间。记资产 A 和资产 B 的随机回报率的累计分布函数为：

$F_A(z) = prob\{\omega | r_A(\omega) \le z, \forall\omega \in \Omega\}$，

$F_B(z) = prob\{\omega | r_B(\omega) \le z, \forall\omega \in \Omega\}$。

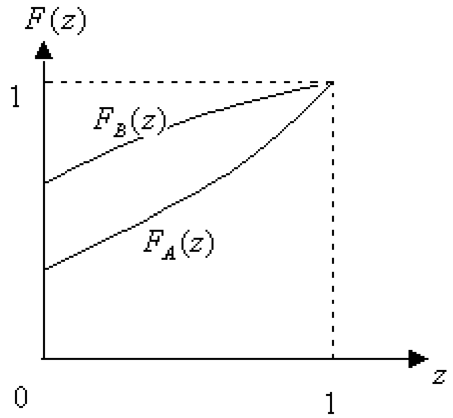
则$F_A(1) = F_B(1) = 1$，$F_A(0)$和$F_B(0)$不必为零。

定理 1.3.1：下列三种陈述等价：

（1）$A \underset{FSD}{\ge} B$；

（2）$F_A(z) \le F_B(z)$，$\forall z \in [0,1]$；　　(1.3.1)

（3）$\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha} \ge 0$。　　(1.3.2)



（图 1.3.1）：一阶随机占优下累计概率分布之间的关系

关系式(1.3.1)下$F_A(z)$和$F_B(z)$之间的关系如图 1.3.1 所示，该关系式蕴涵，对任意给定的z，资产 A 回报大于z的概率要大于资产 B，但这并不蕴涵

[2]注意此处个体偏好满足不饱和性和连续性，但并不要求是凹的。

$r_A(\omega) \geq r_B(\omega)$，$\forall \omega \in \Omega$。关系式(1.3.2)中的“$\overset{d}{=}$”代表依分布相等，关系式“$\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha} \geq 0$”等价于关系式“$\forall z \in [0,1]$，

$prob\{\omega | r_A(\omega) = z, \omega \in \Omega\} = prob\{\omega | r_B(\omega) + \alpha(\omega, \omega \in \Omega) = z\}$”。

由下面的例 1.3.1，我们可以更清楚地理解上述定理。

例 1.3.1：假定经济中有三个自然状态ω_1、ω_2和ω_3，这三个自然状态发生的概率都等于 1/3。假定资产 A 和资产 B 的随机回报率如表 1.3.1 所示。

自然状态 \ 资产	ω_1	ω_2	ω_3
$\tilde{r}_A$	1	1/2	0
$\tilde{r}_B$	0	0	1

（表 1.3.1）：资产 A 和资产 B 的随机回报率

任意给定一个严格增、连续的效用函数$u(.)$，在资产 A 和资产 B 下个体的期望效用值分别为：

$$E[u(W_0(1+\tilde{r}_A))] = \frac{1}{3}u(2W_0) + \frac{1}{3}u(1.5W_0) + \frac{1}{3}u(W_0)$$

$$> \tfrac{1}{3}u(2W_0) + \tfrac{2}{3}u(W_0)$$

$$= E[u(W_0(1+\tilde{r}_B))]。$$

因此资产 A 一阶随机占优于资产 B。

资产 A 和资产 B 的随机回报率的累计概率分布满足：

$$F_A(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} & z < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ 1 & z = 1 \end{cases}; \quad F_B(z) = \begin{cases} \frac{2}{3} & z < 1 \\ 1 & z = 1 \end{cases}。$$

因此$F_A(z) \leq F_B(z)$对任意$z \in [0,1]$成立。

另外，存在一个随机变量$\tilde{\alpha} \geq 0$，满足：

$r_A(\omega_1) = r_B(\omega_3) + \alpha(\omega_3) = 1$，$\alpha(\omega_3) = 0$；

$r_A(\omega_2) = r_B(\omega_2) + \alpha(\omega_2) = 0.5$，$\alpha(\omega_2) = 0.5$；

$r_A(\omega_3) = r_B(\omega_1) + \alpha(\omega_1) = 0$，$\alpha(\omega_1) = 0$。

因此对$\forall z \in [0,1]$，有$prob\{\omega|r_A(\omega) = z\} = prob\{\omega|r_B(\omega) + \alpha(\omega) = z\}$，即$\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$。 ●

证明：1、((1)⇔ (2))：不妨假定个体初始财富量$W_0 = 1$，

$$A \underset{FSD}{\geq} B \Leftrightarrow E[u(1+\tilde{r}_A)] \geq E[u(1+\tilde{r}_B)]$$

$$\Leftrightarrow \int_{[0,1]} u(1+z)dF_A(z) \geq \int_{[0,1]} u(1+z)dF_B(z)。$$

注意到此处$\int_{[0,1]} u(1+z)dF_A(z) \equiv u(1)F_A(0) + \int_0^1 u(1+z)dF_A(z)$。

$$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z) - F_B(z)]$$

$$= u(1)(F_A(0) - F_B(0)) + \int_0^1 u(1+z)d(F_A(z) - F_B(z)) = u(1)(F_A(0) - F_B(0)) + u(1+z)(F_A(z) - F_B(z))|_0^1 - \int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz$$

因此我们有：

$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z) - F_B(z)] = -\int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz$。(1.3.3)

所以我们有：

$$A \underset{FSD}{\geq} B \Leftrightarrow \int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz \leq 0。$$

① 如果$A \underset{FSD}{\geq} B$，则有$\int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz \leq 0$。假定存在$z_0 \in [0,1]$，有$F_A(z_0) - F_B(z_0) > 0$，根据$F_A(.)$和$F_B(.)$的右半连续性,存在一个闭区间$[x,c]$，$x \leq z_0 < c$，在该区间中有$F_A(z) - F_B(z) > 0$。取一个单调增、连续的效用函数$u(.)$，满足：

$$u'(1+z) = \begin{cases} 1 & z \in [x,c] \\ 0 & z \notin [x,c] \end{cases},$$

即$u(1+z) = \int_0^z \chi_{[1+x,1+c]}(1+t)dt$，$\forall z \in [0,1]$。此处$\chi(.)$是一个示性函数，满足：

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}。$$

将该效用函数代入积分式，有：

$$\int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz = \int_x^c (F_A(z) - F_B(z))dz > 0,$$

根据(1.3.3)，有$E[u(1+\tilde{r}_A)] - E[u(1+\tilde{r}_B)] < 0$，与假设矛盾。因此(2)成立。

② 假定(2)成立，即$F_A(z) \leq F_B(z)$，$\forall z \in [0,1]$。根据(1.3.3)式，我们有：

$E[u(1+\tilde{r}_A)]-E[u(1+\tilde{r}_B)]=-\int_0^1(F_A(z)-F_B(z))u'(1+z)dz\geq 0$，即$A\underset{FSD}{\geq}B$。

2、((3)⟺ (1))：如果存在$\tilde{\alpha}$，满足$\tilde{r}_A\overset{d}{=}\tilde{r}_B+\tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha}\geq 0$，则有：

$$E[u(1+\tilde{r}_A)]=E[u(1+\tilde{r}_B+\tilde{\alpha})]\geq E[u(1+\tilde{r}_B)]。$$

反过来的证明比较复杂，略。 ■

1.3.2 二阶随机占优

在一阶随机占优中，我们仅假定个体是不饱和的，其效用函数单调增；这一节要介绍的二阶随机占优则仅假定了个体是风险回避的。

定义：称风险资产 A 二阶随机占(Second Degree Stochastic Dominance)优于风险资产 B，记为$A\underset{SSD}{\geq}B$，如果所有满足效用函数的一阶导数在[1,2]上除了零测集外连续的风险回避的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

定理 1.3.2 以下三种陈述等价：

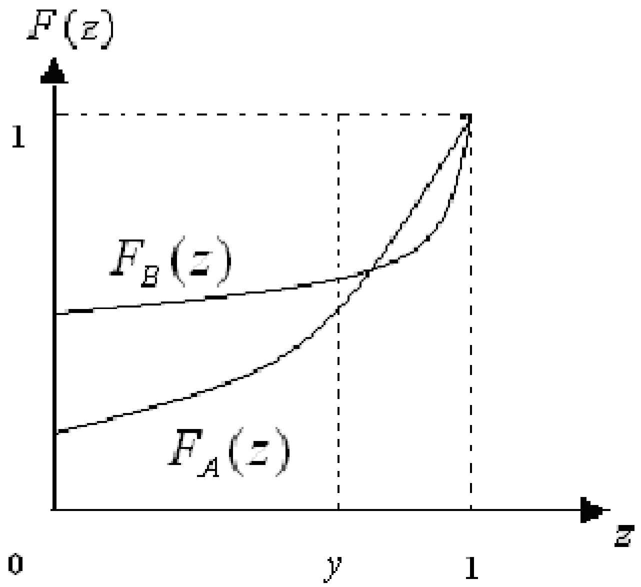
（1）$A\underset{SSD}{\geq}B$；

（2）$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$， (1.3.4)

且$S(z)=\int_0^z(F_A(s)-F_B(s))ds\leq 0$，$\forall z\in[0,1]$； (1.3.5)

（3）$\tilde{r}_B\overset{d}{=}\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$，且$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A]=0$。 (1.3.6)

关系式(1.3.5)下$F_A(z)$和$F_B(z)$之间的关系如图 1.3.2 所示，该关系式蕴涵，对任意给定的y，由$F_A(z)$与$z=y$、$z=0$所围成的面积要小于由$F_B(z)$与$z=y$、$z=0$所围成的面积。



（图 1.3.2）：二阶随机占优下累计概率分布之间的关系

证明：（（1）⇒（2））：假定$A \underset{SSD}{\geq} B$，根据(1.3.3)式，有：

$$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z)-F_B(z)] = -\int_0^1 (F_A(z)-F_B(z))u'(1+z)dz$$

$$= -u'(1+z)S(z)|_0^1 + \int_0^1 S(z)u''(1+z)dz$$

$$\geq 0。$$

考虑到二阶随机占优蕴涵上式对所有的线性函数也应该成立，取$u'(1+z) = \pm 1$代入上式，整理得$S(1) = 0$。考虑到：

$$S(z) = \int_0^1 (F_A(z)-F_B(z))dz$$

$$= z(F_A(z)-F_B(z))|_0^1 - \int_0^1 zd(F_A(z)-F_B(z))$$

$$= -(E[\tilde{r}_A] - E[\tilde{r}_B]), \tag{1.3.7}$$

因此$E[\tilde{r}_A] = E[\tilde{r}_B]$成立。

将$S(1) = 0$代入上述不等式，整理得：

$$\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz \geq 0。 \tag{1.3.8}$$

如果存在$z_0 \in [0,1]$，$S(z_0) > 0$，由$S(.)$的连续性，存在一个闭区间$[a,b] \subset [0,1]$，$a < z_0 < b$，当$z \in [a,b]$时，有$S(z) > 0$。选取一个严格凹的效用函数

$u(.)$，满足：

$$u''(1+z)=\begin{cases}0 & [0,a) \\ -1 & [a,b] \\ 0 & (b,1]\end{cases},$$

代入(1.3.8)的左边，有：

$$\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz=-\int_a^b S(z)\,dz<0。$$

与(1.3.8)矛盾，因此(1.3.5)成立。

（(2）⇒（1)）：由(1.3.3)式、(1.3.7)式和前面的讨论，有：

$$E[u(1+\tilde{r}_A)]-E[u(1+\tilde{r}_B)]=\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz。$$

因为对任意$z\in[0,1]$，有$u''(1+z)\le 0$，$S(z)\le 0$，所以$A\underset{SSD}{\geq}B$成立。

（(3）⇒（1)）：因为$u(.)$是个凹函数，且(1.3.6)成立，因此有：

$$\begin{aligned}E[u(1+\tilde{r}_B)]&=E[u(1+\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon})]\\&=E[E[u(1+\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon})|\tilde{r}_A]]\\&\le E[u(1+\tilde{r}_A)]。\end{aligned}$$

上述不等号源于 Jensen 不等式。

从（(1）⇒（3)）等证明比较复杂，有兴趣的读者可参考 Rothschild 和 Stiglitz(1970)。 ■

直接从定义来判别资产的二阶随机占优通常是非常困难的，定理 1.3.2 给出了判别二阶随机占优的两种简单方法。一种方法是通过研究两种资产的累计概率分布和均值，计算$S(z)=\int_0^z(F_A(s)-F_B(s))ds$，看均值是否相等，$S(z)$是否恒小于等于零。另一种方法是看能否将一种资产的随机回报率写成另一种资产的随机回报率和一个噪声项。下面我们用一个简单例子来加以说明。

例 1.3.2 ：假定经济中有五个等概率发生的自然状态，个体的初始财富为 1，个体有两种资产可供其挑选，假定这两种资产的随机回报率如表 1.3.2 所示。

资产＼自然状态	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\tilde{r}_A$	0.4	0.4	0.8	0.8	0.8
$\tilde{r}_B$	0.9	1.0	0.3	0.5	0.5

（表 1.3.2）：资产 A 和资产 B 的随机回报率

在这个例子中，可以利用定义直接判定资产 A 二阶随机占优于资产 B：

$$\begin{aligned} E[u(1+\tilde{r}_A)] &= \frac{2}{5}u(1.4)+\frac{3}{5}u(1.8) \\ &\geq \frac{1}{5}[u(1.3)+u(1.5)]+\frac{1}{5}[u(1.9)+u(2.0)+u(1.5)] \\ &= E[u(1+\tilde{r}_B)]。\end{aligned}$$

因此按照定义，资产 A 二阶随机占优于资产 B。

此处也可以利用累计概率分布来进行判别，根据表 1.3.2，我们有：

$$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]=0.64；$$

$$F_A(z)=\begin{cases} 0 & z<0.4 \\ 0.4 & 0.4\leq z<0.8 \\ 1 & z\geq 0.8 \end{cases}，\quad F_B(z)=\begin{cases} 0 & z<0.3 \\ 0.2 & 0.3\leq z<0.5 \\ 0.6 & 0.5\leq z<0.9 \\ 0.8 & 0.9\leq z<1.0 \\ 1 & z=1.0 \end{cases}；$$

$$S(z)=\begin{cases} 0 & z<0.3 \\ -0.2(z-0.3) & 0.3\leq z<0.4 \\ -0.02+0.2(z-0.4) & 0.4\leq z<0.5 \\ -0.2(z-0.5) & 0.5\leq z<0.8 \\ -0.06+0.4(z-0.8) & 0.8\leq z<0.9 \\ -0.02+0.2(z-0.9) & 0.9\leq z\leq 1 \end{cases}。$$

因此对任意$z\in[0,1]$，有$S(z)\leq 0$。根据定理 1.3.2，有$A\underset{SSD}{\geq}B$。

最后通过构造$\tilde{\varepsilon}$来判别资产之间的二阶随机占优。记$\varepsilon(\omega_1)=-0.1$，$\varepsilon(\omega_2)=0.1$，$\varepsilon(\omega_3)=0.1$，$\varepsilon(\omega_4)=0.2$，$\varepsilon(\omega_5)=-0.3$，则有：

$r_B(\omega_3)=r_A(\omega_1)+\varepsilon(\omega_1)$， $r_B(\omega_4)=r_A(\omega_2)+\varepsilon(\omega_2)$

$r_B(\omega_1)=r_A(\omega_3)+\varepsilon(\omega_3)$，$r_B(\omega_2)=r_A(\omega_4)+\varepsilon(\omega_4)$

$r_B(\omega_5)=r_A(\omega_5)+\varepsilon(\omega_5)$，即$\tilde{r}_B\overset{d}{=}\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$;

且有：

$$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A=0.4]=\frac{1}{2}(\varepsilon(\omega_1)+\varepsilon(\omega_2))=0,$$

$$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A=0.8]=\frac{1}{3}(\varepsilon(\omega_3)+\varepsilon(\omega_4)+\varepsilon(\omega_5))=0,$$

即$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A] = 0$。根据定理 1.3.2，有$A \underset{SSD}{\geq} B$。

由定理 1.3.2 的（3），可以得到如下推论：

推论：$A \underset{SSD}{\geq} B \Rightarrow E[\tilde{r}_A] = E[\tilde{r}_B]$，$var(\tilde{r}_A) \leq var(\tilde{r}_B)$。

证明：如果$A \underset{SSD}{\geq} B$，由定理 1.3.2 的(2)，有$E[\tilde{r}_A] \geq E[\tilde{r}_B]$；由定理 1.3.2 的(3)，有：

$$var(\tilde{r}_B) = var(\tilde{r}_A + \tilde{\varepsilon}) = var(\tilde{r}_A) + var(\tilde{\varepsilon}) + 2\,cov(\tilde{r}_A, \tilde{\varepsilon})。$$

考虑到$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A] = 0$，有$cov(\tilde{r}_A, \tilde{\varepsilon}) = 0$，因此有：

$$var(\tilde{r}_B) = var(\tilde{r}_A) + var(\tilde{\varepsilon}) \geq var(\tilde{r}_A)。$$

证明完毕。 ■

1.3.3 二阶随机单调占优和三阶随机占优

定义：称风险资产 A 二阶随机单调占优(Second Degree Stochastic Monotonic Dominance)于风险资产 B，记为$A \overset{SSD}{\underset{M}{\geq}} B$，如果所有风险回避的、不饱和的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

显然，二阶随机单调占优要弱于二阶随机占优，它只需风险回避个体中的一部分偏爱资产 A。类似地，我们有如下定理：

定理 1.3.3：以下三种陈述是等价的：

（1）$A \overset{SSD}{\underset{M}{\geq}} B$；

（2）$E[\tilde{r}_A] \geq E[\tilde{r}_B]$， 且$S(z) = \int_0^z (F_A(s) - F_B(s))ds \leq 0$，$\forall z \in [0,1]$；

（3）$\tilde{r}_B \overset{d}{=} \tilde{r}_A + \tilde{\varepsilon}$，且$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A] \leq 0$。

证明：类似于定理 1.3.2 的证明，留作习题。

定义：称资产 A 三阶随机占优(Third Degree Stochastic Dominance)于资产 B，记为$A \underset{TSD}{\geq} B$，如果所有展示减的绝对风险回避的个体都偏爱资产 A，

或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

三阶随机占优的概念仅是二阶随机占优概念的一个推广，它要弱于二阶随机占优，下面我们给出三阶随机占优的一个充分条件。

定理 1.3.4：如果$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$，$\int_0^z S(y)dy\le 0$对$\forall z\in[0,1]$成立，则资产 A 三阶随机占优于资产 B，即$A\underset{TSD}{\ge}B$。

证明：由定理 1.3.2 的证明，有：

$$\int_{[0,1]}u(1+z)d[F_A(z)-F_B(z)]$$

$$=-u'(1+z)S(z)|_0^1+\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz$$

$$=u'(2)(E[\tilde{r}_A]-E[\tilde{r}_B])+u''(2)\int_0^1 S(y)dy-\int_0^1\int_0^z S(y)dyu'''(1+z)dz。$$

当$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$时，上式第一项为零；因为个体展示减的绝对风险回避，所以有$u''(z)\le 0$、$u'''(z)>0$，当$\int_0^z S(y)dy\le 0$对$\forall z\in[0,1]$成立时，上式中第二、第三项非负。因此$E[u(1+\tilde{r}_A)]\ge E[u(1+\tilde{r}_B)]$，即$A\underset{TSD}{\ge}B$。■

1.3.4 最优投资决策和比较静态分析

一、Arrow-Pratt 意义下更加风险回避概念的不足（一个简单例子）

当经济中存在一种风险资产和一种无风险资产时，由定理 1.2.6 及其证明，个体的风险回避程度越高，个体投资在风险资产上的财富量越低；一个直观的想法是，当经济中存在两种风险资产时，个体的风险回避程度越高，个体将增加低风险资产上的投资量以回避风险。Ross(1981)给出了一个简单例子，证明了这种想法的错误性，下面来介绍该例子。

例 1.3.3：假定经济中有两种风险资产 A 和 B，其随机回报率满足：

$$\tilde{r}_A=\tilde{r}_B+\tilde{z}，E[\tilde{z}|\tilde{r}_B]\ge 0，$$

这蕴涵资产 A 比资产 B 有更高的期望回报率和更高的风险，这类似于一种无风险资产和一种风险资产的情形。假定$\tilde{z}$和$\tilde{r}_B$相互独立，其随机回报率满足：

$$\tilde{r}_B = \begin{cases} 1 & 1/2\ 概率 \\ 0 & 1/2\ 概率 \end{cases}, \qquad \tilde{z} = \begin{cases} 2 & 1/2\ 概率 \\ -1 & 1/2\ 概率 \end{cases}。$$

考虑两个不饱和的、风险回避的个体i和k，假定他们的初始财富都是 1 单位。假定个体k具有一个严格凹、严格增的效用函数$u_k(.)$，满足：

$u_k{}'(\frac{5}{2}) = 0$，$u_k{}'(\frac{7}{4}) = 2$，$u_k{}'(\frac{3}{2}) = 3$，$u_k{}'(\frac{3}{4}) = 4$。

由此得：

$$E[u_k{}'(1 + \tilde{r}_B + \frac{1}{4}(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B))(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B)]$$

$$= \frac{1}{2}E[u_k{}'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}|\tilde{r}_B = 1] + \frac{1}{2}E[u_k{}'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}|\tilde{r}_B = 0]$$

$$= \frac{1}{4}[u_k{}'(\frac{5}{2}) \times 2 + u_k{}'(\frac{7}{4}) \times (-1) + u_k{}'(\frac{3}{2}) \times 2 + u_k{}'(\frac{3}{4}) \times (-1)]$$

$$= 0，$$

因此对个体k而言，投资 1/4 单位财富在资产 A 上是最优决策。

假定个体i比个体k更加风险回避，则存在一个严格增的凹函数$G(.)$，$u_i(.) = G(u_K(.))$，显然$G'(u_k(.))$是个减函数。假定$G(.)$满足：

$G'(u_k(\frac{5}{2})) = 0$，$G'(u_k(\frac{7}{4})) = 0$，$G'(u_k(\frac{3}{2})) = 10$，$G'(u_k(\frac{3}{4})) = 10$。

由此得：

$$E[u_i{}'(1 + \tilde{r}_A + \frac{1}{4}(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B))(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B)]$$

$$= \frac{1}{4}[G'(u_k(\frac{5}{2}))u_k{}'(\frac{5}{2}) \times 2 + G'(u_k(\frac{7}{4}))u_k{}'(\frac{7}{4}) \times (-1) \quad + G'(u_k(\frac{3}{2}))u_k{}'(\frac{3}{2}) \times 2 + G'(u_k(\frac{3}{4}))u_k{}'(\frac{3}{4}) \times (-1)]$$

$$= 2.5 > 0，$$

因此在个体i的最优投资决策中，投资在资产 A 上的财富量应该超过 1/4 单位。

二、强更加风险回避

Ross 上面这个例子说明，给定两种风险资产，Arrow-Pratt 意义下的更加风险回避并不能保证个体风险回避程度越高，在较高风险性的资产上的投资额越少。为此，Ross(1981)引入了强更加风险回避的概念。

定义：(Ross(1981)) 称个体i比个体k强更加风险回避(strongly more risk averse)，如果$\inf_W \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup_W \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$。

很明显，强更加风险回避蕴涵 Arrow-Pratt 意义下更加风险回避，但前者要严格地强于后者，这一点可以从下面的一个例子看出。

例 1.3.4：假定个体i和k的效用函数可以分别表示为：

$$u_i(W) = -e^{-aW}, \quad u_k(W) = -e^{-bW}, \quad a > b。$$

则$R_A^i(W) = a > b = R_A^k(W)$，即个体$i$要比个体$k$更加风险回避。

$$\frac{u_i'(W_1)}{u_k'(W_1)} = \frac{a}{b} e^{-(a-b)W_1}, \quad \frac{u_i''(W_2)}{u_k''(W_2)} = (\frac{a}{b})^2 e^{-(a-b)W_2}。$$

当$W_2 - W_1$充分大时，有$\frac{u_i''(W_2)}{u_k''(W_2)} < \frac{u_i'(W_1)}{u_k'(W_1)}$, 因此$\inf_W \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} < \sup_W \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$, 即个体$i$并非比个体$k$强更加风险回避的。

定理 1.3.5：个体i比个体k强更加风险回避的充分必要条件是，存在一个减的凹函数$G(.)$和一个严格正的常数λ,满足:$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)$，$\forall W$。

证明：（充分性）如果存在减的凹函数$G(.)$和正常数λ，满足：$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)$，$\forall W$，则有：

$$u_i'(W) = \lambda u_k'(W) + G'(W),$$

$$u_i''(W) = \lambda u_k''(W) + G''(W)。$$

两式相除，整理得：

$$\frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} = \lambda + \frac{G''(W)}{u_k''(W)} \geq \lambda \geq \lambda + \frac{G'(W)}{u_k'(W)} = \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)},$$

因此$\inf_W \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup_W \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$成立。

（必要性）如果$\inf\limits_{W}\frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup\limits_{W}\frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$成立，则存在一个正常数$\lambda$，满足：

$$\inf_{W}\frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \lambda \geq \sup_{W}\frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}。$$

记$G(W) = u_i(W) - \lambda u_k(W)$，两边关于$W$求一阶、二阶导数，有：

$$G'(W) = u_i'(W) - \lambda u_k'(W) \leq 0;$$

$$G''(W) = u_i''(W) - \lambda u_k''(W) \leq 0。$$

因此存在减的凹函数$G(.)$和正常数λ，满足：$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)$。 ■

在强更加风险回避概念下，存在正确的比较静态分析。下面我们用一个定理来刻画。

定理 1.3.6：假定经济中存在着两种风险资产，其中一种资产要比另一种资产有更高的期望回报和更高的风险。如果个体i比个体k强更加风险回避，则个体i在风险性更高的资产上的投资额要低于个体k。

证明：假定资产 A 和 B 的随机回报率满足：

$$\tilde{r}_A = \tilde{r}_B + \tilde{z}，E[\tilde{z}|\tilde{r}_B] \geq 0。$$

假定个体i和k的初始财富量为 1，如果a是个体k投资在资产 A 上的最优投资量，则有：

$$E[u_k'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] = 0。$$

假定个体i比个体k强更加风险回避，则存在减的凹函数$G(.)$和正常数λ，满足：

$$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)。$$

因此在投资量a上，个体i有：

$$\begin{aligned}E[u_i'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] &= E[\lambda u_k'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z} + G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] \\ &= E[G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] \\ &= E[cov(G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z}), \tilde{z}|\tilde{r}_B) + E[G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})|\tilde{r}_B]E[\tilde{z}|\tilde{r}_B]] \\ &\leq E[cov(G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z}), \tilde{z}|\tilde{r}_B)] \\ &\leq 0。\end{aligned}$$

因此对个体i而言，选择少投资一点在高风险资产上可以提高效用。■

习题

1、在圣.彼得堡悖论中，如果个体效用函数取$u(W) = -e^{-W}$，（1）试证明个体为参与该赌博游戏愿意支付的财富量与个体初始财富无关；（2）试给出一个上界。

2、在公理 1 和公理 2 下，试证明如下性质：

(1)如果$p \succ q$，$0 \le a < b \le 1$，则$bp + (1-b)q \succ ap + (1-a)q$；

(2)如果$p \succeq q \succeq r$，$p \succ r$，则存在唯一的$a^* \in [0,1]$，满足

$$q \sim a^* p + (1-a^*) r;$$

(3)如果$p \succ q$，$r \succ s$，$a \in [0,1]$，则$ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)s$；

(4)如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则$p \sim ap + (1-a)q$；

(5)如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则对任意的$r \in \Psi$，有 ：

$$ap + (1-a)r \sim aq + (1-a)r。$$

3、假定个体偏好可以用一个 CRRA 效用函数来刻画：$u(W) = W^{1-\theta}/(1-\theta)$。假定个体面对一个财富扰动风险$\widetilde{W} = W_0(1+\tilde{z})$，其中$\tilde{z} = \begin{cases} -\varepsilon & 1/2\ 概率 \\ \varepsilon & 1/2\ 概率 \end{cases}$，$\varepsilon$充分小。试问该个体愿意支付其财富的多少份额以避免这样一个财富扰动风险。

4、假定个体偏好可以用一个 CRRA 效用函数来刻画：$u(W) = -1/W$。假定个体面对两个财富扰动风险：第一个随机财富扰动风险可以刻画为，1/3 概率财富上升 2/3，2/3 概率财富下降 1/3；第二个随机财富扰动风险可以刻画为，1/2 概率财富上升一倍，1/2 概率财富下降一半。

（1）试问该个体更偏爱哪一个随机扰动风险？

（2）试分别计算该个体愿意支付其财富的多少份额，以避免这样两个财富扰动风险。

（3）当个体面对自己较不喜欢的随机扰动风险时，个体愿意拿出其财富的多少份额来换取自己所更偏爱的财富扰动风险。

5、假定经济中有一位拥有 2 亿元 RMB 财富的富翁和一位仅拥有 2 万元 RMB 财富的打工者，他们的期望效用函数都取$u(W)=-e^{-W}$的形式，且同时面对一个 1/2 概率财富增加 1 万元，1/2 概率财富减少 1 万元的风险，试分别计算为避免这样一个风险，这两位个体愿意支付多少财富？你对该结果有何看法？

6、假定经济中存在 N 种风险资产，它们的随机收益率是独立、同分布的，试证明个体最优决策中各资产上的权重相等。

7、假定经济中有两种风险资产 A 和 B，资产 A 的随机回报率$\tilde{r}_A$服从[0,1]上的均匀分布，资产 B 的随机回报率服从两点分布：

$$\tilde{r}_B=\begin{cases}0 & 1/2\ \text{概率}\\ 1 & 1/2\ \text{概率}\end{cases},$$

试讨论风险回避的投资者会选择两种资产中的哪一种资产？

8、假定经济中有两种风险资产 A 和 B，其随机回报率分别为$\tilde{r}_A$和$\tilde{r}_B$，假定$\tilde{r}_A$和$\tilde{r}_B$相互独立、均值相等，且$\tilde{r}_B\overset{d}{=}\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$，其中$\tilde{r}_A$和$\tilde{\varepsilon}$相互独立。这是否蕴涵资产 B 二阶随机占优于资产 A？试证明根据期望效用最大化，在只有这两种资产的情形下，风险回避的个体将会投资于资产 A 多于投资于资产 B。

第二章 投资组合理论[1]

§ 2.1 均值方差模型的普适性

Markowitz(1952)的投资组合理论又称为均值-方差模型，其中心思想是投资者应该采用分散化的投资策略，形象地说，不要把所有鸡蛋放在一个篮子里。分散化投资的思想可以追溯到十六世纪，莎士比亚在《威尼斯商人》中写道：

我的买卖的成败，并不全寄托在一艘船上，
更不是依赖着一处地方；
我的全部财产，也不会受一年盈亏的影响，
所以我的货物并不能使我忧愁。
（第一场　第一幕　安东尼奥）

Markowitz(1952)首次给出了分散化投资的理论模型。他认为，如果个体是风险回避的、不饱和的，则给定资产的期望回报率，个体总是选择较低的方差，给定方差，个体总是追求较高的期望回报率。Markowitz 的理论建立在个体偏好可以用均值-方差效用函数来刻画的假定之上。下面的例子表明，这种假定是存在问题的。

例 2.1.1：假定经济中存在两个投资组合p_1和p_2，它们的随机回报率分别为：

$$\tilde{r}_1 = \begin{cases} 1/2 & 1/2 \text{ 概率} \\ -1/2 & 1/2 \text{ 概率} \end{cases}, \qquad \tilde{r}_2 = \begin{cases} 1/3 & 2/3 \text{ 概率} \\ -2/3 & 1/3 \text{ 概率} \end{cases}。$$

通过简单计算可得：$E[\tilde{r}_1] = E[\tilde{r}_2] = 0$，$var(\tilde{r}_1) = \frac{1}{4} > \frac{2}{9} = var(\tilde{r}_2)$，即这两个投资组合具有相同的均值，但$p_1$的方差要大于$p_2$。

假定个体初始财富量为 1，其效用函数取对数形式：$u(W) = ln(W)$，则个体在这两个投资组合进行投资后所能达到的期望效用值分别为：

$$E[ln(1+\tilde{r}_1)] = \frac{1}{2} ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2} ln(\frac{1}{2}) \approx -0.1438;$$

$$E[ln(1+\tilde{r}_2)] = \frac{2}{3} ln(\frac{4}{3}) + \frac{1}{3} ln(\frac{1}{3}) \approx -0.1744。$$

因此个体投资在p_1上可以有更高的期望效用，尽管其方差比p_2的高。

事实上将个体的效用函数写成仅依赖于均值、方差的函数是有条件的，

[1]本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002)、Leroy, 和 Werner (2003)、王江(2006)等教材及相关论文。

这一点可以从下面的分析看出。

$$E[u(\widetilde{W})]=E[[u(E[\widetilde{W}])+u'(E[\widetilde{W}])(\widetilde{W}-E[\widetilde{W}])+\frac{1}{2}u''(E[\widetilde{W}])(\widetilde{W}-E[\widetilde{W}])^2+R_3]$$

$$=u(E[\widetilde{W}])+\frac{1}{2}u''(E[\widetilde{W}])\sigma^2(\widetilde{W})+E[R_3]。\qquad(2.1.1)$$

其中

$$E[R_3]=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\widetilde{W}])m^n(\widetilde{W})\qquad(2.1.2)$$

是所有三阶矩以上的项，$m^n(\widetilde{W})$是 n 阶中心矩。(2.1.1)蕴涵，对于一个不饱和的、风险回避的个体，其期望效用不仅依赖于财富的均值和方差，还依赖于三阶以上的中心矩。只有当效用函数取特殊形式（例如二次多项式），或资产的随机回报率满足特殊的分布（例如多变量正态分布）时，期望效用函数才能表示为随机财富均值、方差的函数。

当个体效用函数取二次多项式$u(\widetilde{W})=\widetilde{W}-\frac{b}{2}\widetilde{W}^2$，个体期望效用值可以简化为：

$$E[u(\widetilde{W})]=E[\widetilde{W}]-\frac{b}{2}E[\widetilde{W}^2]$$

$$=E[\widetilde{W}]-\frac{b}{2}((E[\widetilde{W}])^2+\sigma^2(\widetilde{W}))。$$

因此个体偏好可以用均值、方差的函数来刻画。但二次多项式效用函数蕴涵当财富量增加到一定程度，个体效用将减少；同时二次多项式效用函数中个体展示增的绝对风险回避，这蕴涵对个体而言风险资产是一种次品，因此假定个体效用函数是二次多项式形式并不十分合理。

当资产的随机回报率为正态分布时，$\widetilde{W}$也服从正态分布。对于正态分布，其高阶中心矩可以表示为一阶、二阶矩的函数：

$$E[(\widetilde{W}-E[\widetilde{W}])^j]=\begin{cases}\frac{j!}{(\frac{j}{2})!}\frac{\sigma^j(\widetilde{W})}{2^{j/2}} & j为偶数\\ 0 & j为奇数\end{cases},$$

因此个体期望效用函数可以表示为均值方差的函数。但资产回报率服从正态分布的假定太强了，计量检验表明，大多数资产并不服从这样的假定。

基于以上的分析，均值-方差模型并不是一个普适的资产选择模型，但由于该模型在分析上及所得出的结论都相对简单，同时在真实经济中使用效果也比较令人满意，因此得到了广泛认同。

§2.2 完全风险资产下的投资组合前沿

2.2.1 模型的建立

考虑一个无摩擦经济，假定所有资产都是风险资产，风险资产可以无限卖空。假定经济中自然状态的全体可以刻画为：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{|\Omega|}\},$$

其中$|\Omega|$代表Ω中元素个数，即自然状态的总个数。给定任意一个风险资产或投资组合，该资产或投资组合的随机回报率向量$\tilde{r}$可以表示为一个$|\Omega|$维的向量$(r(\omega_1), r(\omega_2), \dots, r(\omega_{|\Omega|}))$。假定该经济中存在$N \geq 2$种可以进行交易的风险资产，其随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产和投资组合都是这 N 种风险资产的线性组合，即随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$构成一个极大无关线性向量组。因此我们在分析最优投资组合时，只需考虑在这 N 种资产上的投资组合权重。

记e为由 N 种风险资产的期望回报率构成的$N \times 1$的向量，记为：

$$e = (E[\tilde{r}_1], E[\tilde{r}_2], \cdots E[\tilde{r}_N])^T; \qquad (2.2.1)$$

其中上标“T”表示转置，$\vec{1}$为由 1 构成的$N \times 1$的向量，记为：

$$\vec{1} \equiv (1,1,\cdots,1)^T;$$

V为 N 种风险资产随机回报率的方差-协方差矩阵，可以表示为：

$$V = \begin{pmatrix} var(\tilde{r}_1) & cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) & \cdots & cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_N) \\ cov(\tilde{r}_2, \tilde{r}_1) & var(\tilde{r}_2) & \cdots & cov(\tilde{r}_2, \tilde{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(\tilde{r}_N, \tilde{r}_1) & cov(\tilde{r}_N, \tilde{r}_2) & \cdots & var(\tilde{r}_N) \end{pmatrix}。 \qquad (2.2.2)$$

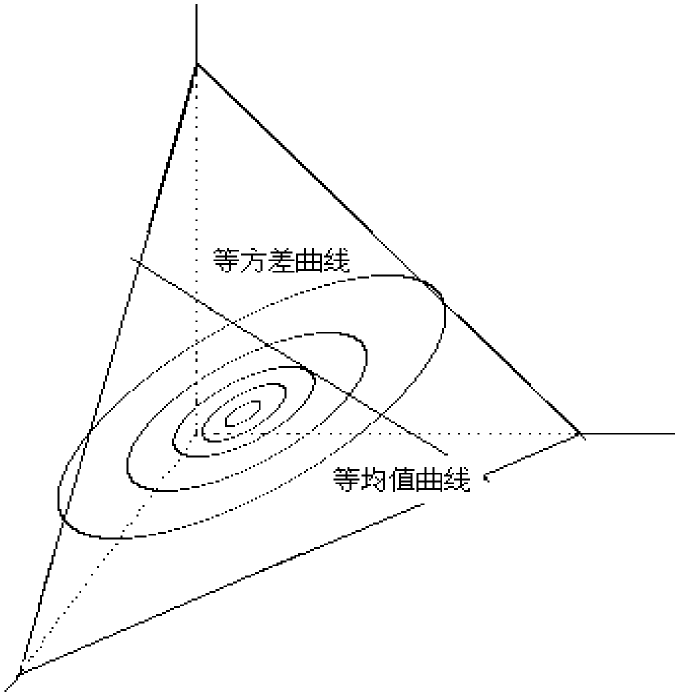
因为任意给定一个权重向量为$w = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$的投资组合，有：

$$w^T V w = var(w_1 \tilde{r}_1 + w_2 \tilde{r}_2 + \dots + w_N \tilde{r}_N) > 0,$$

所以V是一个对称、正定矩阵。

由于经济中存在着 N 种回报率线性无关的资产，所以所有投资组合的权重向量构成一个 N 维线性空间。给定期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，所有期望回报率等于$E[\tilde{r}_p]$的投资组合的权重向量w全体服从：$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T \vec{1} = 1$，即这些权重向量同时位于两个 N-1 维超平面$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T \vec{1} = 1$上。等方差曲面$w^T V w = \sigma^2$是 N-1 维的椭球面，与$w^T \vec{1} = 1$相交成一个 N-2 维的椭球面，$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T \vec{1} = 1$相交成一个 N-2 维超平面。

当 N=3 时，在 3 维空间中$w^T V w = \sigma^2$是一个 2 维椭球面，$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T \vec{1} = 1$是 2 维平面，$w^T V w = \sigma^2$与平面$w^T \vec{1} = 1$相交成一个椭圆，等均值平面$w^T e = E[\tilde{r}_p]$与平面$w^T \vec{1} = 1$相交成一条直线，如图 2.2.1 所示。在期望回报率$E[\tilde{r}_p]$给定下求解极小方差投资组合，相当于在平面$w^T \vec{1} = 1$中寻找与等均值线$w^T e = E[\tilde{r}_p]$相切的等方差曲线及切点。可以看出，与不同均值$E[\tilde{r}_p]$相对应的等均值线彼此平行，等方差曲线具有相同的中心，仅相差一个仿射变换，因此所有切点位于同一根直线上，构成一个一维子空间。我们称该直线为组合前沿，称该组合前沿上的任意投资组合为前沿组合。在组合前沿上任给两个前沿组合，其他前沿组合可以表示为这两个前沿组合的线性组合。



（图 2.2.1）：三资产极小方差投资组合

当 N>3 时，给定投资组合的期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，极小方差投资组合的求解相当于在 N-1 维超平面$w^T\vec{1}=1$中求出 N-2 维的椭球面与 N-2 维超平面相切的切点组合。可以证明，所有切点都位于同一条直线上，构成一个一维子空间，即组合前沿，该组合前沿可以由任意两个前沿组合线性张成。

例 2.2.1：假定经济中存在四个等概率发生的自然状态ω_1、ω_2、ω_3和ω_4，假定经济中存在三种风险资产，其随机回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3$的取值由表 2.2.1 给出。

这三种资产的期望回报率分别为：

$$E[\tilde{r}_1]=\frac{1}{4}(2+0+0+2)=1;$$

$$E[\tilde{r}_2]=\frac{1}{4}(1+1+2+2)=1\frac{1}{2};$$

$$E[\tilde{r}_3]=\frac{1}{4}(0+2+0+2)=1。$$

自然状态 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4

$\tilde{r}_1(\omega)$	2	0	0	2
$\tilde{r}_2(\omega)$	1	1	2	2
$\tilde{r}_3(\omega)$	0	2	0	2

（表 2.2.1）：三种资产的随机回报率取值

因此期望回报率向量可以刻画为：

$$e=(E[\tilde{r}_1],E[\tilde{r}_2],E[\tilde{r}_3])^T=(1,1.5,1)^T。$$

在各自然状态下，资产的随机回报率对期望值的偏离可以刻画为：

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega)-E[\tilde{r}_1]$	1	-1	-1	1
$\tilde{r}_2(\omega)-E[\tilde{r}_2]$	-1/2	-1/2	1/2	1/2
$\tilde{r}_3(\omega)-E[\tilde{r}_3]$	-1	1	-1	1

（表 2.2.1）：三种资产的随机回报率对期望值的偏离

因此我们有：

$$var(\tilde{r}_1)=1，var(\tilde{r}_2)=1/4，var(\tilde{r}_3)=1，$$
$$cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=cov(\tilde{r}_2,\tilde{r}_1)=0，$$
$$cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_3)=cov(\tilde{r}_3,\tilde{r}_1)=0，$$
$$cov(\tilde{r}_2,\tilde{r}_3)=cov(\tilde{r}_3,\tilde{r}_2)=0，$$

因此方差-协方差矩阵 V 可以刻画为：

$$V=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。$$

显然，方差-协方差矩阵 V 定正、对称。

在该例中，3 维空间中 2 维椭球面$w^TVw=\sigma^2$可以刻画为：

$$w_1^2+\frac{1}{4}w_2^2+w_3^2=\sigma^2，$$

两个 2 维平面$w^Te=E[\tilde{r}_p]$和$w^T\vec{1}=1$分别可以刻画为：

$$w_1+\frac{3}{2}w_2+w_3=E[\tilde{r}_p]，$$

$$w_1+w_2+w_3=1。$$

给定$E[\tilde{r}_p]$，平面$w_1+w_2+w_3=1$与平面$w_1+\frac{3}{2}w_2+w_3=E[\tilde{r}_p]$相交成一条直线；同时平面$w_1+w_2+w_3=1$与椭球面$w_1^2+\frac{1}{4}w_2^2+w_3^2=\sigma^2$相交成一个

椭圆，σ^2的取值决定了椭圆的大小，这些椭圆有些与直线相交，有些无交点，其中有一个与直线相切，切点即为前沿组合。通过解析几何的方法可计算得，该切点可以刻画为：

$$(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{13}{9} - E[\tilde{r}_p], E[\tilde{r}_p] - \frac{5}{9}, \frac{1}{9}\right)。$$

随着$E[\tilde{r}_p]$的变化，切点组合也在变化，这个组合前沿是一条直线。 ●

2.2.2 模型的求解

记w_p为前沿组合在各资产上的投资组合权重向量，给定期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，则w_p是如下最大化问题的解：

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T V w。 \tag{2.2.3}$$

Subject to:

$$w^T e = E[\tilde{r}_p],$$
$$w^T \vec{1} = 1。$$

上述最小化问题的拉格朗日函数可以刻画为：

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda(E[\tilde{r}_p] - w^T e) + \mu(1 - w^T \vec{1})。$$

其中λ和μ分别为相应于两个约束方程的拉格朗日乘子。求解上述最大化问题，得一阶条件为：

$$Vw - \lambda e - \mu \vec{1} = 0, \tag{2.2.4}$$

因此最优投资组合可以表示为：

$$w_p = \lambda V^{-1} e + \mu V^{-1} \vec{1}。 \tag{2.2.5}$$

将(2.2.5)代入两个约束方程中，整理得：

$$E[\tilde{r}_p] = \lambda e^T V^{-1} e + \mu \vec{1}^T V^{-1} e,$$
$$1 = \lambda e^T V^{-1} \vec{1} + \mu \vec{1}^T V^{-1} \vec{1}。$$

求解上述方程组，得：

$$\lambda = \frac{CE[\tilde{r}_p] - A}{D}, \qquad \mu = \frac{B - AE[\tilde{r}_p]}{D}。 \tag{2.2.6}$$

其中$A = \vec{1}^T V^{-1} e = e^T V^{-1} \vec{1}$，$B = e^T V^{-1} e$，$C = \vec{1}^T V^{-1} \vec{1}$，$D = BC - A^2$。

因此前沿组合权重向量w_p可以表示为：

$$w_p = \frac{CE[\tilde{r}_p] - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - AE[\tilde{r}_p]}{D} V^{-1} \vec{1}$$
$$= g + hE[\tilde{r}_p], \tag{2.2.7}$$

其中$g = \frac{BV^{-1}\vec{1} - AV^{-1}e}{D}$，$h = \frac{CV^{-1}e - AV^{-1}\vec{1}}{D}$。由此我们有如下命题：

定理 2.2.1：完全风险资产下任意前沿组合都可以表示为(2.2.7)的形式，

反之亦然。

此处g和$g+h$是相应于均值为零和 1 的两个前沿组合。对任意前沿投资组合w_p，我们有：

$$w_p = g + hE[\tilde{r}_p] = (1 - E[\tilde{r}_p])g + E[\tilde{r}_p](g + h),$$

所以任意前沿组合都可以表示为这两个前沿组合的线性组合。

续例 2.2.1：在例 2.2.1 的假设条件下，最优化问题(2.2.3)可以简化为：

$$\min_{\{w_1,w_2,w_3\}} \frac{1}{2}w_1^2 + \frac{1}{8}w_2^2 + \frac{1}{2}w_3^2$$

Subject to:

$$w_1 + \frac{3}{2}w_2 + w_3 = E[\tilde{r}_p],$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1。$$

通过简单计算可得：

$$A = 8，B = 11，C = 6，D = 2，$$

$$w_p = \frac{CE[\tilde{r}_p] - A}{D}V^{-1}e + \frac{B - AE[\tilde{r}_p]}{D}V^{-1}\vec{1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}E[\tilde{r}_p]。$$

●

推论：整个投资组合前沿可以由任意两个不同的前沿组合线性生成。

证明：任意给定两个不同的前沿组合p_1、p_2，$E[\tilde{r}_{p_1}] \neq E[\tilde{r}_{p_2}]$。在组合前沿上任意前沿组合$q$，存在$\alpha$，使得$E[\tilde{r}_q] = \alpha E[\tilde{r}_{p_1}] + (1-\alpha)E[\tilde{r}_{p_2}]$成立。因此我们有：

$$\begin{aligned} \alpha w_{p_1} + (1-\alpha)w_{p_2} &= \alpha(g + hE[\tilde{r}_{p_1}]) + (1-\alpha)(g + hE[\tilde{r}_{p_2}]) \\ &= g + h(\alpha E[\tilde{r}_{p_1}] + (1-\alpha)E[\tilde{r}_{p_2}]) \\ &= g + hE[\tilde{r}_q] \\ &= w_q \end{aligned}$$

证明完毕。 ■

推论：前沿组合的任意线性组合是一个前沿组合。

证明：给定 m 个前沿组合，记$\{w_i, i = 1,2,\cdots,m\}$分别是其权重向量，记这 m 个前沿组合的期望回报率分别为$E[\tilde{r}_i], i = 1,2,\cdots,m$; 假定$w_i, i = 1,2,\cdots,m$是关于这 m 个前沿组合的线性组合的组合系数，满足$\sum_i \alpha_i = 1$，则该线性组合满足：

$$\sum_i \alpha_i w_i = \sum_i \alpha_i (g + hE[\tilde{r}_i]) = g + h(\sum_i \alpha_i E[\tilde{r}_i]),$$

所以前沿组合的任意线性组合仍然是一个前沿组合

证明完毕。 ■

2.2.3 风险资产组合前沿的一些性质

性质 2.2.1：任意两个前沿组合p和q的回报率之间的协方差可以表示为：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C})(E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{C}) + \frac{1}{C}。 \qquad (2.2.8)$$

证明：$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = w_p^T V w_q = (g + hE[\tilde{r}_p])^T V (g + hE[\tilde{r}_q])$

$$= E[\tilde{r}_p]E[\tilde{r}_q]h^T V h + E[\tilde{r}_p]h^T V g + E[\tilde{r}_q]g^T V h + g^T V g$$

其中$g^T V g = \frac{B\vec{1}^T V^{-1} - Ae^T V^{-1}}{D} V \frac{BV^{-1}\vec{1} - AV^{-1}e}{D}$

$$= \frac{1}{D^2}[B^2 \vec{1}^T V^{-1} \vec{1} + A^2 e^T V^{-1} e - 2AB 1^T V^{-1} e]$$

$$= \frac{B}{D},$$

类似地，我们有$h^T V g = g^T V h = -\frac{A}{D}$，$h^T V h = \frac{C}{D}$。代入上式，得：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}E[\tilde{r}_p]E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{D}E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{D}E[\tilde{r}_q] + \frac{B}{D}$$

$$= \frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C})(E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{C}) + \frac{1}{C}。$$

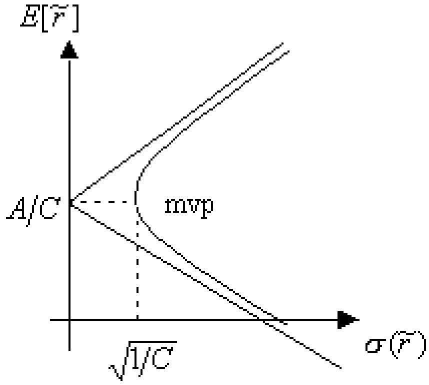
证明完毕。 ■

当p与q取同一个前沿组合时，我们有下面的性质 2.2.2：

性质 2.2.2：任意前沿组合回报率的方差可以表示为：

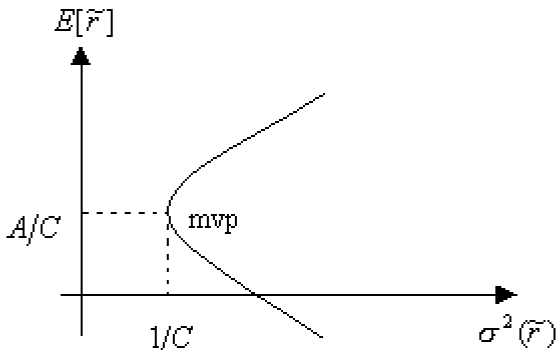
$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C} - \frac{(E[\tilde{r}_p] - A/C)^2}{D/C^2} = 1, \qquad (2.2.9a)$$

或 $\sigma^2(\tilde{r}_p) = \frac{1}{D}(C(E[\tilde{r}_p])^2 - 2AE[\tilde{r}_p] + B)$。 (2.2.9b)



（图 2.2.2）：$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中的投资组合前沿

性质 2.2.2 蕴涵，在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，投资组合前沿是一条双曲线，如图 2.2.2 所示；在$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，投资组合前沿是一条抛物线，如图 2.2.3 所示。在图 2.2.2 和图 2.2.3 中，所有位于投资组合前沿左边的组合都是不可行投资组合，位于组合前沿右边（包括组合前沿）的投资组合是可行投资组合。



(图 2.2.3)：$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中的投资组合前沿

由(2.2.8a)或图(2.2.2)和图(2.2.3)知，存在一个极小方差投资组合mvp (minimum variance portfolio)，其期望回报率为A/C，方差为$1/C$。将$E[\tilde{r}_{mvp}]=A/C$代入(2.2.7)，得：

$$w_{mvp}=g+h\frac{A}{C}=\frac{1}{D}[B(V^{-1}\vec{1})-A(V^{-1}e)]+\frac{1}{D}[C(V^{-1}e)-A(V^{-1}\vec{1})]\frac{A}{C}$$

整理得：

$$w_{mvp}=\frac{1}{C}(V^{-1}\vec{1})。\tag{2.2.10}$$

性质 2.2.3：极小方差投资组合mvp的回报率与其它任意投资组合回报率的协方差等于$1/C$，即极小方差投资组合mvp自身回报率的方差。
证明：任给一个可行投资组合p，有：

$$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{mvp})=w_p^T V w_{mvp}=w_p^T V V^{-1}\vec{1}\frac{1}{C}=\frac{1}{C}。\tag{2.2.11}$$

证明完毕。 ■

定义：所有期望回报率严格超过mvp期望回报率的前沿组合称为有效组合(efficient portfolio)；所有期望回报率严格低于mvp期望回报率的前沿组合称为无效组合(inefficient portfolio)。

从图(2.2.1)中可以看出，任意一个无效投资组合，都存在唯一的有效投资组合与它具有相同的方差和不同的均值。

性质 2.2.4：所有有效组合的全体是一个凸集。
证明：假定$w_i, i=1,2,\cdots,m$是 m 个有效组合的权重向量，记这 m 个有效组合的期望回报率为$E[\tilde{r}_i], i=1,2,\cdots,m$，则有$E[\tilde{r}_i]>A/C$，$i=1,2,\cdots,m$。

任意给定一个这 m 个有效组合的凸组合，假定组合系数为$w_i, i=1,2,\cdots,m$，显然$\sum_i \alpha_i=1$，$\alpha_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,m$。由前面的讨论知道，这 m 个有效组合的凸组合是一个前沿组合，另外$E[\sum_i \alpha_i\tilde{r}_i]=\sum_i \alpha_i E[\tilde{r}_i]>A/C$，因此该凸组合是一个有效组合。
证明完毕。 ■

性质 2.2.5：任意一个不等于mvp的前沿组合p，都存在唯一的一个与p的协方差为零的前沿组合$zc(p)$。

证明：由$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{zc(p)})=\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C})(E[\tilde{r}_{zc(p)}]-\frac{A}{C})+\frac{1}{C}=0$，得：

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\frac{A}{C}-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}。\tag{2.2.12}$$

由等式(2.2.9)或图(2.2.2)知，满足条件的前沿组合$zc(p)$存在唯一。
证明完毕。 ■

我们称前沿组合$zc(p)$是前沿组合p的零-协方差组合。由(2.2.12)知，当前沿组合p是一个有效组合时，它的零-协方差组合$zc(p)$是一个无效组合；当p是无效组合时，$zc(p)$是一个有效组合。

性质 2.2.6：（ⅰ）在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上，过任意前沿组合$p$关于组合前沿的切线与期望回报率轴相交，截距为$E[\tilde{r}_{zc(p)}]$，如图 2.2.4 所示。

(ⅱ) 在$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上，过任意前沿组合$p$与$mvp$的连线与期望回报率轴相交，截距为$E[\tilde{r}_{zc(p)}]$，如图 2.2.4 所示。

证明:（ⅰ）对(2.2.6a)全微分，整理后得过前沿组合p关于组合前沿的切线的斜率为：

$$k=\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)}=\frac{\sigma(\tilde{r}_p)D}{CE[\tilde{r}_p]-A};$$

因此该切线的表达式为：

$$E[\tilde{r}]-E[\tilde{r}_p]=[\sigma(\tilde{r})-\sigma(\tilde{r}_p)]\frac{D\sigma(\tilde{r}_p)}{CE[\tilde{r}_p]-A}。$$

在上式中令$\sigma(\tilde{r})=0$，则得该切线与期望回报率轴相交的截距为：

$$\begin{aligned}E[\tilde{r}]&=E[\tilde{r}_p]-\frac{D\sigma^2(\tilde{r}_p)}{CE[\tilde{r}_p]-A}\\&=E[\tilde{r}_p]-\frac{C(E[\tilde{r}_p]-A/C)^2+D/C}{CE[\tilde{r}_p]-A}\\&=A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}\\&=E[\tilde{r}_{zc(p)}]。\end{aligned}$$

（ⅱ）利用两点式，前沿组合p与mvp的连线方程为：

$$\frac{E[\tilde{r}]-E[\tilde{r}_p]}{A/C-E[\tilde{r}_p]}=\frac{\sigma^2(\tilde{r})-\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_p)},$$

在上式中令$\sigma^2(\tilde{r})=0$，则得该直线与期望回报率轴相交的截距为：

$$\begin{aligned}E[\tilde{r}]&=E[\tilde{r}_p]-\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)(A/C-E[\tilde{r}_p])}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_p)}\\&=E[\tilde{r}_p]-\frac{[\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C})^2+\frac{1}{C}](\frac{A}{C}-E[\tilde{r}_p])}{-\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C})^2}\\&=A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}\\&=E[\tilde{r}_{zc(p)}]。\end{aligned}$$

证明完毕。 ■

性质 2.2.7：设p是一个前沿组合，$p\neq mvp$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]。\tag{2.2.13}$$

此处$\beta_{qp}=cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/var(\tilde{r}_p)$是贝塔系数。

证明：$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=w_p^TVw_q=[\lambda(e^TV^{-1})+\gamma(1^TV^{-1})]Vw_q$

$$=\lambda e^Tw_q+\gamma=\lambda E[\tilde{r}_q]+\gamma。$$

考虑到$\lambda E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\gamma=cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{zc(p)})=0$，求解出$\gamma$，代回到上式，得：

$$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=\lambda(E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])， \quad (2.2.14a)$$

类似地，我们有：

$$var(\tilde{r}_p)=\lambda(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])。 \quad (2.2.14b)$$

将(2.2.14a)与(2.2.14b)相除，整理得：

$$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])。 \quad (2.2.15)$$

因此有：$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]$。

证明完毕。 ■

考虑到$zc(zc(p))=p$，由(2.2.13)，我们：

$$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qzc(p)})E[\tilde{r}_p]+\beta_{qzc(p)}E[\tilde{r}_{zc(p)}]。 \quad (2.2.16)$$

其中$\beta_{qp}=1-\beta_{qzc(p)}$。

性质 2.2.8：设p是一个前沿组合，$p\neq mvp$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_q。 \quad (2.2.17)$$

其中$cov(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_q)=cov(\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_q)=E[\tilde{\varepsilon}_q]$，其中$\tilde{\varepsilon}_q$不依赖于前沿组合$p$的选取。

证明：（ i ）将随机变量$\tilde{r}_q$关于$\tilde{r}_p$、$\tilde{r}_{zc(p)}$作投影，得：

$$\tilde{r}_q=\beta_0+\beta_1\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_2\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp}， \quad (2.2.18)$$

其中$cov(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_{qp})=cov(\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_{qp})=E[\tilde{\varepsilon}_{qp}]=0$。

利用(2.2.13)，得：

$$\beta_1=1-\beta_{qp}，\ \beta_2=\beta_{qp}，\ \beta_0=0。$$

代回到(2.2.18)，得：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp}。$$

（ ii ）记$\tilde{Q}_{qp}=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p$，则$\tilde{Q}_{qp}$是一个前沿组合。由(2.1.13)得，$E[\tilde{Q}_{qp}]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]=E[\tilde{r}_q]$，考虑到给定期望回报率下的前沿组合的唯一性，可得$\tilde{Q}_{qp}$的选取独立于前沿组合$p$的选取。

证明完毕。 ■

性质 2.2.8 蕴涵，任意一个可行投资组合可以正交投影为一个前沿组合$\tilde{Q}_q$和一个期望回报率为零的噪声项$\tilde{\varepsilon}_q$。

因为$E[\tilde{r}_q]=E[\tilde{Q}_q]$，$var(\tilde{r}_q)=var(\tilde{Q}_q+\tilde{\varepsilon}_q)=var(\tilde{Q}_q)+var(\tilde{\varepsilon}_q)$。因此如果个体偏爱较高的期望回报率和较低的方差，则在给定期望回报率下，该个体可以通过选择前沿组合$\tilde{Q}_q$来回避掉由$\tilde{\varepsilon}_q$带来的风险。

续例 2.2.1：在例 2.2.1 中，前沿组合的期望回报率与方差之间的关系可以简化为：

$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/6} - \frac{(E[\tilde{r}_p]-4/3)^2}{1/18} = 1$，

任意一个可行组合都可以分解为一个前沿组合和一个非系统风险。例如，给定一个投资组合$w_q^T = (1,2,-2)$，其随机回报率向量和期望回报率可以分别刻画为：

$$\tilde{r}_q = (4,-2,4,2), \quad E[\tilde{r}_q] = 2。$$

取前沿组合p，其投资组合权重向量为$w_p^T = (1/2,0,1/2)$，其随机回报率向量为$\tilde{r}_p = (1,1,0,2)$，期望回报率为$E[\tilde{r}_p] = 1$，该前沿组合的零协方差组合的期望回报率满足：

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}$$

$$= \frac{8}{6} - \frac{2/36}{1-8/6} = 1.5$$

注意到此处 A/C=4/3，所以p是一个无效组合，$zc(p)$是一个有效组合。$zc(p)$

可以刻画为：

$$w_{zc(p)} = \begin{pmatrix}1.5\\-2\\1.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

其随机回报率向量为$\tilde{r}_{zc(p)} = (1,1,2,2)$。

由此我们有：

$$\beta_{qp} = \frac{cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)}{var(\tilde{r}_p)} = -1,$$

$$\beta_{qzc(p)} = \frac{cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_{zc(p)})}{var(\tilde{r}_{zc(p)})} = 2,$$

所以我们可以将$\tilde{r}_q$分解为：

$$\tilde{r}_q = -\tilde{r}_p + 2\tilde{r}_{zc(p)} + \tilde{\varepsilon}_q,$$

其中$\tilde{\varepsilon}_q = (3,-3,0,0)$满足$cov(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_p) = cov(\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_p) = E[\tilde{\varepsilon}_p] = 0$。

考虑到$E[\tilde{r}_q] = 2$，存在一个期望回报率等于 2 的前沿组合Q_q，满足：

$$w_{Q_q} = \begin{pmatrix}1.5\\-2\\1.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} E[\tilde{r}_q] = \begin{pmatrix}-1/2\\2\\-1/2\end{pmatrix}$$

其随机回报率$\tilde{Q}_q = (1,1,4,2) = -\tilde{r}_p + 2\tilde{r}_{zc(p)}$独立于前沿组合$p$的选取。

§2.3 引入无风险资产后的投资组合前沿

2.3.1 组合前沿的求解

假定经济中除了 N 种风险资产外，还存在一种无风险资产。记 N 种风险资产的期望回报率向量为e，无风险资产上的期望回报率为r_f，V为 N 种

风险资产回报率的方差-协方差矩阵，$\vec{1}$为由 1 构成的 N 向量；记w为投资组合在 N 风险资产上的权重，$1-w^T\vec{1}$为该投资组合在无风险资产上的权重。假定经济中个体可以无限制地卖空风险资产，无限制地以r_f借钱投资，市场是无摩擦的。

令p是一个由 N+1 种资产构成的前沿组合，给定期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，则w_p是下述最小化问题的解：

$$\min_w \frac{1}{2} w^T V w$$

Subject to:

$$w^T e + (1-w^T\vec{1})r_f = E[\tilde{r}_p] \ , \tag{2.3.1}$$

拉格朗日函数可以表示为：

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda\{E[\tilde{r}_p] - w^T e - (1-w^T\vec{1})r_f\}$$

其中λ为相应于约束方程(2.3.1)的拉格朗日乘子。

求解上述最优化问题，得一阶条件为：

$$V w_p = \lambda(e - \vec{1} r_f)。 \tag{2.3.2}$$

因此前沿组合可以表示为；

$$w_p = \lambda V^{-1}(e - \vec{1} r_f)。 \tag{2.3.3}$$

将上式代回(2.3.1)式，整理得：

$$\lambda = \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H}, \tag{2.3.4}$$

其中$H = (e-\vec{1}r_f)^T V^{-1}(e-\vec{1}r_f) = B + Cr_f^2 - 2Ar_f > 0$。

2.3.2 组合前沿的性质

性质 2.3.1：任意前沿组合的方差可以表示为：

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = (E[\tilde{r}_p] - r_f)^2 / H。 \tag{2.3.5}$$

因此在$\sigma(\tilde{r}) - E[\tilde{r}]$平面上可以表示为过点$(0, r_f)$、斜率为$\sqrt{H}$和$-\sqrt{H}$的射线。

证明：对于任意一个前沿组合p，我们有：

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = w_p^T V w_p = (\frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H})^2 (e - \vec{1}r_f)^T V^{-1}(e - \vec{1}r_f)$$

$$= \frac{(E[\tilde{r}_p] - r_f)^2}{H},$$

因此在$\sigma(\tilde{r}) - E[\tilde{r}]$平面上表现为两条过点$(0, r_f)$、斜率为$\sqrt{H}$和$-\sqrt{H}$的射线：

$$\sigma(\tilde{r}_p) = \begin{cases} \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}} & 如果 E[\tilde{r}_p] \geq r_f \\ -\frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}} & 如果 E[\tilde{r}_p] < r_f \end{cases}。 \tag{2.3.6}$$

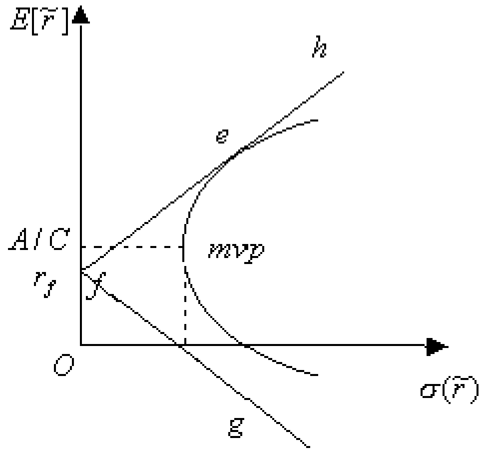
证明完毕。 ■

在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，刻画前沿组合的两条射线按三种情况分别由图(2.3.1-3)给出：

（1）、$r_f < A/C$。

当$r_f < A/C$时，过点$f(0,r_f)$向风险资产组合前沿（双曲线）作切线，切点为e，则$E[\tilde{r}_{zc(e)}]=r_f$。根据 2.2 节的讨论，$E[\tilde{r}_e]=A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}$。因此该切线的斜率为：

$$k=\frac{E[\tilde{r}_e]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)}\text{。}$$



(图 2.3.1)：当$r_f < A/C$时的前沿组合。

考虑到切点e在风险资产组合前沿上，因此有：

$$\sigma^2(\tilde{r}_e)=\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_e]-\frac{A}{C})^2+\frac{1}{C}$$

$$=\frac{C}{D}(\frac{D/C^2}{r_f-A/C})^2+\frac{1}{C}$$

$$=\frac{H}{(Cr_f-A)^2}$$

因此该切线的斜率可以表示为：

$$k=\frac{E[\tilde{r}_e]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)}=(A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}-r_f)\frac{C(r_f-A/C)}{\sqrt{H}}$$

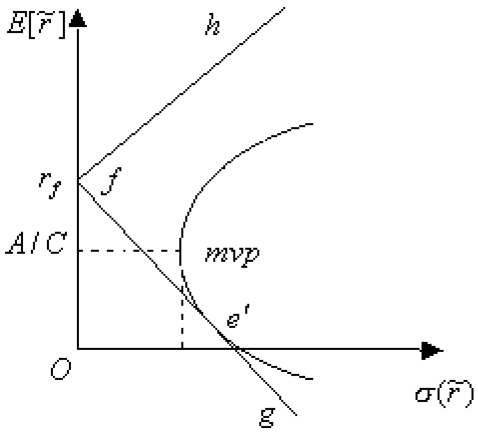
$$=\frac{H}{Cr_f-A}\frac{Cr_f-A}{\sqrt{H}}=\sqrt{H}\text{。}$$

由此可见，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合e线性生成，即$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中的射线$feh$和$fg$（见图 2.3.1）。其中位于线段

$\overline{fe}$上的前沿组合可以通过部分投资于切点组合e、部分投资于无风险资产而达到；位于射线$\overrightarrow{eh}$上的前沿组合可以通过卖空无风险资产、投资于切点组合e而达到；位于射线$\overrightarrow{fg}$上的前沿组合可以通过卖空切点组合e、投资于无风险资产而达到。

（2）、$r_f > A/C$

当$r_f > A/C$时，类似地我们可以证明，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合e'线性生成，即图 2.3.2 中的射线$\overrightarrow{fh}$和$\overrightarrow{fg}$。其中射线$\overrightarrow{fh}$上的前沿组合可以通过卖空切点组合e'、投资无风险资产实现；线段$\overline{fe'}$上的前沿组合可以通过部分投资无风险资产、部分投资切点组合e'来实现；射线$\overrightarrow{e'g}$可以通过卖空无风险资产、投资切点组合来实现。



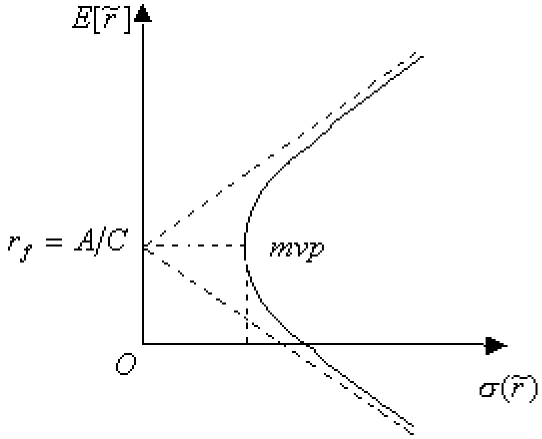
（图 2.3.2）：$r_f > A/C$时的前沿组合

（3）、$r_f = A/C$

当$r_f = A/C$时，$H = B + Cr_f^2 - 2Ar_f = D/C$。因此前沿组合可以表示为：

$$E[\tilde{r}_p] = r_f \pm \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p) = A/C \pm \sqrt{D/C}\sigma(\tilde{r}_p)。$$

因此引入无风险资产后的前沿组合是风险资产前沿组合（双曲线）的两条渐近线（见图 2.3.3）。



（图 2.3.3）：$r_f = A/C$时的投资组合前沿。

此时， 有$\vec{1}^T w_p = \vec{1}^T V^{-1}(e - A/C\,\vec{1})\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H} = 0$，前沿组合可以通过将所有财富投资在无风险资产上、并持有一个风险资产的套利组合（投资组合的总权重为零）来达到。

性质 2.3.2：设p是一个前沿组合，$E[\tilde{r}_p] \neq r_f$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qp}(E[\tilde{r}_p] - r_f)。\quad (2.3.7)$$

证明：$cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p) = w_q^T V w_p = W_q^T V V^{-1}(e - \vec{1} r_f)\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H}$

$$= \frac{(E[\tilde{r}_q]-r_f)(E[\tilde{r}_p]-r_f)}{H}; \quad (2.3.8a)$$

类似地，我们有：

$$var(\tilde{r}_p) = \frac{(E[\tilde{r}_p]-r_f)^2}{H}。\quad (2.3.8b)$$

将(2.3.8a)和(2.3.8b)相除，整理得：

$$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qp}(E[\tilde{r}_p] - r_f)。$$

证明完毕。 ■

性质 2.3.3：设p是一个前沿组合，$E[\tilde{r}_p] \neq r_f$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$\tilde{r}_q = (1 - \beta_{qp}) r_f + \beta_{qp}\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp}$$

且$\tilde{\varepsilon}_q$不依赖于p的选取。

证明：将随机变量$\tilde{r}_q$关于$\tilde{r}_p$作投影，得：

$$\tilde{r}_q = a + b\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp},$$

其中$E[\tilde{\varepsilon}_{qp}]=0$。由(2.3.7)得：

$$a=(1-\beta_{qp})r_f,\qquad b=\beta_{qp}。$$

因此上述分解将可行组合q分解成一个前沿组合和一个噪声项，显然这种分解不依赖于p的选取，因此$\tilde{\varepsilon}_q$也不依赖于p的选取。■

性质 2.3.3 蕴涵，个体在进行投资决策时，个体应该采取分散化投资的策略，选取有效组合以降低风险。

续例 2.2.1：在例 2.2.1 中，假定经济中还存在一种无风险资产 f，其回报率为r_f，则前沿组合可以通过如下最优化问题求解：

$$\min_{\{w_1,w_2,w_3\}}\frac{1}{2}w_1^2+\frac{1}{8}w_2^2+\frac{1}{2}w_3^2$$

Subject to:

$$w_1+\frac{3}{2}w_2+w_3+(1-w_1-w_2-w_3)r_f=E[\tilde{r}_p],$$

求解上述最优化问题，我们有：

$$w_p=\lambda V^{-1}(e-\vec{1}r_f)$$

$$=\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{11+6r_f^2-16r_f}\begin{pmatrix}1-r_f\\6-4r_f\\1-r_f\end{pmatrix},$$

（1）假定$r_f=1<4/3$，则$w_p=(E[\tilde{r}_p]-1)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$1-w_p^T\vec{1}=3-2E[\tilde{r}_p]$，

前沿组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_p=(1,1,2E[\tilde{r}_p]-1,2E[\tilde{r}_p]-1)。$$

切点组合e的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_e]=A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}=1.5$$

因此切点组合为：

$$w_e=(0,1,0)^T,\qquad \tilde{r}_e=(1,1,2,2)。$$

任意一个期望回报率为$E[\tilde{r}_p]$的前沿组合，由$3-2E[\tilde{r}_p]$份无风险资产和$2E[\tilde{r}_p]-2$切点组合构成。

任意一个可行投资组合q，可以分解为一个前沿组合和一个非系统性风险。例如，取可行投资组合q，假定投资组合权重为$w_q=(1/2,1,1/2)$，随机回报率向量为$\tilde{r}_q=(1,1,2,3)$；任取一个前沿组合p，其随机回报率向量为$\tilde{r}_p=(1,1,3,3)$。我们有：

$$\beta_{qp}=cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/var(\tilde{r}_p)=3/4,$$

所以我们有：

$$\tilde{r}_q = \frac{3}{4}\tilde{r}_p + \frac{1}{4}r_f + \tilde{\varepsilon}_q,$$

其中$\tilde{\varepsilon}_q = (0,0,-1/2,1/2)$，满足$cov(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_p) = E[\tilde{\varepsilon}_p] = 0$。

（2）假定$r_f = 4/3$，则前沿组合$w_p = (E[\tilde{r}_p] - 4/3)(-1,2,-1)^T$，$1 - w_p^T\vec{1} = 1$，即个体将所有财富投资在无风险资产上，同时在风险资产上持有一个套利组合。

（3）假定$r_f = \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$，则$w_p = (E[\tilde{r}_p] - \frac{3}{2})\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$1 - w_p^T\vec{1} = 2E[\tilde{r}_p] - 2$，

前沿组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_p = (E[\tilde{r}_p], E[\tilde{r}_p], 3E[\tilde{r}_p] - 3, -E[\tilde{r}_p] + 3)。$$

切点组合e'的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_{e'}] = A/C - \frac{D/C^2}{r_f - A/C} = 1$$

因此切点组合为：

$$w_{e\prime} = (1/2,0,1/2)^T, \qquad \tilde{r}_{e'} = (1,1,0,2)。$$

任意前沿组合都可以表示为切点组合e'和无风险资产的线性组合。

习题

1、假定经济中有四个等概率发生的自然状态ω_1、ω_2、ω_3和ω_4，假定经济中存在种资产p_A和p_B，其随机回报率如下：

状态 / 资产	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_B$	1	0	－1	0
$\tilde{r}_B$	0.8	0.9	-0.8	-0.9

假定个体初始财富量为 1，个体效用函数为$E[ln(\widetilde{W})]$，试证明：

（1） 这两种投资组合具有相同的均值，但p_A的方差要小于p_B的方差；

（2） 个体投资在p_B上可以有更高的期望效用，尽管其方差比p_A的高。

2、假定经济中存在四个等概率发生的自然状态ω_1、ω_2、ω_3和ω_4，假定经济中存在三种风险资产，其随机回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3$的取值由下表给出：

自然状态 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega)$	1	0	0	1
$\tilde{r}_2(\omega)$	1	1	2	2
$\tilde{r}_3(\omega)$	0	2	0	2

三种资产的随机回报率取值

（1） 求该经济中的期望回报率向量$e=(E[\tilde{r}_1],E[\tilde{r}_2],E[\tilde{r}_3])^T$和方差-协方差矩阵$V$；
（2） （2）试计算该经济中的组合前沿；
（3） 按照(2)的结果求出$E[\tilde{r}_p]=1$时的最优组合；
（4） 是否存在比(3)中求出的最优组合更好的投资策略，如果是的话给出该策略，不是的话说明原因。

3、考虑两个回报率分别为$\tilde{r}_j$和$\tilde{r}_l$的风险资产，假定这两个资产有相同的期望回报率和方差，相关系数为ρ，试证明权重相同的投资组合达到最小方差，且独立于ρ。

4、假定经济中存在两种风险资产和一种无风险资产，同时经济中存在4个等概率的自然状态，假定风险资产不可以卖空。假定无风险资产回报率为r_f，两种风险资产的随机回报率服从：

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_A$	3	1	3	1
$\tilde{r}_B$	3	5	5	3

（1） 试求$E[\tilde{r}_A]$、$E[\tilde{r}_B]$和方差-协方差矩阵。
（2） 试计算由风险资产构成的组合前沿。
（3） 如果$r_f=1.5$，试计算引入无风险资产后的组合前沿，并将资产A的随机回报率分解为前沿组合和非系统性风险。
（4）如果$r_f=1$，试计算引入无风险资产后的组合前沿。

5、令 p 是一个前沿组合，q 为与 p 具有相同期望回报率的可行投资组合。试证明：（1）$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=var(\tilde{r}_p)$，（2）$\tilde{r}_p$和$\tilde{r}_q$的相关系数属于(0,1)。

6、假定投资组合$f_j, j=1,2,\ldots,n$都是有效组合，投资组合p满足$E[\tilde{r}_p]=\sum_{j=1}^{n}w_jE[\tilde{r}_j]$，其中$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。试证明：$E[\tilde{r}_{zc(p)}]\neq\sum_{j=1}^{n}w_jE[\tilde{r}_{zc(j)}]$，等式成立的条件是所有$f_j$完全相同。

7、假定经济中存在 2K 种风险资产，其随机回报率相互独立，方差相等，期望回报率满足：

$E[\tilde{r}_1]=E[\tilde{r}_2]=\ldots=E[\tilde{r}_k]=A, E[\tilde{r}_{k+1}]=E[\tilde{r}_{k+2}]=\ldots=E[\tilde{r}_{2k}]=B$，不妨假定 A>B。

（1）试求经济中的极小方差投资组合 mvp，

（2）不考虑市场摩擦，不考虑风险资产的卖空限制，试计算组合前沿，该组合前沿有何特点？

8、证明由两个具有不同的期望回报率的资产或可行组合构成的组合前沿通过这两个资产或可行组合。

9、在例 2.2.1 中，假定前沿组合p的随机回报率为$\tilde{r}_p=(1,1,0,2)$，

（1） 任取一个可行组合q，其随机回报率满足$\tilde{r}_q=(3,-1,2,2)$，试计算β_{qp}和$\beta_{qzc(p)}$，验证$\beta_{qp}+\beta_{qzc(p)}=1$是否成立，并将$\tilde{r}_q$分解为一个前沿组合的随机回报率和一个非系统性风险。

（2） 任取一个组合l，其随机回报率满足$\tilde{r}_q=(3,1,2,2)$，试计算β_{lp}和$\beta_{lzc(p)}$，验证$\beta_{lp}+\beta_{lzc(p)}=1$是否成立，说明原因。

第三章　静态资本资产定价理论[1]

资本资产定价模型（CAPM）是 60 年代由 Linter(1965,1969)、Mossin(1965)和 Sharpe(1964)等发展起来的。该理论认为，如果人们对预期收益率和风险的预测相同，并且都愿意持有有效投资组合，那么均衡时任意资产的风险溢价等于该资产的β系数和市场组合的风险溢价之积。CAPM 理论之所以重要，是基于如下两个原因：（1）、该理论为目前广泛采用的一类消极投资法（指数方法）提供了理论根据，该投资方法完全按照市场指数构成的组合权重来被动地进行投资；同时该方法为衡量积极的投资管理策略业绩提供了一个简单可行的基准。（2）、该理论给出了各种财务应用中对预期收益的估计方法，为公司理财决策提供了理论依据（见 Black、Jensen 和 Scholes(1972)，Fama 和 MacBeth(1973)，Bodie 和 Merton(1997)）。

§ 3.1 市场组合

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。

3.3.1 不存在无风险资产的情形

假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种风险资产随机回报率的线性组合。假定经济中存在I位投资者，个体i的初始财富量$W_0^i > 0$，w_{ij}为个体i投资在资产j上的财富份额，则个体投资在无风险资产上的财富份额为$w_{i0} = 1 - \sum_{i=1}^{I} w_{ij}$。记经济中总的初始财富量为$W_{m0} = \sum_{i=1}^{I} W_0^i$，整个市场投资在第$j$种资产上的市场份额为$w_{mj}$，则$w_{mj}$满足：

$$\sum_{i=1}^{I} w_{ij} W_0^i = w_{mj} W_{m0}，\text{j=1,2,…N。} \tag{3.1.1}$$

整理得：

$$w_{mj} = \sum_{i=1}^{I} w_{ij} \frac{W_0^i}{W_{m0}}，\text{j=1,2,…N。} \tag{3.1.2}$$

以向量形式表示，我们有：

---

[1]本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、杨云红（2000）、Leroy, 和 Werner (2003)、王江(2006)等教材及相关论文。

$$\begin{pmatrix} w_{m0} \\ \vdots \\ w_{mN} \end{pmatrix} = \frac{W_0^1}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{10} \\ \vdots \\ w_{1N} \end{pmatrix} + \frac{W_0^2}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{20} \\ \vdots \\ w_{2N} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{W_0^I}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{I0} \\ \vdots \\ w_{IN} \end{pmatrix}。 \quad (3.1.2`)$$

因此市场组合的权重向量是个体投资组合权重向量的凸组合。记个体i的投资组合为p_i，其随机回报率向量为$\tilde{r}_{p_i}$，记$\lambda_i = W_0^i / W_{m0}$，记市场组合的随机回报率为$\tilde{r}_m$，则市场组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_m \equiv \sum_{j=1}^{N} w_{mj} \tilde{r}_j = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \tilde{r}_{p_i} 。 \quad (3.1.3)$$

即市场组合回报率是个体投资组合回报率的凸组合。

3.1.2 存在无风险资产的情形

假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产和一种无风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种风险资产随机回报率的线性组合，假定无风险资产的回报率为r_f。假定经济中存在I位投资者，个体i的初始财富量$W_0^i > 0$，w_{ij}为个体i投资在资产j上的财富份额，以$j = 0$代表无风险资产，则w_{i0}代表在无风险资产上的财富份额，个体投资在无风险资产上的财富份额为$w_{i0} = 1 - \sum_{i=1}^{I} w_{ij}$。记经济中总的初始财富量为$W_{m0} = \sum_{i=1}^{I} W_0^i$，整个市场投资在第$j$种资产上的市场份额为$w_{mj}$，则$w_{mj}$满足：

$$\sum_{i=1}^{I} w_{ij} W_0^i = w_{mj} W_{m0}，\text{j=0,1,2,…N}。 \quad (3.1.4)$$

整理得：

$$w_{mj} = \sum_{i=1}^{I} w_{ij} \frac{W_0^i}{W_{m0}}，\text{j=0,1,2,…N}。 \quad (3.1.5)$$

以向量形式表示，我们有：

$$\begin{pmatrix} w_{m0} \\ \vdots \\ w_{mN} \end{pmatrix} = \frac{W_0^1}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{10} \\ \vdots \\ w_{1N} \end{pmatrix} + \frac{W_0^2}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{20} \\ \vdots \\ w_{2N} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{W_0^I}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{I0} \\ \vdots \\ w_{IN} \end{pmatrix}。 \quad (3.1.5`)$$

因此市场组合的权重向量是个体投资组合权重向量的凸组合。类似地，记个体i的投资组合为p_i，其随机回报率向量为$\tilde{r}_{p_i}$，记$\lambda_i = W_0^i / W_{m0}$，记市场组合的随机回报率为$\tilde{r}_m$，则市场组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_m = \sum_{j=1}^{N} w_{mj} \tilde{r}_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{N} w_{mj}\right) r_f = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \tilde{r}_{p_i} 。$$

(3.1.6)
即市场组合回报率是个体投资组合回报率的凸组合。

§ 3.2 资本资产定价模型（CAPM）

3.2.1 零-贝塔 CAPM

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中不存在无风险资产，风险资产可以无限卖空。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。

在上述假定下，在标准偏差-期望回报率($\sigma(\tilde{r})$ -$E[\tilde{r}]$)平面内组合前沿是一条双曲线，有效组合是双曲线上面半支，且有效组合的凸组合也是有效组合。由于投资者都选择有效组合，所以市场组合也是一个有效组合，位于双曲线的上支。考虑到不可能所有投资者都选择最小方差投资组合 mvp，所以市场组合也不可能是最小方差投资组合。

一、证券市场线(Security Market Line)

由于市场组合是一个不等于 mvp 的有效组合，根据性质 2.2.7，对任意可行投资组合q，我们有：

$$E[\tilde{r}_q] = (1-\beta_{qm})E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}E[\tilde{r}_m]。 \quad (3.2.1)$$

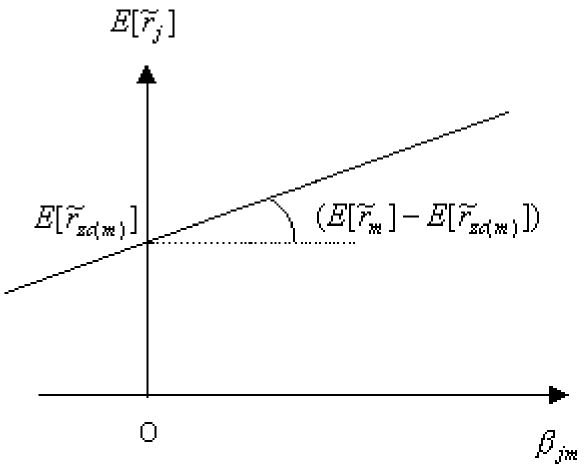
因为所有风险资产都是可行投资组合，所以对$\forall j = 1,2,\cdots,J$，我们有：

$$E[\tilde{r}_j] = (1-\beta_{jm})E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{jm}E[\tilde{r}_m], \quad (3.2.2)$$

方程式(3.2.1)和(3.2.2)蕴涵，所有风险资产（和可行投资组合）的期望回报率依赖于该资产（可行投资组合）期望回报率与市场组合期望回报率的协方差。(3.2.2)可以进一步改写为：

$$E[\tilde{r}_j] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{jm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}]), \quad (3.2.3)$$

因此所有风险资产和可行组合的期望回报率都位于同一条直线上，该直线被称为证券市场线，如图 3.2.1 所示。



（图 3.2.1）：完全风险资产下市场组合是有效组合时的证券市场线

二、零-贝塔 CAPM

定理：3.2.1：在上述假定下，由于市场组合是一个有效组合，其零-协方差组合$zc(m)$是一个无效组合，所以对于任意可行投资组合q，其期望回报率满足：

$$E[\tilde{r}_q]=E[\tilde{r}_{zc(m)}]+\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]), \qquad (3.2.4)$$

$$E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]>0, \qquad (3.2.5)$$

关系式(3.2.4)和(3.2.5)称为零-贝塔 CAPM (Zero-Beta Capital Asset Pricing Model)，由 Black(1972)和 Lintner(1969)给出。零-贝塔 CAPM 蕴涵，均衡时资产和可行投资组合的期望回报率仅反映了同市场组合相关的那部分风险。

3.2.2 传统 CAPM

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中存在许多风险资产和一种无风险资产，风险资产可以无限卖空，无风险资产可以以一个无风险利率r_f无限制地借贷。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。

在上述假定下，在标准偏差-期望回报率($\sigma(\tilde{r})$ -$E[\tilde{r}]$)平面内组合前沿是两条射线，有效组合是两条射线的上面一支，且有效组合的凸组合也是有效组合。由于投资者都选择有效组合，所以市场组合也是一个有效组合，位于两条射线的上面一支。根据性质 2.3.2，我们有如下定理：

定理：3.2.2：对于任意可行投资组合q，有：

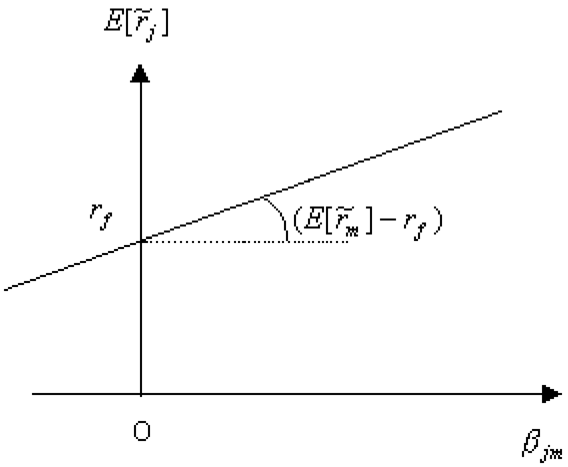
$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f), \tag{3.2.6}$$

关系式(3.2.6)被称为传统资本资产定价模型（传统 CAPM），该模型由 Linter (1965)、Mossin(1965)和 Sharpe(1964)独立得到。在该模型中，任意投资组合的风险溢金等于该投资组合的贝塔系数乘以市场组合的风险溢金。

因为所有风险资产都是可行投资组合，所以对$\forall j=1,2,\cdots,J$，我们有：

$$E[\tilde{r}_j]=r_f+\beta_{jm}(E[\tilde{r}_m]-r_f), \tag{3.2.7}$$

在期望回报率-贝塔系数平面内，所有风险资产和可行组合都位于同一条直线上，即存在无风险市场的证券市场线上，如图 3.2.2 所示。



（图 3.2.2）：存在无风险资产时的证券市场线

§ 3.3 CAPM 的两个例子

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收；假定信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中风险资产可以无限卖空，个体可以以相同的利率借贷。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。

假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产和一种无风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种

风险资产随机回报率的线性组合，假定无风险资产的回报率为r_f。假定经济中存在I位投资者，个体i的初始财富量$W_0^i > 0$，w_{ij}为个体i在资产j上的投资组合权重。

在上述假定下，当个体效用函数取二次多项式形式，或者资产回报率服从多变量正态分布时，则个体偏好有均值-方差效用函数表示，同时可以直接从个体最优决策推导出传统 CAPM，该工作由 Rubinstein(1976)给出。

3.3.1 效用函数取二次多项式时的 CAPM 推导

假定所有个体效用函数都取二次多项式形式，即：

$$u_i(\widetilde{W}_i) = a_i\widetilde{W}_i - \frac{b_i}{2}\widetilde{W}_i^{\,2}, \quad i = 1,2,\cdots,I。 \tag{3.3.1}$$

个体i的最大化问题可以刻画为：

$$\max_{w_{ij}} E[u_i(\widetilde{W}_i)] = E[u_i(W_0^i(1 + r_f + \textstyle\sum_{j=1}^N w_{ij}(\tilde{r}_j - r_f)))]。 \tag{3.3.2}$$

求解个体i的最大化问题，得一阶条件为：

$$E[(a_i - b_i\widetilde{W}_i)W_0^i(\tilde{r}_j - r_f)] = 0。\quad j = 1,2,\cdots,N \tag{3.3.3}$$

考虑到$E[AB] = E[A]E[B] + cov(A,B)$，所以上式可以改写为：

$$E[(a_i - b_i\widetilde{W}_i)](E[\tilde{r}_j] - r_f)] + cov(a_i - b_i\widetilde{W}_i, \tilde{r}_j - r_f) = 0。$$

整理得：

$$(\frac{a_i}{b_i} - E[\widetilde{W}_i])(E[\tilde{r}_j] - r_f) = cov(\widetilde{W}_i, \tilde{r}_j)。 \tag{3.3.4}$$

将上式关于i求和，注意到：

$$\textstyle\sum_{i=1}^I \widetilde{W}_i \equiv \widetilde{M} = W_{m0}(1 + \tilde{r}_m),$$

我们有：

$$(E[\tilde{r}_j] - r_f) = (\textstyle\sum_{i=1}^I \frac{a_i}{b_i} - E[\widetilde{M}])^{-1} W_{m0}\, cov(\tilde{r}_m, \tilde{r}_j)。 \tag{3.3.5}$$

其中W_{m0}和$\widetilde{M}$分别为市场上的初始财富总量和期末随机财富总量，$\tilde{r}_m$为市场回报率。对任意可行组合q，记其随机回报率为：

$$\tilde{r}_q = w_{qj}\tilde{r}_j$$

其中w_{qj}为该组合在资产 j 上的权重。在(3.3.5)两边乘上w_{qj}，然后对 j 求和，整理得：

$$(E[\tilde{r}_q] - r_f) = (\textstyle\sum_{i=1}^I \frac{a_i}{b_i} - E[\widetilde{M}])^{-1} W_{m0}\, cov(\tilde{r}_m, \tilde{r}_q); \tag{3.3.6}$$

考虑到市场组合也是一个可行组合，因此有：

$$(E[\tilde{r}_m] - r_f) = (\textstyle\sum_{i=1}^I \frac{a_i}{b_i} - E[\widetilde{M}])^{-1} W_{m0}\, var(\tilde{r}_m)。 \tag{3.3.7}$$

将(3.3.6)除以(3.3.7)，整理得：

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f)。$$

因此传统 CAPM 定价公式成立。

3.3.2 多变量正态分布下的 CAPM 推导

假定经济中风险资产回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$服从多变量正态分布，因此投资者期末随机财富$\widetilde{W}_i$，$i=1,2,\ldots,I$也服从多变量正态分布。个体i的最大化问题为：

$$\max_{w_{ij}} E[u_i(\widetilde{W}_i)]=E[u_i(W_0^i(1+r_f+\textstyle\sum_{j=1}^{N} w_{ij}(\tilde{r}_j-r_f)))]。$$

求解上述最大化问题，得一阶条件为：

$$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)](\tilde{r}_j-r_f)]=0，$$

上式蕴涵：

$$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)]E[\tilde{r}_j-r_f]=-cov(u_i{}'(\widetilde{W}_i),\tilde{r}_j)。\tag{3.3.8}$$

考虑到$\widetilde{W}_i$和$\tilde{r}_j$都服从正态分布，假定效用函数二次连续可微，由 Stein 引理[2]可得：

$$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)](E[\tilde{r}_j]-r_f)=-E[u_i{}''(\widetilde{W}_i)]\,cov(\widetilde{W}_i,\tilde{r}_j)。\tag{3.3.9}$$

记$\theta_i\equiv-E[u_i{}''(\widetilde{W}_i)]/E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)]$为个体$i$的整体绝对风险回避系数，

则(3.3.9)可以改写为：

$$E[\tilde{r}_j]-r_f=\theta_i\,cov(\widetilde{W}_i,\tilde{r}_j),\tag{3.3.10}$$

(3.3.10)蕴涵，风险资产 j 的股票溢价等于个体i的整体绝对风险回避系数乘以个体i的随机财富与资产 j 的随机回报率的协方差。

(3.3.10)可以进一步改写为：

$$\theta_i^{-1}(E[\tilde{r}_j]-r_f)=cov(\widetilde{W}_i,\tilde{r}_j)。$$

将上式关于i求和，整理得：

$$\begin{aligned}E[\tilde{r}_j]-r_f&=(\textstyle\sum_i\theta_i^{-1})^{-1}cov(\widetilde{M},\tilde{r}_j)\\&=(\textstyle\sum_i\theta_i^{-1})^{-1}W_{m0}\,cov(\tilde{r}_m,\tilde{r}_j),\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

其中$W_{m0}(\sum_i\theta_i^{-1})^{-1}$可以看成均衡时整个经济的总相对风险回避系数。

类似于 3.3.1，对于任意可行投资组合q，记其随机回报率为：

$$\tilde{r}_q=w_{qj}\tilde{r}_j$$

其中w_{qj}为该组合在资产 j 上的权重。在(3.3.5)两边乘上w_{qj}，然后对 j 求和，

---

[2] Stein 引理表明，如果$\tilde{Y}$和$\tilde{X}$服从二变量正态分布，函数$g(.)$连续可微，则有：

$$\text{cov}(g(\tilde{X}),\tilde{Y})=E[g'(\tilde{X})]\text{cov}(\tilde{X},\tilde{Y})。$$

整理得：

有：

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=(\sum_i\theta_i^{-1})^{-1}W_{m0}\,cov(\tilde{r}_m,\tilde{r}_q)， \tag{3.3.12}$$

即投资组合q的风险溢金，等于该组合回报率与市场组合回报率的协方差乘上总相对风险回避系数。考虑到市场组合也是一个可行组合，因此有：

$$E[\tilde{r}_m]-r_f=(\sum_i\theta_i^{-1})^{-1}W_{m0}\,var(\tilde{r}_m)。 \tag{3.4.12}$$

所以市场组合的风险溢金等于经济中总相对风险回避系数乘上该组合的方差。

将(3.4.11)式除以(3.4.12)式，整理后即得传统 CAPM 的定价公式：

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f)。$$

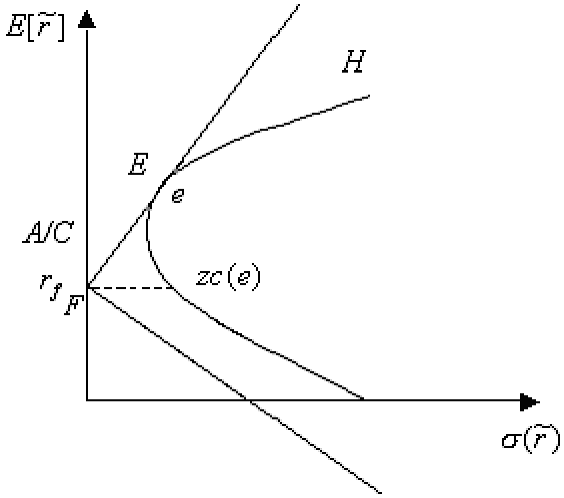
§ 3.4 带约束的 CAPM

前面的讨论都假定了个体可以无限制地以相同的利率借取或贷出无风险资金，这种假定同真实经济是不相吻的。在真实经济环境中，投资者要受到资金约束，不可能无限制地借取无风险资产；同时存贷款利率也并不相同。Merton(1982)在假定个体不能借钱投资或借、贷利率不同的假定下，给出了带约束的资本资产定价模型(constrained CAPM)，下面我们来介绍该模型。

3.4.1 禁止贷款时的 CAPM

假定市场中存在 I 位投资者，所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，风险资产和无风险资产正供给，假定风险资产可以无限卖空，无风险资产不允许卖空（即投资者无法通过贷款方式获得资金来进行风险投资）；假定市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。

假定投资者都选择持有有效组合，在投资者不允许通过贷款方式获得资金以进行风险投资的假定下，有效组合位于图 3.4.1 中的曲线 FEH 上。



（图 3.4.1）：禁止借款情形下的前沿组合

在该经济中，部分对期望回报率要求低于切点组合期望回报率$E[\tilde{r}_e]$的个体，他们将选择部分持有无风险资产和部分持有风险资产，其投资组合位于线段$\overline{FE}$上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i e + (1-\lambda_i) f,\quad 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1,2,\ldots,k \tag{3.4.1}$$

其中e和f分别为切点组合和无风险资产。

当投资者对期望回报率的要求高于切点组合期望回报率$E[\tilde{r}_e]$时，需要卖空无风险资产以投资切点组合。在不允许借贷的假定下，投资者为获得高于切点组合的期望回报率，由于无法借贷，只有卖空较低回报率的风险资产以获得资金，再投资在较高回报率的资产上，其投资组合位于双曲线 EH 段上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i e + (1-\lambda_i) zc(e),\quad \lambda_i \ge 1 i = k+1,\ldots,I,\text{。} \tag{3.4.2}$$

注意到此处$E[\tilde{r}_{zc(e)}] = r_f$，$\sigma^2(\tilde{r}_{zc(e)}) > 0$。

由于市场组合是个体组合的凸组合，因此市场组合可以表示为：

$$m = af + be + (1-a-b) zc(e), \tag{3.4.3}$$

其中$1 > a > 0$，$b > 0$，$a + b \ge 1$。比较(3.4.1-2)与(3.4.3)可以看出，在上述假定下，市场组合一般来说并不是有效组合。

定理 3.4.1：在个体都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，以无风险利率贷款被严格禁止的假定下，对任意可行投资组合q，有：

$$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}]), \tag{3.4.4}$$

且有

$$E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0,\qquad E[\tilde{r}_{zc(m)}] \ge r_f\text{。} \tag{3.4.5}$$

证明：留作习题，略。

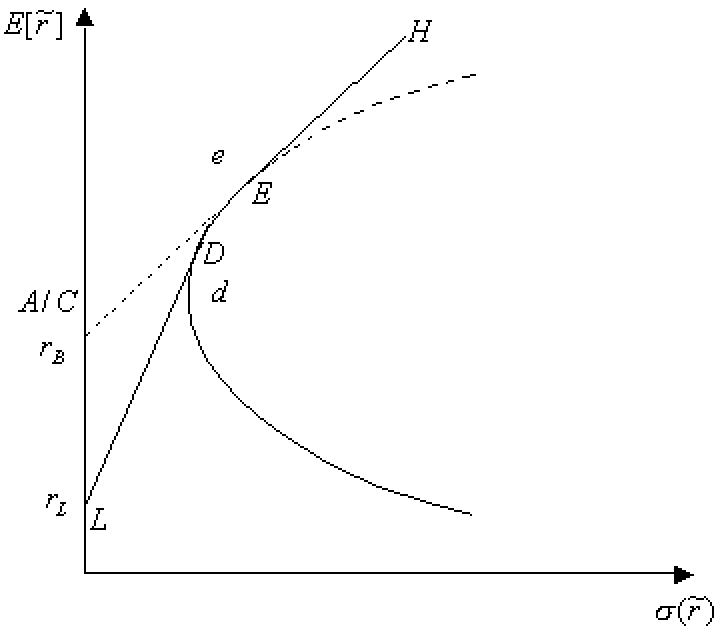
3.4.2 存、贷款利率不等时的 CAPM

在真实经济中存贷款利率通常并不相同，因此我们仅给出一个无风险利率的做法是不恰当的，需要给以修正。当投资者都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，借款利率大于贷款利率时，个体投资组合都位于图 3.4.2 中的曲线 LDEH 上。该经济中存在两个切点组合d和e。

当个体部分投资无风险资产l，部分投资风险资产时，个体投资组合位于线段$\overline{LE}$上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i l + (1-\lambda_i)d, \quad 0 \le \lambda_i \le 1, \tag{3.4.6}$$

其投资组合的期望回报率满足$r_l \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_d]$；



（图 3.4.2）：借款利率不等于贷款利率时的前沿组合

当个体希望获得的期望回报率介于$E[\tilde{r}_d]$和$E[\tilde{r}_e]$之间时，个体无法通过以无风险利率r_l来获得资金，因此个体只能通过风险资产组合来达到，该组合可以表示为：

$$p_i = \lambda_i d + (1-\lambda_i)e, \ 0 \le \lambda_i \le 1。 \tag{3.4.7}$$

其期望回报率满足：$E[\tilde{r}_d] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_e]$。

当个体希望获得的期望回报率高于$E[\tilde{r}_e]$时，个体可以以无风险利率r_b获取资金b，投资在风险资产上时，个体的投资组合位于射线$\overrightarrow{EH}$上，可以表

示为：

$$p_i = \lambda_i b + (1-\lambda_i)e，\lambda_i < 0， \tag{3.4.8}$$

其投资组合的期望回报率满足：$E[\tilde{r}_{p_i}] \ge E[\tilde{r}_e]$。

考虑到市场组合是个体组合的凸组合，因此市场组合可以表示为：

$$m = a_l l + a_d d + a_e e + (1-a_l-a_d-a_e)b， \tag{3.4.9}$$

其中$a_l > 0$，$a_d > 0$，$a_e > 0$，$1-a_l-a_d-a_e < 0$。很显然，此时市场组合通常不是一个有效组合

市场组合的随机回报率可以表示为

$$\tilde{r}_m = a_l r_l + a_d \tilde{r}_d + a_e \tilde{r}_e + (1-a_l-a_d-a_e) r_b， \tag{3.4.10}$$

定理 3.4.2：在个体都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，借款利率要严格高于贷款利率的假定下，对任意可行投资组合q，有：

$$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])， \tag{3.4.11}$$

且有

$$E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0， \quad r_B \ge E[\tilde{r}_{zc(m)}] \ge r_L。 \tag{3.4.12}$$

证明：留作习题，略

§ 3.5 市场摩擦和 CAPM 的失效

在前面各节中假定了个体可以无限卖空风险资产，可以以无风险利率无限借贷，在真实经济中显然是不可能的。如果经济中投资者不能无限制地卖空风险资产，不能无限制地借贷，则上述讨论不再成立，静态 CAPM 定理也不再成立。下面我们在个体不能卖空风险资产，经济中不存在无风险资产的假定下，给出一个 CAPM 不成立的例子。

假定经济中只有三种风险资产a_1、a_2和a_3，不存在无风险资产，个体不能卖空风险资产，假定这三种风险资产的随机回报率分别为：

$$\tilde{r}_1、\tilde{r}_2和\tilde{r}_3 = -\tilde{r}_1 + (1+\tfrac{1}{2})\tilde{r}_2， \tag{3.5.1}$$

满足：

$$3E[\tilde{r}_1] = E[\tilde{r}_2]， \tag{3.5.2a}$$

$$cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = 0，var(\tilde{r}_1) = \sigma_1^2 < \sigma_2^2 = var(\tilde{r}_2)。 \tag{3.5.2b}$$

a_3的期望回报率和方差分别为：

$$E[\tilde{r}_3] = -E[\tilde{r}_1] + \tfrac{3}{2}E[\tilde{r}_2] = \tfrac{7}{2}E[\tilde{r}_1]； \tag{3.5.3a}$$

$$var(\tilde{r}_3) = \sigma_1^2 + \tfrac{9}{4}\sigma_2^2 > \sigma_2^2。 \tag{3.5.3b}$$

记投资组合p为由a_1和a_2构成的、与a_3有相同期望回报率的投资组合，其权重向量为$(\lambda,1-\lambda)$，则λ必须满足：

$$E[\tilde{r}_p]=\lambda E[\tilde{r}_1]+(1-\lambda)E[\tilde{r}_2]=E[\tilde{r}_3]=\frac{7}{2}E[\tilde{r}_1],$$

求解上述方程，得：

$$\lambda=-1/4。\tag{3.5.4}$$

该组合的方差满足：

$$var(\tilde{r}_p)=\frac{1}{16}\sigma_1^2+\frac{25}{16}\sigma_2^2<var(\tilde{r}_3)。\tag{3.5.5}$$

如果个体可以无限制地卖空风险资产，则a_3是一个被占优资产，经济中的组合前沿是一条包含a_1和a_2的双曲线，组合前沿上的任意投资组合都可以表示为a_1和a_2的线性组合，此时零-贝塔 CAPM 成立。

当个体无法卖空风险资产时，经济中的投资组合前沿由两段双曲线构成，如图 3.5.1 所示。下面我们来证明 CAPM 定理并不成立：

假定在该经济中，所有个体都持有前沿组合。由于组合前沿由两段双曲线构成，因此市场中个体所持有的投资组合p_i刻画如下：

当$E[\tilde{r}_1]\leq E[\tilde{r}_{p_i}]\leq E[\tilde{r}_2]$时，$p_i$位于组合前沿的 AB 段，满足：

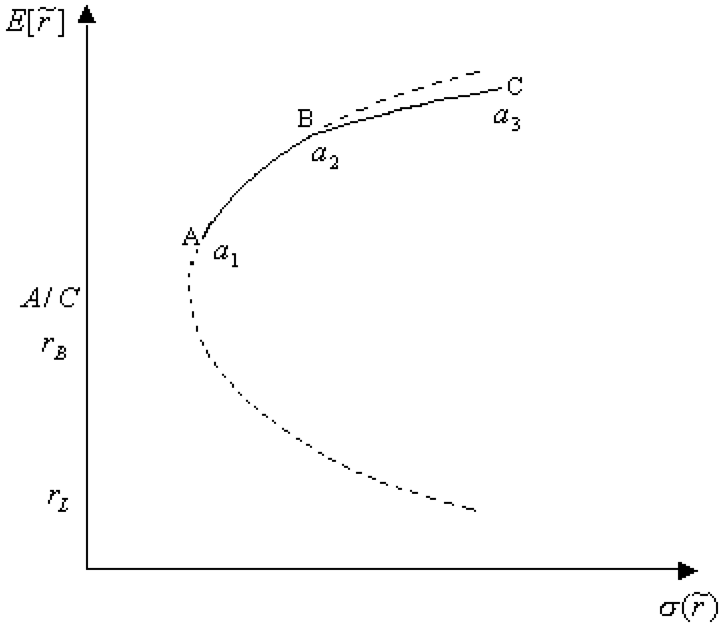
$$\alpha_i a_1+(1-\alpha_i)a_2\ ，\ 0\leq\alpha_i\leq 1;\tag{3.5.6a}$$

当$E[\tilde{r}_2]\leq E[\tilde{r}_{p_i}]\leq E[\tilde{r}_3]$时，$p_i$位于组合前沿的 AB 段，满足：

$$\alpha_i a_2+(1-\alpha_i)a_3\ ，\ 0\leq\alpha_i\leq 1。\tag{3.5.6b}$$

因此市场组合可以表示为：

$$m=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+(1-\beta_1-\beta_2)a_3=w_1 a_1+w_2 a_2。\tag{3.5.7}$$



(图 3.5.1)：风险资产不可以卖空时的前沿组合

——实线是不允许卖空时的前沿组合，由两段双曲线构成
——虚线是允许卖空时的前沿组合，由一条双曲线构成。

如果 CAPM 定理成立，则对任意可行投资组合q，有：

$$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]=\frac{cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_m)}{var(\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}])。\quad (3.5.8)$$

因为资产a_1、a_2和a_3也是可行组合，因此有

$$E[\tilde{r}_j]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]=\frac{cov(\tilde{r}_j,\tilde{r}_m)}{var(\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}])，j=1,2,3。$$

通过简单计算可得：

$$E[\tilde{r}_3]-E[\tilde{r}_1]=\frac{cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_1,\tilde{r}_m)}{cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_2,\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_3]-E[\tilde{r}_2])。\quad (3.5.9)$$

因为：

$$cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_1,\tilde{r}_m)=cov(-2\tilde{r}_1+\frac{3}{2}\tilde{r}_2,w_1\tilde{r}_1+w_2\tilde{r}_2)$$

$$=-2w_1\sigma_1^2+\frac{3}{2}w_2\sigma_2^2;\quad (3.5.10a)$$

$$cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_2,\tilde{r}_m)=cov(-\tilde{r}_1+\frac{1}{2}\tilde{r}_2,w_1\tilde{r}_1+w_2\tilde{r}_2)$$

$$=-w_1\sigma_1^2+\frac{1}{2}w_2\sigma_2^2。\quad (3.5.10b)$$

将(3.5.2a)、(3.5.3a)和(3.5.10a)、(3.5.10b)代入(3.5.9)，整理得：

$$\frac{-2w_1\sigma_1^2+1.5w_2\sigma_2^2}{-w_1\sigma_1^2+0.5w_2\sigma_2^2}=5,$$

这等价于：

$$3w_1\sigma_1^2=w_2\sigma_2^2。\quad (3.5.11)$$

因此在该经济中，如果市场组合权重不满足(3.5.11)，则零-贝塔 CAPM 定理不再成立。例如，如果$\sigma_1^2=1$，$\sigma_2^2=2$，假定市场组合在第一种资产上的权重为$w_1=1/3$，$w_2=1/3$，则 CAPM 不再成立。

通常，市场组合权重满足(3.5.11)的可能性几乎为零，因此一般说来，CAPM 定理并不成立。

上述讨论可以推广到更一般的情形，只要市场组合的风险资产部分无法由两个前沿组合线性生成，则零-贝塔 CAPM 定理或传统 CAPM 定理便不再成立。

习题

1、假定经济中存在三种风险资产，其期望回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3$彼此独立，其期望回报率和方差满足：$E[\tilde{r}_1]=1$，$E[\tilde{r}_2]=2$，$E[\tilde{r}_3]=3$，$\sigma^2(\tilde{r}_1)=1$，$\sigma^2(\tilde{r}_2)=2$和$\sigma^2(\tilde{r}_3)=10$。假定经济中存在许多个体，初始财富为$W_{0i}=1$，$i=1,2,\cdots,I$。假定所有个体效用函数都取二次多项式形式，即：

$$u_i(\widetilde{W}_i)=\widetilde{W}_i-\frac{b_i}{2}\widetilde{W}_i^{\,2},\quad i=1,2,\cdots,I。$$

假定$1/b_i$服从[1,14]上的均匀分布。

（1）假定风险资产可以无限卖空，试计算个体i的最优投资组合和市场组合，并计算这三种风险资产和市场组合的贝塔系数，试验证 CAPM 定理是否成立。

（2）假定风险资产禁止卖空，试计算个体i的最优投资组合和市场组合，并计算这三种风险资产和市场组合的贝塔系数，试验证 CAPM 定理是否成立。

2、假定经济中只有三种风险资产a_1、a_2和a_3，不存在无风险资产，个体不能卖空风险资产，假定这三种风险资产的随机回报率分别为：$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3=-\tilde{r}_1+(1+\frac{1}{2})\tilde{r}_2$，且满足：$E[\tilde{r}_1]=1$，$E[\tilde{r}_2]=4$，$cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=0$，$var(\tilde{r}_1)=\sigma_1^2=1$，$var(\tilde{r}_2)=\sigma_2^2=4$。假定个体效用函数可以由定义在均值-方差上的函数刻画：$U_i(E[\tilde{r}],\sigma^2(\tilde{r}))=E[\tilde{r}]-\frac{b_i}{2}\sigma^2(\tilde{r})$。

（1）假定风险资产可以无限卖空，试求该经济中的前沿组合和市场组合，并求出上述 3 种资产与市场组合的贝塔系数，并就这三种资产验证 CAPM 定理，并将这三种资产分解为系统性风险部分和非系统性风险部分。

（2）假定风险资产禁止卖空，试计算前沿组合和市场组合，并验证市场组合是否前沿组合，验证 CAPM 是否成立。

3、试证明带约束条件下的 CAPM，即定理 3.4.1 和定理 3.4.2。

第五章 静态套利定价理论[1]

§5.1 套利机会

定义：称一个投资组合是**第一类套利机会**，如果它具有非正的成本，却在将来有可能获得正的收益，获得负的收益的可能为零。

例 5.1.1：个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他提出这样的一个赌博方案：抛出正面给对方１００元，抛出反面给对方０元。对其他人来说，这是没有任何投入就可以得到非负收入，且有５０％概率得到正收入。该方案对其它人来说，成本为零，收益非负，属于第一类套利机会。

定义：称一个投资组合是**第二类套利机会**，如果其成本为负，未来收益非负。

例 5.1.2：个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他提出这样的一个赌博方案：先给对方１００元，然后与对方抛硬币，抛出正面给对方１００元，抛出反面给对方０元。对其他人来说，投入为负，就可以得到非负收入，且有５０％概率得到正收入，属于第二类套利机会。

容易看出，例 5.1.1 是第一类套利机会，但不是第二类套利机会；例 5.1.2 既是第一类套利机会，又是第二类套利机会。

例 5.1.3：个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他提出这样的一个赌博方案：先给对方１００元，然后与对方抛硬币，抛出正面给对方０元，抛出反面给对方０元。对其他人来说，投入为负，未来收入为０，属于第二类套利机会，但不是第一类套利机会。

定义：极限情形下的套利机会，是指一个具有期望回报率的下界大于零、方差收敛到零的套利组合序列。

上述定义蕴含，极限情形下的套利机会是一个成本为零，且几乎无风险

[1]主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002).、杨云红（2000）、王江（2006）等教材及相关论文

地得到正的回报投资机会。

无套利原理： 经济中不存在套利机会，即使存在，也为投资者的套利活动所快速消除

在例 5.1.1 中，当个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他的赌博方案时，该方案属于第一类套利机会。如果周围有许多别的个体，则他们将相互竞争。如果个体 B 答应愿意按照个体 A 的方案陪他赌博；个体 C 可能提出对个体 A 较有利的方案，比如：抛出正面个体 A 给对方 50 元，抛出反面给对方 0 元；个体 D 可能提出对个体 A 更有利的方案，比如：抛出正面个体 A 给对方 30 元，抛出反面给对方 0 元；……；以此类推，直到将个体 A 给对方的钱降为 0，从而第一类套利机会消除。

§ 5.2 无套利定价的应用

无套利原理蕴涵，经济中不存在套利机会，从而通过构造投资组合，我们可以对一些衍生性资产定价。下面我们利用无套利原理，我们可以给出期权价格关系的几个重要性质。

假定期权的标的资产期初价格为S_0，期末价格为S_T，期权的执行价格为 K，经济中的无风险利率为r_f。记看涨期权价格为$c(S_0,K)$，看跌期权价格为$p(S_0,K)$。

性质 5.2.1：$c(S_0,K) \ge max[S_0 - K/(1+r_f),0]$。

证明：构造一个投资组合，在期初买入一份看涨期权，卖空一份资产，贷出$K/(1+r_f)$资金，该投资组合的总成本为$c(S_0,K) - S_0 + K/(1+r_f)$; 在期末，该投资组合的总收益$Y$满足：

当$S_T > K$时，看涨期权执行，$Y = S_T - K - S_T + K = 0$;

当$S_T \le K$时，看涨期权不执行，$Y = 0 - S_T + K \ge 0$。

考虑到经济中不存在套利机会，期末收益大于等于 0，期初成本不能为负，所以我们有$c(S_0,K) \ge S_0 - K/(1+r_f)$；另外，期权是一种权利，投资者可

以选择执行该期权而获利，也可以放弃，所以$c(S_0,K)\geq 0$。由此我们有$c(S_0,K)\geq max[S_0-K/(1+r_f),0]$。

性质 5.2.2：看涨期权的价格是其执行价格的凸函数，即：

$$ac(S_0,K_1)+(1-a)c(S_0,K_2)\geq c(S_0,aK_1+(1-a)K_2)，a\in(0,1)。$$

证明：构造一个投资组合，在期初买入α份执行价格为K_1的看涨期权，买入$1-\alpha$份执行价格为K_2的看涨期权，卖空 1 份执行价格为$\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$的看涨期权，不妨假定$K_1\geq\alpha K_1+(1-\alpha)K_2\geq K_2$。该投资组合在期初的总成本为：

$$ac(S_0,K_1)+(1-a)c(S_0,K_2)-c(S_0,aK_1+(1-a)K_2)。$$

在期末，该投资组合的总收益Y满足：

当$S_T>K_1$时，三种期权都执行，从而该投资组合的收益可以表示为：

$$Y=\alpha(S_T-K_1)+(1-\alpha)(S_T-K_2)-(S_T-\alpha K_1-(1-\alpha)K_2)=0；$$

当$K_1\geq S_T>\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$时，执行价格为$K_1$的看涨期权不执行，执行价格为$K_2$和$\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$的看涨期权执行，从而该投资组合的收益可以表示为：

$$Y=0+(1-\alpha)(S_T-K_2)-(S_T-\alpha K_1-(1-\alpha)K_2)=\alpha(K_1-S_T)\geq 0；$$

当$\alpha K_1+(1-\alpha)K_2\geq S_T>K_2$时，执行价格为$K_1$和$\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$的看涨期权不执行，执行价格为$K_2$的看涨期权执行，从而该投资组合的收益可以表示为：

$$Y=0+(1-\alpha)(S_T-K_2)-0=(1-\alpha)(S_T-K_2)\geq 0；$$

当$S_T\leq K_2$时，三种看涨期权都不执行，从而该投资组合的收益满足：

$$Y=0+0-0=0。$$

由此可见，该投资组合的期末回报大于等于 0，考虑到经济中不存在无套利机会，其期初成本也应非负，性质 5.2.2 成立。

性质 5.2.3：在相同操作价格 K 下，标的在 n 种资产构成的投资组合上的看涨期权的价格，要小于标的在各资产上的看涨期权的价格的相同权重的加权和，即：

$$c(\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j S_{j0},K)\leq\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,c(S_{j0},K)，a\in(0,1)。$$

证明：略

性质 5.2.4：（看跌-看涨平价关系）$S_0 + p = c + K/(1+r_f)$。

证明：构造一个投资组合：在期初购买一份资产，购买 1 份标的在该资产上的执行价格为K的看跌期权，同时卖出一份标的在该资产上的执行价格为K的看涨期权，借入$K/(1+r_f)$的资金。该投资组合在期初的成本为$S_0 + p - c - K/(1+r_f)$。该投资组合在期末的总收益Y可以刻画为：

当$S_T > K$时，看涨期权被执行，看低期权放弃执行，从而有：

$$Y = S_T - (S_T - K) - K = 0;$$

当$S_T \leq K$时，看跌期权被执行，看涨期权放弃执行，从而有：

$$Y = S_T + (K - S_T) - K = 0。$$

因此该投资组合的期末收益为零，考虑到经济中不存在套利机会，该投资组合的期初成本也应该等于 0，性质 5.2.4 得证。

§ 5.3 因子模型与 APT

在 CAPM 理论中，可以将风险资产的随机回报率分解为一个系统性风险和一个非系统性风险：$\tilde{r}_q = (1-\beta_{qm})r_f + \beta_{qm}\tilde{r}_m + \tilde{\varepsilon}_{qm}$，从而风险资产的期望回报率存在一个简单线性关系$E[\tilde{r}_q] = (1-\beta_{qm})r_f + \beta_{qm}[\tilde{r}_m]$。在上一章中我们发现，CAPM 定理在许多情况下并不成立。直观地我们可以想到，通过分散化投资也应该可以将非系统风险消除，从而投资组合的期望收益率之间存在着类似的线性关系。为此，Ross(1976)等将 CAPM 的思想进一步推广，考虑将风险分解为系统性风险和非系统性风险，但系统性风险不再依赖于市场组合，而是多个因子的情形，即因子模型；同时假定经济系统不存在套利机会，在一定条件下给出了风险资产期望回报率之间的线性关系或近似线性关系。

5.3.1 因子模型

考虑一个无摩擦经济，假定投资者在期初进行投资决策，期末的资产回报具有不确定性。假定该经济中存在$N \geq 2$种可以进行交易的风险资产和一

种无风险资产。风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和期望回报率，其它风险资产和投资组合都是这 N 种风险资产的线性组合；无风险资产的回报率为r_f。假定风险资产可以无限卖空，资产无限可分，信息对称、完全，可以同时传递到所有人手中。

定义：因子模型(factor model)是指一种假设证券回报率仅与不同因子变化有关的经济学模型。

因子模型的特点包括：

（1） 因子模型中的因子系统地影响所有证券价格的经济因素；

（2） 证券回报率之间的相关性仅源于对因子变化的共同反应；

（3） 证券回报率中不能由因子模型解释的部分是该证券独有的部分，与其它证券独有部分无关。

在因子模型中，资产的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_i = \sum_{k=1}^{K} b_{ik}\tilde{F}_k + a_i + \tilde{\varepsilon}_i,$$

在这类模型中，资产风险可以分为因子风险和非因子风险，通过分散化投资可以缩小非因子风险。

根据因子的个数，因子模型可以分为单因子模型和多因子模型。

单因子模型：CAPM 模型是一个单因子模型，因子为市场组合回报率（或切点组合回报率）。

多因子模型：资产价格可能依赖于 GDP 增长率、利率水平、通货膨胀率与石油价格，则这些变量都可以当作因子。在实践中，通常可以选取与这些变量高度相关的资产或投资组合作为因子。

5.3.2 Ross 的 APT 理论

Ross(1976)创立的套利定价理论（APT）告诉我们，如果经济中存在着大量的资产，并且不存在（极限情形下的）套利机会，那么在绝大多数资产的期望回报率之间仍然存在着一种近似线性关系。Ross(1976)的 APT 是一种

多因子模型。

一、模型建立

考虑一个资产数上升的经济序列，假定市场是完全竞争的、无摩擦的，投资者是理性的、不饱和的，当经济中存在套利机会时，投资者会通过构造套利组合来增加自己的财富。假定在第 n 个经济中，存在 n 个风险资产和一个无风险资产，风险资产回报率由一个 K-因子模型生成：

$$\tilde{r}_j^n = a_j^n + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \tilde{\delta}_k^n + \tilde{\varepsilon}_j^n, \quad j = 1,2,\dots,n。 \tag{5.3.1}$$

满足：

$$E[\tilde{\varepsilon}_j^n] = 0, \quad j = 1,2,\dots,n;$$

$$E[\tilde{\varepsilon}_j^n \tilde{\varepsilon}_l^n] = 0,\ l \neq j。$$

$$\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j^n) \leq \bar{\sigma}^2 > 0,\ j = 1,2,\dots,n。$$

利用线性代数(5.1)式可以改写为：

$$\tilde{r}^n = a^n + B^n \tilde{\delta}^n + \tilde{\varepsilon}^n。 \tag{5.3.2}$$

二、不存在非因子风险的情形：（$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{n}} \equiv \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{j}$）

定理 5.3.1：当$\tilde{\varepsilon}_j^n \equiv 0, \forall j$，即风险资产回报完全由 K 因子和无风险资产生成时，如果经济中不存在套利机会，则资产回报率之间存在一个严格的线性关系：

$$E[\tilde{r}_j^n] - r_f = \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n (E[\tilde{\delta}_k^n] - r_f)。 \tag{5.3.3}$$

证明：对资产 j，首先构造一个由无风险资产和 K 因子构成的投资组合y_j^n，其投资组合权重满足：

$$y_{j0}^n = 1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n,$$

$$y_{jk}^n = \beta_{jk}^n,\ k = 1,2,\dots,K$$

该投资组合的随机回报率为：

$$(1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \tilde{\delta}_k^n。$$

下面我们根据无套利条件，来证明关系式$a_j^n = (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f$：

（1）如果$a_j^n < (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f$，则卖空一单位货币在证券 j 上，投资一单位货币在y_j^n上，该组合是一个套利组合，成本为零，但期末回报$(1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f - a_j^n > 0$，这蕴涵经济中存在套利机会，与命题的假设矛盾。

（2）如果$a_j^n > (1-\sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f$，则卖空一单位货币在$y_j^n$上，投资一单位货币在证券 j 上，该组合是一个套利组合，成本为零，但期末回报$a_j^n - (1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f > 0$，这蕴涵经济中存在套利机会，与命题的假设矛盾。

由此我们有$a_j^n = (1-\sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f$，所以由(5.3.1)得，资产的期望回报率之间存在着如下的线性关系式：

$$E[\tilde{r}_j^n] - r_f = \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n (E[\tilde{\delta}_k^n] - r_f)。$$

证明完毕。■

三、存在非因子风险的情形（$\exists \boldsymbol{j}$，$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^n \neq \mathbf{0}$）

引理 5.3.1：对于任意给定的正数$\varepsilon > 0$，$N(n)$为满足$|a_j^n - (1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f| \geq \varepsilon$的资产数，如果极限情形下的套利机会不存在，则存在一个$\bar{N} < +\infty$，对任意的$n > 0$，$N(n) \leq \bar{N}$成立。

证明：采用反证法，假定不存在这样一个$\bar{N}$，使得对所有的 n，满足$N(n) \leq \bar{N}$，则序列$\{K+2, K+3, \ldots\}$存在一个子序列$\{n_l\}$，满足当$n_l \to +\infty$时，$N(n_l) \to +\infty$。

下面我们来构造套利组合：对于给定的n_l，不妨假定满足$|a_j^{n_l} - (1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f| \geq \varepsilon$的资产为$j = 1,2,\ldots,N(n_l)$。

（1）对于每一个满足条件的 j，首先构造一个由 K 个因子和无风险资产构成的投资组合y_j^n，其投资组合权重满足：

$$y_{j0}^n = 1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n,$$
$$y_{jk}^n = \beta_{jk}^n,\ k = 1,2,\ldots,K$$

该投资组合的随机回报率为：

$$(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f + \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n \tilde{\delta}_k^n。$$

接着构造套利投资组合$c_j^{n_l}$：当$a_j^{n_l} > (1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f$时，卖空一单位货币在$y_j^n$上，投资一单位货币在证券 j 上；当$a_j^{n_l} < (1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f$时，卖空一单位货币在证券 j 上，投资一单位货币在y_j^n上。该组合是一个套利组合，其回报率为：

$$|a_j^n - (1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}^n) r_f| + s_j^{n_l} \tilde{\varepsilon}_j^{n_l}。$$

其中$s_j^{n_l}=\begin{cases}1 & 如果 a_j^{n_l}>(1-\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^{n_l})r_f\\ -1 & 如果 a_j^{n_l}<(1-\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^{n_l})r_f\end{cases}$。

（2）通过$N(n_l)$个套利组合$\{c_j^{n_l}\}_{j=1}^{N(n_l)}$来构造套利组合$D^{n_l}$，在$D^{n_l}$中，在每个$c_j^{n_l}$上的权重相等，都是$1/N(n_l)$。因此套利组合$D^{n_l}$的期望回报率和方差分别为：

$$E[D^{n_l}]=\frac{1}{N(n_l)}\sum_{j=1}^{N(n_l)}|a_j^{n_l}-(1-\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^{n_l})r_f|\geq\varepsilon>0，$$

$$\sigma^2(D^{n_l})=\frac{1}{N^2(n_l)}\sum_{j=1}^{N(n_l)}\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j^{n_l})\leq\frac{\bar{\sigma}^2}{N(n_l)}\to 0。$$

由此出现了极限情形下的套利机会，与假设矛盾。证明完毕。■

定理 5.3.2（Ross(1976)的 APT）：当经济中的资产数足够多，且不存在极限情形下的套利机会时，对绝大多数资产而言，其期望回报率之间存在一个近似线性关系。

证明：根据引理 5.3.1，对任意给定的正数$\varepsilon>0$，至多存在$\bar{N}$个风险资产，其随机回报率可以表示为$\tilde{r}_j^n=a_j^n+\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^n\tilde{\delta}_k^n+\tilde{\varepsilon}_j^n$，$j=1,2,\dots,N(n_l)$，且有：

$$|a_j^n-(1-\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^n)r_f|\geq\varepsilon。$$

相应地这些资产的期望回报率满足：

$$|E[\tilde{r}_j^n]-r_f-\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^n(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f)|\geq\varepsilon$$

因此当 n 足够大时，经济中绝大多数资产满足：

$$|E[\tilde{r}_j^n]-r_f-\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^n(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f)|<\varepsilon，$$

即期望回报率之间存在一个近似线性关系。

证明完毕。■

在 Ross(1976)的 APT 理论中，如果取ε充分小，比如 0.01 元，那么对绝大多数资产而言，都有$E[\tilde{r}_j^n]\approx r_f+\sum_{k=1}^K\beta_{jk}^n(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f)$；但仍然存在一些资产，对线性关系的偏离可能比较大。尤其麻烦的是，我们并不知道是哪些资产存在较大偏离，因此如果用这些近似线性关系式来给特定资产定价的话，很有可能产生较大的偏离，因此该理论似乎并不能很好地用来给资产定价。

5.3.3 均衡套利定价理论

在 Ross(1976)的 APT 理论中，当资产数足够大时，近似线性关系对绝大多数资产都成立;但对特定的资产而言,对这种线性关系的偏离可能很大,因此对任意给定的风险资产,我们希望来估计其期望回报率对线性关系偏离的程度。这方面的研究由 Dybvig(1983)、Grinblatt 与 Titmam(1983)和 Connor(1984)等给出。

一、模型假设

假定经济中存在 N 种风险资产和一种无风险资产，其回报率分别为$\tilde{r}_j, j = 1,2,\ldots,N$和$r_f$。假定风险资产严格地正供给，风险资产回报率由 K-因子模型生成：

$$\tilde{r}_j = a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_j, \qquad j = 1,2,\ldots,N。$$

其中$E[\tilde{\varepsilon}_j] = 0$，$\tilde{\varepsilon}_j \geq -1$，$(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_N, \tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_K)$相互独立。

假定效用函数单调增、严格凹、三次连续可微，$u_i{'''}(z) \geq 0$，且所有个体的绝对风险回避系数存在一个上界，即：

$$R_A^i(z) = -u_i{''}(z)/u_i{'}(z) \leq \bar{A}，对\forall i成立。$$

假定市场是均衡的，经济中不存在套利机会。

二、均衡套利定价理论

定理（均衡 APT）：在上述假定下，对任意的风险资产 j，我们有：

$$\boldsymbol{\left|E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} (E[\tilde{\delta}_k] - r_f)\right| \leq \bar{A} e^{\bar{A} S_j / I} Var(\tilde{\varepsilon}_j) S_j / I}$$

其中S_j为投资在风险资产 j 上的市场总值，I 为投资者总数。

证明：（1）当$\tilde{\varepsilon}_j \equiv 0$时，类似于定理 5.1 的证明，有$a_j = (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}) r_f$，因此风险资产 j 的期望回报率服从：

$$\boldsymbol{E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} (E[\tilde{\delta}_k] - r_f) = 0}。$$

（2）当$\tilde{\varepsilon}_j \neq 0$时， 首先考虑一个投资组合$y_j$，该组合在无风险资产和 K 因子上的权重分别为：

$$y_{j0} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk},$$

$$y_{jk} = \beta_{jk}，\ k = 1,2,\ldots,K$$

该投资组合的随机回报率为：

$$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f+\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}\tilde{\delta}_k。$$

接下来构造一个套利组合b_j：投资单位货币在投资组合y_j上，同时卖空单位货币的资产 j，该套利组合的随机回报率为：

$$\tilde{r}=(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j-\tilde{\varepsilon}_j。$$

设个体i的初始财富量为W_{i0}，期末的随机财富量为$\widetilde{W}_i$，因为经济中不存在套利机会，如下最大化问题

$$\max_{\alpha}E[u_i(\widetilde{W}_i+\alpha\tilde{r})]$$

的解为$\alpha=0$。

在$\alpha=0$处，上述最大化问题的一阶条件可以表示为：

$$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)\tilde{r}]=0，$$

即$E\{u_i{}'(\widetilde{W}_i)[(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j-\tilde{\varepsilon}_j]\}=0$。

上式可以改写为：

$$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]=((1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j)E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)]，$$

因此有：

$$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j=\frac{E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]}{E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)]}=\frac{cov(u_i{}'(\widetilde{W}_i),\tilde{\varepsilon}_j)}{E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)]}。$$

注意到$\widetilde{W}_i=\sum_{j=1}^{N}W_{ij}(a_j-r_f+\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}\tilde{\delta}_k+\tilde{\varepsilon}_j)+W_{i0}(1+r_f)$，且风险资产严格地正供给，因此至少存在一个个体$i$，其投资在资产 j 上的财富量严格大于零，即$W_{ij}>0$，因此我们有：

$$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j<0。$$

相应地，当$\tilde{\varepsilon}_j\neq 0$时，我们有所有个体在资产 j 上的投资量都严格大于零。

下面我们通过估计$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)]$、$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]$的界，来估计$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j$的界，我们分三步来讨论：

（1） 估计$E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]$的界：

对于任意固定的 j，当$\tilde{\varepsilon}_j\neq 0$，个体$i$投资在资产 j 上的财富量严格大于零，即$W_{ij}>0$，记$\widetilde{W}_i^*=\widetilde{W}_i-W_{ij}\tilde{\varepsilon}_j$，这是把第 j 种风险资产的非因子风险剔除后个体$i$的期末随机财富量。根据中值定理，我们有：

$$\begin{aligned}E[u_i{}'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]&=E[u_i{}'(\widetilde{W}_i^*)\tilde{\varepsilon}_j]+W_{ij}E[u_i{}''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]\\&=E[u_i{}'(\widetilde{W}_i^*)]E[\tilde{\varepsilon}_j]+W_{ij}E[u_i{}''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]\end{aligned}$$

$$= W_{ij}E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2],$$

其中$\tilde{\xi} \geq \widetilde{W}_i^* - W_{ij}$，而$|E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]| \leq E[\sup_{z\geq\widetilde{W}_i^*-W_{ij}} |u_i''(z)|\tilde{\varepsilon}_j^2]$。

引理 5.2：$\sup_{Z\geq\widetilde{W}_i^*-W_{ij}} |u_i''(z)| \leq u_i'(\widetilde{W}_i^*)\bar{A}e^{\bar{A}W_{ij}}$

证明：因为$-\frac{u_i''(z)}{u_i'(z)} \leq \bar{A}$，所以有：

$$\sup_{z\geq\widetilde{W}_i^*-W_{ij}} |u_i''(z)| \leq \bar{A} \sup_{z\geq\widetilde{W}_i^*-W_{ij}} u_i'(z) \leq \bar{A}u_i'(\widetilde{W}_i^* - W_{ij});$$

又根据$-\frac{u_i''(z)}{u_i'(z)} \leq \bar{A}$，我们有$\bar{A}u_i'(\widetilde{W}_i^* - W_{ij}) \leq u_i'(\widetilde{W}_i^*)e^{\bar{A}W_{ij}}$。引理得证。

根据引理 5.2，我们有：

$$|E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]| \leq \bar{A}e^{\bar{A}W_{ij}}E[u_i'(\widetilde{W}_i^*)]\,var(\tilde{\varepsilon}_j)。$$

（2） 估计$E[u_i'(\widetilde{W}_i)]$的界：

$$\begin{aligned} E[u_i'(\widetilde{W}_i)] &= E[u_i'(\widetilde{W}_i^* + W_{ij}\tilde{\varepsilon}_j)] \\ &= E[E[u_i'(\widetilde{W}_i^* + W_{ij}\tilde{\varepsilon}_j)|\widetilde{W}_i^*] \\ &\geq E[u_i'(\widetilde{W}_i^*)] \end{aligned}$$

（3） 估计$(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk})r_f - a_j$的界：

根据（1）和（2），我们有：

$$|(1 - \sum_{k=1}^K \beta_{jk})r_f - a_j| \leq \bar{A}e^{\bar{A}W_{ij}}var(\tilde{\varepsilon}_j)W_{ij},$$

因此我们有：

$$|E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k] - r_f)| \leq \bar{A}e^{\bar{A}W_{ij}}var(\tilde{\varepsilon}_j)W_{ij}。$$

考虑到$S_j = \sum_i W_{ij}$，因此一定存在某位个体i，满足：$W_{ij} \leq S_j/I$，代入上式，整理得：

$$\boldsymbol{|E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^K \beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k] - r_f)| \leq \bar{A}e^{\bar{A}S_j/I}Var(\tilde{\varepsilon}_j)S_j/I}。$$

证明完毕。■

习题：

1、利用无套利定价理论，证明§5.2 中的性质 3，即在相同操作价格 K

下，标的在 n 种资产构成的投资组合上的看涨期权的价格，要小于标的在各资产上的看涨期权的价格的相同权重的加权和。

2、假定某支股票当前价格为 30 元，无风险利率为月息 1%，(1) 假定在未来一个月内该股票不会支付红利，标的在该股票上、成熟期为一个月的欧式看涨期权价格为 5，标的在该股票上、成熟期为一个月的欧式看跌期权价格为 3 ，问是否存在套利机会？如果有，请构造一个套利投资组合。(2) 假定在月末该股票支付红利 2 元，期权价格不变，问该价格系统是否存在套利机会，请证明你的观点。

3、假定某支股票当前价格为 100 元，标的在该资产上的看涨期权的执行价格为 120 元，成熟期为一年，无风险利率为年息 5% ，试给出该看涨期权价格的下限。

4、对欧式看跌期权，试分析是否存在与欧式看涨期权性质 5.2.1-3 类似的性质，并证明你的想法。

5、在均衡套利定价理论中，假定$\tilde{\varepsilon}_j \geq -1/S_j$，其中$S_j$为资产 j 的总市值，试证明：$|E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k] - r_f)| \leq \bar{A}e^{\bar{A}/I} Var(\tilde{\varepsilon}_j) S_j/I$。

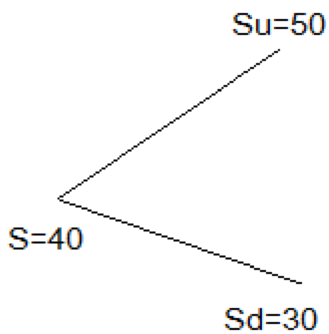
第六章 离散时间跨期套利定价理论[1]

§6.1 介绍

上一章分析了无套利原理与 Ross(1976)的 APT 理论，这一章将套利定价理论推广到离散时间多期情形，给出离散时间多期衍生资产定价问题。由于衍生资产是由其它资产衍生出来的，其价格依赖于标的资产价格，因此定价时通常并不能采用第四章的均衡定价方法，而只能采用套利定价方法。

Harris 和 Kreps(1979)发现，如果一个价格系统不存在套利机会，那么该系统存在一个等价鞅测度，在该等价鞅测度下，资产价格等于未来收益的期望贴现和，从而我们可以非常方便地定价各种衍生资产的价格。下面我们通过两个简单例子，来说明等价鞅测度的存在及如何通过等价鞅测度对衍生资产定价。

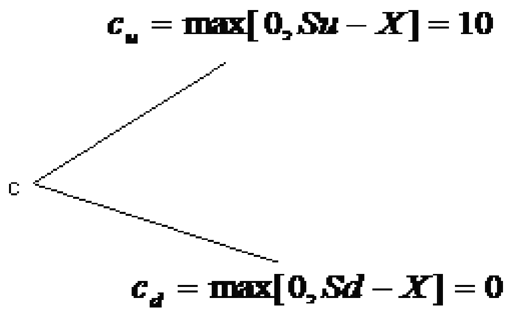
例 6.1.1：考虑一个两期模型，假定第一期标的资产价格为 S=40，期权的执行价格为 X=40，无风险利率为 $R=1.2$，成熟期为一期。假定资产价格或者上升 25%，或者下跌 25%，即上升后价格为 Su=50，下降后价格为 Sd=30，其资产价格变化如下图 6.1.1 所示。由此一个看涨期权的回报如图 6.1.2 所示。



（图 6.1.1）：一期资产价格树

[1]主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、王江（2006）等教材及相关论文

下面我们来构筑一个投资组合，利用期权来对该风险资产进行完全的套期保值，从而使得该组合成为一个无风险资产。假定我们出售 H 份标的在该资产上的看涨期权，使得该组合不存在风险，则其第一期成本为$S-Hc$；由于资产价格下跌时回报为$Sd-H\times 0=30$，在完全套期保值下资产的回报率都是 1.2，其回报过程可以用图 6.1.3 来刻画。



（图 6.1.2）：一期看涨期权树

1、 **求解所出售的期权份额 H**

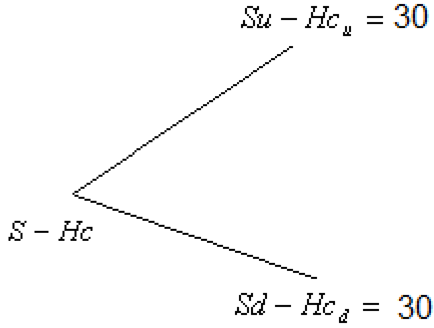
因为完全套期保值后成熟时的回报相同，因此我们有：

$$Su-Hc_u=Sd-Hc_d=30，$$

因此我们可以求解出 H：

$$H=\frac{Su-Sd}{c_u-c_d}；$$

将相关数值代入，得 H=2。



（图 6.1.3）：一期的无风险投资组合树

2、 无套利机会时的期权价格求解

因为无套利机会存在，无风险组合的回报率应该等于无风险资产上的回报率，因此我们有：

$$R(S-Hc)=Su-Hc_u,$$

整理得：

$$c=\frac{S(R-u)+Hc_u}{HR}=[c_u\frac{R-d}{u-d}+c_d\frac{u-R}{u-d}]/R;$$

此即欧式看涨期权价格。将相关数值代入上式，我们有 $c=7.5$。欧式看跌期权的价格可以根据看涨-看跌平价关系得到。

3、 等价鞅测度的引入

事实上我们可以将上式改写为：

$$c=\pi c_u R^{-1}+(1-\pi)c_d R^{-1},$$

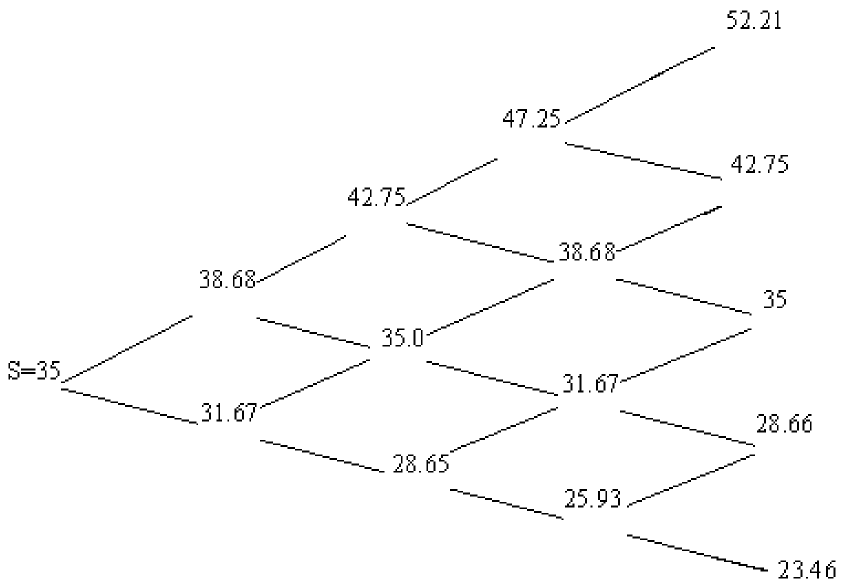
其中 $\pi=\dfrac{R-d}{u-d}$ 相当于一个概率，称为一个等价鞅测度。在该测度下，期权价格等于未来收益的期望贴现，与个体偏好等因素无关。

需要强调的是，该测度仅是一个假想的测度，并不真正反映股票价格上升和下降出现的概率。

例 6.1.2： 考虑一个 5 期的衍生资产定价的例子。假定标的资产的价格 S=35，假定连续复利无风险利率为 9.525%，将一年分为四季，则 $R=e^{r(T-t)}=e^{0.09525\times0.25}=1.024098$。假定资产价格变化如下图 6.1.4 所示。则 u=1.1052，d=0.9048，R=1.024098，则 $\pi=0.595$。由此我们可以求解各种欧式期权和美式期权的价格。

(1) 在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 35 的欧式看涨期权价格，则个体只能在第 4 期执行该期权，其价格可以表示为：

$$c=[\binom{4}{0}\pi^4(Su^4-X)+\binom{4}{1}\pi^3(1-\pi)(Su^3d-X)]R^{-4}\approx 4.37。$$



（图 6.1.4）：资产价格和期权收益树

(2) 计算在第一期当资产价格为 38.68 时发行的、第三期成熟的、操作价格为 40 的欧式看涨期权价格：

$$c = [\binom{2}{0}\pi^2(38.68\times u^2 - X)] \Big/ (1+r)^2 \approx 2.79 \text{ 。}$$

(3) 计算在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的欧式看跌期权价格和看涨期权。由于个体只能在第 4 期行权，看跌期权价格可以表示为：

$$p = [\binom{4}{3}\pi(1-\pi)^3(X - Sud^3) + \binom{4}{4}(1-\pi)^4(X - Sd^4)]R^{-4} \approx 0.37 \text{ ；}$$

看涨期权价格可以表示为：

$$c = [\binom{4}{0}\pi^4(Su^4 - X) + \binom{4}{3}\pi^3(1-\pi)(Su^3d - X) + \binom{4}{2}\pi^2(1-\pi)^2(Su^2d^2 - X)]R^{-4}$$

$$\approx 8.07$$

将看跌、看涨期权的价格和股票价格及期权的执行价格代入看跌－看涨平价关系式的两边，我们有：

$S+p\approx 35.37$，

$c+K/R^4\approx 35.37$，

因此看跌－看涨平价关系式成立。

(4) 计算在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的美式看涨期权价格。

在第 3 期 $S_3=47.25$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$[(52.21-30)\times\pi+(42.75-30)(1-\pi)]R^{-1}=18.01,$$

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $47.25-30=17.25$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3=47.25$ 时不会提前执行；

在第 3 期 $S_3=38.68$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$[(42.75-30)\times\pi+(35-30)(1-\pi)]R^{-1}\approx 7.43,$$

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $38.68-30=8.68$，由于贴现期望值小于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3=47.25$ 时将提前执行，收益为 8.68；

在第 3 期 $S_3=31.67$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$(35-30)\times\pi R^{-1}\approx 2.91,$$

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $31.67-30=1.67$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3=31.67$ 时不会提前执行；

在第 3 期 $S_3=25.93$ 时，下一期看涨期权不会执行，也不会在当前期执行，收益为 0。

在第 2 期 $S_2=42.75$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[18.01\times\pi+8.68\times(1-\pi)]R^{-1}=13.93,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $42.75-30=12.75$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 2 期 $S_2=42.75$ 时不会提前执行；

在第 2 期 $S_2=35.0$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[8.68\times\pi+2.91\times(1-\pi)]R^{-1}\approx 6.19,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $35-30=5$，由于贴现期望值大于立即

执行的收益，因此该美式看涨期权在第 2 期 $S_2 = 35$ 时不会提前执行；

在第 2 期 $S_2 = 28.65$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$2.91 \times \pi R^{-1} \approx 1.69,$$

该期权在第 2 期 $S_2 = 28.65$ 下，由于标的资产价格小于执行价格，因此不会立即执行。

在第 1 期 $S_1 = 38.68$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[13.93 \times \pi + 6.19 \times (1-\pi)]R^{-1} = 10.54,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $38.68 - 30 = 8.68$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 1 期 $S_1 = 38.68$ 时不会提前执行；

在第 1 期 $S_1 = 31.67$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[6.19 \times \pi + 1.69 \times (1-\pi)]R^{-1} = 4.27,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $31.67 - 30 = 1.67$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 1 期 $S_1 = 31.67$ 时不会提前执行。

在第 0 期，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[10.54 \times \pi + 4.27 \times (1-\pi)]R^{-1} \approx 8.00,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $35 - 30 = 5$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 0 期不会提前执行。

综上分析可以发现，该美式看涨期权只在第 3 期当股票价格等于 47.25 时才提前执行。该美式期权在第 0 期的价格是 8 。

§6.2 无套利机会与等价鞅测度

6.2.1 模型的建立

考虑一个 T+1 期证券市场经济，t=0,1,…,T。假定在该经济中存在 I 位个体，$i = 1,2,\ldots,I$。为简化讨论，假定经济中只有一种易腐烂的消费品，并将这种消费品作为计价单位，因此消费品的现货价格为 1。

一、信息结构：

假定经济中有有限个自然状态，它们构成一个状态空间Ω。假定经济中的信息是逐渐展示出来的，到 T 期个体才能知道真正的自然状态是Ω中的哪一个，我们用一个事件树来刻画信息结构。

我们用$\mathrm{F}=\{F_t;t=0,1,...,T\}$来记个体被赋予的公共信息结构，其中每一个$F_t$都是$\Omega$的一个分割，满足：如果$t\geq s$，则$F_t$比$F_s$更精细；$F_0=\{\Omega\}$，$F_T=\{\omega\mid\omega\in\Omega\}$。

二、资产结构：

定义：一个时间事件或有权益(time-event contingent claim)是一种证券，在交易日$t\geq 1$、事件$a_t\in F_t$发生时支付一单位消费品，在其它时间和情形下没有支付。

定义：一个复杂证券是由时间 0 消费品和一族时间事件或有权益构成的证券，它可以被表示为$x=\{x_0,x_{a_t}\mid a_t\in F_t,t=1,2,...,T\}$，其中$x_0$和$x_{a_t}$分别为以消费品衡量的时间 0 和时间 t、时间$a_t$下的红利。

定义：一个长生命证券(long-lived security)是一种在任意交易日都可以交易的复杂证券。

假定经济中存在 N+1 种长生命证券，j=0,1,…,N。假定第 0 种资产是面值为 1 的 T 期贴现债券，其红利流可以表示为：

$$x_0=\{0,0,...,x_0(T)=1\}, \tag{6.2.1}$$

记第 0 种资产的除息价格过程为$\{B(t)\mid t=0,1,2,...,T\}$，则有$B(T)=0$。

假定其它 N 种资产是风险资产，第 j 种资产的随机红利流可以表示为：

$$x_j=\{x_j(t)\mid t=0,1,2,...,T\}。 \tag{6.2.2}$$

记第 j 种资产的除息价格过程为$\{S_j(t)\mid t=0,1,2,...,T\}$，则有$S_j(T)=0$。

记$S(t)=(S_1(t),...,S_N(t))^T$，$X(t)=(x_1(t),...,x_N(t))^T$。显然，$x_j(t)$、$B(t)$和$S_j(t)$关于$F_t$可测，因此红利过程、价格过程都关于$\mathrm{F}$适应。

三、个体行为：

假定每一位个体 i 的偏好都具有 von Neuman-Morgenster 期望效用表示，假定个体效用函数 $u_{it}(c^i(t))$ 单调增、严格凹、充分光滑，假定 $\lim_{z\to 0^+} u_{it}'(z) = +\infty$。

假定个体 i 在各自然状态上被赋予的主观概率为：

$$\pi^i = \{\pi^i_\omega \mid \omega \in \Omega\}。$$

在该主观概率下，记在给定事件 $a_t \in F_t$ 下，事件 $a_s \in F_s$（$s \ge t$）发生的条件概率为 $\pi^i_{a_s}(a_t)$，根据 Bayes 公式，$\pi^i_{a_s}(a_t)$ 可以表示为：

$$\pi^i_{a_s}(a_t) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\omega\in a_s} \pi^i_\omega}{\sum_{\omega\in a_t} \pi^i_\omega} & \text{如果} a_s \subseteq a_t \\ 0 & \text{如果} a_s \not\subseteq a_t \end{cases}。$$

假定个体都是理性预期的，所有个体都相信当前资产价格是自然状态 ω 和时间 t 的函数，即可以表示为 $B(\omega,t)$ 和 $S_j(\omega,t)$。

记个体被赋予的长生命证券的数量为：

$$\{\bar{\alpha}^i(0), \bar{\theta}^i(0) = (\bar{\theta}_j(0))_{j=1}^N\}。$$

个体的交易策略是一个 N+1 维的随机过程，可以简记为：

$$(\alpha,\theta) = \{\alpha(t), \theta(t) = (\theta_j(t))_{j=1}^N\}_{t=0}^T,$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 代表个体在 t-1 期交易发生后，到 t 期交易发生前所持有的第 0 种资产和第 j 种资产的数量。由于 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 是在 t-1 期被决定的，它们关于 F_t 可测，因此交易策略关于 F 适应。个体的消费计划是一个随机过程，可以简记为：

$$c = \{c(t) \mid t = 0,1,2,\ldots,T\}。$$

其中 $c(t)$ 是 t 期消费量。

定义：称一个交易策略 (α,θ) 是可接受的(admissible)，如果存在一个消

费计划 c，满足：

$$\alpha(t+1)B(t)+\theta^{T}(t+1)S(t)=\alpha(t)B(t)+\theta^{T}(t)(S(t)+X(t))-c(t) \quad , \tag{6.2.3}$$

对 $\forall t=0,1,\ldots,T-1$ 成立，且有：

$$\alpha(T)+\theta^{T}(T)X(T)=c(T)\text{ 。} \tag{6.2.4}$$

相应地，我们也称该消费计划 c 是由交易策略 (α,θ) 融资的，也称为上市的 (marketed)。

6.2.2 无套利条件和等价鞅测度

定义：一个套利机会是一个由可行交易策略融资的消费计划 c，满足：

（1）c 非负，且至少存在某个时期 t 和事件 $a_t \in F_t$，有 $c(a_t,t)>0$；

（2）其成本非负，即

$$\alpha(0)B(0)+\theta^{T}(0)(S(0)+X(0))\le 0 \text{ 。}$$

定义：一个随机过程 $Y=\{Y(t)\mid t=0,1,2,\ldots,T\}$ 被称为是一个在概率 π 下对 $\mathbb{F}$ 适应的鞅，如果它满足：

$$E[Y(s)\mid F_t]=Y(t),\quad \forall s\ge t,$$

其中 $E[.\mid F_t]$ 是关于概率 π 、给定 F_t 下的条件概率。

定理 6.2.1：一个价格系统 (B,S) 不允许存在任何套利机会，当且仅当经济中存在一个等价鞅。

证明：（**必要性**）：假定价格系统 (B,S) 不允许存在任何套利机会。在价格系统下，个体 i 的最大化问题可以表示为：

$$\max_{(\alpha,\theta)} E_i[\sum_{t=0}^{T}u_{it}(c(t)),$$

Subject to:

消费计划 c 由交易策略 (α,θ) 融资，

$$(\alpha(0),\theta(0))=(\bar{\alpha}^{i}(0),\bar{\theta}^{i}(0))\text{ 。}$$

求解该最大化问题，Euler 方程为：

$$S_j(t)=E_i[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))}(S_j(t+1)+x_j(t+1))\,|\,F_t]\text{，}\qquad(6.2.5)$$

$$B(t)=\begin{cases}E_i[\dfrac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))}B(t+1)\,|\,F_t] & \text{如果}t\le T-2\\ E_i[\dfrac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))}\,|\,F_t] & \text{如果}t=T-1\end{cases}\text{。}\qquad(6.2.6)$$

此处(6.2.5)式可以改写为：

$$u_{it}'(c^i(t))S_j(t)=E_i[u_{it+1}'(c^i(t+1))(S_j(t+1)+x_j(t+1))\,|\,F_t]\text{；}\quad(6.2.7)$$

对(6.2.6)式进行前向迭代，可以改写为：

$$B(t)=\begin{cases}E_i[\dfrac{u_{is}'(c^i(s))}{u_{it}'(c^i(t))}B(s)\,|\,F_t] & \text{如果}t\le s\le T-1\\ E_i[\dfrac{u_{is}'(c^i(s))}{u_{it}'(c^i(t))}\,|\,F_t] & \text{如果}s=T\end{cases}\text{。}\qquad(6.2.8)$$

（1）如果经济中存在一个风险中性的个体i，且该个体并不存在任何时间偏爱，则我们有：

$$u_{is}'(c^i(s))=u_{it}'(c^i(t))=\text{常数}\text{，}\quad\forall s,t\text{。}$$

代入(6.2.7)和(6.2.8)式，整理得：

$$S_j(t)=E[S_j(t+1)+x_j(t+1)\,|\,F_t]\text{，}$$

$$B(t)=1\text{。}$$

记$D_j(t)=\sum_{s=0}^{t}x_j(s)$，$\forall t=0,1,\ldots,T$，则我们有：

$$\begin{aligned}S_j(t)+D_j(t)&=E_i[S_j(t+1)+D_j(t+1)\,|\,F_t]\\&=E_i[S_j(s)+D_j(s)\,|\,F_t]\text{，}\qquad\forall s>t\text{。}\end{aligned}$$

因此由资产的价格加上红利构成的随机过程是一个鞅，鞅测度是该风险中性个体的主观概率测度。

（2）如果经济中并不存在这样一个风险中性的个体，则我们可以构造出一个鞅测度。首先对价格过程和红利过程进行归一化：

$$S_j^*(t)=\begin{cases}S_j(t)/B(t) & \text{如果}t\ne T\\ 0 & \text{如果}t=T\end{cases}\text{，}\qquad B^*(t)=\begin{cases}1 & \text{如果}t\ne T\\ 0 & \text{如果}t=T\end{cases}\text{；}$$

$$x_j^* = \begin{cases} x_j(t)/B_j(t) & \text{如果} t \neq T \\ x_j(t) & \text{如果} t = T \end{cases}, \qquad D_j^*(t) = \sum_{s=0}^{t} x_j^*(s) \text{。}$$

构造鞅测度π^*满足：

$$\pi_\omega^* \equiv \frac{u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{u_{i0}'(c^i(0))} \frac{\pi_\omega^i}{B(0)}, \qquad \forall \omega \in \Omega \text{。} \tag{6.2.9}$$

考虑到个体是不饱和的，边际效用大于零，所以有$\pi_\omega^* \geq 0$；对π_ω^*关于所有的自然状态求和，有：

$$\sum_{\omega\in\Omega} \pi_\omega^* = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{u_{i0}(c^i(0))} \frac{\pi_\omega^i}{B(0)} = E[\frac{u_{iT}'(c^i(T))}{u_{i0}'(c^i(0))}]/B(0) = 1 \text{。}$$

因此π^*确实是Ω上的一个概率测度。

在该鞅测度π^*下，记在给定事件$a_t \in F_t$下，事件$a_s \in F_s$（$s \geq t$）发生的条件概率为$\pi_{a_s}^*(a_t)$，根据 Bayes 公式，$\pi_{a_s}^*(a_t)$可以表示为：

$$\pi_{a_s}^*(a_t) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\omega\in a_s} \pi_\omega^*}{\sum_{\omega\in a_t} \pi_\omega^*} & \text{如果} a_s \subseteq a_t \\ 0 & \text{如果} a_s \not\subseteq a_t \end{cases} \text{。} \tag{6.2.10}$$

当$a_s \subseteq a_t$时，将(6.2.9)代入(6.2.10)，有：

$$\pi_{a_s}^*(a_t) = \frac{\sum_{\omega\in a_s} \pi_\omega^*}{\sum_{\omega\in a_t} \pi_\omega^*}$$

$$= \frac{\sum_{\omega\in a_s} \pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\sum_{\omega\in a_t} \pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}$$

$$= \frac{\pi_{a_s}^i u_{is}'(c^i(a_s,s)) \sum_{\omega\in a_s} \dfrac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\pi_{a_s}^i u_{is}'(c^i(a_s,s))}}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t,t)) \sum_{\omega\in a_t} \dfrac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t,t))}} \text{。}$$

其中$c^i(a_t,t)$为个体i在 t 期、事件a_t发生时的最优消费量。注意到对任意

$t \le T-1$，有 $B(a_t,t)=\sum_{\omega\in a_t}\dfrac{\pi_{\omega}^{i}u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\pi_{a_t}^{i}u_{it}'(c^i(a_t,t))}$ 成立，因此我们有：

$$\pi_{a_s}^{*}(a_t)=\begin{cases}\dfrac{B(a_s,s)}{B(a_t,t)}\dfrac{\pi_{a_s}^{i}(a_t)u_{is}'(c^i(a_s,s))}{u_{it}'(c^i(a_t,t))} & 如果 t<T\\ \dfrac{1}{B(a_t,t)}\dfrac{\pi_{a_s}^{i}(a_t)u_{is}'(c^i(a_s,s))}{u_{it}'(c^i(a_t,t))} & 如果 t=T\end{cases}。\quad (6.2.11)$$

接下来我们来证明 $S_j^*+D_j^*$ 在 π^* 下是一个鞅：

当 t<T 时，由(6.2.5) 和(6.2.11)，有：

$$S_j^*(t)=S_j(t)/B(t)$$

$$=E_i[\frac{B(t+1)u_{it+1}'(c^i(t+1))}{B(t)u_{it}'(c^i(t))}(S_j(t+1)/B(t+1)+x_j(t+1)/B(t+1))\mid F_t]$$

$$=E^*[S_j^*(t+1)+x_j^*(t+1)\mid F_t]。$$

类似于风险中性个体下的讨论，我们有：

$$S_j^*(t)+D_j^*(t)=E^*[S_j^*(s)+D_j^*(s)\mid F_t]\quad \forall T>s\ge t$$

$$=E^*[D_j^*(T)\mid F_t]。\qquad (6.1.12)$$

因此 $S_j^*+D_j^*$ 在 π^* 下是一个鞅，必要性得证。

（充分性）：假定对于所有的 t<T，B(t)>0，并且存在一个等价鞅测度 π^*，在该测度下 $S_j^*+D_j^*$ 是一个鞅，要证明该经济中不存在套利机会。

采用反证法，假定经济中存在一个消费计划 c，为一个可接受的交易策略 (α,θ) 所融资，满足：

$$c\ge 0\quad ,\ c\ne 0，且\ \alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))\le 0。$$

由交易策略 (α,θ) 所融资的消费计划 c 是一个套利机会，个体不需要付出任何成本就有正的机会获得正的消费，即一种免费午餐(free lunch)。

如果消费计划 c 由交易策略 (α,θ) 所融资，则有：

$$c(T)=\alpha(T)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))$$

$$=\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))+\sum_{s=1}^{T}\alpha(s)(B(s)-B(s-1)+x_0(s))$$

$$+\sum_{s=1}^{T}\theta^T(s)(S(s)-S(s-1)+X(s))-\sum_{s=0}^{T-1}c(s)\text{。} \tag{6.2.13}$$

即 T 期消费等于 T 期的财富量，后者等于初始财富加上各期买卖资产所导致的财富增加，再减去各期消费。类似地，我们有：

$$c^*(T)=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$+\sum_{s=1}^{T}\theta^T(s)(S^*(s)-S^*(s-1)+X^*(s))-\sum_{s=0}^{T-1}c^*(s)$$

其中 $c^*(t)=\begin{cases} c(t)/B(t) & t<T \\ c(t) & t=T \end{cases}$。

记 $D^*(t)$=$(D_1^*(t),...,D_N^*(t))^T$，则有：$X^*(t)=D^*(t)-D^*(t-1)$。因此我们有：

$$\sum_{t=0}^{T}c^*(t)=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$+\sum_{t=1}^{T}\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))\text{。} \tag{6.2.14}$$

因为在鞅测度 π^* 下 $S_j^*+D_j^*$ 是一个鞅，所以我们有：

$$E^*[\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))\,|\,F_{t-1}]$$

$$=\theta^T(t)(E^*[S^*(t)+D^*(t)\,|\,F_{t-1}]-S^*(t-1)-D^*(t-1))$$

$$=0\text{。}$$

相应地，我们有：

$$E^*[\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))]$$

$$=E^*[E^*[\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))\,|\,F_{t-1}]]$$

$$=0$$

所以我们有：

$$E^*[\sum_{t=0}^{T} c^*(t)] = \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0))$$

$$+ E^*[\sum_{t=1}^{T} \theta^T(t)(S^*(t) + D^*(t) - S^*(t-1) - D^*(t-1)]$$

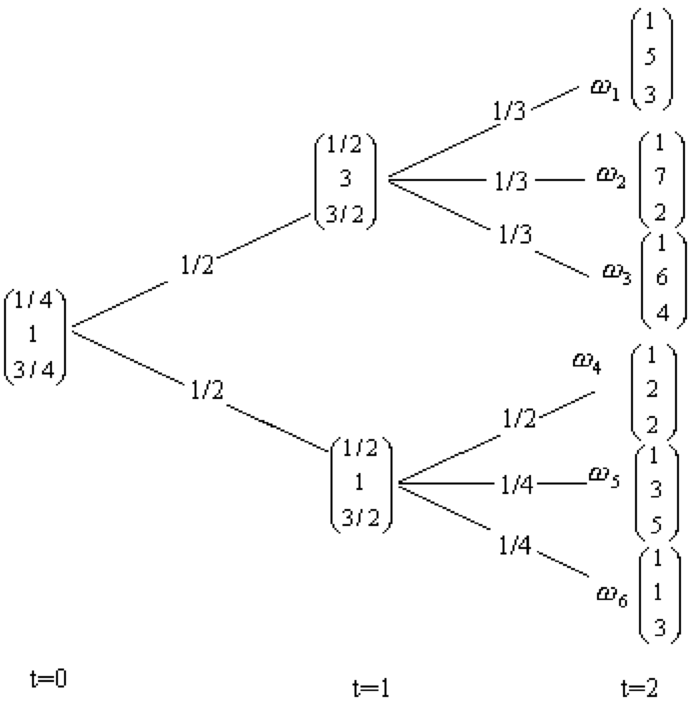
$$= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0))。$$

因为 B(t)>0 对于所有的 t<T 成立，有 $c \geq 0$，$c \neq 0$，所以 $E^*[\sum_{t=0}^{T} c^*(t)] > 0$，这蕴涵：

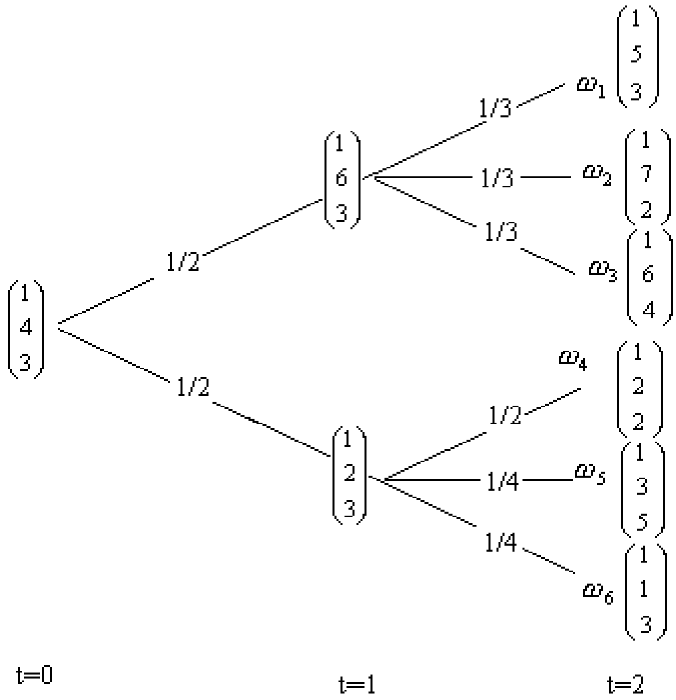
$$\alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) > 0$$

考虑到 B(0)>0，所以有 $\alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) > 0$，与假设矛盾。充分性得证。■

下面我们用一个证券市场实例，来说明无套利机会与等价鞅测度的关系，以及等价鞅测度的求解。



(图 6.2.1)：证券市场原始价格系统



(图 6.2.2)：证券市场贴现价格系统

例 6.2.1：假定经济中有三种长生命证券，j=0,1,2，它们只在 t=2 时支付红利，t=0、1 时的价格和 t=2 时的红利支付如图 6.2.1 所示。在该经济中，第 0 种资产是一种无风险资产。下面我们通过构造一个等价鞅测度来说明该价格系统没有套利机会。此处无风险资产的价格在 t=0 和 t=1 时不为 1，因此我们可以首先对该价格系统进行贴现，如图 6.2.2 所示。

如果经济中不存在套利机会，则存在一个鞅测度，$S_j^* + D_j^*$ 在该测度下是个鞅 。记从 t=1 上面一个节点出发，即事件 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 发生后自然状态 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 出现的条件概率为 p_1、 p_2 和 p_3，则 p_1、 p_2 和 p_3 必须满足：

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 5p_1 + 7p_2 + 6p_3 = 6 \\ 3p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 3 \end{cases}, \tag{6.2.15}$$

该方程组存在唯一的解：

$$(p_1, p_2, p_3) = (1/3, 1/3, 1/3)\text{。} \tag{6.2.16}$$

类似地，从 t=1、事件$\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$发生后自然状态$\omega_4,\omega_5,\omega_6$出现的条件概率为$p_4$、$p_5$和$p_6$必须满足：

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ 2p_1+3p_2+p_3=2 \\ 2p_1+5p_2+3p_3=3 \end{cases}, \tag{6.2.17}$$

该方程组存在唯一解：

$$(p_4,p_5,p_6)=(1/2,1/4,1/4)\text{。} \tag{6.2.18}$$

记事件$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$在 t=0 发生后，事件$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$和$\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$在 t=1 发生的条件概率为$(q_1,q_2)$，则$(q_1,q_2)$满足：

$$\begin{cases} q_1+q_2=1 \\ 6q_1+2q_2=4 \\ 3q_1+3q_2=3 \end{cases}, \tag{6.2.19}$$

上式存在唯一解：

$$(q_1,q_2)=(1/2,1/2)\text{。} \tag{6.2.20}$$

根据上述条件概率，我们可以直接计算出鞅测度π^*：

$$\begin{pmatrix} \pi^*(\omega_1) \\ \pi^*(\omega_2) \\ \pi^*(\omega_3) \\ \pi^*(\omega_4) \\ \pi^*(\omega_5) \\ \pi^*(\omega_6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{pmatrix}\text{。} \tag{6.2.21}$$

因为该经济中存在等价鞅测度，所以该价格系统不存在套利机会。

如果 t=0 时的资产价格发生变化，例如从(1/4,1,3/4)变为(1/4,1,1/2)，则方程(6.2.19)应变为：

$$\begin{cases} q_1+q_2=1 \\ 6q_1+2q_2=4 \\ 3q_1+3q_2=2 \end{cases},$$

显然该方程组无解，从而系统不存在等价鞅测度，这蕴涵该价格系统存在套利机会。该套利机会可以轻易地构造，在第 0 期卖空两份资产 0，购买一份资产 2，则该投资组合的成本为零，是一个套利组合；到第一期将资产变现，

个体可以无风险地获得 1/2 单位消费品。因此经济中存在套利机会。

6.2.3 消费计划的鞅性质

一个消费计划刻画了不同时间-事件下个体的消费量，而一个长生命证券由它在各时间-事件下的回报（消费品）刻画，因此一个长生命证券等价于一个消费计划。在无套利条件下，一个市场化了的消费计划或长生命证券的价格是唯一确定的，因为衍生产品是一种长生命证券，所以其价格也是唯一确定的，可以利用等价鞅测度来计算，衍生产品的这种定价方式称为套利定价。

定理 6.2.2：一个消费计划有定义好了的价格，如果该消费计划是上市的，且经济中不存在套利机会。

证明：（1）如果消费计划 c 是由交易策略 (α,θ) 融资的，则该消费计划的初始成本为：

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))\text{，} \tag{6.2.22}$$

此即 t=0 时该消费计划的连带红利的价格。其唯一性是显然的，如果存在一个交易策略 $(\hat{\alpha},\hat{\theta})$ 融资该消费计划，满足：

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))>\hat{\alpha}(0)B(0)+\hat{\theta}^T(0)(S(0)+X(0))\text{，}$$

则 $(\hat{\alpha}-\alpha,\hat{\theta}-\theta)$ 是一个可接受的消费计划，其初始成本小于零，未来消费恒为零，存在套利机会。如果上述不等式取小于符号，类似地可以证明存在套利机会。进一步可以得到，该消费计划的除息价格等于：

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))-c(0)$$

也是定义好的，唯一决定的。

（2）一个消费计划的 t 期除息价格，是指 t 期需要多少消费品的成本来启动一个动态交易策略，以获得该消费计划 t 期之后的所有消费。消费计划 c 是由交易策略 (α,θ) 融资的，则 $\{c(s)\,|\,s=t+1,...,T\}$ 的价格可以刻画为：

$$\alpha(t)B(t)+\theta^T(t)(S(t)+X(t))-c(t)=\alpha(t+1)B(t)+\theta^T(t+1)S(t)\text{。}$$

类似地，我们可以证明该价格是唯一的。证明完毕。■

记该消费计划 t 期价格为：

$$S_c(t)=\alpha(t+1)B(t)+\theta^T(t+1)S(t)\text{。} \tag{6.2.23}$$

下面我们来证明消费计划具有鞅性质。

定理 6.2.3：如果价格系统(B,S)不存在套利机会，则上市的消费计划具有鞅性质。

证明：定义消费计划的贴现价格为：

$$S_c^*(t)=\begin{cases} S_c(t)/B(t) & t<T \\ 0 & t=T \end{cases}\text{。} \tag{6.2.24}$$

所以我们有：

$$\begin{aligned} S_c^*(t) &= \alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t) \\ &= \alpha(t)+\theta^T(t)(S^*(t)+X^*(t))-c^*(t)\text{。} \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

当价格系统(B,S)不存在套利机会时，存在一个等价鞅测度 π^*，使得 $S_j^*+D_j^*$ 是一个鞅。下面我们来证明 $S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t}c^*(s)$ 也是一个鞅。

由 $\sum_{t=0}^{T}c^*(t)=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$

$$+\sum_{s=1}^{T}\theta^T(s)(S^*(s)-S^*(s-1)+X^*(s))\text{，}$$

得：

$$\begin{aligned} S_c^*(t) &= \alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t) \\ &= \alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0)) \\ &\quad +\sum_{s=1}^{t}\theta^T(s)(S^*(s)-S^*(s-1)+X^*(s))-\sum_{s=0}^{t}c^*(s)\text{。} \end{aligned}$$

$$\sum_{s=t+1}^{T}c^*(s)=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$+\sum_{s=t+1}^{T}\theta^T(s)(S^*(s)+D^*(s)-S^*(s-1)+D^*(s-1))\text{。}$$

所以我们有：

$$E^*[\sum_{s=t+1}^{T} c^*(s) \mid F_t] = \alpha(t+1) + \theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$+E^*[\sum_{s=t+1}^{T} E^*[\theta^T(s)(S^*(s)+D^*(s)-S^*(s-1)+D^*(s-1)) \mid F_{s-1}] \mid F_t]$$

$$=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$=S_c^*(t)\text{。}$$

上式蕴涵，一个消费计划的 t 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度π^*的预期。由此我们可以进一步得到：

$$S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t} c^*(s) = E^*[\sum_{s=0}^{T} c^*(s) \mid F_t], \qquad \forall t\text{。} \tag{6.2.26}$$

所以有：

$$E^*[S_c^*(s)+\sum_{v}^{s} c^*(v) \mid F_t] = E^*[E^*[\sum_{v=0}^{T} c^*(v) \mid F_s] \mid F_t]$$

$$= E^*[\sum_{v=0}^{T} c^*(v) \mid F_t]$$

$$= S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t} c^*(s)\text{。}$$

因此$=S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t} c^*(s)$在$\pi^*$下是一个鞅。定理证明完毕。■

利用消费计划的等价鞅性质，我们可以给消费计划定价。下面我们给出一个例子来加以说明。

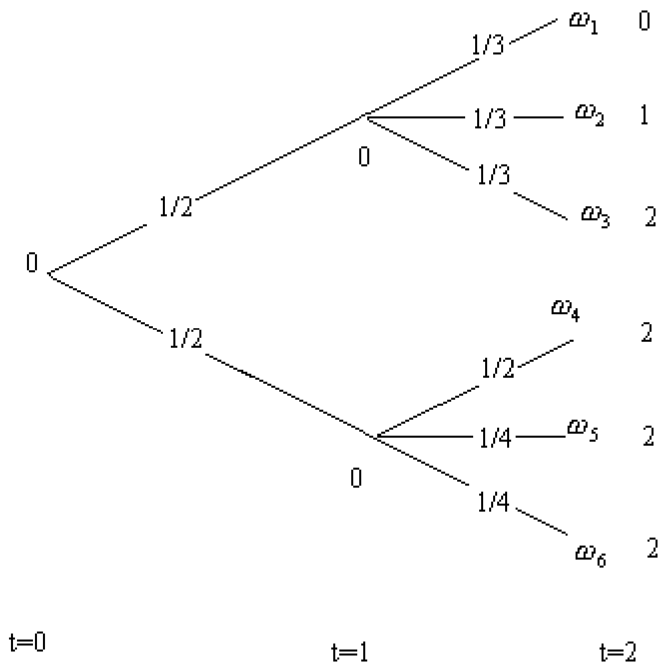
例 6.2.2：考虑一个如图 6.2.3 的消费计划，假定价格系统由图 6.2.1 所示。试计算该消费计划的价格。

因为价格系统中不存在套利机会，所以该消费计划具有鞅性质，该消费计划的 t 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度π^*的预期。所以我们有：

$$S_c^*(0)=(\frac{1}{6})0+(\frac{1}{6})1+(\frac{1}{6})2+(\frac{1}{4})2+(\frac{1}{8})2+(\frac{1}{8})2=\frac{3}{2},$$

$$S_c^*((\omega_1,\omega_2,\omega_3),1)=(\frac{1}{3})0+(\frac{1}{3})1+(\frac{1}{3})2=1，$$

$$S_c^*((\omega_4,\omega_5,\omega_6),1)=(\frac{1}{2})2+(\frac{1}{4})2+(\frac{1}{4})2=2。$$



（图 6.2.3）：一个上市的消费计划。

考虑到 B(0)=1/4，B(1)=1/2，所以该消费计划在时间 t=0 和 t=1 时的价格为：

$$S_c(0)=3/8，\ S_c((\omega_1,\omega_2,\omega_3),1)=1/2，\ S_c((\omega_4,\omega_5,\omega_6),1)=1。$$

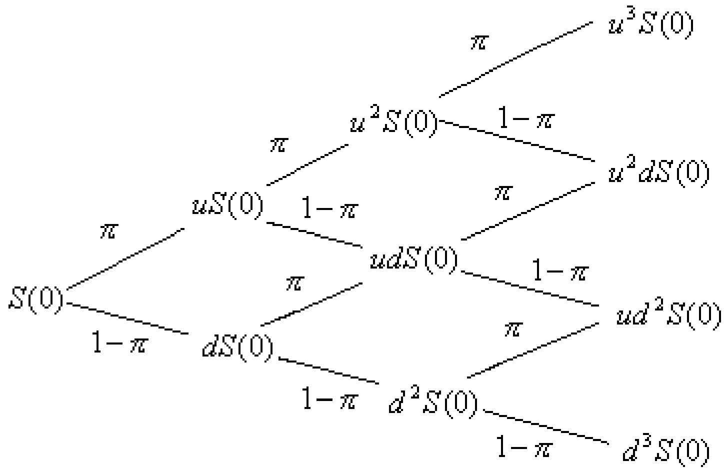
§6.3 Black-Scholes 公式的推导（二叉树方法）

6.3.1　模型的建立

考虑一个具有两个长生命证券的多周期证券市场经济，一个是普通股票，一个是无风险债券。假定该经济持续很长时间，我们仅考虑交易日 t=0、1、2、…、T。假定该经济满足如下假定：

1、 不考虑标的资产的红利收益，假定资产的波动性相同且已知，资产

价格满足一个二项随机游动，如图 6.3.1 所示。$S(0)>0$；$S(1)=\begin{cases}uS(0)\\dS(0)\end{cases}$，$u>d$；…。



(图 6.3.1)：二项随机游动和等价鞅测度。

2、假定在期权生命中短期无风险利率 R 已知，个体可以以一个相同的无风险利率进行借贷，假定无风险资产不支付红利，t 期价格为 R^t。

3、不考虑交易成本和税收，允许证券卖空，在期权成熟前不考虑有价证券的转让等事件。

4、假定个体拥有的信息结构由股票价格生成。$F_0=\{\Omega\}$；F_1 有两个事件；F_2 有三个事件，…；任意的 $a_t\in F_t$ 有两个子集 $a_{t+1}\subset a_t$，$a_{t+1}\in F_{t+1}$。假定个体可能有不同的主观概率，但每一事件上的主观概率都大于零。

6.3.2 等价鞅测度的求解

在图 6.3.1 所示的价格系统中，任意的 $a_t\in F_t$ 有两个子集 $a_{t+1}\subset a_t$，$a_{t+1}\in F_{t+1}$，根据前面的假定，我们在求解等价鞅测度时，只需在一个节点上求出即可。

因为 $B(t)=R^t$，所以我们首先对价格系统进行贴现调整：

$$S^*(t)=S(t)R^{-t}, \qquad B^*(t)=1, \tag{6.3.1}$$

如果经济中不存在套利机会，则价格加上红利和构成的随机过程是一个鞅。考虑到此处不考虑标的资产的红利收益，因此我们有：

$$E^*[S^*(t+1)\,|\,F_t]=S^*(t)\text{，}\quad \forall t<T\text{ 。}\tag{6.3.2}$$

将具体价格代入上式，假定等价鞅测度为$(\pi,1-\pi)$，则我们有：

$$\pi uR^{-1}+(1-\pi)dR^{-1}=1\text{，}$$

由此可得：

$$\pi=\frac{R-d}{u-d}\text{ 。}\tag{6.3.3}$$

当$d<R<u$时，$\pi\in(0,1)$，因此经济中确实存在一个等价鞅测度，相应地，该价格系统不存在套利机会。

6.3.3　Black-Scholes 公式的推导

下面我们利用风险资产的二叉树结构，来推导出一个标的在普通股票上、操作价格为 K、成熟期为 T 的欧式看涨期权的价格。在图 6.3.1 的二叉树中，从第 0 期出发，T 期股票价格为$S(0)u^n d^{T-n}$的概率为$\binom{T}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n}$；从 t 期出发，T 期股票价格达到$S(t)u^n d^{T-n-t}$的条件概率为$\binom{T-t}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n-t}$。

考虑到该欧式看涨期权在 T 期的回报为：$\max[S(T)-K,0]$，因此 t 期该看涨期权的贴现价格为：

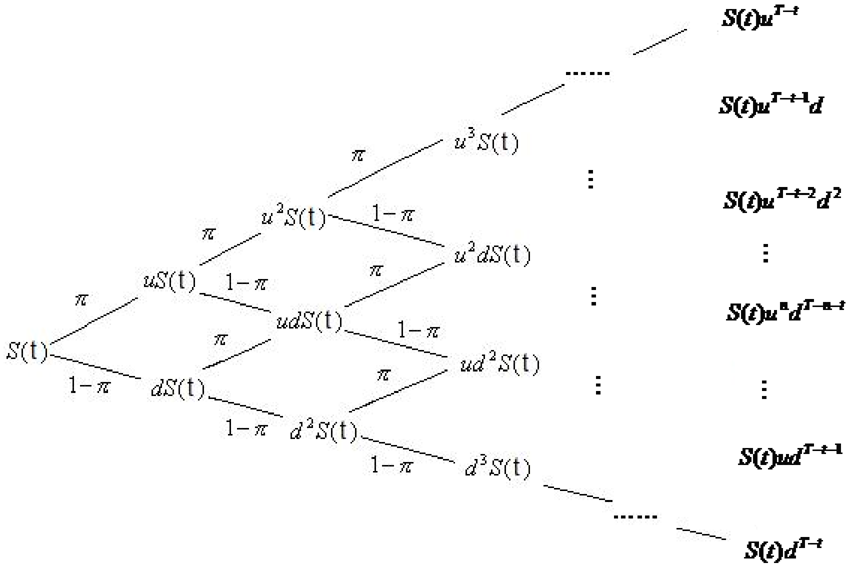
$$p^*(t)=E^*[\max(S(T)-K,0)R^{-T}\,|\,F_t]\text{，}$$

所以 t 期该看涨期权的价格可以表示为：

$$p(S(t),t,K)=R^tE^*[\max(S(T)-K,0)R^{-T}\,|\,F_t]\quad\text{。}$$

由图 6.3.2，上式可以进一步改写为

$$\begin{aligned}&p(S(t),t,K)\\&=R^{-(T-t)}\sum_{n=0}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-t-n}\max[S(t)u^n d^{T-t-n}-K,0]\text{，}\end{aligned}\tag{6.3.4}$$



(图 6.3. 2)：从 t 期开始的二项随机游动和等价鞅测度。

记 j 为满足 $S(t)u^{j}d^{T-t-j} \ge K$ 的正整数，则：

$$j \ge [\ln\frac{K}{S(t)d^{T-t}}]/[\ln u/d]\text{。}$$

从而 $p(S(t),t,K)=R^{-(T-t)}\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}(S(t)u^{n}d^{T-t-n}-K)$

$$=S(t)\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}(\frac{\pi u}{R})^{n}(\frac{(1-\pi)d}{R})^{T-t-n}$$

$$-KR^{-(T-t)}\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}$$

记 $\Phi(j;T-t,\pi)=\sum_{n=0}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}$ ，则

$$p(S(t),t,K)=S(t)\Phi(j;T-t,\pi u/R)-KR^{-(T-t)}\Phi(j;T-t,\pi)\text{。} \quad (6.3.5)$$

该公式由 Cox、Ross 和 Rubinstein(1979)给出。

当独立时间数趋向于无穷时，即在区间 T-t 中将时间间隔分得足够小，则二项分布趋向于正态分布，从而上式可以改写为标准的 Black-Scholes 公式：

$$p(S(t),t,K) = S(t)N(x_t) - Ke^{-r(T-t)}N(x_t - \sigma\sqrt{T-t}), \qquad (6.3.6)$$

其中 $x_t \equiv \dfrac{\ln(S(t)/Ke^{-r(T-t)})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$，r 和 σ 为无风险资产的连续复利和风险资产的标准差。该公式由 Black 和 Scholes(1973)首先给出，他们的工作对市场参与者从事期权定价和对冲等行为提供了方便。

习题：

1、计算例 6.1.2 中在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的美式看跌期权价格，并检验看跌看涨平价关系对于美式期权是否成立。

2、在图 6.2.1 中，如果在时间 t=1、事件 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 发生时，三种资产的价格改为 $(\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2})$，试证明该价格系统不存在等价鞅测度，同时构造一个套利机会来验证 Harris-Creps 的理论。

3、假定某支股票当前价格是 50 元，一个月之后该股票价格以 60%的概率上升为 55 元，以 40%的概率下降为 45 元，无风险利率为每月 2%，试求解该系统的等价鞅测度，并比较与真实概率之间的关系。