第二章 投资组合理论[1]

§2.1 均值方差模型的普适性

Markowitz(1952)的投资组合理论又称为均值-方差模型，其中心思想是投资者应该采用分散化的投资策略，形象地说，不要把所有鸡蛋放在一个篮子里。分散化投资的思想可以追溯到十六世纪，莎士比亚在《威尼斯商人》中写道：

> 我的买卖的成败，并不全寄托在一艘船上，
> 更不是依赖着一处地方；
> 我的全部财产，也不会受一年盈亏的影响，
> 所以我的货物并不能使我忧愁。
>
> （第一场　第一幕　安东尼奥）

Markowitz(1952)首次给出了分散化投资的理论模型。他认为，如果个体是风险回避的、不饱和的，则给定资产的期望回报率，个体总是选择较低的方差，给定方差，个体总是追求较高的期望回报率。Markowitz 的理论建立在个体偏好可以用均值-方差效用函数来刻画的假定之上。下面的例子表明，这种假定是存在问题的。

例 **2.1.1**：假定经济中存在两个投资组合 p_1 和 p_2，它们的随机回报率分别为：

$$\tilde{r}_1=\begin{cases}1/2 & 1/2\text{概率}\\ -1/2 & 1/2\text{概率}\end{cases}，\qquad \tilde{r}_2=\begin{cases}1/3 & 2/3\text{概率}\\ -2/3 & 1/3\text{概率}\end{cases}。$$

通过简单计算可得：$E[\tilde{r}_1]=E[\tilde{r}_2]=0$，$var(\tilde{r}_1)=\frac{1}{4}>\frac{2}{9}=var(\tilde{r}_2)$，即这两个投资组合具有相同的均值，但 p_1 的方差要大于 p_2。

假定个体初始财富量为 1，其效用函数取对数形式：$u(W)=\ln(W)$，则个体在这两个投资组合进行投资后所能达到的期望效用值分别为：

[1]本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002)、Leroy, 和 Werner (2003)、王江(2006)等教材及相关论文。

$$(\text{¿}1+\tilde{r}_1)$$

$$(\text{¿}\frac{1}{2})\approx -0.1438$$

$$(\text{¿}\frac{3}{2})+\frac{1}{2}\ln \text{¿} \quad ;$$

$$\ln \text{¿}=\frac{1}{2}\ln \text{¿}$$

$$E\text{¿}$$

$$(\text{¿}1+\tilde{r}_2)$$

$$(\text{¿}\frac{1}{3})\approx -0.1744$$

$$(\text{¿}\frac{4}{3})+\frac{1}{3}\ln \text{¿} \quad 。$$

$$\ln \text{¿}=\frac{2}{3}\ln \text{¿}$$

$$E\text{¿}$$

因此个体投资在 p_1 上可以有更高的期望效用，尽管其方差比 p_2 的高。

事实上将个体的效用函数写成仅依赖于均值、方差的函数是有条件的，这一点可以从下面的分析看出。

$$u(E[\widetilde{W}])+u'(E[\widetilde{W}])(\widetilde{W}-E[\widetilde{W}])+\frac{1}{2}u''(E[\widetilde{W}])\text{¿}$$

$$\text{¿}$$

$$E[u(\widetilde{W})]=E\text{¿}$$

$$\text{¿}u(E[\widetilde{W}])+\frac{1}{2}u''(E[\widetilde{W}])\sigma^2(\widetilde{W})+E[R_3] \quad 。 \tag{2.1.1}$$

其中

$$E[R_3]=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\widetilde{W}])m^n(\widetilde{W}) \tag{2.1.2}$$

是所有三阶矩以上的项， $m^n(\widetilde{W})$ 是 n 阶中心矩。(2.1.1)蕴涵，对于一个不饱和的、风险回避的个体，其期望效用不仅依赖于财富的均值和方差，还依赖于三阶以上的中心矩。只有当效用函数取特殊形式（例如二次多项式），或资产的随机回报率满足特殊的分布（例如多变量正态分布）时，期望效用函数才能表示为随机财富均值、方差的函数。

当个体效用函数取二次多项式 $u(\widetilde{W})=\widetilde{W}-\frac{b}{2}\widetilde{W}^2$ ，个体期望效用值可以简化为：

$$E[u(\widetilde{W})]=E[\widetilde{W}]-\frac{b}{2}E[\widetilde{W}^2]$$
$$(E[\widetilde{W}]¿^2+\sigma^2(\widetilde{W}))$$
$$¿E[\widetilde{W}]-\frac{b}{2}¿$$
。

因此个体偏好可以用均值、方差的函数来刻画。但二次多项式效用函数蕴涵当财富量增加到一定程度，个体效用将减少；同时二次多项式效用函数中个体展示增的绝对风险回避，这蕴涵对个体而言风险资产是一种次品，因此假定个体效用函数是二次多项式形式并不十分合理。

当资产的随机回报率为正态分布时， $\widetilde{W}$ 也服从正态分布。对于正态分布，其高阶中心矩可以表示为一阶、二阶矩的函数：

$$¿=\begin{cases}\dfrac{j!}{(\frac{j}{2})!}\dfrac{\sigma^j(\widetilde{W})}{2^{j/2}} & j\text{为偶数}\\ 0 & j\text{为奇数}\end{cases}$$
，
$$E¿$$

因此个体期望效用函数可以表示为均值方差的函数。但资产回报率服从正态分布的假定太强了，计量检验表明，大多数资产并不服从这样的假定。

基于以上的分析，均值-方差模型并不是一个普适的资产选择模型，但由于该模型在分析上及所得出的结论都相对简单，同时在真实经济中使用效果也比较令人满意，因此得到了广泛认同。

§2.2 完全风险资产下的投资组合前沿

2.2.1 模型的建立

考虑一个无摩擦经济，假定所有资产都是风险资产，风险资产可以无限卖空。假定经济中自然状态的全体可以刻画为：

$$¿\Omega\vee¿\}$$
$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_¿$$
，

其中 $¿\Omega\vee¿$ 代表 Ω 中元素个数，即自然状态的总个数。给定任意一个风险资产或投资组合，该资产或投资组合的随机回报率向量 $\tilde{r}$ 可以表示为一个 $¿\Omega\vee¿$ 维的向量 $r(\omega_1),r(\omega_2),\ldots,r(\omega_¿)$ $¿\Omega\vee¿$ $¿$ 。假定该经济中存在 $N\geq 2$ 种可以进行交易的风险资产，其随机回报率向量 $\tilde{r}_1$ 、 $\tilde{r}_2$ 、…、 $\tilde{r}_N$ 线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产和投资组合都是这 N 种风险资产的线性组合，即随机回报率向量 $\tilde{r}_1$ 、 $\tilde{r}_2$ 、

…、 $\tilde{r}_N$ 构成一个极大无关线性向量组。因此我们在分析最优投资组合时，只需考虑在这 N 种资产上的投资组合权重。

记 e 为由 N 种风险资产的期望回报率构成的 $N\times 1$ 的向量，记为：

$$e = (E[\tilde{r}_1], E[\tilde{r}_2], \cdots E[\tilde{r}_N])^T ; \qquad (2.2.1)$$

其中上标“T”表示转置，$\vec{1}$ 为由 1 构成的 $N\times 1$ 的向量，记为：

$$\vec{1} \equiv (1,1,\cdots,1)^T ;$$

V 为 N 种风险资产随机回报率的方差-协方差矩阵，可以表示为：

$$V = \begin{pmatrix} var(\tilde{r}_1) & cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) & \cdots & cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_N) \\ cov(\tilde{r}_2,\tilde{r}_1) & var(\tilde{r}_2) & \cdots & cov(\tilde{r}_2,\tilde{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(\tilde{r}_N,\tilde{r}_1) & cov(\tilde{r}_N,\tilde{r}_2) & \cdots & var(\tilde{r}_N) \end{pmatrix} 。$$

(2.2.2)

因为任意给定一个权重向量为 $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^T$ 的投资组合，有：

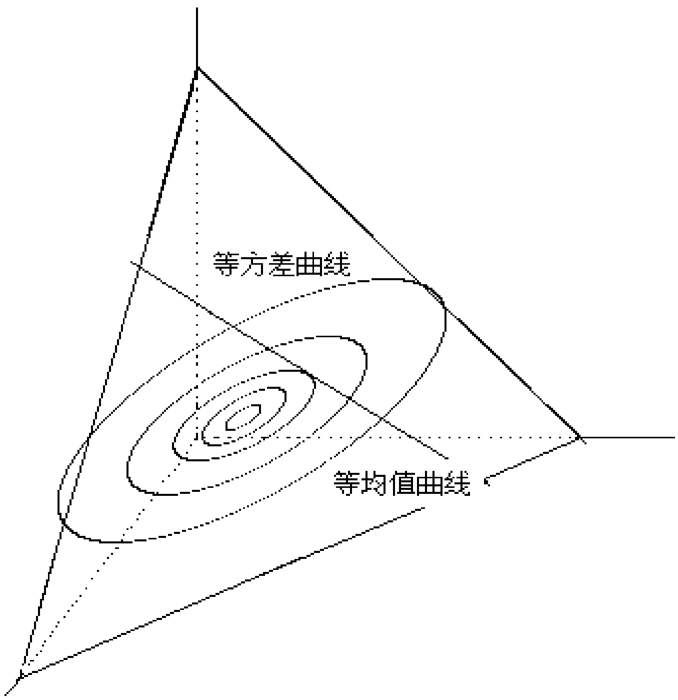
$$w^T V w = var(w_1\tilde{r}_1 + w_2\tilde{r}_2 + \ldots + w_N\tilde{r}_N) > 0 ,$$

所以 V 是一个对称、正定矩阵。

由于经济中存在着 N 种回报率线性无关的资产，所以所有投资组合的权重向量构成一个 N 维线性空间。给定期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$，所有期望回报率等于 $E[\tilde{r}_p]$ 的投资组合的权重向量 w 全体服从：$w^T e = E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^T \vec{1} = 1$，即这些权重向量同时位于两个 N-1 维超平面 $w^T e = E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^T \vec{1} = 1$ 上。等方差曲面 $w^T V w = \sigma^2$ 是 N-1 维

的椭球面，与 $w^T\vec{1}=1$ 相交成一个 N-2 维的椭球面， $w^Te=E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^T\vec{1}=1$ 相交成一个 N-2 维超平面。

当 N=3 时，在 3 维空间中 $w^TVw=\sigma^2$ 是一个 2 维椭球面，$w^Te=E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^T\vec{1}=1$ 是 2 维平面， $w^TVw=\sigma^2$ 与平面 $w^T\vec{1}=1$ 相交成一个椭圆，等均值平面 $w^Te=E[\tilde{r}_p]$ 与平面 $w^T\vec{1}=1$ 相交成一条直线，如图 2.2.1 所示。在期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$ 给定下求解极小方差投资组合，相当于在平面 $w^T\vec{1}=1$ 中寻找与等均值线 $w^Te=E[\tilde{r}_p]$ 相切的等方差曲线及切点。可以看出，与不同均值 $E[\tilde{r}_p]$ 相对应的等均值线彼此平行，等方差曲线具有相同的中心，仅相差一个仿射变换，因此所有切点位于同一根直线上，构成一个一维子空间。我们称该直线为组合前沿，称该组合前沿上的任意投资组合为前沿组合。在组合前沿上任给两个前沿组合，其他前沿组合可以表示为这两个前沿组合的线性组合。



（图 2.2.1）：三资产极小方差投资组合

当 N>3 时，给定投资组合的期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$ ，极小方差投资组合

的求解相当于在 N-1 维超平面 $w^T\vec{1}=1$ 中求出 N-2 维的椭球面与 N-2 维超平面相切的切点组合。可以证明，所有切点都位于同一条直线上，构成一个一维子空间，即组合前沿，该组合前沿可以由任意两个前沿组合线性张成。

例 **2.2.1**：假定经济中存在四个等概率发生的自然状态 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 和 ω_4 ，假定经济中存在三种风险资产，其随机回报率 $\tilde{r}_1$ 、 $\tilde{r}_2$ 和 $\tilde{r}_3$ 的取值由表 2.2.1 给出。

这三种资产的期望回报率分别为：

$$E[\tilde{r}_1]=\frac{1}{4}(2+0+0+2)=1 \quad ;$$

$$E[\tilde{r}_2]=\frac{1}{4}(1+1+2+2)=1\frac{1}{2} \quad ;$$

$$E[\tilde{r}_3]=\frac{1}{4}(0+2+0+2)=1 \quad 。$$

自然状态 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega)$	2	0	0	2
$\tilde{r}_2(\omega)$	1	1	2	2
$\tilde{r}_3(\omega)$	0	2	0	2

（表 2.2.1）：三种资产的随机回报率取值

因此期望回报率向量可以刻画为：

$$1,1.5,1¿^T$$
$$E[\tilde{r}_1],E[\tilde{r}_2],E[\tilde{r}_3]¿^T=¿ \quad 。$$
$$e=¿$$

在各自然状态下，资产的随机回报率对期望值的偏离可以刻画为：

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega)-E[\tilde{r}_1$	1	-1	-1	1
$\tilde{r}_2(\omega)-E[\tilde{r}_2$	-1/2	-1/2	1/2	1/2
$\tilde{r}_3(\omega)-E[\tilde{r}_3$	-1	1	-1	1

（表 2.2.1）：三种资产的随机回报率对期望值的偏离

因此我们有：

$(¿\tilde{r}_1)=1$ $(¿\tilde{r}_2)=1/4$ $(¿\tilde{r}_3)=1$

$var¿$ ， $var¿$ ， $var¿$ ，

$(¿\tilde{r}_2,\tilde{r}_1)=0$

$(¿\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=cov¿$ ，

$cov¿$

$(¿\tilde{r}_3,\tilde{r}_1)=0$

$(¿\tilde{r}_1,\tilde{r}_3)=cov¿$ ，

$cov¿$

$(¿\tilde{r}_3,\tilde{r}_2)=0$

$(¿\tilde{r}_2,\tilde{r}_3)=cov¿$ ，

$cov¿$

因此方差-协方差矩阵 V 可以刻画为：

$$V=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ 。

显然，方差-协方差矩阵 V 定正、对称。

在该例中，3 维空间中 2 维椭球面 $w^T Vw=\sigma^2$ 可以刻画为：

$$w_1^2+\frac{1}{4}w_2^2+w_3^2=\sigma^2$$ ，

两个 2 维平面 $w^T e=E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^T\vec{1}=1$ 分别可以刻画为：

$$w_1+\frac{3}{2}w_2+w_3=E[\tilde{r}_p]$$ ，

$$w_1+w_2+w_3=1$$ 。

给定 $E[\tilde{r}_p]$ ，平面 $w_1+w_2+w_3=1$ 与平面 $w_1+\frac{3}{2}w_2+w_3=E[\tilde{r}_p]$ 相交成一条直线；同时平面 $w_1+w_2+w_3=1$ 与椭球面 $w_1^2+\frac{1}{4}w_2^2+w_3^2=\sigma^2$ 相交成一个椭圆， σ^2 的取值决定了椭圆的大小，这些椭圆有些与直线相交，有些无交点，其中有一个与直线相切，切点即为前沿组合。通过解析几何的方法可计算得，该切点可以刻画为：

$$(w_1,w_2,w_3)=(\frac{13}{9}-E[\tilde{r}_p],E[\tilde{r}_p]-\frac{5}{9},\frac{1}{9})$$ 。

随着 $E[\tilde{r}_p]$ 的变化，切点组合也在变化，这个组合前沿是一条直线。

●

2.2.2 模型的求解

记 w_p 为前沿组合在各资产上的投资组合权重向量，给定期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$ ，则 w_p 是如下最大化问题的解：

$$\min_{w} \frac{1}{2} w^T V w \quad 。 \qquad (2.2.3)$$

Subject to:

$$w^T e = E[\tilde{r}_p] \quad ,$$

$$w^T \vec{1} = 1 \quad 。$$

上述最小化问题的拉格朗日函数可以刻画为：

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda \left(E[\tilde{r}_p] - w^T e \right) + \mu \left(1 - w^T \vec{1} \right) \quad 。$$

其中 λ 和 μ 分别为相应于两个约束方程的拉格朗日乘子。求解上述最大化问题，得一阶条件为：

$$V w - \lambda e - \mu \vec{1} = 0 \quad , \qquad (2.2.4)$$

因此最优投资组合可以表示为：

$$w_p = \lambda V^{-1} e + \mu V^{-1} \vec{1} \quad 。 \qquad (2.2.5)$$

将(2.2.5)代入两个约束方程中，整理得：

$$E[\tilde{r}_p] = \lambda e^T V^{-1} e + \mu \vec{1}^T V^{-1} e \quad ,$$

$$1 = \lambda e^T V^{-1} \vec{1} + \mu \vec{1}^T V^{-1} \vec{1} \quad 。$$

求解上述方程组，得：

$$\lambda = \frac{C E[\tilde{r}_p] - A}{D} \quad , \qquad \mu = \frac{B - A E[\tilde{r}_p]}{D} \quad 。 \qquad (2.2.6)$$

其中 $A = \vec{1}^T V^{-1} e = e^T V^{-1} \vec{1}$ ， $B = e^T V^{-1} e$ ， $C = \vec{1}^T V^{-1} \vec{1}$ ， $D = BC - A^2$ 。

因此前沿组合权重向量 w_p 可以表示为：

$$w_p = \frac{C E[\tilde{r}_p] - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - A E[\tilde{r}_p]}{D} V^{-1} \vec{1}$$

¿$g + h E[\tilde{r}_p]$ ， (2.2.7)

其中 $g = \dfrac{B V^{-1} \vec{1} - A V^{-1} e}{D}$ ， $h = \dfrac{C V^{-1} e - A V^{-1} \vec{1}}{D}$ 。由此我们有如下命题：

定理 **2.2.1**：完全风险资产下任意前沿组合都可以表示为(2.2.7)的形式，反之亦然。

此处 g 和 $g+h$ 是相应于均值为零和 1 的两个前沿组合。对任意

前沿投资组合 w_p ，我们有：

$$w_p = g + h\,E[\tilde{r}_p] = (1 - E[\tilde{r}_p])\,g + E[\tilde{r}_p](g+h) \quad ,$$

所以任意前沿组合都可以表示为这两个前沿组合的线性组合。

续例 **2.2.1**：在例 2.2.1 的假设条件下，最优化问题(2.2.3)可以简化为：

$$\min_{\{w_1,w_2,w_3\}} \frac{1}{2}w_1^2 + \frac{1}{8}w_2^2 + \frac{1}{2}w_3^2$$

Subject to:

$$w_1 + \frac{3}{2}w_2 + w_3 = E[\tilde{r}_p] \quad ,$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \quad 。$$

通过简单计算可得：

$$A=8 \quad , \quad B=11 \quad , \quad C=6 \quad , \quad D=2 \quad ,$$

$$w_p = \frac{CE[\tilde{r}_p] - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - AE[\tilde{r}_p]}{D} V^{-1} \vec{1}$$

$$¿ \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} E[\tilde{r}_p] \quad 。$$

●

推论：整个投资组合前沿可以由任意两个不同的前沿组合线性生成。

证明：任意给定两个不同的前沿组合 p_1 、 p_2 ， $E[\tilde{r}_{p_1}] \neq E[\tilde{r}_{p_2}]$ 。在组合前沿上任意前沿组合 q ，存在 α ，使得 $E[\tilde{r}_q] = \alpha E[\tilde{r}_{p_1}] + (1-\alpha) E[\tilde{r}_{p_2}]$ 成立。因此我们有：

$$\alpha\, w_{p_1} + (1-\alpha)\, w_{p_2} = \alpha(g + hE[\tilde{r}_{p_1}]) + (1-\alpha)(g + h\,E[\tilde{r}_{p_2}])$$

$$¿ g + h(\alpha E[\tilde{r}_{p_1}] + (1-\alpha) E[\tilde{r}_{p_2}])$$

$$¿ g + h\,E[\tilde{r}_q]$$

$$¿ w_q$$

证明完毕。 ■

推论：前沿组合的任意线性组合是一个前沿组合。

证明：给定 m 个前沿组合，记 $\{w_i, i=1,2,\cdots,m\}$ 分别是其权重向量，

记这 m 个前沿组合的期望回报率分别为 $E[\tilde{r}_i], i=1,2,\cdots,m$ ；假定 $w_i, i=1,2,\cdots,m$ 是关于这 m 个前沿组合的线性组合的组合系数，满足 $\sum_i \alpha_i = 1$ ，则该线性组合满足：

$$\sum_i \alpha_i w_i = \sum_i \alpha_i (g + hE[\tilde{r}_i]) = g + h\left(\sum_i \alpha_i E[\tilde{r}_i]\right) ,$$

所以前沿组合的任意线性组合仍然是一个前沿组合

证明完毕。 ■

2.2.3 风险资产组合前沿的一些性质

性质 **2.2.1**：任意两个前沿组合 p 和 q 的回报率之间的协方差可以表示为：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} 。 \qquad (2.2.8)$$

证明：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = w_p^T V w_q = (g + hE[\tilde{r}_p])^T V (g + hE[\tilde{r}_q])$$

$$= E[\tilde{r}_p]E[\tilde{r}_q]h^T V h + E[\tilde{r}_p]h^T V g + E[\tilde{r}_q]g^T V h + g^T V g$$

其中 $g^T V g = \frac{B\vec{1}^T V^{-1} - Ae^T V^{-1}}{D} V \frac{BV^{-1}\vec{1} - AV^{-1}e}{D}$

$$= \frac{1}{D^2}[B^2 \vec{1}^T V^{-1}\vec{1} + A^2 e^T V^{-1} e - 2AB1^T V^{-1} e]$$

$$= \frac{B}{D} ,$$

类似地，我们有 $h^T Vg = g^T Vh = \frac{-A}{D}$ ， $h^T V h = \frac{C}{D}$ 。代入上式，得：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}E[\tilde{r}_p]E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{D}E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{D}E[\tilde{r}_q] + \frac{B}{D}$$

$$= \frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} 。$$

证明完毕。 ■

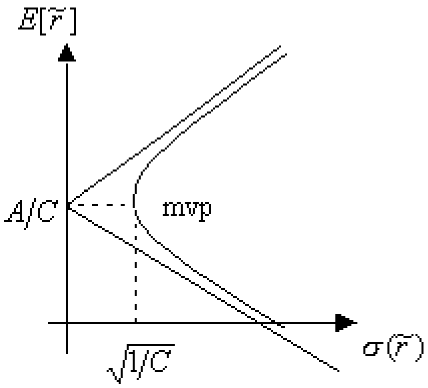
当 p 与 q 取同一个前沿组合时，我们有下面的性质 2.2.2：

性质 **2.2.2**：任意前沿组合回报率的方差可以表示为：

$$E[\tilde{r}_p]-A/C¿^2$$
$$¿$$
$$¿$$
$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C}-¿ \quad , \qquad (2.2.9a)$$

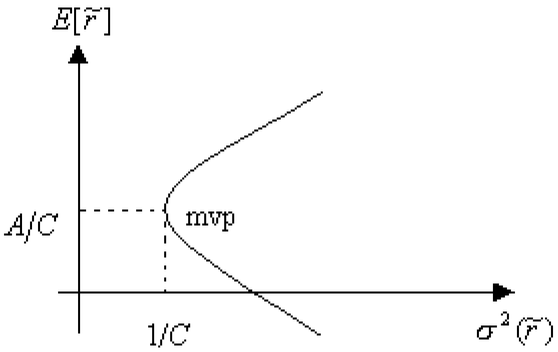
$$C(E[\tilde{r}_p]¿^2-2AE[\tilde{r}_p]+B)$$

或 $$\sigma^2(\tilde{r}_p)=\frac{1}{D}¿ \quad 。 \qquad (2.2.9b)$$



（图 2.2.2）： $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中的投资组合前沿

性质 2.2.2 蕴涵，在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中，投资组合前沿是一条双曲线，如图 2.2.2 所示；在 $\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中，投资组合前沿是一条抛物线，如图 2.2.3 所示。在图 2.2.2 和图 2.2.3 中，所有位于投资组合前沿左边的组合都是不可行投资组合，位于组合前沿右边（包括组合前沿）的投资组合是可行投资组合。



(图 2.2.3)： $\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中的投资组合前沿

由(2.2.8a)或图(2.2.2)和图(2.2.3)知，存在一个极小方差投资组合 mvp (minimum variance portfolio)，其期望回报率为 A/C ，方差为 $1/C$ 。将 $E[\tilde{r}_{mvp}]=A/C$ 代入(2.2.7)，得：

$$w_{mvp}=g+h\frac{A}{C}=\frac{1}{D}[B(V^{-1}\vec{1})-A(V^{-1}e)]+\frac{1}{D}[C(V^{-1}e)-A(V^{-1}\vec{1})]\frac{A}{C}$$

整理得：

$$w_{mvp}=\frac{1}{C}(V^{-1}\vec{1}) \text{。} \qquad (2.2.10)$$

性质 **2.2.3**：极小方差投资组合 mvp 的回报率与其它任意投资组合回报率的协方差等于 $1/C$ ，即极小方差投资组合 mvp 自身回报率的方差。

证明：任给一个可行投资组合 p ，有：

$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{mvp})=w_p^T V w_{mvp}=w_p^T V V^{-1}\vec{1}\frac{1}{C}=\frac{1}{C} \text{。} \qquad (2.2.11)$$

证明完毕。 ■

定义：所有期望回报率严格超过 mvp 期望回报率的前沿组合称为有效组合(efficient portfolio)；所有期望回报率严格低于 mvp 期望回报率的前沿组合称为无效组合(inefficient portfolio)。

从图(2.2.1)中可以看出，任意一个无效投资组合，都存在唯一的有效投资组合与它具有相同的方差和不同的均值。

性质 **2.2.4**：所有有效组合的全体是一个凸集。

证明：假定 $w_i, i=1,2,\cdots,m$ 是 m 个有效组合的权重向量，记这 m 个有效组合的期望回报率为 $E[\tilde{r}_i], i=1,2,\cdots,m$，则有 $E[\tilde{r}_i]>A/C$，$i=1,2,\cdots,m$。

任意给定一个这 m 个有效组合的凸组合，假定组合系数为 $w_i, i=1,2,\cdots,m$，显然 $\sum_i \alpha_i=1$，$\alpha_i \geq 0$，$i=1,2,\cdots,m$。由前面的讨论知道，这 m 个有效组合的凸组合是一个前沿组合，另外

$E\left[\sum_i \alpha_i \tilde{r}_i\right]$，因此该凸组合是一个有效组合。

证明完毕。 ■

性质 **2.2.5**：任意一个不等于 mvp 的前沿组合 p，都存在唯一的一个与 p 的协方差为零的前沿组合 $zc(p)$。

证明：由 $\mathrm{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)})=\frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}_{zc(p)}]-\frac{A}{C}\right)+\frac{1}{C}=0$，得：

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\frac{A}{C}-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C} \text{。} \qquad (2.2.12)$$

由等式(2.2.9)或图(2.2.2)知，满足条件的前沿组合 $zc(p)$ 存在唯一。
证明完毕。 ■

我们称前沿组合 $zc(p)$ 是前沿组合 p 的零-协方差组合。由(2.2.12)知，当前沿组合 p 是一个有效组合时，它的零-协方差组合 $zc(p)$ 是一个无效组合；当 p 是无效组合时，$zc(p)$ 是一个有效组合。

性质 **2.2.6**：（i）在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面上，过任意前沿组合 p 关于组合前沿的切线与期望回报率轴相交，截距为 $E[\tilde{r}_{zc(p)}]$，如图 2.2.4 所示。

(ii) 在 $\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面上，过任意前沿组合 p 与 mvp 的连线与期望回报率轴相交，截距为 $E[\tilde{r}_{zc(p)}]$，如图 2.2.4 所示。

证明：（ⅰ）对(2.2.6a)全微分，整理后得过前沿组合 p 关于组合前沿的切线的斜率为：

$$k=\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)}=\frac{\sigma(\tilde{r}_p)D}{CE[\tilde{r}_p]-A} \quad ;$$

因此该切线的表达式为：

$$E[\tilde{r}]-E[\tilde{r}_p]=[\sigma(\tilde{r})-\sigma(\tilde{r}_p)]\frac{D\sigma(\tilde{r}_p)}{CE[\tilde{r}_p]-A} \quad 。$$

在上式中令 $\sigma(\tilde{r})=0$ ，则得该切线与期望回报率轴相交的截距为：

$$E[\tilde{r}]=E[\tilde{r}_p]-\frac{D\sigma^2(\tilde{r}_p)}{CE[\tilde{r}_p]-A}$$

$$E[\tilde{r}_p]-A/C\text{¿}^2+D/C$$

¿

$$C\text{¿}$$

$$\text{¿}E[\tilde{r}_p]-\text{¿}$$

$$\text{¿}A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}$$

$$\text{¿}E[\tilde{r}_{zc(p)}] \quad 。$$

（ⅱ）利用两点式，前沿组合 p 与 mvp 的连线方程为：

$$\frac{E[\tilde{r}]-E[\tilde{r}_p]}{A/C-E[\tilde{r}_p]}=\frac{\sigma^2(\tilde{r})-\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_p)} \quad ,$$

在上式中令 $\sigma^2(\tilde{r})=0$ ，则得该直线与期望回报率轴相交的截距为：

$$E[\tilde{r}]=E[\tilde{r}_p]-\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)(A/C-E[\tilde{r}_p])}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_p)}$$

$$\frac{C}{D}¿\left(\frac{A}{C}-E[\tilde{r}_p]\right)$$

$$¿$$

$$E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C}¿^2$$

$$\frac{-C}{D}¿$$

$$¿$$

$$¿E[\tilde{r}_p]-¿$$

$$¿A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}$$

$$¿E[\tilde{r}_{zc(p)}]$$ 。

证明完毕。 ■

性质 **2.2.7**：设 p 是一个前沿组合， $p\neq mvp$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：

$$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p] \quad 。\qquad (2.2.13)$$

此处 $\begin{matrix} var(¿\tilde{r}_p) \\ cov(¿\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/¿ \\ \beta_{qp}=¿ \end{matrix}$ 是贝塔系数。

证明： $\begin{matrix}(¿\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=w_p^T V w_q=[\lambda(e^T V^{-1})+\gamma(1^T V^{-1})]V w_q \\ cov¿\end{matrix}$

$$¿\lambda e^T w_q+\gamma=\lambda E[\tilde{r}_q]+\gamma \quad 。$$

考虑到 $\begin{matrix}(¿\tilde{r}_p,\tilde{r}_{zc(p)})=0 \\ \lambda E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\gamma=cov¿\end{matrix}$ ，求解出 γ ，代回到上式，得：

$$\begin{matrix}(¿\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=\lambda(E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]) \\ cov¿\end{matrix} \quad , \qquad (2.2.14a)$$

类似地，我们有：

$$\begin{matrix}(¿\tilde{r}_p)=\lambda(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]) \\ var¿\end{matrix} \quad 。\qquad (2.2.14b)$$

将(2.2.14a)与(2.2.14b)相除，整理得：

$$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]) \quad 。\qquad (2.2.15)$$

因此有： $E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]$ 。

证明完毕。 ■

考虑到 $zc(zc(p))=p$ ，由(2.2.13)，我们：

$$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qzc(p)})E[\tilde{r}_p]+\beta_{qzc(p)}E[\tilde{r}_{zc(p)}] \quad 。 \qquad (2.2.16)$$

其中 $\beta_{qp}=1-\beta_{qzc(p)}$ 。

性质 2.2.8：设 p 是一个前沿组合， $p\neq mvp$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_q \quad 。 \qquad (2.2.17)$$

$(¿\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_q)=E[\tilde{\varepsilon}_q]$

其中 $(¿\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_q)=cov¿$ ，其中 $\tilde{\varepsilon}_q$ 不依赖于前沿组合 p 的选取。

$cov¿$

证明：（i）将随机变量 $\tilde{r}_q$ 关于 $\tilde{r}_p$ 、 $\tilde{r}_{zc(p)}$ 作投影，得：

$$\tilde{r}_q=\beta_0+\beta_1\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_2\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp} \quad , \qquad (2.2.18)$$

$(¿\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_{qp})=E[\tilde{\varepsilon}_{qp}]=0$

其中 $(¿\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_{qp})=cov¿$ 。

$cov¿$

利用(2.2.13)，得：

$$\beta_1=1-\beta_{qp} \quad , \quad \beta_2=\beta_{qp} \quad , \quad \beta_0=0 \quad 。$$

代回到(2.2.18)，得：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp} \quad 。$$

（ii）记 $\widetilde{Q}_{qp}=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p$ ，则 $\widetilde{Q}_{qp}$ 是一个前沿组合。由(2.1.13)得， $E[\widetilde{Q}_{qp}]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]=E[\tilde{r}_q]$ ，考虑到给定期望回报率下的前沿组合的唯一性，可得 $\widetilde{Q}_{qp}$ 的选取独立于前沿组合 p 的选取。

证明完毕。 ■

性质 2.2.8 蕴涵，任意一个可行投资组合可以正交投影为一个前沿组合 $\widetilde{Q}_q$ 和一个期望回报率为零的噪声项 $\tilde{\varepsilon}_q$ 。

$$
\begin{array}{c}
(¿\tilde{\varepsilon}_q) \\
(¿\widetilde{Q}_q)+var\,¿ \\
(¿\widetilde{Q}_q+\tilde{\varepsilon}_q)=var\,¿ \\
(¿\tilde{r}_q)=var\,¿ \\
var\,¿
\end{array}
$$

因为 $E[\tilde{r}_q]=E[\widetilde{Q}_q]$ ，$(¿\widetilde{Q}_q+\tilde{\varepsilon}_q)=var\,¿$ 。因此如果个体偏爱较高的期望回报率和较低的方差，则在给定期望回报率下，该个体可以通过选择前沿组合 $\widetilde{Q}_q$ 来回避掉由 $\tilde{\varepsilon}_q$ 带来的风险。

续例 **2.2.1**：在例 2.2.1 中，前沿组合的期望回报率与方差之间的关系可以简化为：

$$
\begin{array}{l}
E[\tilde{r}_p]-4/3\,¿^2 \\
¿ \\
¿ \\
\dfrac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/6}-¿
\end{array}
\quad ,
$$

任意一个可行组合都可以分解为一个前沿组合和一个非系统风险。例如，给定一个投资组合 $w_q^T=(1,2,-2)$ ，其随机回报率向量和期望回报率可以分别刻画为：

$$\tilde{r}_q=(4,-2,4,2) \quad , \quad E[\tilde{r}_q]=2 \quad 。$$

取前沿组合 p ，其投资组合权重向量为 $w_p^T=(1/2,0,1/2)$ ，其随机回报率向量为 $\tilde{r}_p=(1,1,0,2)$ ，期望回报率为 $E[\tilde{r}_p]=1$ ，该前沿组合的零协方差组合的期望回报率满足：

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\frac{A}{C}-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}$$

$$¿\frac{8}{6}-\frac{2/36}{1-8/6}=1.5$$

注意到此处 A/C=4/3，所以 p 是一个无效组合， $zc(p)$ 是一个有效组合。 $zc(p)$ 可以刻画为：

$$w_{zc(p)}=\begin{pmatrix}1.5\\-2\\1.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

其随机回报率向量为 $\tilde{r}_{zc(p)}=(1,1,2,2)$ 。

由此我们有：

$$var\,(\text{¿}\tilde{r}_p)=-1$$

$$cov\frac{(\text{¿}\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)}{\text{¿}}\quad ,$$

$$\beta_{qp}=\text{¿}$$

$$var\,(\text{¿}\tilde{r}_{zc(p)})=2$$

$$cov\frac{(\text{¿}\tilde{r}_q,\tilde{r}_{zc(p)})}{\text{¿}}\quad ,$$

$$\beta_{qzc(p)}=\text{¿}$$

所以我们可以将 $\tilde{r}_q$ 分解为：

$$\tilde{r}_q=-\tilde{r}_p+2\tilde{r}_{zc(p)}+\tilde{\varepsilon}_q\quad ,$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_q=(3,-3,0,0)$ 满足 $\begin{matrix}(\text{¿}\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_p)=E[\tilde{\varepsilon}_p]=0\\(\text{¿}\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_p)=cov\,\text{¿}\\cov\,\text{¿}\end{matrix}$ 。

考虑到 $E[\tilde{r}_q]=2$ ，存在一个期望回报率等于 2 的前沿组合 Q_q ，满足：

$$w_{Q_q}=\begin{pmatrix}1.5\\-2\\1.5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}E[\tilde{r}_q]=\begin{pmatrix}-1/2\\2\\-1/2\end{pmatrix}$$

其随机回报率 $\tilde{Q}_q=(1,1,4,2)=-\tilde{r}_p+2\tilde{r}_{zc(p)}$ 独立于前沿组合 p 的选取。

§2.3 引入无风险资产后的投资组合前沿

2.3.1 组合前沿的求解

假定经济中除了 N 种风险资产外，还存在一种无风险资产。记 N 种风险资产的期望回报率向量为 e ，无风险资产上的期望回报率为 r_f ， V 为 N 种风险资产回报率的方差-协方差矩阵， $\vec{1}$ 为由 1 构成的 N 向量；记 w 为投资组合在 N 风险资产上的权重， $1-w^T\vec{1}$ 为该投资组合在无风险资产上的权重。假定经济中个体可以无限制地卖空风险资产，

无限制地以 r_f 借钱投资，市场是无摩擦的。

令 p 是一个由 N+1 种资产构成的前沿组合，给定期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$ ，则 w_p 是下述最小化问题的解：

$$\min_w \frac{1}{2} w^T V w$$

Subject to:

$$w^T e + (1 - w^T \vec{1}) r_f = E[\tilde{r}_p] \quad , \qquad (2.3.1)$$

拉格朗日函数可以表示为：

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda \{ E[\tilde{r}_p] - w^T e - (1 - w^T \vec{1}) r_f \}$$

其中 λ 为相应于约束方程(2.3.1)的拉格朗日乘子。

求解上述最优化问题，得一阶条件为：

$$V w_p = \lambda (e - \vec{1} r_f) \quad 。 \qquad (2.3.2)$$

因此前沿组合可以表示为；

$$w_p = \lambda V^{-1} (e - \vec{1} r_f) \quad 。 \qquad (2.3.3)$$

将上式代回(2.3.1)式，整理得：

$$\lambda = \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} \quad , \qquad (2.3.4)$$

其中 $e - \vec{1} r_f ¿^T V^{-1} (e - \vec{1} r_f) = B + C r_f^2 - 2 A r_f > 0$ $H = ¿$ 。

2.3.2 组合前沿的性质

性质 **2.3.1**：任意前沿组合的方差可以表示为：

$$E[\tilde{r}_p] - r_f ¿^2$$
$$¿$$
$$¿ \quad 。 \qquad (2.3.5)$$
$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = ¿$$

因此在 $\sigma(\tilde{r}) - E[\tilde{r}]$ 平面上可以表示为过点 $(0, r_f)$ 、斜率为 $\sqrt{H}$ 和 $-\sqrt{H}$ 的射线。

证明：对于任意一个前沿组合 p ，我们有：

$$e - \vec{1} r_f ¿^T V^{-1} (e - \vec{1} r_f)$$
$$\frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} ¿^2 ¿$$
$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = w_p^T V w_p = ¿$$

$E[\tilde{r}_p]-r_f¿^2$
¿
¿
¿¿ ,

因此在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面上表现为两条过点 $(0,r_f)$ 、斜率为 $\sqrt{H}$ 和 $-\sqrt{H}$ 的射线：

$$\sigma(\tilde{r}_p)=\begin{cases}\dfrac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sqrt{H}} & \text{如果} E[\tilde{r}_p]\geq r_f \\ \dfrac{-E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sqrt{H}} & \text{如果} E[\tilde{r}_p]<r_f\end{cases} \quad 。 \qquad (2.3.6)$$

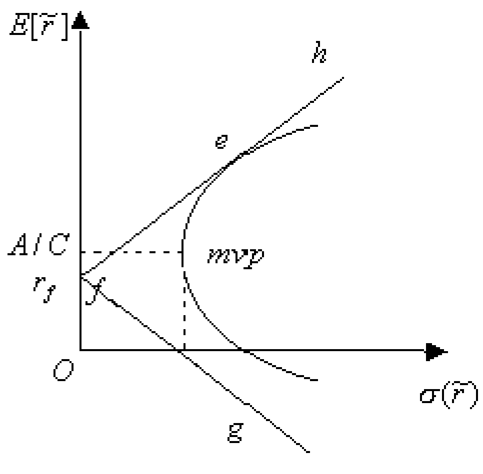
证明完毕。 ■

在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中，刻画前沿组合的两条射线按三种情况分别由图(2.3.1-3)给出：

（1）、 $r_f<A/C$ 。

当 $r_f<A/C$ 时，过点 $f(0,r_f)$ 向风险资产组合前沿（双曲线）作切线，切点为 e ，则 $E[\tilde{r}_{zc(e)}]=r_f$ 。根据 2.2 节的讨论， $E[\tilde{r}_e]=A/C-\dfrac{D/C^2}{r_f-A/C}$ 。因此该切线的斜率为：

$$k=\frac{E[\tilde{r}_e]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)} \quad 。$$



(图 2.3.1)：当 $r_f<A/C$ 时的前沿组合。

考虑到切点 e 在风险资产组合前沿上，因此有：

$$E[\tilde{r}_e]-\frac{A}{C}\text{¿}^2+\frac{1}{C}$$

$$\sigma^2(\tilde{r}_e)=\frac{C}{D}\text{¿}$$

$$\frac{D/C^2}{r_f-A/C}\text{¿}^2+\frac{1}{C}$$

$$\text{¿}\frac{C}{D}\text{¿}$$

$$C r_f-A\text{¿}^2$$

$$\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{H}{\text{¿}}$$

因此该切线的斜率可以表示为：

$$k=\frac{E[\tilde{r}_e]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)}=\left(A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}-r_f\right)\frac{C(r_f-A/C)}{\sqrt{H}}$$

$$\text{¿}\frac{H}{C r_f-A}\frac{C r_f-A}{\sqrt{H}}=\sqrt{H}$$ 。

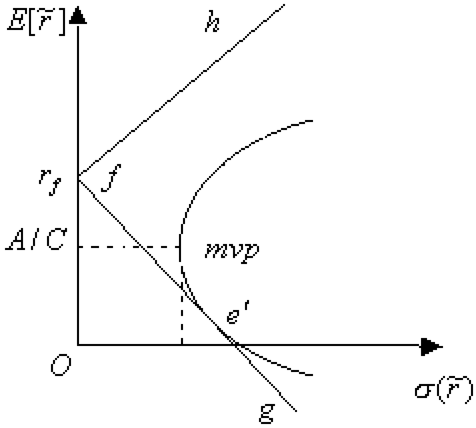
由此可见，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合 e 线性生成，即 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中的射线 feh 和 fg （见图 2.3.1）。其中位于线段 $\overline{fe}$ 上的前沿组合可以通过部分投资于切点组合 e 、部分投资于无风险资产而达到；位于射线 $\vec{eh}$ 上的前沿组合可以通过卖空无风险资产、投资于切点组合 e 而达到；位于射线 $\vec{fg}$ 上的前沿组合可以通过卖空切点组合 e 、投资于无风险资产而达到。

（2）、 $r_f>A/C$

当 $r_f>A/C$ 时，类似地我们可以证明，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合 e' 线性生成，即图 2.3.2 中的射线 $\vec{fh}$ 和 $\vec{fg}$ 。其中射线 $\vec{fh}$ 上的前沿组合可以通过卖空切点组合 e' 、投资无风险资产实现；线段 $\overline{fe'}$ 上的前沿组合可以通过部分投资无风险资产、

部分投资切点组合 e' 来实现；射线 $\overrightarrow{e'g}$ 可以通过卖空无风险资产、

投资切点组合来实现。



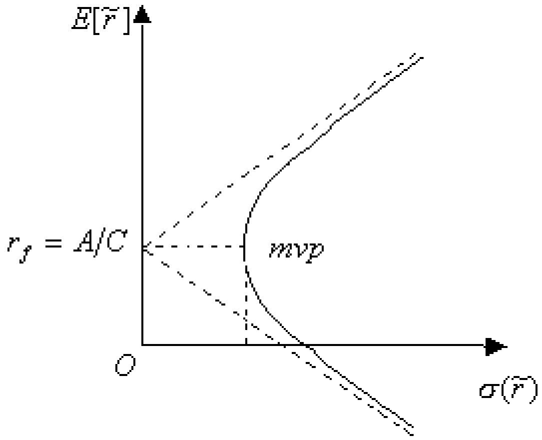
（图 2.3.2）： $r_f > A/C$ 时的前沿组合

（3）、 $r_f = A/C$

当 $r_f = A/C$ 时， $H = B + C r_f^2 - 2 A r_f = D/C$ 。因此前沿组合可以表示为：

$$E[\tilde{r}_p] = r_f \pm \sqrt{H}\,\sigma(\tilde{r}_p) = A/C \pm \sqrt{D/C}\,\sigma(\tilde{r}_p)$$ 。

因此引入无风险资产后的前沿组合是风险资产前沿组合（双曲线）的两条渐近线（见图 2.3.3）。



（图 2.3.3）： $r_f = A/C$ 时的投资组合前沿。

此时，有 $\vec{1}^T w_p=\vec{1}^T V^{-1}(e-A/C\vec{1})\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H}=0$ ，前沿组合可以通过将所有财富投资在无风险资产上、并持有一个风险资产的套利组合（投资组合的总权重为零）来达到。

性质 **2.3.2**：设 p 是一个前沿组合， $E[\tilde{r}_p]\neq r_f$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-r_f) \quad 。 \tag{2.3.7}$$

证明：

$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)=w_q^T V w_p=W_q^T V V^{-1}(e-\vec{1}r_f)\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H}=\frac{(E[\tilde{r}_q]-r_f)(E[\tilde{r}_p]-r_f)}{H} \quad ; \tag{2.3.8a}$$

类似地，我们有：

$$\mathrm{var}(\tilde{r}_p)=(E[\tilde{r}_p]-r_f)^2 \quad 。 \tag{2.3.8b}$$

将(2.3.8a)和(2.3.8b)相除，整理得：

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-r_f) \quad 。$$

证明完毕。 ■

性质 **2.3.3**：设 p 是一个前沿组合， $E[\tilde{r}_p]\neq r_f$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})r_f+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp}$$

且 $\tilde{\varepsilon}_q$ 不依赖于 p 的选取。

证明：将随机变量 $\tilde{r}_q$ 关于 $\tilde{r}_p$ 作投影，得：

$$\tilde{r}_q=a+b\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp} \quad ,$$

其中 $E[\tilde{\varepsilon}_{qp}]=0$ 。由(2.3.7)得：

$$a=(1-\beta_{qp})r_f \quad , \qquad b=\beta_{qp} \quad 。$$

因此上述分解将可行组合 q 分解成一个前沿组合和一个噪声项，显然这种分解不依赖于 p 的选取，因此 $\tilde{\varepsilon}_q$ 也不依赖于 p 的选取。■

性质 2.3.3 蕴涵，个体在进行投资决策时，个体应该采取分散化投资的策略，选取有效组合以降低风险。

续例 **2.2.1**：在例 2.2.1 中，假定经济中还存在一种无风险资产 f，其回

报率为 r_f ，则前沿组合可以通过如下最优化问题求解：

$$\min_{\{w_1,w_2,w_3\}} \frac{1}{2}w_1^2+\frac{1}{8}w_2^2+\frac{1}{2}w_3^2$$

Subject to:

$$w_1+\frac{3}{2}w_2+w_3+(1-w_1-w_2-w_3)r_f=E[\tilde{r}_p] \quad ,$$

求解上述最优化问题，我们有：

$$w_p=\lambda V^{-1}(e-\vec{1}r_f)$$

$$¿\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{11+6r_f^2-16r_f}\begin{pmatrix}1-r_f\\6-4r_f\\1-r_f\end{pmatrix} \quad ,$$

（1）假定 $r_f=1<4/3$ ，则 $w_p=(E[\tilde{r}_p]-1)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ ，

$1-w_p^T\vec{1}=3-2E[\tilde{r}_p]$ ，

前沿组合的随机回报率可以表示为：

$\tilde{r}_p=(1,1,2E[\tilde{r}_p]-1,2E[\tilde{r}_p]-1)$ 。

切点组合 e 的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_e]=A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}=1.5$$

因此切点组合为：

$0,1,0¿^T$
$w_e=¿$ ， $\tilde{r}_e=(1,1,2,2)$ 。

任意一个期望回报率为 $E[\tilde{r}_p]$ 的前沿组合，由 $3-2E[\tilde{r}_p]$ 份无风险资产和 $2E[\tilde{r}_p]-2$ 切点组合构成。

任意一个可行投资组合 q ，可以分解为一个前沿组合和一个非系统性风险。例如，取可行投资组合 q ，假定投资组合权重为 $w_q=(1/2,1,1/2)$ ，随机回报率向量为 $\tilde{r}_q=(1,1,2,3)$ ；任取一个前沿组合 p ，其随机回报率向量为 $\tilde{r}_p=(1,1,3,3)$ 。我们有：

$var(¿\tilde{r}_p)=3/4$
$cov(¿\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/¿$ ，
$\beta_{qp}=¿$

所以我们有：

$$\tilde{r}_q=\frac{3}{4}\tilde{r}_p+\frac{1}{4}r_f+\tilde{\varepsilon}_q \quad ,$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_q=(0,0,-1/2,1/2)$ ，满足 $cov(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_p)=E[\tilde{\varepsilon}_p]=0$ 。

（2）假定 $r_f=4/3$ ，则前沿组合 $w_p=(E[\tilde{r}_p]-4/3)(-1,2,-1)^T$ ，

$1-w_p^T\vec{1}=1$ ，即个体将所有财富投资在无风险资产上，同时在风险资产上持有一个套利组合。

（3）假定 $r_f=\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$ ，则 $w_p=(E[\tilde{r}_p]-\frac{3}{2})\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ，

$1-w_p^T\vec{1}=2E[\tilde{r}_p]-2$ ，

前沿组合的随机回报率可以表示为：

$\tilde{r}_p=(E[\tilde{r}_p],E[\tilde{r}_p],3E[\tilde{r}_p]-3,-E[\tilde{r}_p]+3)$ 。

切点组合 e' 的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_{e'}]=A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}=1$$

因此切点组合为：

$w_{e'}=(1/2,0,1/2)^T$ ， $\tilde{r}_{e'}=(1,1,0,2)$ 。

任意前沿组合都可以表示为切点组合 e' 和无风险资产的线性组合。

习题

1、假定经济中有四个等概率发生的自然状态 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 和 ω_4 ，假定经济中存在种资产 p_A 和 p_B ，其随机回报率如下：

状态 资产	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_B$	1	0	- 1	0
$\tilde{r}_B$	0.8	0.9	-0.8	-0.9

假定个体初始财富量为 1，个体效用函数为 $E¿ \ln ¿ (¿\widetilde{W})$ ，试证明：

（1） 这两种投资组合具有相同的均值，但 p_A 的方差要小于 p_B 的方差；

（2） 个体投资在 p_B 上可以有更高的期望效用，尽管其方差比 p_A 的高。

2、假定经济中存在四个等概率发生的自然状态 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 和 ω_4 ，假定经济中存在三种风险资产，其随机回报率 $\tilde{r}_1$ 、 $\tilde{r}_2$ 和 $\tilde{r}_3$ 的取值由下表给出：

自然状态 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega)$	1	0	0	1
$\tilde{r}_2(\omega)$	1	1	2	2
$\tilde{r}_3(\omega)$	0	2	0	2

三种资产的随机回报率取值

（1） 求该经济中的期望回报率向量 $e=¿ E[\tilde{r}_1],E[\tilde{r}_2],E[\tilde{r}_3]¿^T$ 和方差-协方差矩阵 V ；

（2） （2）试计算该经济中的组合前沿；

（3） 按照(2)的结果求出 $E[\tilde{r}_p]=1$ 时的最优组合；

（4） 是否存在比(3)中求出的最优组合更好的投资策略，如果是的话给出该策略，不是的话说明原因。

3、考虑两个回报率分别为 $\tilde{r}_j$ 和 $\tilde{r}_l$ 的风险资产，假定这两个资产有相同的期望回报率和方差，相关系数为 ρ ，试证明权重相同的投资组合达到最小方差，且独立于 ρ 。

4、假定经济中存在两种风险资产和一种无风险资产，同时经济中存

在 4 个等概率的自然状态，假定风险资产不可以卖空。假定无风险资产回报率为 r_f ，两种风险资产的随机回报率服从：

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_A$	3	1	3	1
$\tilde{r}_B$	3	5	5	3

（1） 试求 $E[\tilde{r}_A]$ 、 $E[\tilde{r}_B]$ 和方差-协方差矩阵。

（2） 试计算由风险资产构成的组合前沿。

（3） 如果 $r_f=1.5$ ，试计算引入无风险资产后的组合前沿，并将资产 A 的随机回报率分解为前沿组合和非系统性风险。

（4）如果 $r_f=1$ ，试计算引入无风险资产后的组合前沿。

5、令 p 是一个前沿组合，q 为与 p 具有相同期望回报率的可行投资组合。试证明：（1） $\operatorname{cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=\operatorname{var}(\tilde{r}_p)$ ，（2） $\tilde{r}_p$ 和 $\tilde{r}_q$ 的相关系数属于(0,1)。

6、假定投资组合 $f_j, j=1,2,\ldots,n$ 都是有效组合，投资组合 p 满足 $E[\tilde{r}_p]=\sum_{j=1}^{n} w_j E[\tilde{r}_j]$ ，其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j=1$ 。试证明：

$E[\tilde{r}_{zc(p)}]\neq\sum_{j=1}^{n} w_j E[\tilde{r}_{zc(j)}]$ ，等式成立的条件是所有 f_j 完全相同。

7、假定经济中存在 2K 种风险资产，其随机回报率相互独立，方差相等，期望回报率满足：

$E[\tilde{r}_1]=E[\tilde{r}_2]=\ldots=E[\tilde{r}_k]=A$ ，

$E[\tilde{r}_{k+1}]=E[\tilde{r}_{k+2}]=\ldots=E[\tilde{r}_{2k}]=B$ ，不妨假定 A>B。

（1）试求经济中的极小方差投资组合 mvp，

（2）不考虑市场摩擦，不考虑风险资产的卖空限制，试计算组合前沿，该组合前沿有何特点？

8、证明由两个具有不同的期望回报率的资产或可行组合构成的组合

前沿通过这两个资产或可行组合。

9、在例2.2.1中，假定前沿组合 p 的随机回报率为 $\tilde{r}_p=(1,1,0,2)$，

（1） 任取一个可行组合 q，其随机回报率满足 $\tilde{r}_q=(3,-1,2,2)$，试计算 β_{qp} 和 $\beta_{qzc(p)}$，验证 $\beta_{qp}+\beta_{qzc(p)}=1$ 是否成立，并将 $\tilde{r}_q$ 分解为一个前沿组合的随机回报率和一个非系统性风险。

（2） 任取一个组合 l，其随机回报率满足 $\tilde{r}_q=(3,1,2,2)$，试计算 β_{lp} 和 $\beta_{lzc(p)}$，验证 $\beta_{lp}+\beta_{lzc(p)}=1$ 是否成立，说明原因。