

高级宏观经济学作业二

邓皓天 2023310114

一、RBC模型的求解和模拟。假设家庭的最优化目标是最大化终生效用： $E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$ ，其中 c_t 、 l_t 分别表示消费和劳动时间， β 表示折现因子。家庭的即期效用函数是消费 c 和闲暇 $(1-l)$ 的增函数和凹函数：

$$u(c_t, l_t) = \gamma \ln c_t + (1 - \gamma) \ln(1 - l_t),$$

家庭在要素市场上提供劳动 l 、出租资本 k ，获得相应报酬，并将其收入用于消费和储蓄 s 。储蓄可以无成本地转换为投资： $i_t = s_t$ 。资本按固定比率 δ 折旧，其积累方程为：

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t.$$

假设厂商具有柯布道格拉斯（CD）生产技术：

$$y_t = f(k_t, l_t) = a_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$$

其中 a_t 表示全要素生产率，服从AR(1)过程， $\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} + \varepsilon_t$ ， $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ，其中 $0 < \rho < 1$ 。

1. 请写出家庭的预算约束。
2. 请写出家庭最优化问题的拉格朗日函数。
3. 求解家庭最优化问题的一阶条件，并利用消费的一阶条件消去拉格朗日乘子。
4. 请写出厂商的利润最大化问题并求解一阶条件。
5. 将所有一阶条件及生产率冲击假设整理为包含变量 $\{c_t, l_t, k_t, w_t, r_t, a_t, y_t, i\}$ 的七个方程构成的均衡系统。

6. 对数线性化模型均衡系统。
7. 找出模型中的控制变量和状态变量。

以下步骤均需要使用计算机操作，请根据题目说明报告计算结果。

8. 校准模型。按下表对模型涉及的六个参数进行赋值：

参数	取值	含义
α	0.4	资本份额
β	0.98	贴现因子
γ	0.4	家庭偏好
δ	0.05	资本折旧率
ρ	0.9	TFP自回归系数
σ	0.01	TFP标准差

根据均衡系统和参数值计算模型变量的稳态值，请写出计算过程，并报告所有内生变量稳态值的计算结果。

9. 消去对数线性化均衡系统中的静态变量 r, l, w, y ，整理成线性差分方程组，并整理成如下形式：

$$X_{t+1} = wX_t + R\varepsilon_{t+1} \quad (1)$$

请说明推导过程，并报告矩阵 w 和 R 的计算结果。

10. 对矩阵 w 进行特征分解得到 $w = P\Lambda P^{-1}$ ，从而把差分方程系统的系数矩阵转化为对角矩阵。请说明计算过程，并报告矩阵 P 和 Λ 的计算结果。
11. 把大于1的特征值对应的变量向前迭代获得最优政策路径。请说明计算过程并报告对应鞍点路径的系数矩阵。

12. 把政策路径代入原均衡系统得到状态变量的转移路径。请说明计算过程并报告对应转移路径的系数矩阵。
13. 根据鞍点路径画出模型变量的脉冲反应图。
14. 给定随机冲击，利用MATLAB生成25000个随机数，对模型变量进行模拟。去掉前5000个值，消除初始值的影响，得到变量的模拟时间序列，并计算模拟序列的方差，协方差矩阵和自相关矩阵。
15. 根据鞍点路径计算模型变量的均值、方差、标准差、协方差矩阵和自相关矩阵。

提示：协方差矩阵：

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= EY_t Y_t' = \Phi \Gamma(-1) + \Psi \Psi' \sigma^2 \\ &= \Phi \Gamma(0) \Phi' + \Psi \Psi' \sigma^2 \\ \text{vec}[\Gamma(0)] &= [I - \Phi \otimes \Phi]^{-1} \text{vec}(\Psi \Psi') \sigma^2 \\ \Gamma(i) &= \Phi^i \Gamma(0)\end{aligned}$$

自相关矩阵：

$$P(i) = D^{-1} \Gamma(i) D^{-1}$$

其中 D 为对角矩阵，对角元素为变量标准差。

答：

1. 家庭的预算约束为：

$$c_t + g_Z k_{t+1} = (1 + r_t) k_t + w_t l_t$$

2. 家庭最优化问题的拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \gamma \ln c_t + (1 - \gamma) \ln(1 - l_t) + \lambda_t [(1 + r_t) k_t + w_t l_t - c_t - g_Z k_{t+1}] \}$$

3. 消去 λ_t 之后的一阶条件:

$$\frac{\gamma w_t}{c_t} = \frac{1-\gamma}{1-l_t}$$

$$E_t \frac{\beta}{c_{t+1}} (1 + r_{t+1}) = \frac{g_Z}{c_t}$$

4. 厂商的利润最大化问题:

$$\max_{k_t, l_t} a_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha} - (r_t + \delta) k_t - w_t l_t$$

一阶条件:

$$y_t = a_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta$$

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t}$$

5. 均衡系统:

$$\frac{\gamma w_t}{c_t} = \frac{1-\gamma}{1-l_t}$$

$$E_t \frac{\beta}{c_{t+1}} (1 + r_{t+1}) = \frac{g_Z}{c_t}$$

$$y_t = a_t k_t^\alpha l_t^{1-\alpha}$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta$$

$$w_t = (1 - \alpha) \frac{y_t}{l_t}$$

$$\ln a_{t+1} = \rho \ln a_t + \varepsilon_t$$

$$y_t = c_t + g_Z k_{t+1} - (1 - \delta) k_t$$

6. 对数线性化系统:

$$\frac{l}{1-l} \hat{l}_t = \hat{w}_t - \hat{c}_t$$

$$-\hat{c}_t = -\hat{c}_{t+1} + \frac{r}{1+r} \hat{r}_{t+1}$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_t + \alpha \hat{k}_t + (1 - \alpha) \hat{l}_t$$

$$\frac{r}{r+\delta} \hat{r}_t = \hat{y}_t - \hat{k}_t$$

$$\hat{w}_t = \hat{y}_t \hat{l}_t$$

$$\hat{a}_{t+1} = \rho \hat{a}_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$\hat{y}_t = \frac{c}{y} \hat{c}_t + \frac{g_Z}{y} \hat{k}_{t+1} - \frac{(1-\delta)k}{y} \hat{k}_t$$

7. 状态变量: a_t 和 k_t ; 控制变量: 其余变量。

8. 稳态下, 外生变量 $a_t = 1$, $g_Z = 1$, 稳态系统为:

$$\frac{\gamma w}{c} = \frac{1-\gamma}{1-l}$$

$$g_z = \beta(1+r)$$

$$y = c + g_z k - (1-\delta)k$$

$$r = \alpha \frac{y}{k} - \delta$$

$$w = (1-\alpha) \frac{y}{l}$$

- $g_z = \beta(1+r) \Rightarrow r = \frac{g_z}{\beta} - 1$
- $r = \alpha \frac{y}{k} - \delta \Rightarrow \frac{k}{y} = \frac{\alpha}{r+\delta}$
- $y = c + g_z k - (1-\delta)k \Rightarrow \frac{c}{y} = 1 - (g_z - 1 + \delta) \frac{k}{y}$
- 生产函数 $y = ak^\alpha l^{1-\alpha}$, $a = 1$, 可得 $\frac{l}{y} = \left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ 。
- $w = (1-\alpha) \frac{y}{l}$
- $\frac{\gamma w}{c} = \frac{1-\gamma}{1-l}, w = (1-\alpha) \frac{y}{l} \Rightarrow l$

计算结果:

$$\bar{y} = 1.1412$$

$$\bar{c} = 0.8171$$

$$\bar{k} = 6.4836$$

$$\bar{l} = 0.3584$$

$$\bar{i} = 0.3242$$

9. 消去对数线性化系统中的 \hat{y}_t 、 \hat{w}_t 、 \hat{r}_t 和 \hat{i}_t

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{1-l} + \alpha\right) \hat{l}_t &= \hat{a}_t + \alpha \hat{k}_t - \hat{c}_t \\ \hat{c}_{t+1} &= \hat{c}_t + \frac{r+\delta}{1+r} \left[\hat{a}_{t+1} + (1-\alpha) \left(\hat{l}_{t+1} - \hat{k}_{t+1} \right) \right] \\ g_Z \frac{k}{y} \hat{k}_{t+1} &= \hat{a}_t + (1-\alpha) \hat{l}_t - \frac{c}{y} \hat{c}_t + \left[\alpha + \frac{(1-\delta)k}{y} \right] \hat{k}_t \\ \hat{a}_{t+1} &= \rho \hat{a}_t + \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

令 $\xi \equiv \frac{1}{\frac{r}{1-\delta} + \alpha}$, $\phi \equiv \frac{r+\delta}{1+r}$, 则

$$\hat{l}_t = \xi \hat{a}_t + \alpha \xi \hat{k}_t - \xi \hat{c}_t$$

代入欧拉方程可得:

$$[1 + \phi(1 - \alpha)\xi]\hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t + \phi[1 + (1 - \alpha)\xi]\hat{a}_{t+1} + \phi(1 - \alpha)(\alpha\xi - 1)\hat{k}_{t+1}$$

代入资源约束方程可得:

$$g_Z \frac{k}{y} \hat{k}_{t+1} = [1 + (1 - \alpha)\xi]\hat{a}_t + \left[(1 - \alpha)\alpha\xi + \alpha + (1 - \delta)\frac{k}{y}\right]\hat{k}_t - \left[(1 - \alpha)\theta\xi + \frac{c}{y}\right]\hat{c}_t$$

结合外生冲击的定义式可整理为

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_Z \frac{k}{y} & 0 \\ -\phi[1 + (1 - \alpha)\xi] & \phi(1 - \alpha)(1 - \alpha\xi) & 1 + \phi(1 - \alpha)\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 1 + (1 - \alpha)\xi & (1 - \alpha)\alpha\xi + \alpha + (1 - \delta)\frac{k}{y} & -(1 - \alpha)\theta\xi - \frac{c}{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可化简为

$$BX_{t+1} = AX_t + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \varepsilon_{t+1}$$

其中, $w = B^{-1}A$, $R = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$ 。计算结果为:

$$w = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0 & 0 \\ 0.2862 & 1.0645 & -0.2362 \\ 0.0902 & -0.0246 & 0.9641 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0 \\ 0.1075 \end{bmatrix}$$

10.

$$P = \begin{bmatrix} 0.1038 & 0 & 0 \\ -0.8708 & -0.8578 & -0.9852 \\ -0.4806 & -0.5139 & 0.1714 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9230 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1056 \end{bmatrix}$$

11. 将差分方程组左右两边同时乘以 P^{-1} ，将系数矩阵转化为对角矩阵：

$$\tilde{x}_{t+1} = \Lambda \tilde{x}_t + U \varepsilon_{t+1}$$

其中， $\tilde{x}_t = P^{-1}X_t$ ， $U = P^{-1}R$ 。因此 $\lambda_2 > 1$ ，则鞍点路径要求 $\tilde{x}_{3t} = 0$ ，否则该路径将发散，所以对应的鞍点路径为：

$$\hat{c}_t = -p_{33}^{-1} \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} \equiv M_c \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}$$

鞍点路径的系数矩阵 $M_c = \begin{bmatrix} 0.3954 & 0.5991 \end{bmatrix}$ ：

12. 把政策路径代入均衡系统可得状态变量的转移路径为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{A}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{A_{t+1}} \\ &= \begin{bmatrix} w_{13} \\ w_{23} \end{bmatrix} \hat{c}_t + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{A_{t+1}} \end{aligned}$$

将 $\hat{c}_t = -p_{33}^{-1} \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} \equiv M_c \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}$ 代入可得：

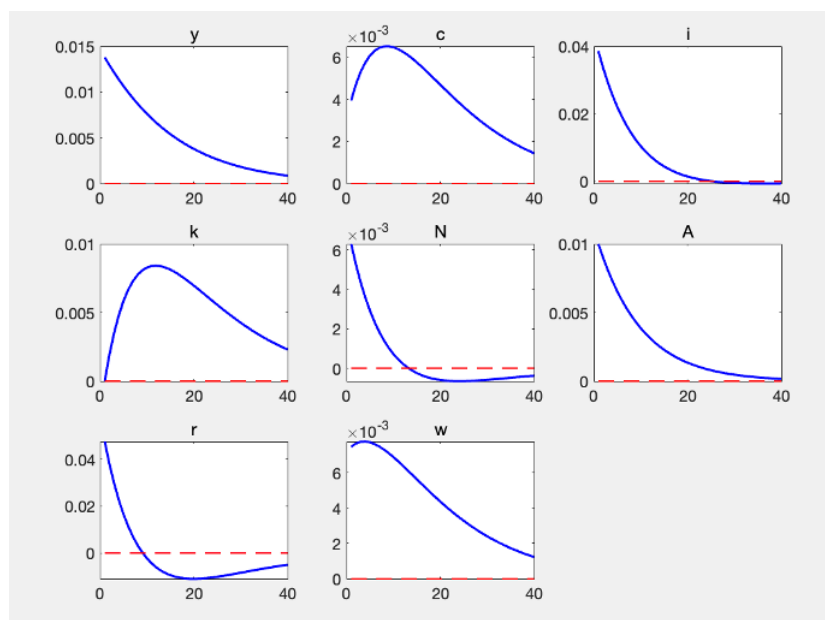
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{A}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{bmatrix} &= \left(-p_{33}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{A_{t+1}} \\ &\equiv M_s \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{A_{t+1}} \end{aligned}$$

对应转移路径的系数矩阵 $M_s = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0 \\ 0.1928 & 0.9230 \end{bmatrix}$ 。

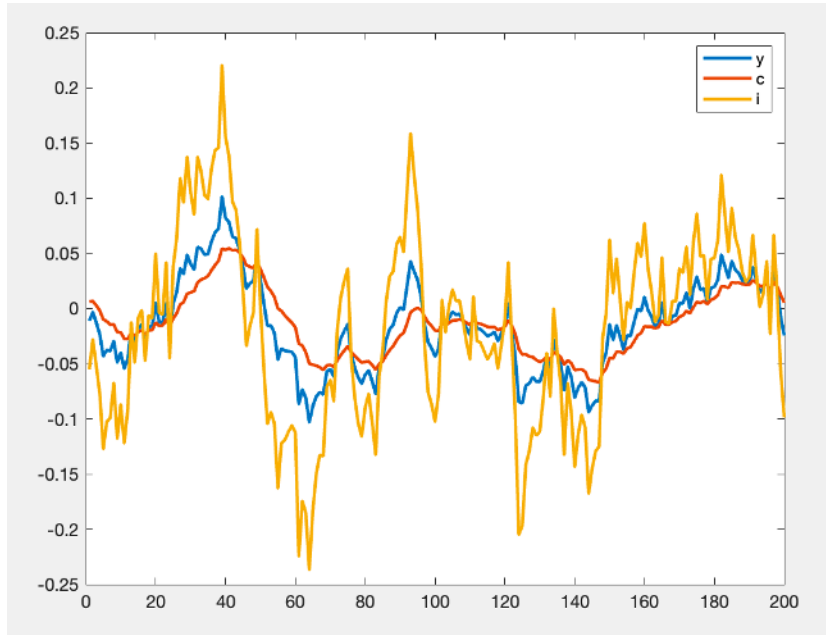
13. 所有变量的鞍点路径整合的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1.3784 & 0.2754 \\ 0.3954 & 0.5991 \\ 3.8557 & -0.5405 \\ 0.6306 & -0.2077 \\ 4.7554 & -2.4999 \\ 0.7478 & 0.4831 \end{bmatrix}$$

脉冲反应图为



14. 模拟时间序列示意图



方差为:

$$\begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0009 & 0.0061 & 0.0001 & 0.0081 & 0.0010 & 0.0005 & 0.0014 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0010 & 0.0028 & 0.0003 & 0.0013 & 0.0012 & 0.0009 & 0.0011 \\ 0.0010 & 0.0009 & 0.0015 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0009 & 0.0005 & 0.0011 \\ 0.0028 & 0.0015 & 0.0061 & 0.0008 & 0.0051 & 0.0020 & 0.0018 & 0.0013 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0001 & 0.0009 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0013 & -0.0001 & 0.0051 & 0.0009 & 0.0081 & 0.0004 & 0.0012 & -0.0010 \\ 0.0012 & 0.0009 & 0.0020 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0011 \\ 0.0009 & 0.0005 & 0.0018 & 0.0002 & 0.0012 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0011 & 0.0011 & 0.0013 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0011 & 0.0005 & 0.0014 \end{bmatrix}$$

自相关系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9035 & 0.9136 & 0.7107 & 0.3780 & 0.9679 & 0.9779 & 0.7717 \\ 0.9035 & 1.0000 & 0.6512 & 0.3406 & -0.0553 & 0.9822 & 0.7939 & 0.9698 \\ 0.9136 & 0.6512 & 1.0000 & 0.9353 & 0.7217 & 0.7821 & 0.9785 & 0.4466 \\ 0.7107 & 0.3406 & 0.9353 & 1.0000 & 0.9200 & 0.5110 & 0.8421 & 0.1011 \\ 0.3780 & -0.0553 & 0.7217 & 0.9200 & 1.0000 & 0.1331 & 0.5633 & -0.2970 \\ 0.9679 & 0.9822 & 0.7821 & 0.5110 & 0.1331 & 1.0000 & 0.8939 & 0.9068 \\ 0.9779 & 0.7939 & 0.9785 & 0.8421 & 0.5633 & 0.8939 & 1.0000 & 0.6217 \\ 0.7717 & 0.9698 & 0.4466 & 0.1011 & -0.2970 & 0.9068 & 0.6217 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

15. 均值:

$$\begin{bmatrix} 0.1321 \\ -0.2020 \\ -1.1265 \\ 1.8693 \\ -1.0260 \\ 0 \\ -3.8918 \\ 0.6473 \end{bmatrix}$$

方差:

$$\begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.0009 \\ 0.0060 \\ 0.0001 \\ 0.0080 \\ 0.0010 \\ 0.0005 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

标准差:

$$\begin{bmatrix} 0.0390 \\ 0.0292 \\ 0.0774 \\ 0.0114 \\ 0.0895 \\ 0.0319 \\ 0.0229 \\ 0.0378 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵

$$\begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0010 & 0.0028 & 0.0003 & 0.0013 & 0.0012 & 0.0009 & 0.0011 \\ 0.0010 & 0.0009 & 0.0015 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0009 & 0.0005 & 0.0011 \\ 0.0028 & 0.0015 & 0.0060 & 0.0008 & 0.0050 & 0.0019 & 0.0017 & 0.0013 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0001 & 0.0009 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0000 \\ 0.0013 & -0.0001 & 0.0050 & 0.0009 & 0.0080 & 0.0004 & 0.0012 & -0.0010 \\ 0.0012 & 0.0009 & 0.0019 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0011 \\ 0.0009 & 0.0005 & 0.0017 & 0.0002 & 0.0012 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0011 & 0.0011 & 0.0013 & 0.0000 & -0.0010 & 0.0011 & 0.0005 & 0.0014 \end{bmatrix}$$

自相关矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9036 & 0.9136 & 0.7104 & 0.3772 & 0.9679 & 0.9779 & 0.7721 \\ 0.9036 & 1.0000 & 0.6514 & 0.3405 & -0.0558 & 0.9823 & 0.7941 & 0.9699 \\ 0.9136 & 0.6514 & 1.0000 & 0.9352 & 0.7212 & 0.7821 & 0.9784 & 0.4470 \\ 0.7104 & 0.3405 & 0.9352 & 1.0000 & 0.9198 & 0.5108 & 0.8419 & 0.1012 \\ 0.3772 & -0.0558 & 0.7212 & 0.9198 & 1.0000 & 0.1325 & 0.5626 & -0.2973 \\ 0.9679 & 0.9823 & 0.7821 & 0.5108 & 0.1325 & 1.0000 & 0.8940 & 0.9070 \\ 0.9779 & 0.7941 & 0.9784 & 0.8419 & 0.5626 & 0.8940 & 1.0000 & 0.6221 \\ 0.7721 & 0.9699 & 0.4470 & 0.1012 & -0.2973 & 0.9070 & 0.6221 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

二、在标准的RBC模型中分析消费习惯和劳动供给的跨期替代弹性。

假设家庭的单期效用函数为：

$$u(c_t, c_{t-1}, n_t) = \log(c_t - \eta c_{t-1}) - a \frac{n_t^{1+\gamma}}{1+\gamma}, \quad 0 < \eta < 1.$$

预算约束为： $c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t \leq A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$ 。其中： $\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$ 。

1. 请写出模型的均衡条件。
2. 求解模型的稳态。
3. 写出模型一阶条件的对数线性化系统。
4. 假设稳态年利率为4%，年折旧率为10%。资本的收入份额为1/3， $\eta = 0.5$ ， $\rho = 0.9$ 。据此设定模型的参数值，分析脉冲反应函数，并根据 η 在{0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99}这几个取值下模型动态的变化讨论该参数的作用。（本小题需要使用MATLAB和Dynare软件包。）
5. 当 γ 值在[0.5, 2.5]之间（取100个点）变化时，模型鞍点路径中劳动供给的系数如何变化，作图并讨论其经济含义。（本小题需要使用MATLAB和Dynare软件包。）

答：

1. 家庭最大化终身效用的折现值：

$$\begin{aligned} \max_{c_t, n_t, k_{t+1}} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(c_t - \eta c_{t-1}) - \alpha \frac{n_t^{1+r}}{1+r} \right] \\ \text{s.t.} \quad & C_t + g_Z k_{t+1} = (1 + r_t) k_t + w_t n_t \end{aligned}$$

拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \ln(c_t - \eta c_{t-1}) - \alpha \frac{n_t^{1+r}}{1+r} + \lambda_t [(1 + r_t) k_t + w_t n_t - c_t - g_Z k_{t+1}] \right\}$$

均衡条件：

- 对 c_t 求导: $\lambda_t = \frac{1}{c_t - \eta c_{t-1}} - \frac{\eta \beta}{c_{t+1} - \eta c_t}$
- 对 n_t 求导: $\lambda_t = \frac{\alpha n_t^\gamma}{w_t}$
- 对 k_{t+1} 求导: $\beta \lambda_{t+1} (1 + r_{t+1}) = \lambda_t g_Z$

厂商最大化利润:

$$\max_{k_t, n_t} A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} - (r_t + \delta) k_t - w_t n_t$$

均衡条件:

$$\begin{aligned} y_t &= A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} \\ r_t &= \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta \\ w_t &= (1 - \alpha) \frac{y_t}{n_t} \end{aligned}$$

2. 稳态时:

$$\begin{aligned} n_t^\gamma &= \frac{w}{a} \frac{1-\eta\beta}{(1-\eta)c} \\ g_Z &= \beta(1+r) \\ y &= c + g_z k - (1-\delta)k \\ \gamma &= \alpha \frac{y}{k} - \delta \\ w &= (1-\alpha) \frac{y}{n} \end{aligned}$$

外生变量 A_t 不变, 因此 $g_Z = 1$, $A = 1$ 。

- $r = \frac{g_Z}{\beta} - 1$
- $\frac{k}{y} = \frac{\alpha}{\gamma + \delta}$
- $\frac{c}{y} = 1 - (g_Z - 1 + \delta) \frac{k}{y}$
- $y = A k^\alpha n^{1-\alpha} \Rightarrow \left(\frac{k}{y}\right)^\alpha \left(\frac{n}{y}\right)^{1-\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{n}{y} = \left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
- $w = (1 - \alpha) \frac{y}{n}$
- $n^\gamma = \frac{w}{a} \frac{1-\eta\beta}{(1-\eta)c} \Rightarrow \left(\frac{n}{y} \cdot y\right)^\gamma = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{y}{n} \cdot \frac{1-\eta\beta}{1-\eta} \cdot \frac{y}{c} \cdot \frac{1}{y}$, 带入 $\frac{n}{y}$ 和 $\frac{c}{y}$ 可解得 y 。

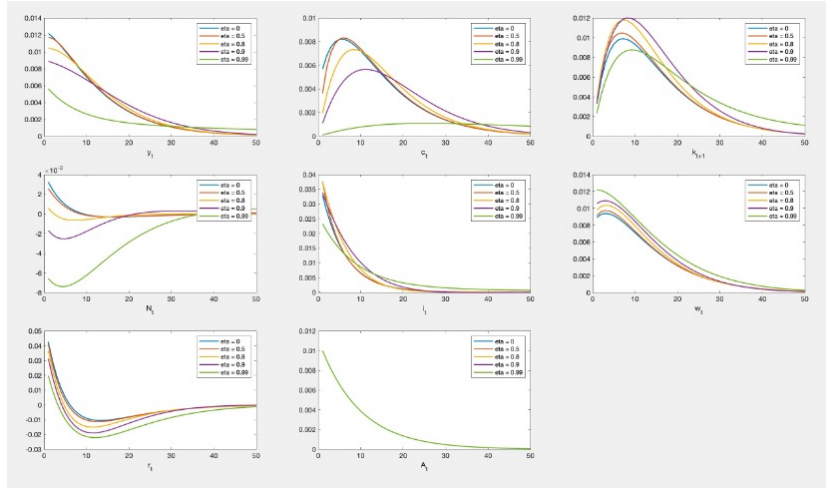
3.

$$\begin{aligned}
\frac{a \cdot n_t^\gamma}{w_t} &= \frac{1}{c_t - \eta c_{t-1}} - \frac{\eta \beta}{c_{t+1} - \eta c_t} \\
\frac{n_t^\gamma}{w_t} g_Z &= \beta \frac{n_{t+1}^\gamma}{w_{t+1}} (1 + r_{t+1}) \\
y_t &= A_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} \\
r_t &= \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta \\
w_t &= (1 - \alpha) y_t / n_t \\
\ln A_{t+1} &= P_A \ln A_t + \epsilon_{At} \\
i_t &= g_t k_{t+1} - (1 - \delta) k_t \\
y_t &= C_t + i_t
\end{aligned}$$

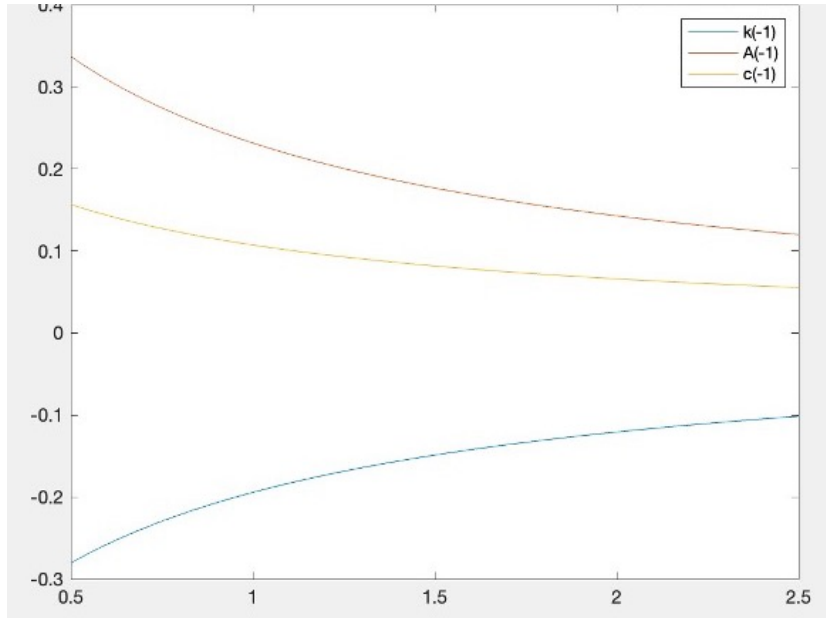
对数线性化系统:

$$\begin{aligned}
\gamma \hat{n}_t - \hat{w}_t &= \frac{\eta \beta \hat{c}_{t-1} - (1 + \eta^2 \beta) \hat{c}_t + \eta c_t \hat{c}_{t-1}}{(-\eta \beta)(1 - \eta)} \\
\gamma \hat{n}_t - \hat{w}_t &= r \hat{n}_{t+1} - \hat{w}_{t+1} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \hat{r}_{t+1} \\
\hat{y}_t &= \hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t + (1 - \alpha) \hat{n}_t \\
\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \hat{r}_t &= \hat{y}_t - \hat{k}_t \\
\hat{w}_t &= \hat{y}_t - \hat{n}_t \\
\hat{A}_{t+1} &= P_A \hat{A}_t + \epsilon_{A_{t+1}} \\
\hat{\delta}_t &= \frac{g_Z}{g_Z - 1 + \delta} \hat{k}_{t+1} - \frac{1 - \delta}{g_Z - 1 + \delta} \hat{k}_t \\
\hat{y}_t &= \frac{c}{y} \hat{c}_t + \frac{i}{y} \hat{i}_t
\end{aligned}$$

4. 随着 η 增大，产出、消费、资本存量对技术冲击的反应变得越来越平缓。技术对劳动的冲击由正转负。当 $\eta = 0.8$ 时，冲击的影响最为缓和；而当 $\eta = 0.99$ 时，技术对消费的影响非常平缓，不再呈现驼峰状。从效用函数的角度看， η 度量了上一期消费负效应的程度， η 的值越大，消费者的消费习惯越稳固，其消费行为也越一致，也就是需要更多的当期消费来匹配过去的消费习惯。当 $\eta = 0.99$ 时，消费者的消费习惯十分稳固，对技术冲击对反应也就不再敏感。



5. 技术和消费的系数大于0，资本存量的系数小于0，随着 γ 的增大，三个系数的绝对值均减小，说明技术冲击对劳动供给的影响越来越小。由于 $\lambda = \frac{\alpha n^\gamma}{w}$ ，因此 $\frac{1}{\gamma} = \frac{d(\ln n)}{d \ln w}$ 为劳动的弹性，随着 γ 增大，劳动的供给弹性变小，劳动对工资的敏感程度降低，所以面对技术冲击时家庭不愿意改变劳动供给，系数绝对值也就减小了。



三、考虑Calvo 定价模型。已知厂商*i*面临的产品需求函数为 $Y_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\varepsilon} Y_t$ 。假设厂商每期可以选择最优价格的概率为 $1 - \gamma$ ，从而厂商的最优定价问题为：

$$\max_{p_{it}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^s \Lambda_{t+s} \left[\frac{P_{it}}{P_{t+s}} - mc_{t+s} \right] Y_{it+s}$$

其中 $\Lambda_{t+s} \equiv \beta^s \frac{C_t}{C_{t+s}}$ 表示随机折现因子。

1. 请写出厂商定价的一阶条件。
2. 把最优定价的表达式写为 $P_{it}^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{X_{1t}}{X_{2t}}$ ，写出 X_{1t} 和 X_{2t} 的迭代方程形式，并验证当 $\gamma = 0$ 时， $P_{it}^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} mc_{it} P_t$ 。

答：

1. 厂商最优定价问题

$$\max_{p_{it}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^s \beta^s \frac{C_t}{C_{t+s}} \left[\frac{P_{it}}{P_{t+s}} - mc_{t+s} \right] \cdot \left(\frac{P_{it}}{P_t} \right)^{-\varepsilon} Y_{t+s}$$

一阶条件：

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma\beta)^s \frac{C_t}{C_{t+s}} \cdot P_{t+s}^{\varepsilon} \left[(1 - \varepsilon) \frac{P_{it}}{P_{t+s}} + \varepsilon mc_{t+s} \right] Y_{t+s} = 0$$

2. 将一阶条件改写为 $P_{it}^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \frac{X_{1t}}{X_{2t}}$

$$P_{0t}^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma\beta)^s C_t \cdot P_{t+s}^c \cdot m Y_{t+s}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma\beta)^s \frac{C_t}{C_{t+s}} P_{t+s}^{e-1} Y_{t+s}}$$

因此，

$$X_{1t} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma\beta)^s C_t \cdot P_{t+s}^c \cdot m Y_{t+s} = c_t P_t^{\varphi} m Y_t + \gamma\beta X_{1t+1}$$

$$X_{2t} = E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\gamma\beta)^s \frac{C_t}{C_{t+s}} P_{t+s}^{e-1} Y_{t+s} = P_t^{\varphi-1} Y_t + \gamma\beta X_{2t+1}$$

当 $\gamma = 0$ 时，

$$P_{it}^* = \frac{\varphi}{\varphi - 1} \cdot \frac{c_{it} \cdot P_t^{\varphi} \cdot m Y_t}{\frac{C_t}{C_t} \cdot P_{t+s}^{\varphi-1} Y_t} = \frac{\varphi}{\varphi - 1} \cdot c_{it} m P_t$$