高级宏观经济学作业二

任课教师：吴化斌

wu.huabin@sufe.edu.cn

一、在标准的 RBC 模型中分析消费习惯和劳动供给的跨期替代弹性。假设家庭的单期效用函数为：

$$u\left(c_t, c_{t-1}, n_t\right)=\log\left(c_t-\eta c_{t-1}\right)-a\frac{n_t^{1+\gamma}}{1+\gamma},\quad 0<\eta<1.$$

预算约束为：$c_t+k_{t+1}-(1-\delta)\,k_t\leq A_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$。其中：$\ln A_t=\rho\ln A_{t-1}+\varepsilon_t$.

1. 请写出模型的均衡条件。
2. 求解模型的稳态。
3. 写出模型一阶条件的对数线性化系统。
4. 假设稳态年利率为 4%，年折旧率为 10%。资本的收入份额为 1/3，$\eta=0.5$，$\rho=0.9$。据此设定模型的参数值，分析脉冲反应函数，并根据 η 在 $\{0,\ 0.5,\ 0.8,\ 0.9,\ 0.99\}$ 这几个取值下模型动态的变化讨论该参数的作用。（本小题需要使用 MATLAB 和 Dynare 软件包。）
5. 当 γ 值在 $[0.5, 2.5]$ 之间（取 100 个点）变化时，模型鞍点路径中劳动供给的系数如何变化，作图并讨论其经济含义。（本小题需要使用 MATLAB 和 Dynare 软件包。）

二、**RBC 模型的求解和模拟。**（本题需要使用 MATLAB 或其他科学计算程序语言）。

假设家庭的最优化目标是最大化终生效用：$E_t\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t, l_t\right)$，其中 c_t、l_t 分别表示消费和劳动时间，β 表示折现因子。家庭的即期效用函数是消费 c 和闲暇 $(1-l)$ 的增函数和凹函数：

$$u\left(c_t, l_t\right)=\gamma\ln c_t+(1-\gamma)\ln\left(1-l_t\right),$$

家庭在要素市场上提供劳动 l、出租资本 k，获得相应报酬，并将其收入用于消费和储蓄 s。储蓄可以无成本地转换为投资：$i_t = s_t$。资本按固定比率 δ 折旧，其积累方程为：

$$k_{t+1} = (1-\delta)\,k_t + i_t.$$

假设厂商具有柯布道格拉斯（CD）生产技术：

$$y_t = f\,(k_t, l_t) = a_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

其中 a_t 表示全要素生产率，服从 AR(1) 过程，$\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \sim N\,(0, \sigma^2)$，其中 $0 < \rho < 1$。

1. 请写出家庭的预算约束。
2. 请写出家庭最优化问题的拉格朗日函数。
3. 求解家庭最优化问题的一阶条件，并利用消费的一阶条件消去拉格朗日乘子。
4. 请写出厂商的利润最大化问题并求解一阶条件。
5. 将所有一阶条件及生产率冲击假设整理为包含变量 $\{c_t, l_t, k_t, w_t, r_t, a_t, y_t, i\}$ 的七个方程构成的均衡系统。
6. 对数线性化模型均衡系统。
7. 找出模型中的控制变量和状态变量。

   （以下步骤均需要使用计算机操作，请根据题目说明报告计算结果。）

8. 校准模型。按下表对模型涉及的六个参数进行赋值：

参数	取值	含义
α	0.4	资本份额
β	0.98	贴现因子
γ	0.4	家庭偏好
δ	0.05	资本折旧率
ρ	0.9	TFP 自回归系数
σ	0.01	TFP 标准差

根据均衡系统和参数值计算模型变量的稳态值，请写出计算过程，并报告所有内生变量稳态值的计算结果。

9. 消去对数线性化均衡系统中的静态变量 r，l，w，y，整理成线性差分方程组，并整理成如下形式：
$$X_{t+1} = \Omega X_t + R\varepsilon_{t+1} \tag{1}$$
请说明推导过程，并报告矩阵 Ω 和 R 的计算结果。

10. 对矩阵 Ω 进行特征分解得到 $\Omega = P\Lambda P^{-1}$，从而把差分方程系统的系数矩阵转化为对角矩阵。请说明计算过程，并报告矩阵 P 和 Λ 的计算结果。

11. 把大于 1 的特征值对应的变量向前迭代获得最优政策路径。请说明计算过程并报告对应鞍点路径的系数矩阵。

12. 把政策路径代入原均衡系统得到状态变量的转移路径。请说明计算过程并报告对应转移路径的系数矩阵。

13. 根据鞍点路径画出模型变量的脉冲反应图。

14. 给定随机冲击，利用 MATLAB 生成 25000 个随机数，对模型变量进行模拟。去掉前 5000 个值，消除初始值的影响，得到变量的模拟时间序列，并计算模拟序列的方差，协方差矩阵和自相关矩阵。

15. 根据鞍点路径计算模型变量的均值、方差、标准差、协方差矩阵和自相关矩阵。

提示：协方差矩阵：

$$\begin{aligned}\Gamma(0) &= EY_tY_t' = \Phi\Gamma(-1) + \Psi\Psi'\sigma^2 \\ &= \Phi\Gamma(0)\Phi' + \Psi\Psi'\sigma^2 \\ vec[\Gamma(0)] &= [I - \Phi\otimes\Phi]^{-1} vec(\Psi\Psi')\sigma^2 \\ \Gamma(i) &= \Phi^i\Gamma(0)\end{aligned}$$

自相关矩阵：

$$P(i) = D^{-1}\Gamma(i)D^{-1}$$

其中 D 为对角矩阵，对角元素为变量标准差。

三、考虑 Calvo 定价模型。已知厂商 i 面临的产品需求函数为 $Y_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\varepsilon} Y_t$。假设厂商每期可以选择最优价格的概率为 $1-\gamma$，从而厂商的最优定价问题为：

$$\max_{p_{it}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} \gamma^s \Lambda_{t+s}\left[\frac{P_{it}}{P_{t+s}} - mc_{t+s}\right] Y_{it+s}$$

其中 $\Lambda_{t+s} \equiv \beta^s \frac{C_t}{C_{t+s}}$ 表示随机折现因子。

1. 请写出厂商定价的一阶条件。
2. 把最优定价的表达式写为 $P_{it}^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\frac{X_{1t}}{X_{2t}}$ 的，写出 X_{1t} 和 X_{2t} 的迭代方程形式，并验证当 $\gamma = 0$ 时，$P_{it}^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} mc_{it} P_t$。