

第六章

时间序列计量经济学模型的理论与方法

第一节 时间序列的平稳性及其检验

第二节 随机时间序列模型的识别和估计

第三节 协整分析与误差修正模型

第一节 时间序列的平稳性及其检验

- 一、问题的引出：非平稳变量与经典回归模型
- 二、时间序列数据的平稳性
- 三、平稳性的图示判断
- 四、平稳性的单位根检验
- 五、单整、趋势平稳与差分平稳随机过程

一、问题的引出：非平稳变量与经典 回归模型

1. 常见的数据类型

到目前为止，经典计量经济模型常用到的数据有：

- 时间序列数据 (time-series data);
- 截面数据(cross-sectional data)
- 平行/面板数据 (panel data/time-series cross-section data)

★时间序列数据是最常见，也是最常用到的数据。

2. 经典回归模型与数据的平稳性

- 经典回归分析暗含着一个重要假设：数据是平稳的。
- 数据非平稳，大样本下的统计推断基础——“一致性”要求——被破坏。
- 经典回归分析的假设之一：解释变量 \mathbf{X} 是非随机变量
- 放宽该假设： \mathbf{X} 是随机变量，则需进一步要求：
 - (1) \mathbf{X} 与随机扰动项 μ 不相关： $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mu) = 0$
 - (2) $\sum (X_i - \bar{X})^2 / n$ 依概率收敛： $\text{Plim}_{n \rightarrow \infty} (\sum (X_i - \bar{X})^2 / n) = Q$

第（1）条是OLS估计的需要

第（2）条是为了满足统计推断中大样本下的“一致性”

特性：
$$P \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{\beta}) = \beta$$

注意：在双变量模型中：

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2} = \beta + \frac{\sum x_i u_i / n}{\sum x_i^2 / n}$$

因此：

$$P \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \beta + \frac{P \lim \sum x_i u_i / n}{P \lim \sum x_i^2 / n} = \beta + \frac{0}{Q} = \beta$$

▲如果X是非平稳数据（如表现出向上的趋势），则（2）不成立，回归估计量不满足“一致性”，基于大样本的统计推断也就遇到麻烦。

3. 数据非平稳，往往导致出现“虚假回归”问题

表现在：两个本来没有任何因果关系的变量，却有很高的相关性（有较高的 R^2 ）：

例如：如果有两列时间序列数据表现出一致的变化趋势（非平稳的），即使它们没有任何有意义的关系，但进行回归也可表现出较高的可决系数。

在现实经济生活中：

情况往往是实际的时间序列数据是非平稳的，而且主要的经济变量如消费、收入、价格往往表现为一致的上升或下降。这样，仍然通过经典的因果关系模型进行分析，一般不会得到有意义的结果。

时间序列分析模型方法就是在这样的情况下，
以通过揭示时间序列自身的变化规律为主线而发
展起来的全新的计量经济学方法论。

时间序列分析已组成现代计量经济学的重要内
容，并广泛应用于经济分析与预测当中。

时间序列定义

随机过程：随时间由随机变量组成的一个有序序列称为随机过程。用 $\{x, t \in T\}$ 表示。简记为 $\{x_t\}$ 或 x_t 。随机过程也常简称为过程。

时间序列：随机过程的一次观测结果称为时间序列。也用 $\{x_t, t \in T\}$ 表示，并简记为 $\{x_t\}$ 或 x_t 。时间序列中的元素称为观测值。

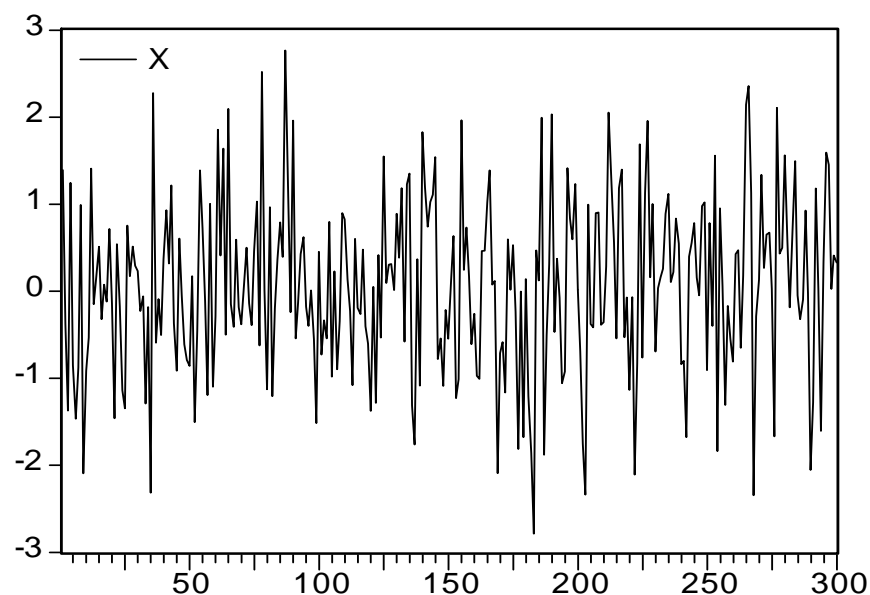
随机过程和时间序列一般分为两类。一类是离散型的，一类是连续型的。本书只考虑离散型随机过程和时间序列，即观测值是从相同时间间隔点上得到的。

离散型时间序列可通过两种方法获得。一种是抽样于连续变化的序列。比如某市每日中午12点观测到的气温值序列；工业流程控制过程中，对压力、液面、温度等监控指标定时刻采集的观测值序列。另一种是计算一定时间间隔内的累积值。比如中国的年基本建设投资额序列、农作物年产量序列等。

用 L 表示一阶滞后算子，定义 $L x_t = x_{t-1}$

则 k 阶滞后算子定义为 $L^k x_t = x_{t-k}$

白噪声过程：对于一个随机过程 $\{x_t, t \in T\}$ ，如果 $E(x_t) = 0$ ，
 $\text{Var}(x_t) = \sigma^2 < \infty, \forall t \in T$ ； $\text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = 0, (t+k) \in T, k \neq 0$ ，则称 $\{x_t\}$ 为白噪声过程。



时间序列模型的分类

一般分为四种类型：

自回归过程（AR）、移动平均过程（MA）、自回归移动平均过程（ARMA）和单积（整）自回归移动平均过程（ARIMA）。

1. 自回归过程

如果一个线性随机过程可表达为

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + u_t$$

其中 $\phi_i, i = 1, \dots, p$ 是自回归参数， u_t 是白噪声过程，则这个线性过程 x_t 称为 **p 阶自回归过程**，用 **AR(p)** 表示。它是由 x_t 的 p 个滞后变量的加权和以及 u_t 相加而成。用滞后算子表示

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) x_t = \Phi(L) x_t = u_t$$

其中 $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ 称为**自回归算子**，或**自回归特征多项式**。

时间序列模型的分类

与自回归模型常联系在一起的是平稳性问题。对于自回归过程 $\text{AR}(p)$ ，如果

特征方程 $\Phi(L) = 0$

的所有根的绝对值都大于 1，则该过程是一个平稳的过程。对于一般的自回归过程 $\text{AR}(p)$ ，特征多项式可以分解为

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p = (1 - G_1 L) (1 - G_2 L) \dots (1 - G_p L)$$

其中 $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ 是特征方程 $\Phi(L) = 0$ 的根。 x_t 可表达为

$$x_t = \Phi(L)^{-1} u_t = \left(\frac{k_1}{1 - G_1 L} + \frac{k_2}{1 - G_2 L} + \dots + \frac{k_p}{1 - G_p L} \right) u_t$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_p 是待定常数。 x_t 具有平稳性的条件是 $\Phi(L)^{-1}$ 必须收敛，即应有 $|G_i| < 1, i = 1, 2, \dots, p$ 。而 $G_i^{-1}, i = 1, 2, \dots, p$ 是特征方程 $\Phi(L) = 0$ 的根，所以保证 $\text{AR}(p)$ 过程具有平稳性的条件是特征方程的全部根必须在单位圆（半径为 1）之外，即 $|1/G_i| > 1$ 。

时间序列模型的分类

保证 $\text{AR}(p)$ 过程平稳的一个必要但不充分的条件是 p 个自回归系数之

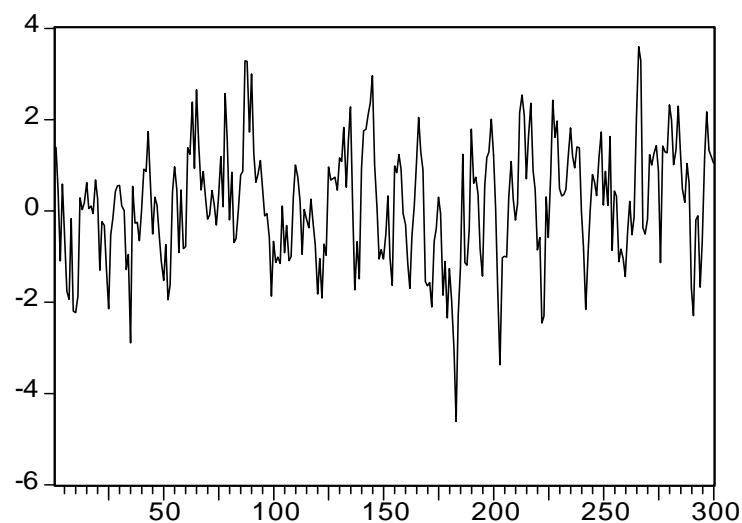
和要小于 1, 即 $\sum_{i=1}^p \phi_i < 1$

$\text{AR}(p)$ 过程中最常用的是一阶自回归过程。

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t$$

和二阶自回归过程

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t$$



AR(1)序列

时间序列模型的分类

对于一阶自回归过程 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t$ ，保持其平稳的条件是特征方程

$$\Phi(L) = (1 - \phi_1 L) = 0$$

的根的绝对值必须大于 1，即满足 $|1/\phi_1| > 1$ 或 $|\phi_1| < 1$

在 $|\phi_1| < 1$ 条件下，一阶自回归过程可写为 $(1 - \phi_1 L) x_t = u_t$

$$x_t = (1 - \phi_1 L)^{-1} u_t = [1 + \phi_1 L + (\phi_1 L)^2 + (\phi_1 L)^3 + \dots] u_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i L^i \right) u_t$$

既然 x_t 是平稳过程， $\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i L^i$ 必须收敛，即一阶自回归系数 ϕ_1 必须满足

$|\phi_1| < 1$ 。这是容易理解的，如果 $|\phi_1| \geq 1$ ，则 $(1 - \phi_1 L)^{-1}$ 发散，于是 x_t 变成一个非平稳随机过程。

时间序列模型的分类

由 **AR(1)** 过程 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t$ 有

$$x_t = u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 x_{t-2} = u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2} + \dots$$

因为 u_t 是一个白噪声过程，所以对于平稳的 **AR(1)** 过程，

$$\mathbf{E}(x_t) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(x_t) &= \mathbf{E}(x_t)^2 = \mathbf{E}(u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_1^2 u_{t-2} + \dots)^2 \\ &= \sigma_u^2 + \phi_1^2 \sigma_u^2 + \phi_1^4 \sigma_u^2 + \dots = \frac{1}{1 - \phi^2} \sigma_u^2\end{aligned}$$

时间序列模型的分类

例 12.1 有 AR(1) 过程 $x_t = 0.6 x_{t-1} + u_t$, 现改写为 $(1 - 0.6 L) x_t = u_t$

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{1-0.6L} u_t = (1 + 0.6L + 0.36L^2 + 0.216L^3 + \dots) u_t \\ &= u_t + 0.6 u_{t-1} + 0.36 u_{t-2} + 0.216 u_{t-3} + \dots \end{aligned}$$

平稳的 AR(1) 过程变换成为无限阶的移动平均过程。

例 12.2 有 AR(2) 模型 $x_t = 0.6 x_{t-1} - 0.1 x_{t-2} + u_t$, 即 $(1 - 0.6L + 0.1L^2) x_t = u_t$ 。
其特征方程是 $(1 - 0.6L + 0.1L^2) = 0$

$$[1 - (0.3 - 0.1i)L][1 - (0.3 + 0.1i)L] = 0$$

特征方程的两个根是,

$$L_1 = 1 / (0.3 - 0.1i) = 3 + i \quad L_2 = 1 / (0.3 + 0.1i) = 3 - i$$

因为两个根都在单位圆之外, 所以 x_t 是平稳的随机过程。

时间序列模型的分类

2. 移动平均过程

如果一个线性随机过程可用下式表达

$$x_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 是回归参数, u_t 为白噪声过程, 则称为 **q 阶移动平均过程, 记为 $MA(q)$** 。因为 x_t 是由 u_t 和 u_t 的 q 个滞后项的加权和构造而成, 所以称其为移动平均过程。“移动”指随着时间 t 变化, “平均”指加权和之意。上式还可以用滞后算子写为,

$$x_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t$$

或

$$x_t = \Theta(L) u_t$$

其中 $\Theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)$, 称为移动平均算子或移动平均特征多项式。由定义知任何一个 q 阶移动平均过程都是由 $q + 1$ 个白噪声变量的加权和组成, 所以任何一个有限阶移动平均过程都是平稳的过程。 17

时间序列模型的分类

与移动平均过程相联系的一个重要概念是可逆性。移动平均过程具有可逆性的条件是特征方程，

$$\Theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) = 0$$

的全部根的绝对值必须都大于 1。由 **MA(q)** 过程，有 $\Theta(L)^{-1} x_t = u_t$ 。由于 $\Theta(L)$ 可表示为

$$\Theta(L) = (1 - H_1 L) (1 - H_2 L) \dots (1 - H_q L),$$

所以
$$\Theta(L)^{-1} = \left(\frac{m_1}{1 - H_1 L} + \frac{m_2}{1 - H_2 L} + \dots + \frac{m_q}{1 - H_q L} \right)$$

可见保证 **MA(q)** 过程可以转换成一个无限阶自回归过程，即 **MA(q)** 具有可逆性的条件是 $\Theta(L)^{-1}$ 收敛。即必须有 $|H_j| < 1$ 或 $|H_j^{-1}| > 1$, $j = 1, 2, \dots, q$ 成立。而 H_j^{-1} 是特征方程 $\Theta(L) = 0$ 的根，所以 **MA(q)** 过程具有可逆性的条件是特征方程 $\Theta(L) = 0$ 的根必须在单位圆之外。（因为 $x_t = \Theta(L) u_t$ 是平稳的，如果变换成 $\Theta(L)^{-1} x_t = u_t$ 后变得不平稳，显然失去可逆性。）

时间序列模型的分类

注意，对于无限阶的移动平均过程

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} (\theta_i u_{t-i}) = u_t (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots)$$

其方差为

$$\text{Var}(x_t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\theta_i^2 \text{Var}(u_{t-i})) = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$$

很明显，虽然有限阶移动平均过程都是平稳的，但**对于无限阶移动平均过程还须另加约束条件才能保证其平稳性**。这条件就是 $\{x_t\}$ 的方差必须为有限值，即

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 < \infty$$

时间序列模型的分类

MA(q) 过程中最常见的是一阶移动平均过程, $x_t = (1 + \theta_1 L) u_t$

其具有可逆性的条件是 $(1 + \theta_1 L) = 0$ 的根 (绝对值) 应大于1, 即 $|1/\theta_1| > 1$ 或 $|\theta_1| < 1$ 。当 $|\theta_1| < 1$ 时, MA (1) 过程 (12.14) 可以变换为

$$u_t = (1 + \theta_1 L)^{-1} x_t = (1 - \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 - \theta_1^3 L^3 + \dots) x_t$$

整理上式, $x_t = \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} + \theta_1^3 x_{t-3} + \dots + u_t$

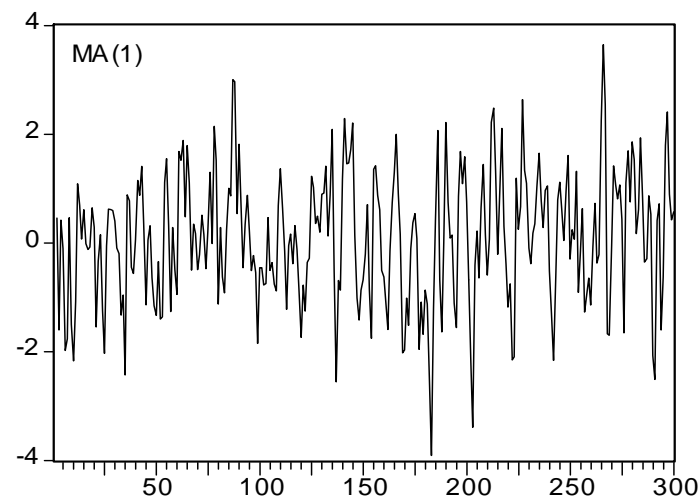
这是一个无限阶的以几何衰减为权数的自回归过程。对于MA(1) 过程

$$E(x_t) = E(u_t) + E(\theta_1 u_{t-1}) = 0$$

$$\text{Var}(x_t) = \text{Var}(u_t) + \text{Var}(\theta_1 u_{t-1}) = (1 + \theta_1^2) \sigma_u^2$$

由MA(1) 过程生成的时间序列见图。

注意：(1) 对于AR(p) 过程, 不必考虑可逆性问题, 只需考虑平稳性问题。条件是 $\phi(L) = 0$ 的根 (绝对值) 必须大于1。(2) 对于MA(q) 过程, 不必考虑平稳性问题, 只需考虑可逆性问题。条件是 $\theta(L) = 0$ 的根 (绝对值) 必须大于1。



MA(1)时间序列

时间序列模型的分类

3. 自回归移动平均过程

由自回归和移动平均两部分共同构造的随机过程称为自回归移动平均过程，记为ARMA(p, q)，其中 p, q 分别表示自回归和移动平均分量的最大滞后阶数。ARMA(p, q)的一般表达式是

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

$$\text{或 } (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) x_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) u_t$$

$$\Phi(L) x_t = \Theta(L) u_t$$

其中 $\Phi(L)$ 和 $\Theta(L)$ 分别表示关于 L 的 p, q 阶特征多项式，分别称为自回归算子和移动平均算子。

ARMA(p, q)过程的平稳性只依赖于其自回归部分，即 $\Phi(L) = 0$ 的全部根取值在单位圆之外（绝对值大于1）。其可逆性则只依赖于移动平均部分，即 $\Theta(L) = 0$ 的根取值应在单位圆之外。

时间序列模型的分类

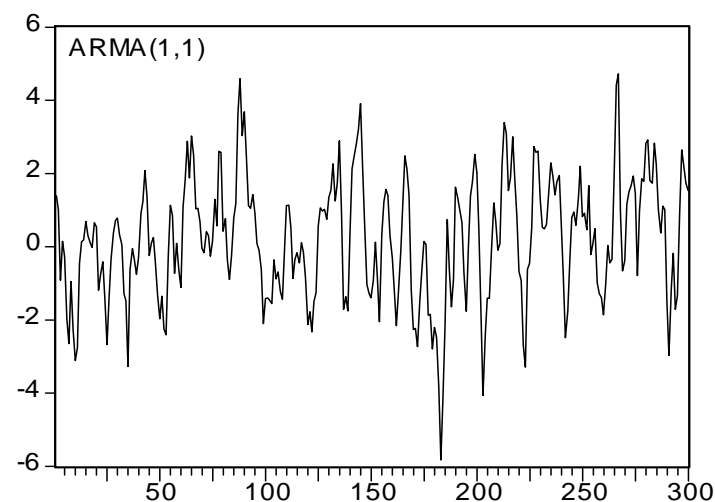
以ARMA(1, 1)为例, $x_t - \phi_1 x_{t-1} = u_t + \theta_1 u_{t-1}$

或 $(1 - \phi_1 L) x_t = (1 + \theta_1 L) u_t$

很明显只有当 $-1 < \phi_1 < 1$ 和 $-1 < \theta_1 < 1$ 时, 上述模型才是平稳的, 可逆的。

由ARMA(1, 1) 过程生成的时间序列见图。

实际中对于非季节时间序列,
ARMA(p , q) 过程的最高阶数
一般各不会超过**2**。



ARMA(1, 1)时间序列

时间序列模型的分类

4. 单积（整）自回归移动平均过程

差分：用变量 x_t 的当期值减去其滞后值从而得到新序列的计算方法称为差分。

若减数为滞后一期变量则称为一阶差分，若减数为滞后 k 期变量则称为 k 阶差分。例如，对于随机过程 x_t ，一阶差分可表示为

$$x_t - x_{t-1} = D x_t = (1 - L) x_t = x_t - L x_t$$

其中 D 称为一阶差分算子。 L 是1阶滞后算子。 k 阶差分表示为

$$x_t - x_{t-k} = D_k x_t = (1 - L^k) x_t = x_t - L^k x_t$$

2次1阶差分表示为

$$D^2 x_t = DDx_t = Dx_t - Dx_{t-1} = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$

或
$$D^2 x_t = (1 - L)^2 x_t = (1 - 2L + L^2) x_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$

以上两式运算结果相同，说明差分算子和滞后算子可以直接参与运算。

时间序列模型的分类

若特征根恰好在单位圆上，这种根称为单位根。该过程也是非平稳的。但该过程的特点是经过相应次差分之后可以转化为一个平稳过程。

虽然自然科学领域中的许多时间序列都是平稳的，但经济领域中多数宏观经济时间序列却都是非平稳的，即其均值与方差是随着时间的变化而变化的。

伯克斯—詹金斯（**Box-Jenkins**）积数十年理论与实践的研究指出，时间序列的非平稳性是多种多样的，然而幸运的是经济时间序列常常具有这种特殊的齐次非平稳特性。对于一个非季节性经济时间序列常常可以用含有一个或多个单位根的随机过程模型描述。

时间序列模型的分类

假设一个随机过程含有 d 个单位根，则其经过 d 次差分之后可以变换成为一个平稳的自回归移动平均过程。考虑如下模型，

$$\Phi(L) D^d y_t = \Theta(L) u_t$$

其中 $D^d y_t$ 表示 y_t 经过 d 次差分变为平稳过程； $\Phi(L)$ 是平稳过程的自回归算子； $\Theta(L)$ 是平稳过程的移动平均算子。则称 y_t 为 (p, d, q) 阶单积（整）自回归移动平均过程，记为ARIMA(p, d, q)。

这种取名的目的是与后面的称谓相一致。ARIMA过程也称为综合自回归移动平均过程。其中 $\Phi(L) D^d$ 称为广义自回归算子。

时间序列模型的分类

下面介绍一种典型的非平稳随机过程，随机游走过程。对于表达式

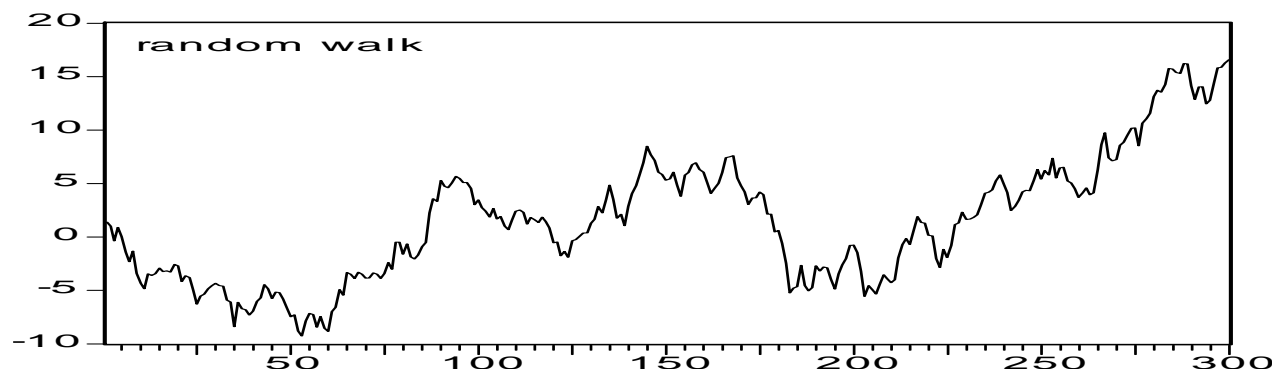
$$x_t = x_{t-1} + u_t$$

如果 u_t 是白噪声过程，则称 x_t 为随机游走过程。随机游走过程的方差为无限大。

$$x_t = x_{t-1} + u_t = u_t + u_{t-1} + x_{t-2} = u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + \dots$$

$$\text{Var}(x_t) = \text{Var}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + \dots) = \sum_{-\infty}^t \sigma_u^2 \rightarrow \infty$$

这使得它的均值变得毫无意义。随机游走过程是 $p = q = 0$, $d = 1$ 条件下的 $\text{ARIMA}(p, d, q)$ 过程。因为 $\phi_1 = 1$ ，随机游走过程的特征方程中含有单位根，所以随机游走过程是非平稳的随机过程。随机游走过程的一阶差分为白噪声过程。



Wold分解定理

Wold 分解定理：任何 2 阶平稳过程 x_t ，都可以被表示为

$$x_t - \mu - d_t = u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$$

其中 μ 是 x_t 的期望。 d_t 是 x_t 的线性确定性成分，如周期性成分、时间 t 的多项式和指数形式等。 $\psi_0 = 1$ ， $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ 。 u_t 为白噪声过程。 x_t 可以直接用其滞后值预测， u_t 表示用 x_t 的滞后项预测 x_t 时的误差，即

$$u_t = x_t - E(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j u_{t-j}$ 称为 x_t 的线性非确定性成分。当 $d_t = 0$ 时，称 x_t 为纯线性非确定性过程。**Wold 分解定理**只要求过程 2 阶平稳即可。

Wold分解定理

从原理上讲，要得到过程的 **Wold** 分解，就必须知道无限个 ψ_j 参数，这对于一个有限样本来说是不可能的。实际中可以对 ψ_j 做另一种假定，即可以把 $\Psi(L)$ 看作是有限特征多项式的商，

$$\Psi(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j = \frac{\Theta(L)}{\Phi(L)} = \frac{1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q}{1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_p L^p}$$

注意，无论原序列中含有何种确定性成分，在前面介绍的模型种类和后面介绍的自相关函数、偏自相关函数中都假设在原序列中已经剔除了所有确定性成分，是一个纯的随机过程（过程中不含有任何确定性成分）。如果一个序列如下式，

$$x_t = \mu + d_t + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \dots +$$

则所有研究都是在 $(x_t - \mu - d_t)$ 的基础上进行。例如前面给出的各类模型中都不含有均值项、时间趋势项就是这个道理。

Wold分解定理

下面以漂移项非零的平稳过程讨论漂移项与均值的关系。设有非零漂移项平稳ARMA(2,1)过程如下，

$$x_t = 0.05 + 0.2 x_{t-1} + 0.4 x_{t-2} + u_t + 0.3 u_{t-1}$$

漂移项等于0.05。则 x_t 的期望可由下式计算。

$$E(x_t) - 0.2 E(x_{t-1}) - 0.4 E(x_{t-2}) = (1 - 0.2 - 0.4)E(x_t) = \Phi(1)E(x_t) = 0.05$$

$$\mu = E(x_t) = 0.05 / \Phi(1) = 0.05 / (1 - 0.2 - 0.4) = 0.05 / 0.4 = 0.125$$

其中 $\Phi(1) = (1 - 0.2 - 0.4) = 0.4$ 是自回归特征多项式 $\Phi(L)$ 当 $L=1$ 时的值。 $\mu \Phi(1) = 0.05$ 就是漂移项与均值的关系。

下面用一般表达式描述这个问题。设有漂移项非零的平稳ARMA(p,q)过程如下，

$$\Phi(L) x_t = \alpha + \Theta(L) u_t \quad \text{其中}\alpha\text{表示漂移项。则过程}x_t\text{的期望是}$$

$$E(x_t) = \alpha / \Phi(1) = \alpha / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) = \mu$$

所以期望 μ 和漂移项 α 的关系可以表示为 $\Phi(1)\mu = \alpha$

过程 $\Phi(L) x_t = \alpha + \Theta(L) u_t$ 还可写为， $\Phi(L) (x_t - \mu) = \Theta(L) u_t$

因为打开 $(x_t - \mu)$ ，上式写为 $\Phi(L) x_t = \Phi(1)\mu + \Theta(L) u_t = \alpha + \Theta(L) u_t$ ，与原过程相同。

12.4 自相关函数（见6.2）

12.5 偏自相关函数（见 6.2）

12.6 时间序列模型的建立与预测

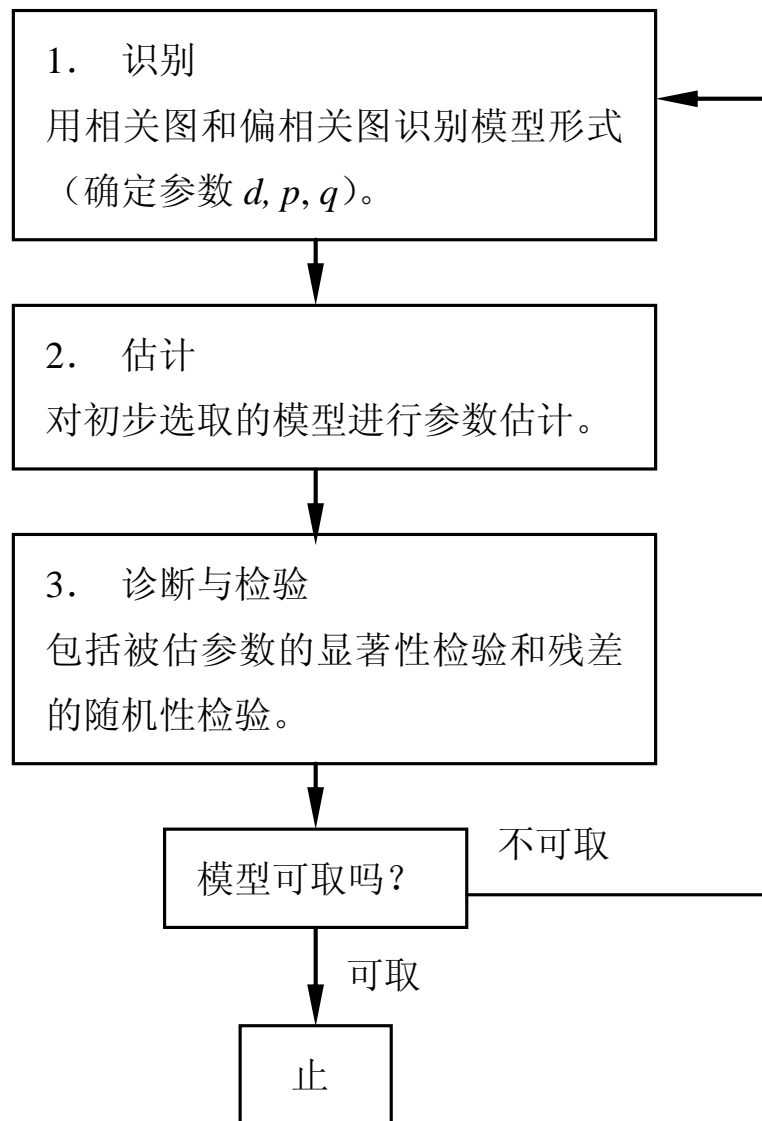
ARIMA过程用 $\Phi(L)D^d y_t = \alpha + \Theta(L) u_t$ 表示。

其中 $\Phi(L)$ 和 $\Theta(L)$ 分别是 p 阶自回归和 q 阶移动平均算子。它们的根都在单位圆之外。 α 是位移项（亦称漂移项）。 $D^d y_t$ 表示对 y_t 进行 d 次差分后的平稳过程。这是随机过程的一般表达式。它既包括了AR，MA 和ARMA过程，也包括了单整的AR，MA和ARMA过程。

建立时间序列模型通常包括三个步骤。（1）模型的识别，（2）模型参数的估计，（3）模型的诊断与检验。

在分析相关图时，如果发现其衰减很慢，即可认为该时间序列是非平稳的。在学习了第12章的知识后也可以用DF、ADF检验判别随机过程的平稳性。用DF、ADF检验判别随机过程的平稳性更正规。

时间序列模型的建立与预测



建立时间序列模型的步骤

对于经济时间序列，差分次数 d 通常取0，1或2。

实际建模中也要防止过度差分。差分后若数据的极差变大，说明差分次数太多了。

在平稳时间序列基础上识别ARMA模型阶数。序列的相关图与偏相关图可以为识别模型参数 p （自回归分量的阶数）和 q （移动平均分量的阶数）的值提供信息。

估计的模型形式不是唯一的，所以在模型识别阶段应多选择几种模型形式，以供进一步选择。

时间序列模型的建立与预测

表1 ARMA过程的自相关函数和偏自相关函数

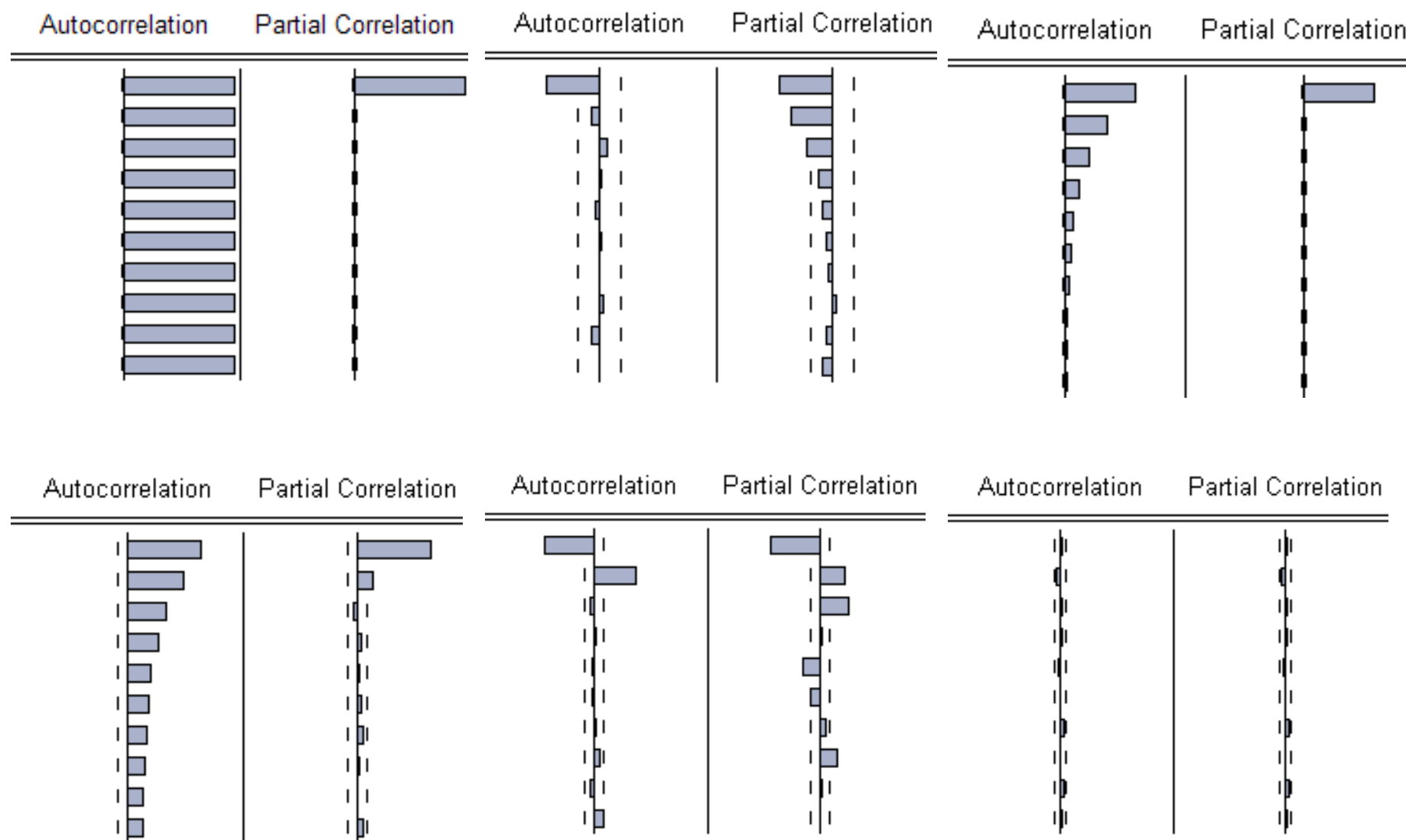
模 型	自相关函数特征	偏自相关函数特征
ARIMA(1,1,1) $\Delta x_t = \phi_1 \Delta x_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$	缓慢地近似线性衰减。	
AR (1) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t$	若 $\phi_1 > 0$, 平滑地指数衰减。 若 $\phi_1 < 0$, 正负交替地指数衰减。	若 $\phi_{11} > 0$, $k=1$ 时有正峰值然后截尾。 若 $\phi_{11} < 0$, $k=1$ 时有负峰值然后截尾。
MA (1) $x_t = u_t + \theta_1 u_{t-1}$	若 $\theta_1 > 0$, $k=1$ 时有正峰值然后截尾。 若 $\theta_1 < 0$, $k=1$ 时有负峰值然后截尾。	若 $\theta_1 > 0$, 交替式指数衰减。 若 $\theta_1 < 0$, 负的平滑式指数衰减。
AR (2) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t$	指数或正弦衰减。	$k=1, 2$ 时有两个峰值然后截尾。

12.6 时间序列模型的建立与预测

表1 ARMA过程的自相关函数和偏自相关函数

模 型	自相关函数特征	偏自相关函数特征
MA (2) $x_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$	$k=1, 2$ 有两个峰值 然后截尾。	指数或正弦衰减。
ARMA (1, 1) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$	$k=1$ 有峰值 然后按指数衰减。	$k=1$ 有峰值 然后按指数衰减。
ARMA (2, 1) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$	$k=1$ 有峰值然后 按指数或正弦衰减。	$k=1, 2$ 有两个峰值然后 按指数衰减。
ARMA (1, 2) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$	$k=1, 2$ 有两个峰值 然后按指数衰减。	$k=1$ 有峰值然后 按指数或正弦衰减。
ARMA (2, 2) $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}$	$k=1, 2$ 有两个峰值 然后按指数或正弦衰减。	$k=1, 2$ 有两个峰值 然后按指数或正弦衰减。

ARIMA模型识别举例



2. 模型参数的估计（见 6.2）

3. 诊断与检验

一是检验模型参数的估计值是否具有统计显著性；二是检验残差序列的非自相关性。参数估计值的显著性检验是通过 t 统计量完成的，而模型残差序列非自相关性的判别是用 Q 统计量完成的。

若拟合模型的误差项为白噪声过程，统计量

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^K \frac{r_k^2}{T-k} \sim \chi^2(K-p-q)$$

渐近服从 $\chi^2(K-p-q)$ 分布，其中 T 表示样本容量， r_k 表示用残差序列计算的自相关系数值， K 表示自相关系数的个数或最大滞后期； p 表示模型自回归部分的最大滞后值； q 表示移动平均部分的最大滞后值。

这时的原假设

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K$ （模型的误差序列是白噪声过程）。

用残差序列计算 Q 统计量。判别规则是

若 $Q \leq \chi^2_{\alpha}(K-p-q)$ ，则接受 H_0 ；若 $Q > \chi^2_{\alpha}(K-p-q)$ ，则拒绝 H_0 。

4. 时间序列模型预测

下面以 ARMA(1, 1) 模型为例具体介绍预测方法。其他形式时间序列模型的预测方法与此类似。

设对时间序列样本 $\{x_t\}, t = 1, 2, \dots, T$, 所拟合的模型是

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

则理论上 $T + 1$ 期 x_t 的值应按下式计算,

$$x_{T+1} = \phi_1 x_T + u_{T+1} + \theta_1 u_T$$

取 $u_{T+1} = 0$ 。 x_{T+1} 的预测按下式进行。

$$\hat{x}_{T+1} = \hat{\phi}_1 x_T + \hat{\theta}_1 e_T$$

x_{T+2} 的实际预测式是,

$$\hat{x}_{T+2} = \hat{\phi}_1 \hat{x}_{T+1}$$

其中 \hat{x}_{T+1} 是上一步得到的预测值。由上可见, 随着预测期的加长, 预测式中移动平均部分逐步淡出预测模型, 预测式变成了纯自回归形式。

4. 时间序列模型预测

若上面所用的 x_t 是一个差分变量, 设 $Dy_t = x_t$, 则 $y_t = y_{t-1} + Dy_t$

原序列 $T+1$ 期预测值应按下式计算

$$\hat{y}_{T+1} = \hat{y}_T + \hat{Dy}_{T+1} = y_T + \hat{x}_{T+1}$$

对于 $t > T+1$, 预测式是

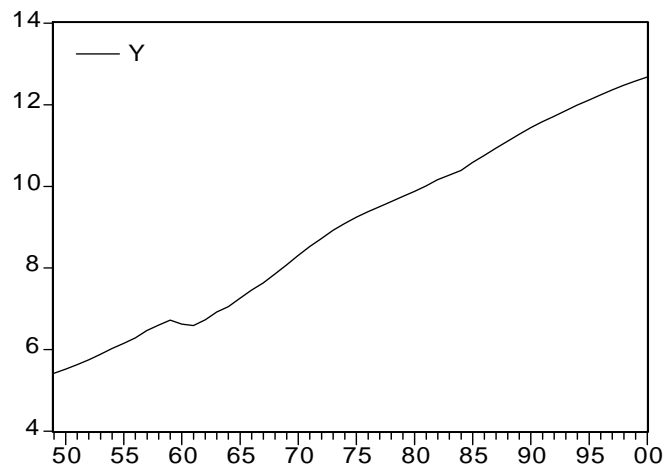
$$\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \hat{Dy}_t, t = T+2, T+3, \dots$$

其中 \hat{y}_{t-1} 是相应上一步的预测结果。

案例分析（中国人口时间序列模型）

从人口序列图可以看出，我国人口总水平除在1960和1961两年出现回落外，其余年份基本上保持线性增长趋势。51年间平均每年增加人口1423.06万人，年平均增长率为16.8%。由于总人口数逐年增加，实际上的年人口增长率是逐渐下降的。把51年分为两个时期，即改革开放以前时期（1949—1978）和改革开放以后时期（1979—2000），则前一个时期的年平均增长率为20%，后一个时期的年平均增长率为12.58%。从人口序列的变化特征看，这是一个非平稳序列。

（第3版310页）























中国人口序列



中国人口一阶差分序列

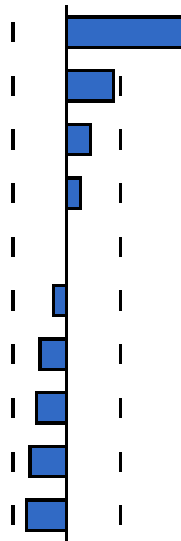
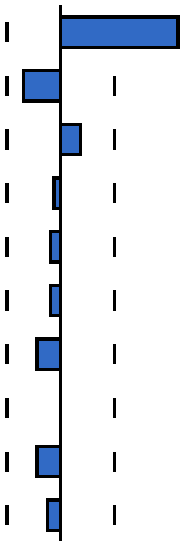
案例分析（中国人口时间序列模型）

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.949	0.949	49.534	0.000
				2	0.896	-0.041	94.572	0.000
				3	0.841	-0.038	135.15	0.000
				4	0.787	-0.036	171.36	0.000
				5	0.732	-0.033	203.35	0.000
				6	0.677	-0.031	231.32	0.000
				7	0.622	-0.034	255.45	0.000
				8	0.567	-0.031	275.96	0.000
				9	0.513	-0.025	293.16	0.000
				10	0.460	-0.032	307.29	0.000

人口序列 y_t 和人口差分序列 Dy_t 的相关图，偏向关图。

案例分析（中国人口时间序列模型）

人口差分序列 Dy_t 的相关图和偏相关图。

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.609	0.609	20.020	0.000
		2	0.247	-0.195	23.394	0.000
		3	0.130	0.115	24.352	0.000
		4	0.074	-0.041	24.670	0.000
		5	-0.001	-0.051	24.670	0.000
		6	-0.062	-0.043	24.898	0.000
		7	-0.139	-0.120	26.092	0.000
		8	-0.153	0.002	27.565	0.001
		9	-0.185	-0.130	29.773	0.000
		10	-0.219	-0.065	32.946	0.000

（虚线到中心线的距离是 $2 (1/\sqrt{51}) = 0.28$ ）

（第3版312页）

案例分析（中国人口时间序列模型）

Dependent Variable: DY
 Method: Least Squares
 Date: 06/07/03 Time: 11:45
 Sample(adjusted): 1951 2000
 Included observations: 50 after adjusting endpoints
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.142862	0.016467	8.675736	0.0000
AR(1)	0.617116	0.113953	5.415526	0.0000
R-squared	0.379267	Mean dependent var		0.143094
Adjusted R-squared	0.366335	S.D. dependent var		0.056004
S.E. of regression	0.044581	Akaike info criterion		-3.343828
Sum squared resid	0.095399	Schwarz criterion		-3.267348
Log likelihood	85.59571	F-statistic		29.32792
Durbin-Watson stat	1.757605	Prob(F-statistic)		0.000002
Inverted AR Roots	.62			

表达式是 $Dy_t = 0.1429 + 0.6171 (Dy_{t-1} - 0.1429) + u_t$

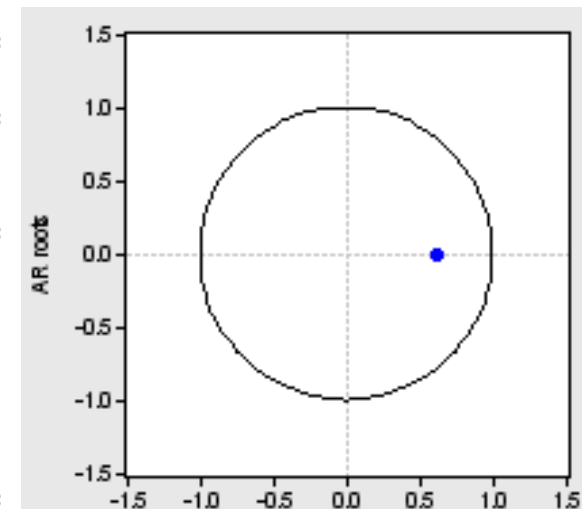
$$(8.7) \quad (5.4) \quad R^2 = 0.38, Q(10) = 5.2, Q_{0.05}(10-2) = 16.9$$

其中0.1429是用AR(1)模型估计的序列 Dy_t 的均值。其含义是51年间平均年增加人口数是1428.62万人。用样本计算的均值是0.1431。

案例分析（中国人口时间序列模型）

Dependent Variable: DY
Method: Least Squares
Date: 06/07/03 Time: 11:45
Sample(adjusted): 1951 2000
Included observations: 50 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.142862	0.016467	8.675736	0.0000
AR(1)	0.617116	0.113953	5.415526	0.0000
R-squared	0.379267	Mean dependent var		0.143094
Adjusted R-squared	0.366335	S.D. dependent var		0.056004
S.E. of regression	0.044581	Akaike info criterion		-3.343828
Sum squared resid	0.095399	Schwarz criterion		-3.267348
Log likelihood	85.59571	F-statistic		29.32792
Durbin-Watson stat	1.757605	Prob(F-statistic)		0.000002
Inverted AR Roots	.62			



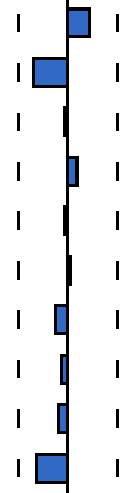
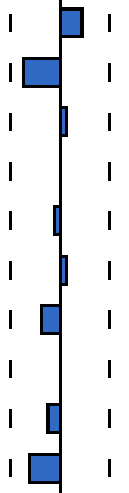
注意： Inverted AR Roots .62

(1) EViews估计结果是(Dy_t -0.1429)的AR(1)过程估计结果，而不是 Dy_t 的AR(1)过程估计结果。

(2) 输出结果的最下一行给出的是自回归特征根的倒数。

(3) 特征根是 $1 / 0.6171 = 1.62 > 1$ ，所以 Dy_t 是一个稳定的序列。

案例分析（中国人口时间序列模型）

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.118	0.118	0.7424	
		2	-0.182	-0.199	2.5330	0.111
		3	-0.023	0.028	2.5626	0.278
		4	0.044	0.008	2.6733	0.445
		5	-0.024	-0.033	2.7064	0.608
		6	0.008	0.029	2.7106	0.744
		7	-0.078	-0.101	3.0814	0.799
		8	-0.031	0.001	3.1407	0.872
		9	-0.046	-0.076	3.2726	0.916
		10	-0.172	-0.178	5.2061	0.816

模型残差序列的相关图和偏相关图，见最后一行， $Q(10) = 5.2$ 。因为 $Q(10) = 5.2 < Q_{0.05}(k-p-q) = Q_{0.05}(10-2) = 15.5$ ，所以模型的随机误差序列也达到了非自相关的要求，可以把上述模型作为最终估计结果。

注意：时间序列模型的可决系数 R^2 一般不可能很高。 （第3版313页）

整理上式得， $Dy_t = 0.0547 + 0.6171 Dy_{t-1} + u_t$ $\frac{0.0547}{1 - 0.6171}$

其中0.0547是漂移项。对上式两侧求期望， $E(Dy_t) = \frac{0.0547}{1 - 0.6171} = 0.1429$

案例分析（中国人口时间序列模型）

预测：由样本知

（第3版314页）

obs	Y	DY
1999	12.57860	0.102500
2000	12.67430	0.095700

$$Dy_{2001} = 0.0547 + 0.6171 Dy_{2000} + u_t = 0.0547 + 0.6171 \times 0.0957 = 0.1138$$

$$y_{2001} = y_{2000} + Dy_{2001} = 12.6743 + 0.1138 = 12.7881$$

EViews 给出的预测值是 12.78806，计算结果相同。

obs	Y	YF	YFSE
2000	12.67430	12.69655	0.045074
2001	12.76270	12.78806	0.045117

已知 2001 年中国人口实际数是 12.7627 亿人。预测相对误差为

$$\eta = \frac{12.7881 - 12.7627}{12.7627} = 0.002$$

案例分析（中国人口时间序列模型）

Forecast

Forecast equation
EQ01

Series to forecast
☒ Y ☐ D(Y)

Series names
Forecast yf
S.E. yfse
GARCH(optional)

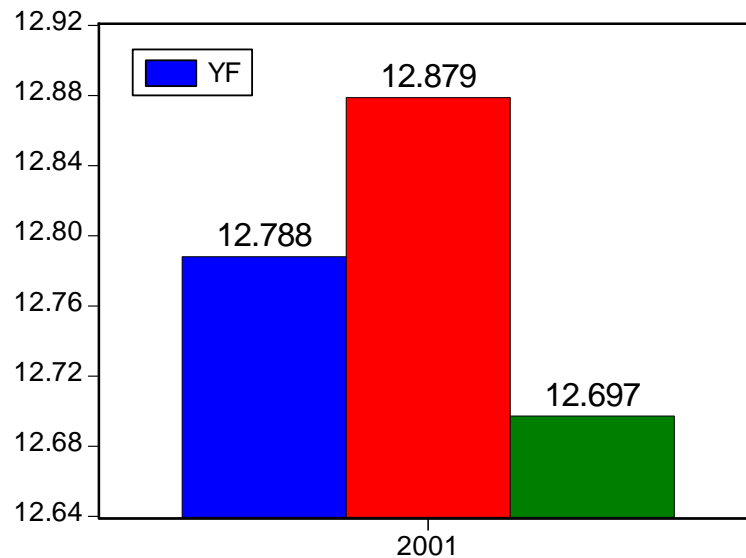
Method
☐ Dynamic forecast
☒ Static forecast
☐ Structural (ignore A)
☒ Coef uncertainty in S.E

Forecast sample
2001 2001

Output
☒ Forecast graph
☒ Forecast evaluation

☒ Insert actuals for out-of-sample obs

OK Cancel



Forecast: YF
Actual: Y
Forecast sample: 2001 2001
Included observations: 1

Root Mean Squared Error 0.025358
Mean Absolute Error 0.025358
Mean Abs. Percent Error 0.198685

附录：用EViews估计时间序列模型的方法

(1) 在打开工作文件的基础上，从EViews主菜单中点击Quick键，选择Estimate Equation功能。会弹出Equation specification对话框。输入1阶自回归时间序列模型估计命令如下：**D(Y) C AR(1)**

其中C表示漂移项。点击OK键。

(2) 模型中若含有移动平均项，EViews命令用MA(q)表示。

(3) 点击时间序列模型估计结果窗口中的View键，选Residual Tests, Correlogram-Q- statistics功能，在随后弹出的对话框中指定相关图的最大滞后期，比如选15，点击OK键，即可得到模型残差序列的相关与偏相关图以及Q统计量。

(4) 点击时间序列模型估计结果窗口中的Forecast键，在随后弹出的对话框中做出适当选择，就可以得到 y_t 和 Dy_t 的动态和静态预测值。

回归与ARMA组合模型

已经学习回归模型和时间序列模型，如果把这两种分析方法结合在一起，建模质量会更高，会得到比其中任何一种方法都好的预测结果。

例如有如下回归模型

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

当 u_t 存在自相关时，时间序列分析的一个有效应用是对残差序列 u_t 建立 ARMA 模型。然后将上式中的残差项用 ARMA 模型替换。这种回归与时间序列相结合的模型形式是

$$y_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_t + \Phi^{-1}(L) \Theta(L) v_t$$

其中 $\hat{u}_t = \Phi^{-1}(L) \Theta(L) v_t$ ，或写成 $\Phi(L) \hat{u}_t = \Theta(L) v_t$ 。 v_t 是服从正态分布的、非自相关的误差项。这种回归与时间序列相组合的模型称作回归与时间序列组合模型，也称作转换（变换）函数模型，或多元（多变量）自回归移动平均模型，简称 MARMA 模型。

回归与ARMA组合模型

注意:

(1) 如果 u_t 是一个 AR(1) 过程, 则回归与 ARMA 组合模型表达的就是误差项为一阶自相关的经典回归模型。

(2) 站在回归模型基础上看组合模型, 站在 ARMA 模型基础上看组合模型。

(3) 回归与 ARMA 组合模型也可以由被解释变量及其滞后项、一个或多个解释变量及其滞后项、和描述随机误差序列的时间序列模型 3 部分组成。

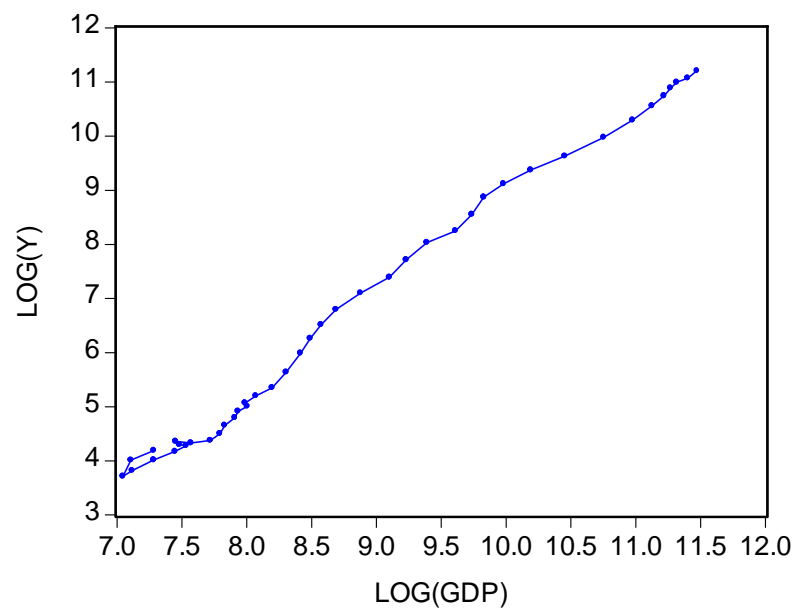
组合模型的一般形式是

$$A(L) y_t = B(L) x_t + \Phi^{-1}(L) \Theta(L) v_t$$

其中 $u_t = \Phi^{-1}(L) \Theta(L) v_t$ 。

回归与ARMA组合模型

例12.3 中国储蓄存款总额（Y，亿元）与GDP（亿元）关系研究



LnY_t 与 $LnGDP_t$ 的散点图

回归与ARMA组合模型

有理由建立对数线性回归模型。估计结果是

$$\begin{aligned} \ln Y_t = & -8.8685 + 1.7647 \ln GDP_t + \hat{u}_t \\ & (-38.9) \quad (69.6) \end{aligned}$$

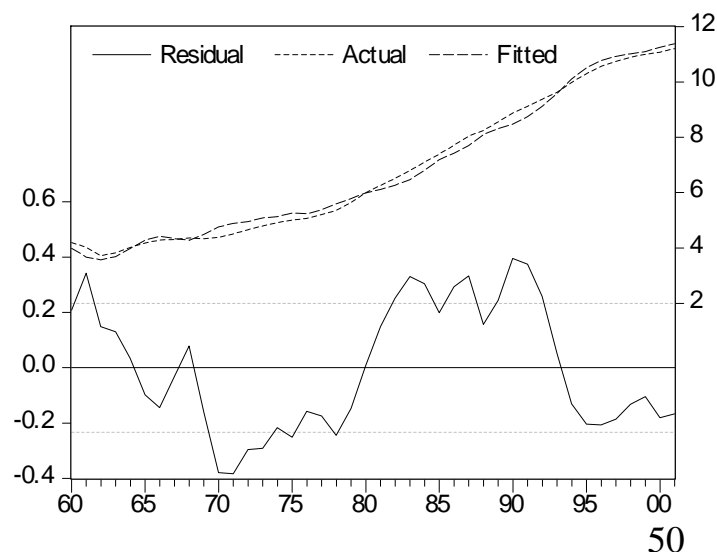
$$R^2 = 0.99, DW=0.23, T = 42, (1960-2001)$$

模型的拟合优度很高，但 DW 值很低，误差项存在严重的自相关。用 LM 统计量作误差项的 2 阶自相关检验，结果是 $LM = 33.6$ 。说明误差项存在 2 阶自相关。采用直接拟合的估计结果是

$$\begin{aligned} \hat{u}_t = & -0.0094 + 1.1792 \hat{u}_{t-1} - 0.3574 \hat{u}_{t-2} \\ & (-0.6) \quad (8.0) \quad (-2.4) \end{aligned}$$

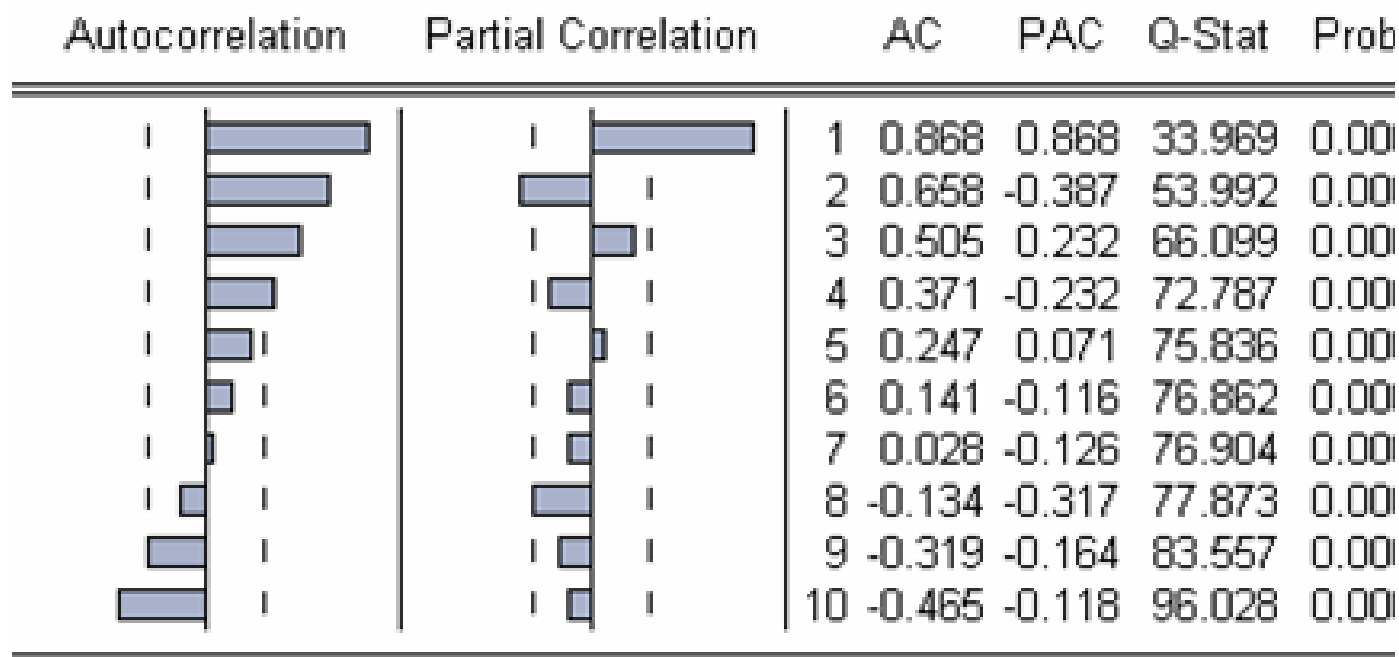
$$R^2 = 0.81, DW=1.65, T = 42, (1960-2001)$$

也说明模型中存在 2 阶自相关。



回归与ARMA组合模型

可以采用广义差分的方法（见第 6 章）克服自相关（读者可以自己作）。
用组合模型克服自相关。观察残差项的相关与偏相关图。



残差序列是一个二阶自回归过程。在对数线性模型中加入 \hat{u}_t 的一阶、二阶自回归（AR）项。得估计结果如下：

$$\ln Y_t = -8.7350 + 1.7443 \ln GDP_t + 1.1840 \hat{u}_{t-1} - 0.3511 \hat{u}_{t-2} + v_t$$

(-13.6) (25.2) (7.8) (-2.3)

$$R^2 = 0.999, DW=1.64, T = 40, (1962-2001)$$

回归与ARMA组合模型

储蓄存款总额对 GDP 的弹性系数 OLS 估计是 1.7647，而根据组合模型，是 1.7443，即 GDP 每增长 1%，储蓄存款总额将增长 1.7443%。

比较俩式，DW 值由 0.23 变为 1.64，自相关得到克服，有效的提高了弹性系数（回归系数）估计量的有效性。用回归与 ARMA 组合模型克服自相关的方法比广义差分法简便得多。

注意：

（1）组合估计对 ARMA 模型的设定一定要正确，否则对回归系数的估计带来很大影响。

（2）EViews 估计命令是 **Log(Y) C log(X) AR(1) AR(2)**

（3）利用组合模型预测时，EViews 有两种预测方法，一种是结构预测，即忽略 \hat{u}_{t-1} 和 \hat{u}_{t-2} 的预测，另一种是非结构预测，即完全按组合估计式预测。

二、时间序列数据的平稳性

时间序列分析中首先遇到的问题是关于时间序列数据的平稳性问题。

假定某个时间序列是由某一随机过程（**stochastic process**）生成的，即假定时间序列 $\{X_t\}$ （ $t=1, 2, \dots$ ）的每一个数值都是从一个概率分布中随机得到，如果满足下列条件：

- 1) 均值 $E(X_t)=\mu$ 是与时间 t 无关的常数；
- 2) 方差 $\text{Var}(X_t)=\sigma^2$ 是与时间 t 无关的常数；
- 3) 协方差 $\text{Cov}(X_t, X_{t+k})=\gamma_k$ 是只与时期间隔 k 有关，与时间 t 无关的常数；

则称该随机时间序列是平稳的（**stationary**），而该随机过程是一平稳随机过程（**stationary stochastic process**）。

例9.1.1. 一个最简单的随机时间序列是一具有零均值同方差的独立分布序列：

$$X_t = \mu_t, \quad \mu_t \sim N(0, \sigma^2)$$

该序列常被称为是一个**白噪声**（**white noise**）。

由于 X_t 具有相同的均值与方差，且协方差为零，由定义，**一个白噪声序列是平稳的**。

例9.1.2. 另一个简单的随机时间列序被称为**随机游走**（**random walk**），该序列由如下随机过程生成：

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

这里， μ_t 是一个白噪声。

容易知道该序列有相同的均值： $E(X_t) = E(X_{t-1})$

为了检验该序列是否具有相同的方差，可假设 X_t 的初值为 X_0 ，则易知

$$X_1 = X_0 + \mu_1$$

$$X_2 = X_1 + \mu_2 = X_0 + \mu_1 + \mu_2$$

... ..

$$X_t = X_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_t$$

由于 X_0 为常数， μ_t 是一个白噪声，因此 $\text{Var}(X_t) = t\sigma^2$

即 X_t 的方差与时间 t 有关而非常数，它是一非平稳序列。

- 然而，对X取一阶差分（**first difference**）：

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t$$

由于 μ_t 是一个白噪声，则序列 $\{X_t\}$ 是平稳的。

后面将会看到：如果一个时间序列是非平稳的，它常常可通过取差分的方法而形成平稳序列。

- 事实上，随机游走过程是我们称之为1阶自回归AR(1)过程的特例

$$X_t = \phi X_{t-1} + \mu_t$$

不难验证：1) $|\phi| > 1$ 时，该随机过程生成的时间序列是发散的，表现为持续上升($\phi > 1$)或持续下降($\phi < -1$)，因此是非平稳的；

2) $\phi=1$ 时，是一个随机游走过程，也是非平稳的。

第二节中将证明:只有当 $-1<\phi<1$ 时，该随机过程才是平稳的。

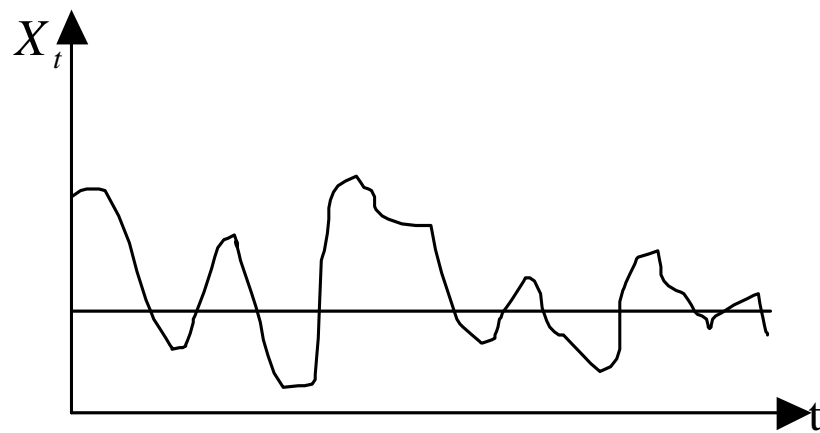
• 1阶自回归过程AR(1)又是如下k阶自回归AR(K)过程的特例：

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} \dots + \phi_k X_{t-k}$$

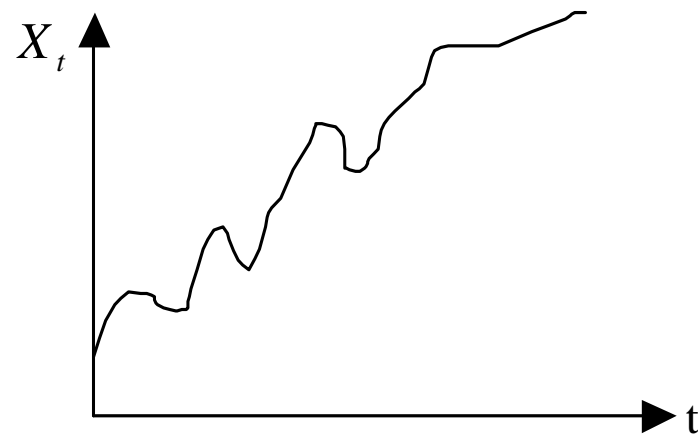
该随机过程平稳性条件将在第二节中介绍。

三、平稳性检验的图示判断

- 给出一个随机时间序列，首先可通过该序列的**时间路径图**来粗略地判断它是否是平稳的。
- 一个**平稳的时间序列**在图形上往往表现出一种围绕其均值不断波动的过程；
- 而**非平稳序列**则往往表现出在不同的时间段具有不同的均值（如持续上升或持续下降）。



(a)



(b)

图 9.1 平稳时间序列与非平稳时间序列图

- 进一步的判断:

检验样本自相关函数及其图形

定义随机时间序列的**自相关函数**（**autocorrelation function, ACF**）如下：

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$$

自相关函数是关于滞后期k的递减函数(Why?)。

实际上, 对一个随机过程只有一个实现（样本），因此，只能计算**样本自相关函数**（Sample autocorrelation function）。

一个时间序列的样本自相关函数定义为：

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

易知，随着k的增加，样本自相关函数下降且趋于零。但从下降速度来看，平稳序列要比非平稳序列快得多。

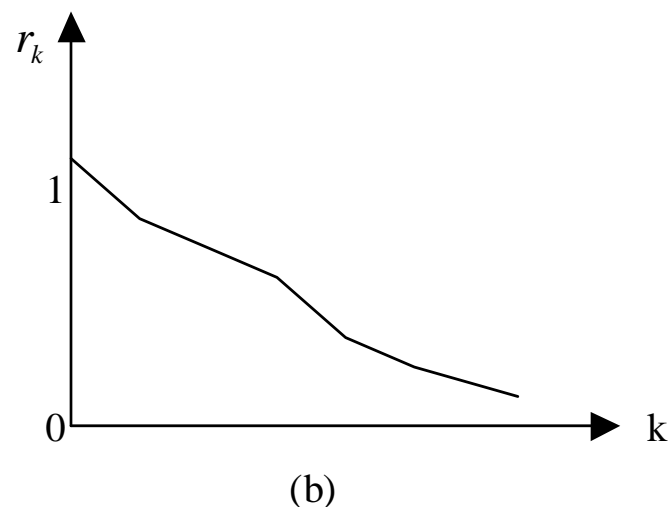
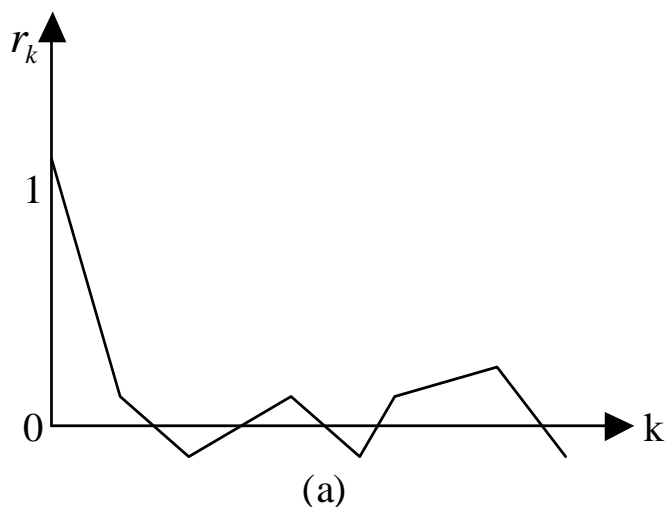


图 9.1.2 平稳时间序列与非平稳时间序列样本相关图

- 注意:

确定样本自相关函数 r_k 某一数值是否足够接近于0是非常有用的，因为它可检验对应的自相关函数 ρ_k 的真值是否为0的假设。

Bartlett 曾证明:如果时间序列由白噪声过程生成，则对所有的 $k>0$ ，样本自相关系数近似地服从以0为均值， $1/n$ 为方差的正态分布，其中 n 为样本数。

也可检验对所有 $k>0$ ，自相关系数都为0的联合假设，这可通过如下 Q_{LB} 统计量进行：

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{k=1}^m \left(\frac{r_k^2}{n-k} \right)$$

该统计量近似地服从自由度为m的 χ^2 分布（m为滞后长度）。

因此：如果计算的Q值大于显著性水平为 α 的临界值，则有 $1-\alpha$ 的把握拒绝所有 ρ_k ($k>0$) 同时为0的假设。

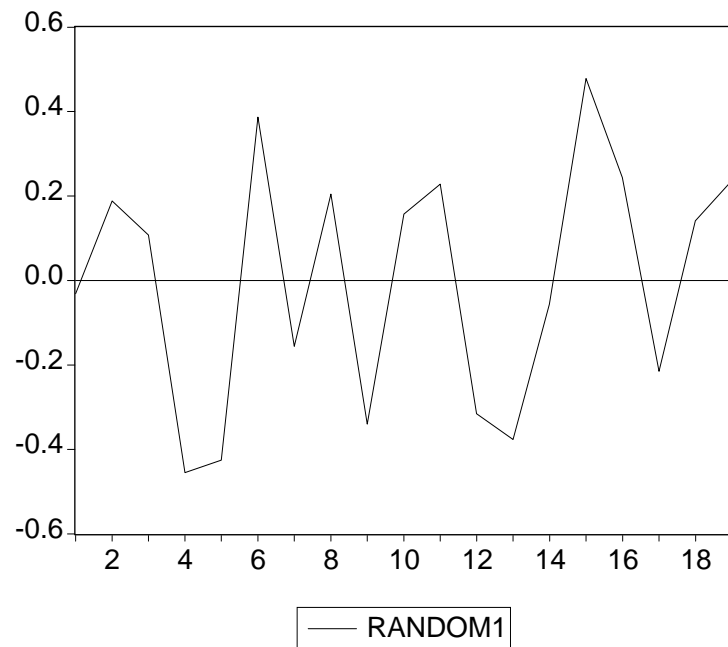
例9.1.3：表9.1.1序列Random1是通过一随机过程（随机函数）生成的有19个样本的随机时间序列。

表 9.1.1 一个纯随机序列与随机游走序列的检验

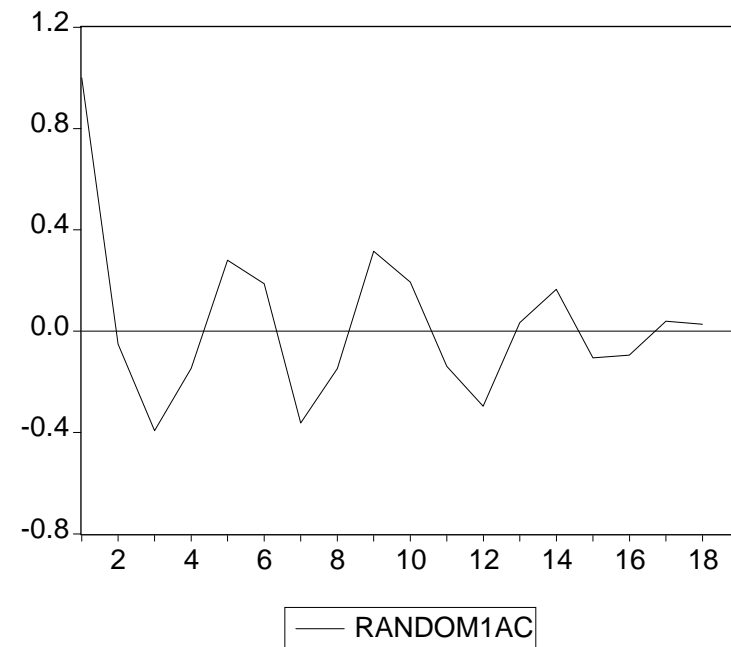
序号	Random1	自相关系数 r_k (k=0, 1, ...17)	Q_{LB}	Random2	自相关系数 r_k (k=0, 1, ...17)	Q_{LB}
1	-0.031	K=0, 1.000		-0.031	1.000	
2	0.188	K=1, -0.051	0.059	0.157	0.480	5.116
3	0.108	K=2, -0.393	3.679	0.264	0.018	5.123
4	-0.455	K=3, -0.147	4.216	-0.191	-0.069	5.241
5	-0.426	K=4, 0.280	6.300	-0.616	0.028	5.261
6	0.387	K=5, 0.187	7.297	-0.229	-0.016	5.269
7	-0.156	K=6, -0.363	11.332	-0.385	-0.219	6.745
8	0.204	K=7, -0.148	12.058	-0.181	-0.063	6.876
9	-0.340	K=8, 0.315	15.646	-0.521	0.126	7.454
10	0.157	K=9, 0.194	17.153	-0.364	0.024	7.477
11	0.228	K=10, -0.139	18.010	-0.136	-0.249	10.229
12	-0.315	K=11, -0.297	22.414	-0.451	-0.404	18.389
13	-0.377	K=12, 0.034	22.481	-0.828	-0.284	22.994
14	-0.056	K=13, 0.165	24.288	-0.884	-0.088	23.514
15	0.478	K=14, -0.105	25.162	-0.406	-0.066	23.866
16	0.244	K=15, -0.094	26.036	-0.162	0.037	24.004
17	-0.215	K=16, 0.039	26.240	-0.377	0.105	25.483
18	0.141	K=17, 0.027	26.381	-0.236	0.093	27.198
19	0.236			0.000		

- 容易验证：该样本序列的均值为0，方差为0.0789。

从图形看：它在其样本均值0附近上下波动，且样本自相关系数迅速下降到0，随后在0附近波动且逐渐收敛于0。



(a)



(b)

由于该序列由一随机过程生成，可以认为不存在序列相关性，因此该序列为一白噪声。

- 根据Bartlett的理论： $\rho_k \sim N(0, 1/19)$

因此任一 r_k ($k > 0$) 的95%的置信区间都将是

$$[-Z_{0.025} \cdot \sigma, Z_{0.025} \cdot \sigma] = [-1.96 \times \sqrt{1/19}, 1.96 \times \sqrt{1/19}] = [-0.4497, 0.4497]$$

可以看出： $k > 0$ 时， r_k 的值确实落在了该区间内，因此可以接受 ρ_k ($k > 0$) 为0的假设。

同样地，从 Q_{LB} 统计量的计算值看，滞后17期的计算值为26.38，未超过5%显著性水平的临界值27.58，因此，可以接受所有的自相关系数 ρ_k ($k > 0$) 都为0的假设。

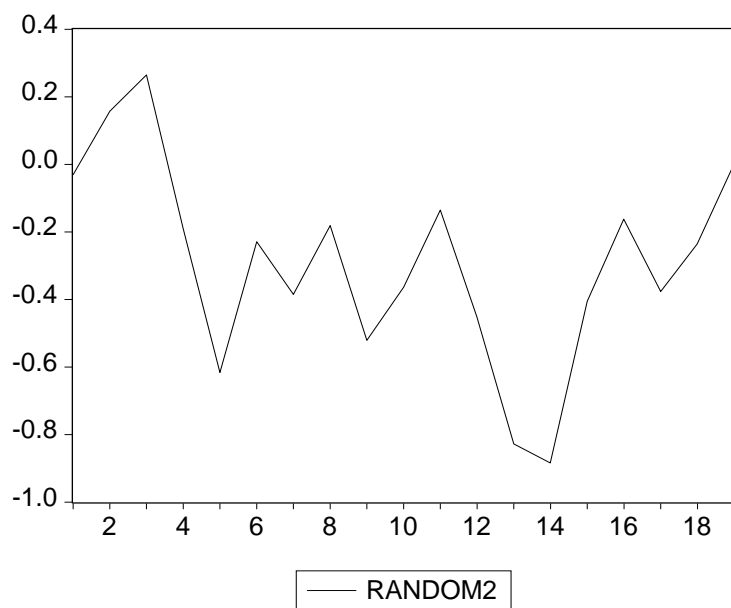
因此，该随机过程是一个平稳过程。

- 序列Random2是由一随机游走过程

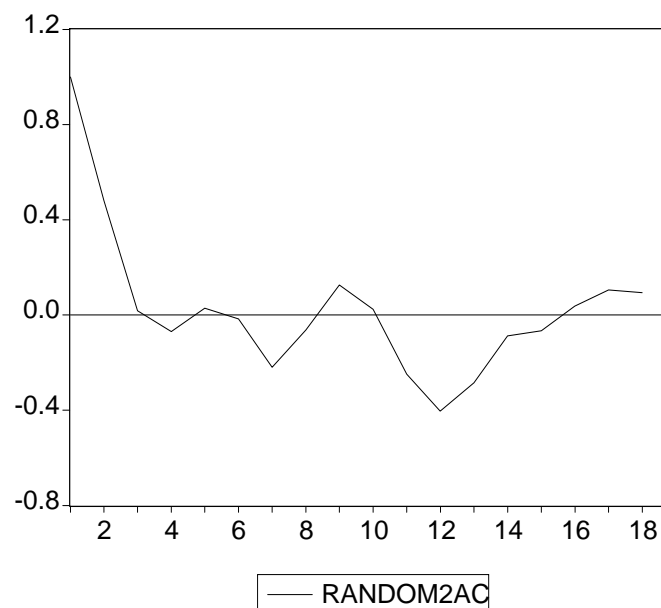
$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

生成的一随机游走时间序列样本。

其中，第0项取值为0， μ_t 是由Random1表示的白噪声。



(a)



(b)

图形表示出：该序列具有相同的均值，但从样本自相关图看，虽然自相关系数迅速下降到0，但随着时间的推移，则在0附近波动且呈发散趋势。

样本自相关系数显示： $r_1=0.48$ ，落在了区间 $[-0.4497, 0.4497]$ 之外，因此在5%的显著性水平上拒绝 ρ_1 的真值为0的假设。

该随机游走序列是非平稳的。

例 9.1.4 检验中国支出法 GDP 时间序列的平稳性。

表 9.1.2 1978~2000 年中国支出法 GDP (单位: 亿元)

年份	GDP	年份	GDP	年份	GDP
1978	3605.6	1986	10132.8	1994	46690.7
1979	4073.9	1987	11784	1995	58510.5
1980	4551.3	1988	14704	1996	68330.4
1981	4901.4	1989	16466	1997	74894.2
1982	5489.2	1990	18319.5	1998	79003.3
1983	6076.3	1991	21280.4	1999	82673.1
1984	7164.4	1992	25863.6	2000	89112.5
1985	8792.1	1993	34500.6		

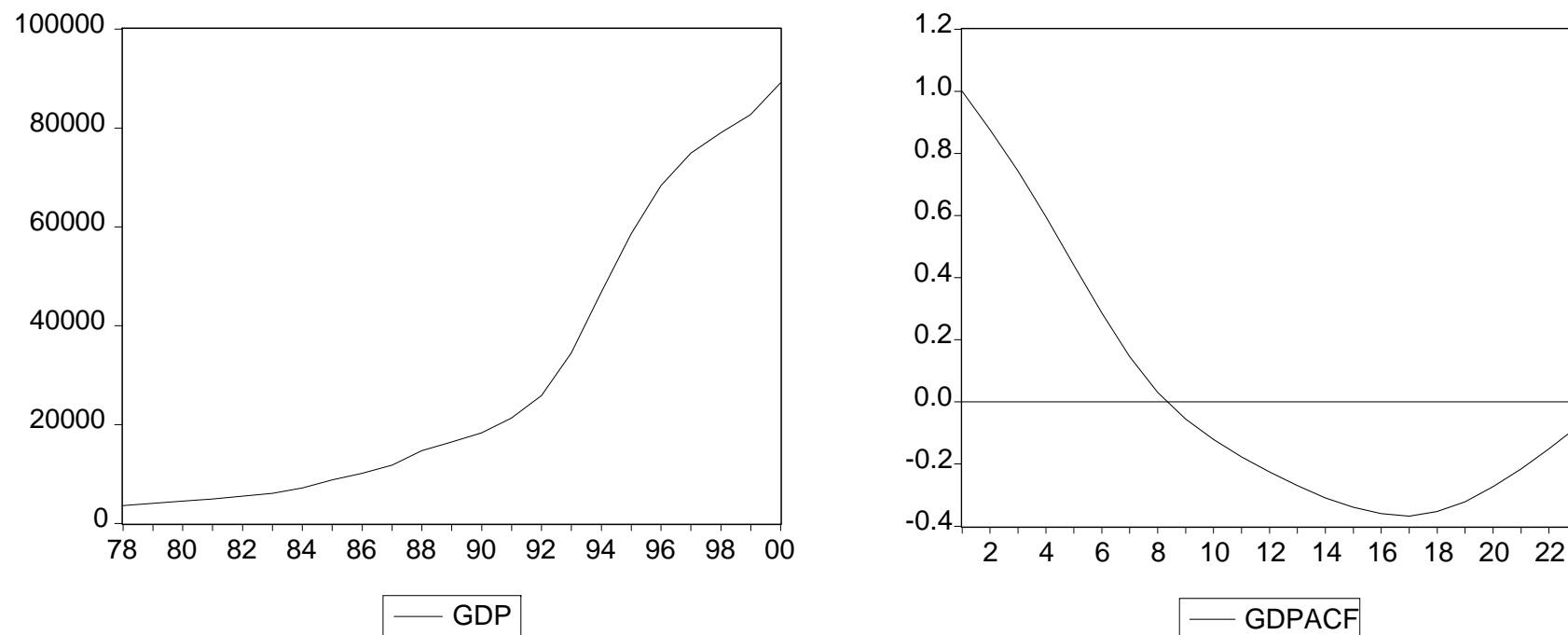


图 9.1.5 1978~2000 年中国 GDP 时间序列及其样本自相关图

- 图形：表现出了一个持续上升的过程，可初步判断是非平稳的。
- 样本自相关系数：缓慢下降，再次表明它的非平稳性。

•从滞后18期的 Q_{LB} 统计量看:

$$Q_{LB}(18)=57.18>28.86=\chi^2_{0.05}$$

拒绝: 该时间序列的自相关系数在滞后1期之后的值全部为0的假设。

结论:

1978~2000年间中国GDP时间序列是非平稳序列。

- 例9.1.5 检验 § 2.10 中关于人均居民消费与人均国内生产总值这两时间序列的平稳性。

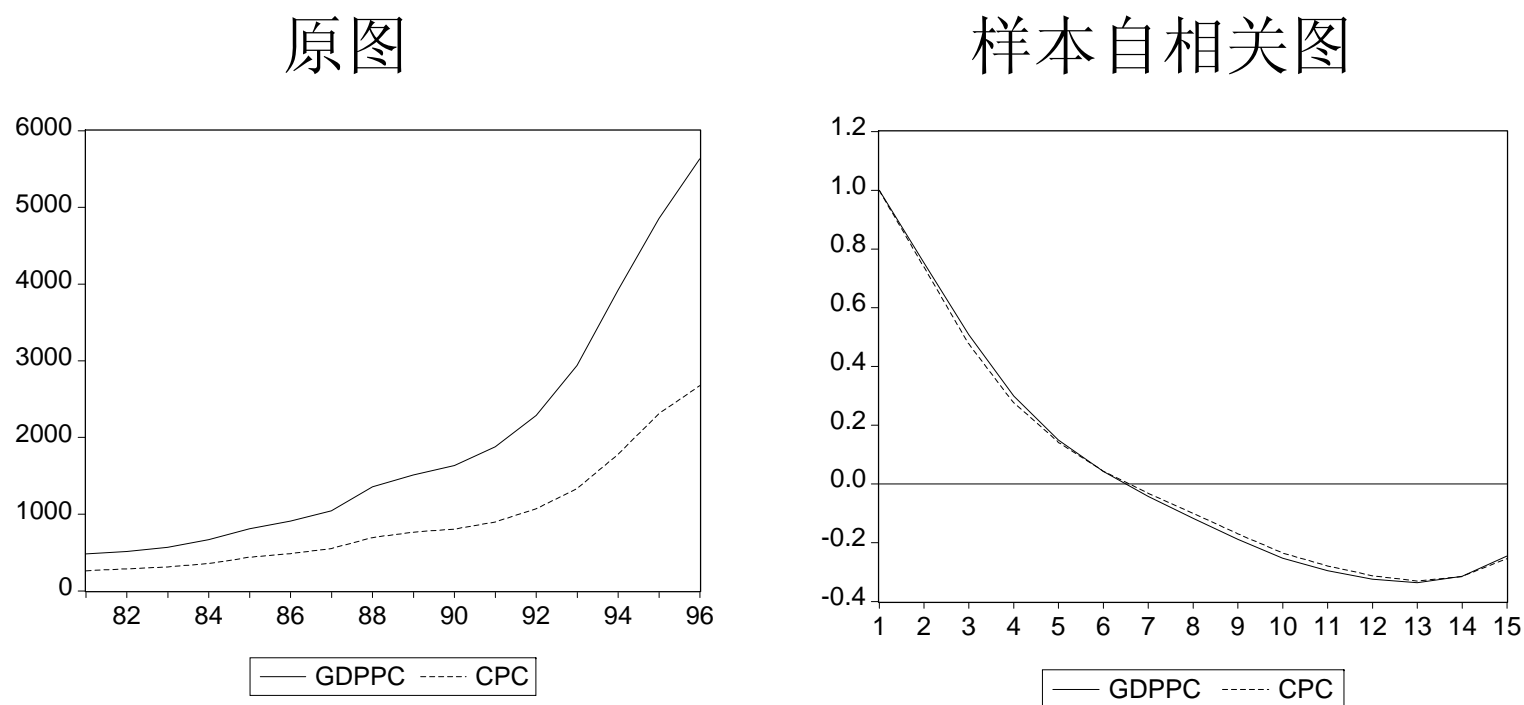


图 9.1.6 1981~1996 中国居民人均消费与人均 GDP 时间序列及其样本自相关图

- 从图形上看：人均居民消费（CPC）与人均国内生产总值（GDPPC）是非平稳的。
- 从滞后14期的 Q_{LB} 统计量看：
CPC与GDPPC序列的统计量计算值均为57.18，超过了显著性水平为5%时的临界值23.68。再次表明它们的非平稳性。
就此来说，运用传统的回归方法建立它们的回归方程是无实际意义的。
不过，第三节中将看到，如果两个非平稳时间序列是协整的，则传统的回归结果却是有意义的，而这两时间序列恰是协整的。

四、平稳性的单位根检验

对时间序列的平稳性除了通过图形直观判断外，运用统计量进行统计检验则是更为准确与重要的。

单位根检验（unit root test）是统计检验中普遍应用的一种检验方法。

1、DF检验

我们已知道，随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

是非平稳的，其中 μ_t 是白噪声。

而该序列可看成是随机模型

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t$$

中参数 $\rho=1$ 时的情形。

也就是说，我们对式

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

做回归，如果确实发现 $\rho=1$ ，就说随机变量 X_t 有一个单位根。

- $(*)$ 式可变形形式成差分形式：

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= (1-\rho)X_{t-1} + \mu_t \\ &= \delta X_{t-1} + \mu_t \end{aligned} \quad (**)$$

检验 $(*)$ 式是否存在单位根 $\rho=1$ ，也可通过 $(**)$ 式判断是否有 $\delta=0$ 。

一般地：

- 检验一个时间序列 X_t 的平稳性，可通过检验带有截距项的一阶自回归模型

$$X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

中的参数 ρ 是否小于1。

或者：检验其等价变形式

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t \quad (**)$$

中的参数 δ 是否小于0。

在第二节中将证明，(*)式中的参数 $\rho > 1$ 或 $\rho = 1$ 时，时间序列是非平稳的；

对应于(**)式，则是 $\delta > 0$ 或 $\delta = 0$ 。

- 因此，针对式 $\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$
我们关心的检验为：**零假设 $H_0: \delta=0$** 。
备择假设 $H_1: \delta<0$

上述检验可通过**OLS**法下的**t**检验完成。

然而，在零假设（序列非平稳）下，即使在大样本下**t**统计量也是有偏误的（向下偏倚），通常的**t**检验无法使用。

Dicky和Fuller于1976年提出了这一情形下**t**统计量服从的分布（这时的**t**统计量称为 **τ 统计量**），即**DF分布**（见表9.1.3）。

由于**t**统计量的向下偏倚性，它呈现围绕小于零值的偏态分布。

表 9.1.3 DF 分布临界值表

显著性水平	样 本 容 量					t分布临界值 (n=∞)
	25	50	100	500	∞	
0.01	-3.75	-3.58	-3.51	-3.44	-3.43	-2.33
0.05	-3.00	-2.93	-2.89	-2.87	-2.86	-1.65
0.10	-2.63	-2.60	-2.58	-2.57	-2.57	-1.28

- 因此，可通过OLS法估计

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$$

并计算t统计量的值，与DF分布表中给定显著性水平下的临界值比较：

如果：t < 临界值，则拒绝零假设 $H_0: \delta = 0$ ，
认为时间序列不存在单位根，是平稳的。

- 注意：在不同的教科书上有不同的描述，但是结果是相同的。

例如：“如果计算得到的t统计量的绝对值大于临界值的绝对值，则拒绝 $\rho = 0$ ”的假设，原序列不存在单位根，为平稳序列。

2、ADF检验

进一步的问题：在上述使用

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \mu_t$$

对时间序列进行平稳性检验中，实际上假定了时间序列是由具有白噪声随机误差项的一阶自回归过程**AR(1)**生成的。

但在实际检验中，时间序列可能由更高阶的自回归过程生成的，或者随机误差项并非白噪声，这样用**OLS法**进行估计均会表现出随机误差项出现自相关（autocorrelation），导致DF检验无效。

另外，如果时间序列包含有明显的随时间变化的某种趋势（如上升或下降），则也容易导致上述检验中的自相关随机误差项问题。

为了保证DF检验中随机误差项的白噪声特性，Dicky和Fuller对DF检验进行了扩充，形成了**ADF（Augment Dickey-Fuller）检验**。

ADF检验是通过下面三个模型完成的：

模型 1:
$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (*)$$

模型 2:
$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (**)$$

模型 3:
$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \beta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (***)$$

- **模型3** 中的**t**是**时间变量**，代表了时间序列随时间变化的某种趋势（如果有的话）。
- 检验的假设都是：针对**H1: $\delta < 0$** , 检验 **H0: $\delta = 0$** ，即存在一单位根。模型1与另两模型的差别在于是否包含有常数项和趋势项。

- 实际检验时从模型3开始，然后模型2、模型1。

何时检验拒绝零假设，即原序列不存在单位根，为平稳序列，何时检验停止。否则，就要继续检验，直到检验完模型1为止。

检验原理与DF检验相同，只是对模型1、2、3进行检验时，有各自相应的临界值。

表9.1.4给出了三个模型所使用的ADF分布临界值表。

表 9.1.4 不同模型使用的 ADF 分布临界值表

模型	统计量	样本容量	0.01	0.025	0.05	0.10
1	τ_{δ}	25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60
		50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61
		100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61
		250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
		500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
		>500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.61
2	τ_{δ}	25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.62
		50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60
		100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58
		250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57
		500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57
		>500	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57
	τ_{α}	25	3.41	2.97	2.61	2.20
		50	3.28	2.89	2.56	2.18
		100	3.22	2.86	2.54	2.17
		250	3.19	2.84	2.53	2.16
		500	3.18	2.83	2.52	2.16
		>500	3.18	2.83	2.52	2.16
3	τ_{δ}	25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24
		50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18
		100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15
		250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13
		500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13
		>500	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12
	τ_{α}	25	4.05	3.59	3.20	2.77
		50	3.87	3.47	3.14	2.75
		100	3.78	3.42	3.11	2.73
		250	3.74	3.39	3.09	2.73
		500	3.72	3.38	3.08	2.72
		>500	3.71	3.38	3.08	2.72
	τ_{β}	25	3.74	3.25	2.85	2.39
		50	3.60	3.18	2.81	2.38
		100	3.53	3.14	2.79	2.38
		250	3.49	3.12	2.79	2.38
		500	3.48	3.11	2.78	2.38
		>500	3.46	3.11	2.78	2.38

一个简单的检验过程：

同时估计出上述三个模型的适当形式，然后通过ADF临界值表检验零假设 $H_0: \delta=0$ 。

1) 只要其中有一个模型的检验结果拒绝了零假设，就可以认为时间序列是平稳的；

2) 当三个模型的检验结果都不能拒绝零假设时，则认为时间序列是非平稳的。

这里所谓模型适当的形式就是在每个模型中选取适当的滞后差分项，以使模型的残差项是一个白噪声（主要保证不存在自相关）。

例9.1.6 检验1978~2000年间中国支出法GDP时间序列的平稳性。

1) 经过尝试, 模型3取了2阶滞后:

$$\Delta GDP_t = -1011.33 + 229.27T + 0.0093GDP_{t-1} + 1.50\Delta GDP_{t-1} - 1.01\Delta GDP_{t-2}$$

(-1.26) (1.91) (0.31) (8.94) (-4.95)

通过拉格朗日乘数检验 (Lagrange multiplier test) 对随机误差项的自相关性进行检验:

$$LM(1) = 0.92, \quad LM(2) = 4.16,$$

小于5%显著性水平下自由度分别为1与2的 χ^2 分布的临界值, 可见不存在自相关性, 因此该模型的设定是正确的。

从 δ 的系数看, $t >$ 临界值, 不能拒绝存在单位根的原假设。

时间T的t统计量小于ADF分布表中的临界值, 因此不能拒绝不存在趋势项的原假设。需进一步检验模型2。

2) 经试验, 模型2中滞后项取2阶:

$$\Delta GDP_t = 357.45 + 0.057GDP_{t-1} + 1.65\Delta GDP_{t-1} - 1.15\Delta GDP_{t-2}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.90) & (3.38) & (10.40) & (-5.63) \end{array}$$

$$\text{LM (1)} = 0.57 \quad \text{LM (2)} = 2.85$$

LM检验表明模型残差不存在自相关性, 因此该模型的设定是正确的。

从 GDP_{t-1} 的参数值看, 其t统计量为正值, 大于临界值, 不能拒绝存在单位根为零假设。

常数项的t统计量小于AFD分布表中的临界值, 不能拒绝不存常数项的零假设。需进一步检验模型1。

3) 经试验，模型1中滞后项取2阶：

$$\Delta GDP_t = 0.063GDP_{t-1} + 1.701\Delta GDP_{t-1} - 1.194\Delta GDP_{t-2}$$

$$(4.15) \qquad (11.46) \qquad (-6.05)$$

$$LM(1) = 0.17 \qquad LM(2) = 2.67$$

LM检验表明模型残差项不存在自相关性，因此模型的设定是正确的。

从 GDP_{t-1} 的参数值看，其t统计量为正值，大于临界值，不能拒绝存在单位根为零假设。

- 可断定中国支出法GDP时间序列是非平稳的。

- 例9.1.7 检验 § 2. 10中关于人均居民消费与人均国内生产总值这两时间序列的平稳性。

1)对中国人均国内生产总值GDPPC来说，经过尝试，三个模型的适当形式分别为

模型 3:

$$\Delta GDPPC_t = -75.08 + 45.36t - 0.15GDPPC_{t-1} + 1.03\Delta GDPPC_{t-1}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.75) & (1.93) & (-1.04) & (2.31) \\ LM(1) = 2.88 & & LM(2) = 1.86 & \end{array}$$

模型 2:

$$\Delta GDPPC_t = -192.02 + 0.652GDPPC_{t-1} + 0.040\Delta GDPPC_{t-1} - 1.425\Delta GDPPC_{t-2}$$

$$\begin{array}{cccc} (-1.78) & (3.26) & (0.08) & (-2.96) \end{array}$$

$$-0.412\Delta GDPPC_{t-3} - 1.403\Delta GDPPC_{t-4}$$

$$\begin{array}{cccc} (-0.67) & & (-2.20) & \\ LM(1) = 1.67 & LM(2) = 1.71 & LM(3) = 6.28 & LM(4) = 10.92 \end{array}$$

模型 1:

$$\Delta GDP_{PC_t} = 0.196 GDP_{PC_{t-1}} + 0.875 \Delta GDP_{PC_{t-1}} - 0.975 \Delta GDP_{PC_{t-2}}$$

(2.63)

(2.61)

(-2.72)

LM (1) = 0.20

LM (2) = 3.53

- 三个模型中参数的估计值的t统计量均大于各自的临界值，因此不能拒绝存在单位根为零假设。
- 结论：人均国内生产总值（GDP_{PC}）是非平稳的。

2) 对于人均居民消费CPC时间序列来说，三个模型的适当形式为

模型 3:

$$\Delta CPC_t = -26.23 + 34.98t - 0.3646CPC_{t-1} + 1.4627\Delta CPC_{t-1}$$

(-0.477) (2.175) (-1.478) (2.318)

LM(1)=1.577 LM(2)=1.834

模型 2:

$$\Delta CPC_t = -79.88 + 0.545CPC_{t-1} + 0.508\Delta CPC_{t-1} - 1.655\Delta CPC_{t-2} - 0.027\Delta CPC_{t-3}$$

(-1.37) (3.37) (1.16) (-3.44) (-0.05)

$$-1.824\Delta CPC_{t-4}$$

(-3.03)

LM(1)=3.57 LM(2)= 4.10 LM(3)=4.89 LM(4)=10.99

模型 1:

$$\Delta CPC_t = 0.37CPC_{t-1} + 0.88\Delta CPC_{t-1} - 1.48\Delta CPC_{t-2} + 0.08\Delta CPC_{t-3} - 1.71\Delta CPC_{t-4}$$

(3.60)	(2.37)	(-2.97)	(0.12)	(-2.68)
LM(1)=1.83	LM(2)= 1.84	LM(3)=2.00	LM(4)=2.33	

- 三个模型中参数 CPC_{t-1} 的t统计量的值均比ADF临界值表中各自的临界值大，不能拒绝该时间序列存在单位根的假设，
- 因此,可判断人均居民消费序列CPC是非平稳的。

五、单整、趋势平稳与差分平稳随机过程

1. 单整

随机游走序列

$$X_t = X_{t-1} + \mu_t$$

经差分后等价地变形为

$$\Delta X_t = \mu_t$$

由于 μ_t 是一个白噪声，因此差分后的序列 $\{\Delta X_t\}$ 是平稳的。

如果一个时间序列经过一次差分变成平稳的，就称原序列是一阶单整（**integrated of 1**）序列，记为**I(1)**。

一般地，如果一个时间序列经过**d**次差分后变成平稳序列，则称原序列是**d 阶单整**（**integrated of d**）**序列**，记为**I(d)**。

显然，**I(0)**代表一平稳时间序列。

现实经济生活中：

- 1)只有少数经济指标的时间序列表现为平稳的，如利率等；
- 2)大多数指标的时间序列是非平稳的，如一些价格指数常常是2阶单整的，以不变价格表示的消费额、收入等常表现为1阶单整。

大多数非平稳的时间序列一般可通过一次或多次差分的形式变为平稳的。

但也有一些时间序列，无论经过多少次差分，都不能变为平稳的。这种序列被称为**非单整的**（**non-integrated**）。

例9.1.8 中国支出法GDP的单整性。

经过试算，发现中国支出法GDP是1阶单整的，适当的检验模型为

$$\Delta^2 GDP_t = 1174.08 + 261.25t - 0.495\Delta GDP_{t-1} + 0.966\Delta^2 GDP_{t-1}$$

$$\begin{array}{cccc} (-1.99) & (4.23) & (-5.18) & (6.42) \end{array}$$

$$R^2=0.7501 \quad LM(1)=0.40 \quad LM(2)=1.29$$

例9.1.9 中国人均居民消费与人均国内生产总值的单整性。

经过试算，发现**中国人均国内生产总值GDPPC是2阶单整的**，适当的检验模型为

$$\Delta^3 GDPPC_t = -0.60 \Delta^2 GDPPC_{t-1}$$

(-2.17)

$$R^2=0.2778, \quad LM(1)=0.31 \quad LM(2)=0.54$$

同样地，**CPC也是2阶单整的**，适当的检验模型为

$$\Delta^3 CPC_t = -0.67 \Delta^2 CPC_{t-1}$$

(-2.08)

$$R^2=0.2515 \quad LM(1)=1.99 \quad LM(2)=2.36$$

2. 趋势平稳与差分平稳随机过程

前文已指出，一些非平稳的经济时间序列往往表现出共同的变化趋势，而这些序列间本身不一定有直接的关联关系，这时对这些数据进行回归，尽管有较高的 R^2 ，但其结果是没有任何实际意义的。这种现象我们称之为**虚假回归或伪回归**（**spurious regression**）。

如：用中国的劳动力时间序列数据与美国GDP时间序列作回归，会得到较高的 R^2 ，但不能认为两者有直接的关联关系，而只不过它们有共同的趋势罢了，这种回归结果我们认为是虚假的。

为了避免这种虚假回归的产生，通常的做法是引入作为趋势变量的时间，这样包含有时间趋势变量的回归，可以消除这种趋势性的影响。

然而这种做法，只有当趋势性变量是**确定性的（deterministic）**而非**随机性的（stochastic）**，才会是有效的。

换言之，**如果一个包含有某种确定性趋势的非平稳时间序列，可以通过引入表示这一确定性趋势的趋势变量，而将确定性趋势分离出来。**

考虑如下的含有一阶自回归的随机过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \rho X_{t-1} + \mu_t \quad (*)$$

其中： μ_t 是一白噪声， t 为一时间趋势。

1)如果 $\rho=1$ ， $\beta=0$ ，则 $(*)$ 式成为一带位移的随机游走过程：

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \mu_t \quad (**)$$

根据 α 的正负， X_t 表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为随机性趋势（stochastic trend）。

2)如果 $\rho=0$ ， $\beta \neq 0$ ，则 $(*)$ 式成为一带时间趋势的随机变化过程：

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_t \quad (***)$$

根据 β 的正负， X_t 表现出明显的上升或下降趋势。这种趋势称为确定性趋势（deterministic trend）。

3) 如果 $\rho=1$, $\beta \neq 0$, 则 X_t 包含有**确定性与随机性两种趋势**。

判断一个非平稳的时间序列, 它的趋势是随机性的还是确定性的, 可通过ADF检验中所用的第3个模型进行。

该模型中已引入了表示确定性趋势的时间变量 t , 即分离出了确定性趋势的影响。

因此, **(1)如果检验结果表明所给时间序列有单位根, 且时间变量前的参数显著为零, 则该序列显示出随机性趋势;**

(2)如果没有单位根, 且时间变量前的参数显著地异于零, 则该序列显示出确定性趋势。

随机性趋势可通过差分的方法消除

如：对式

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \mu_t$$

可通过差分变换为

$$\Delta X_t = \alpha + \mu_t$$

该时间序列称为**差分平稳过程（difference stationary process）**；

确定性趋势无法通过差分的方法消除，而只能通过除去趋势项消除，

如：对式

$$X_t = \alpha + \beta t + \mu_t$$

可通过除去 βt 变换为

$$X_t - \beta t = \alpha + \mu_t$$

该时间序列是平稳的，因此称为**趋势平稳过程**（**trend stationary process**）。

最后需要说明的是，趋势平稳过程代表了一个时间序列长期稳定的变化过程，因而用于进行长期预测则是更为可靠的。