第四章 多期均衡资产定价理论[1]

§4.1 或有权益市场和配置效率

4.1.1 配置效率与或有权益的引入（一个例子）

例 **4.1.1**：考虑一个三期经济，假定经济中生活着数目相等的两类个体，分别居住在两个不同的区域，以 $i=1,2$ 来标识。假定所有个体都拥有相同面积的一片果园，这些果园的收入受到雨水、光照、气候等因素的影响，我们用自然状态来刻画这些影响果园收入的因素。假定经济中总共有四个自然状态，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$。假定 t=0 时个体仅知道 Ω 中某个自然状态在 t=2 时一定会出现，且各自然状态出现的概率相等，都是 1/4；t=1 时知道自然状态或者在 ω_1 和 ω_2 中，或者在 ω_3 和 ω_4 中；t=2 时真实状态完全展示出来。假定个体收入服从：

t=0：$y_0^1=1/2$ ，$y_0^2=1/2$；

t=1：$y_1^1=\begin{cases}1 & \{\omega_1,\omega_2\}\\ 0 & \{\omega_3,\omega_4\}\end{cases}$ ，$y_1^2=\begin{cases}1 & \{\omega_1,\omega_2\}\\ 0 & \{\omega_3,\omega_4\}\end{cases}$；

t=2：$y_2^1=\begin{cases}1 & \omega_1\\ 2/3 & \omega_2\\ 0 & \omega_3\\ 1/3 & \omega_4\end{cases}$ ，$y_2^2=\begin{cases}0 & \omega_1\\ 1/3 & \omega_2\\ 1 & \omega_3\\ 2/3 & \omega_4\end{cases}$。

假定这些水果是不可以储存的易腐烂消费品，只能用于一期消费。假定两类个体都依靠消费果园中所生产的水果为生，他们的偏好相同，效用函数单调增、严格凹，取为 $E\sum_{t=0}^{2}\ln c_t$ 。

在上述禀赋经济中，存在一个自给自足的均衡配置，每位个体仅消费自己所生产的水果，该配置显然不是 pareto 最优的。

一个 Pareto 最优配置可以刻画为：

$$c_t^1=c_t^2=\frac{1}{2}(y_t^1+y_t^2)=1/2。$$

该配置不仅是 Pareto 有效的，还是相对公平的。

该配置的获得可以通过引入政府行为来达到，例如政府对高收入者征

[1]主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002).、杨云红（2000）、王江（2006）等教材及相关论文

收收入税 $\tau_t = y_t^h - 1/2$ ，同时对低收入者进行转移支付 $y_t^h - 1/2$ ，其中 y_t^h 是高收入者的收入，则两类个体的税后收入都是 1/2，从而达到 Pareto 最优配置。

该配置也可以通过引入一些或有权益的买卖，通过市场这双看不见的手来达到。

定义：或有权益又称为 **Arrow** 证券，是一种最简单的证券，当未来某个特定事件在特定的时间发生时可以获得一单位消费品的收益，其它情形则没有任何收益。

我们可以在 t=0 时引入六个时间-事件或有权益：两个时间 1、关于事件 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 和 $\{\omega_3, \omega_4\}$ 的或有消费权益

$$\varepsilon_1(\{\omega_1, \omega_2\}) = \begin{cases} 1 & \{\omega_1, \omega_2\} \\ 0 & \{\omega_3, \omega_4\} \end{cases},$$

$$\varepsilon_1(\{\omega_3, \omega_4\}) = \begin{cases} 0 & \{\omega_1, \omega_2\} \\ 1 & \{\omega_3, \omega_4\} \end{cases},$$

和四个时间 2、事件

$$\varepsilon_2(\omega_1) = \begin{cases} 1 & \omega_1 \\ 0 & \omega \neq \omega_1 \end{cases}, \quad \varepsilon_2(\omega_2) = \begin{cases} 1 & \omega_2 \\ 0 & \omega \neq \omega_2 \end{cases},$$

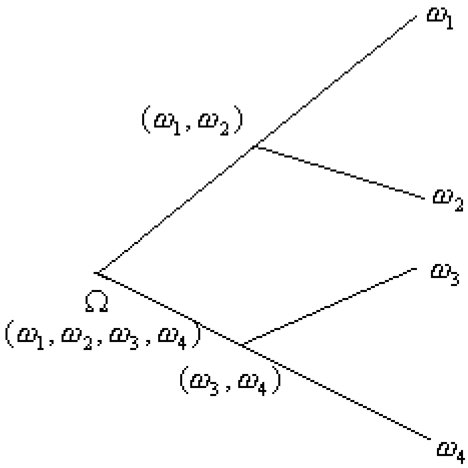
$$\varepsilon_2(\omega_3) = \begin{cases} 1 & \omega_3 \\ 0 & \omega \neq \omega_3 \end{cases}, \quad \varepsilon_2(\omega_4) = \begin{cases} 1 & \omega_4 \\ 0 & \omega \neq \omega_4 \end{cases}。$$

其中时间-事件或有权益 $\varepsilon_1(\{\omega_1, \omega_2\})$ 在 t=1、事件 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 发生时获得一单位消费品，其它情形一无所获；$\varepsilon_1(\{\omega_3, \omega_4\})$ 在 t=1、事件 $\{\omega_3, \omega_4\}$ 发生时获得一单位消费品，其它情形一无所获；$\varepsilon_2(\{\omega_i\})$ 在 t=2、事件 ω_i 发生时可以获得一单位消费品，其它情形一无所获。

在 t=0 时，在一个完全竞争的市场上，1 类个体可以出售 1/2 单位的 $\varepsilon_1(\{\omega_1, \omega_2\})$、1/2 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_1\})$ 和 1/6 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_2\})$ ，同时购入 1/2 单位的 $\varepsilon_1(\{\omega_3, \omega_4\})$、1/2 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_3\})$ 和 1/6 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_4\})$ ；2 类个体可以出售 1/2 单位的 $\varepsilon_1(\{\omega_3, \omega_4\})$、1/2 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_3\})$ 和 1/6 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_4\})$ ，同时购入 1/2 单位的 $\varepsilon_1(\{\omega_1, \omega_2\})$、1/2 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_1\})$ 和 1/6 单位的 $\varepsilon_2(\{\omega_2\})$ ，从而使配置达到 Pareto 最优。特别地，在 t=0 交易之后，没有重新开放市场的必要。

4.1.2 模型的建立

考虑一个 T+1 期的纯交换经济，t=0,1,2,…,T。为简化讨论，假定每一期经济中只有一种易腐烂的消费品。假定经济中存在不确定性，这些不确定性可以用自然状态 ω_i（$i \in \Gamma$）来刻画，记自然状态的全体为 $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \Gamma\}$。此处每个自然状态都刻画了外生不确定环境从第 0 期到第 T 期的一个可能演化过程，具体那个自然状态会发生开始时个体并不知道，信息是逐渐披露，直到 T 期完全展示出来，这种信息的披露过程或信息结构可以用事件树(event-tree)来刻画，事件树上的每一个节点都代表了一个事件，它们是 Ω 的子集，如图 4.1.1 刻画了例 4.1.1 中的信息结构。



（图 4.1.1）：例 4.1.1 中的信息结构

定义：称两个事件是不相交的，如果他们的交集等于空集，即一个真实状态如果在一个事件中，那么肯定不会在另一个事件中。

定义：如果一些互不相交的事件的并等于 Ω，则称这些事件的全体是 Ω 的一个分割(partition)。称一个给定分割是另一分割的加细(finer)，如果后一分割中的任一事件都是前一分割中事件的并。

我们可以用 $\mathbf{F} = \{F_t; t = 0,1,\ldots,T\}$ 来记个体被赋予的公共信息结构，其中每一个 $\boldsymbol{F}_t$ 都是 Ω 的一个分割，满足：如果 $t \geq s$，则 $\boldsymbol{F}_t$ 比 $\boldsymbol{F}_s$ 更精细；$F_0 = \{\Omega\}$，$F_T = \{\omega \mid \omega \in \Omega\}$。

定义：一个随机过程是一个由时间 t 标识的随机变量序列。

定义：称一个随机过程 $S=\{S(t)\mid t=0,1,\ldots\}$ 关于 $\mathbb{F}$ 适应(adapted to $\mathbb{F}$)，如果对于任意的 t，$S(t)$ 关于 F_t 可测。

定义：称一个随机过程 S 关于 $\mathbb{F}$ 可料的(predictable to $\mathbb{F}$)，如果对于任意的 t，$S(t)$ 关于 F_{t-1} 可测。

假定经济中存在 I 位个体，$i=1,2,\ldots,I$，为简化讨论，假定这些个体具有相同的概率估计和公共信息结构。记自然状态 ω 发生的概率估计为 π_ω，则事件 $a_t\in F_t$ 发生的概率为 $\pi_{a_t}=\sum_{\omega\in a_t}\pi_\omega$。假定个体偏好仅依赖于消费，可以用一个时间可加、状态独立、单调增、严格凹、可微的 von Neuman -Morgenstern 效用函数来刻画：

$$u_{i0}(c_0)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{a_t\in F_t}\pi_{a_t}u_{it}(c_{a_t})\text{。}\qquad(4.1.1)$$

其中 c_0、c_{a_t} 是个体第 0 期和第 t 期事件 a_t 发生时的消费量。假定每一个体都具有非负的禀赋，可以刻画为：

$$\{e_0^i,e_{a_t}^i\mid a_t\in F_t;t=1,2,\ldots,T\}\text{。}\qquad(4.1.2)$$

且至少存在某个时间-事件 a_t，个体在该时间-事件下具有正的禀赋 $e_{a_t}^i>0$。

4.1.3 Pareto 最优配置

考虑一个中央计划者的最优化问题：

$$\max_{\substack{z_0^i,z_{a_t}^i,a_t\in F_t\\ t=1,2,\ldots,T;i=1,2,\ldots,I}}\sum_{i=1}^{I}\lambda_i[u_{i0}(z_0^i)+\sum_{t=1}^{T}\sum_{a_t\in F_t}\pi_{a_t}u_{it}(z_{a_t}^i)]\text{，}\qquad(4.1.3a)$$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{T} z_0^i = \sum_{i=1}^{I} e_0^i \ , \qquad (4.1.3b)$$

$$\sum_{i=1}^{I} z_{a_t}^i = \sum_{i=1}^{I} e_{a_t}^i \ , \ \forall a_t \in F_t \, , \ t = 1,2,\ldots,T \ 。 \qquad (4.1.3c)$$

其中 λ_i 是中央计划者加在 i 个体效用上的权重，它代表着中央计划者对 i 个体的关心程度。假定中央计划者关心所有个体的福利，即 $\lambda_i > 0$ ，$i = 1,2,\ldots,I$ 。记 $\phi_0 > 0$ 、$\phi_{a_t} > 0$ 是关于约束方程(4.1.3b)和(4.1.3c)的拉格朗日乘子，则求解上述最大化问题，一阶条件可以表示为：

$$\lambda_i u'_{i0}(c_0^i) = \phi_0 \ , \quad \forall i \ , \qquad (4.1.4a)$$

$$\lambda_i \pi_{a_t} u'_{it}(c_{a_t}^i) = \phi_{a_t} \ , \ \forall i \ , \ \forall a_t \in F_t \ , \ \forall t \ 。 \qquad (4.1.4b)$$

将(4.1.4b)除以(4.1.4a)，整理得：

$$\frac{\pi_{a_t} u'_{it}(c_{a_t}^i)}{u'_{i0}(c_0^i)} = \phi_{a_t} / \phi_0 \ , \ \forall a_t \in F_t \ , \ \forall t \ 。 \qquad (4.1.5)$$

将(4.1.5)式关于 a_t 求和，整理得：

$$\frac{E[u'_{it}(c_t^i)]}{u'_{i0}(c_0^i)} = \frac{\sum_{a_t \in F_t} \pi_{a_t} u'_{it}(c_{a_t}^i)}{u'_{i0}(c_0^i)} = \sum_{a_t \in F_t} \phi_{a_t} / \phi_0 \ 。 \qquad (4.1.6)$$

因此我们有如下定理：

定理 4.1.1：在一个 Pareto 最优配置中，个体在事件 a_t 下消费的边际效用与第 0 期消费的边际效用之比是个独立于个体的常数；更进一步，个体 t 期的期望边际效用与第 0 期边际效用之比是个独立于个体的常数。

4.1.4 完备市场竞争均衡

假定经济中存在一个现货市场和一个完备的时间事件或有权益市场，交易仅发生在第 0 期，下面我们来求解均衡的价格和配置。记 φ_0 、φ_{a_t} 为第 0 期消费品和关于第 t 期-事件 a_t 发生的或有权益的价格，在该价格下，i 个体最优决策可以表示为：

$$\max_{\substack{\{z_0^i, z_{a_t}^i\} \\ a_t \in F_t, t=1,2,\ldots,T}} \quad u_{i0}(z_0^i) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \pi_{a_t} u_{it}(z_{a_t}^i)$$

Subject to：

$$\phi_0 z_0^i + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \phi_{a_t} z_{a_t}^i = \phi_0 e_0^i + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \phi_{a_t} e_{a_t}^i \ , \qquad (4.1.7)$$

其中(4.1.7)是个体的财富约束方程。

求解上述最大化问题，得一阶条件为：

$$u'_{i0}(c_0^i) = \gamma_i \phi_0 \ , \qquad (4.1.8)$$

$$\pi_{a_t} u'_{it}(c_{a_t}^i) = \gamma_i \phi_{a_t} \ , \ \forall a_t \in F_t \ , \ \forall t \ 。 \qquad (4.1.9)$$

其中$\gamma_i > 0$是关于(4.1.7)式的拉格朗日乘子。

均衡时现货市场和或有权益市场同时出清，因此我们有：

$$\sum_{i=1}^{T} z_0^i = \sum_{i=1}^{I} e_0^i \ , \qquad (4.1.10a)$$

$$\sum_{i=1}^{I} z_{a_t}^i = \sum_{i=1}^{I} e_{a_t}^i \ , \ \forall a_t \in F_t \ , \ t = 1,2,\ldots,T \ 。 \qquad (4.1.10b)$$

将该最优配置和 4.1.3 节中的 Pareto 最优配置进行比较，如果$\lambda_i = \gamma_i^{-1}$，则两个配置完全等价。由此我们有如下定理：

定理 **4.1.2**：如果市场是完备的，即经济中存在所有的时间-事件或有权益市场，则任意一个 Pareto 最优配置可以在一个完全竞争市场中达到；反过来，任意一个竞争均衡配置都是 Pareto 最优配置。

上述定理是福利经济学第一定理和第二定理在不确定性环境下的重新阐述，此处市场完备的条件是不可省略的，这一点可以在 4.1.1 节中看出。当市场是完备的，上述均衡配置被称为完备市场竞争均衡配置。

4.1.5 完备市场理性预期均衡

在上一小节的讨论中，我们假定了市场仅在第 0 期开放。这一小节我

们放宽限制，假定市场每一期都开放，同时我们假定个体预期是理性预期的，即预期是事后实现的。

记$\phi_{a_s}(a_t)$是关于时间 s-事件a_s的或有权益在第 t 期、事件a_t发生时扣除红利后的价格，$\pi_{a_s}(a_t)$是事件a_t发生后事件a_s发生的条件概率，根据 Bayes 法则，我们有：

$$\pi_{a_s}(a_t)=\begin{cases}0 & \text{□□} \quad a_s \not\subset a_t \\ \pi_{a_s}/\pi_{a_t} & \text{□□} \quad a_s \subseteq a_t\end{cases}。\qquad (4.1.11)$$

记 t 期事件a_t发生后的完备市场竞争均衡配置为：

$$\left\{c^i_{a_s}, a_s \in F_s, a_s \subseteq a_t, s \geq t\right\}。$$

在给定价格和概率估计分布下，我们求解 t 期事件a_t发生时如下个体最大化问题：

$$\max_{\left\{\substack{z^i_{a_s}, a_s\in F_s \\ a_s\subseteq a_t, s\geq t}\right\}} u_{it}\left(z^i_{a_t}\right)+\sum_{s=t+1}^{T}\sum_{\substack{a_s\in F_s \\ a_s\subseteq a_t}}\pi_{a_s}(a_t)u_{is}\left(z^i_{a_s}\right) \qquad (4.1.12a)$$

Subject to：

$$z^i_{a_t}+\sum_{s=t+1}^{T}\sum_{\substack{a_s\in F_s \\ a_s\subseteq a_t}}\phi_{a_s}(a_t)z^i_{a_s}=c^i_{a_t}+\sum_{s=t+1}^{T}\sum_{\substack{a_s\in F_s \\ a_s\subseteq a_t}}\phi_{a_s}(a_t)c^i_{a_s} \qquad (4.1.12b)$$

求解上述最优化问题，得一阶条件为：

$$u'_{it}(c^i_{a_t})=\gamma^i_{a_t}, \qquad (4.1.13)$$

$$\pi_{a_s}(a_t)u'_{is}(c^i_{a_s})=\gamma^i_{a_t}\phi_{a_s}(a_t),\ a_s\subseteq a_t,\ s>t, \qquad (4.1.14)$$

其中$\gamma^i_{a_t}$是关于(4.1.12b)的拉格朗日乘子。

比较(4.1.8)-(4.1.9)和(4.1.13)-(4.1.14)，当我们取：

$$\phi_{a_s}(a_t)=\begin{cases}0 & a_s \not\subseteq a_t \\ \phi_{a_s}\big/\phi_{a_t} & a_s \subseteq a_t\end{cases}, \qquad (4.1.15)$$

$$\gamma_{a_t}^{i}=\gamma_i\frac{\phi_{a_t}}{\pi_{a_t}}$$

时，两个均衡配置等价，由此我们有如下定理：

定理 **4.1.3**：在一个每一期都开放市场的经济中，价格系统(4.1.15)和完备市场竞争均衡配置(4.1.8)-(4.1.10)构成一个完备市场理性预期均衡，其中预期是事后实现的，交易仅发生在第 0 期。

§4.2 市场完备化与证券市场配置效率

4.2.1 配置效率与长生命证券的引入（一个例子）

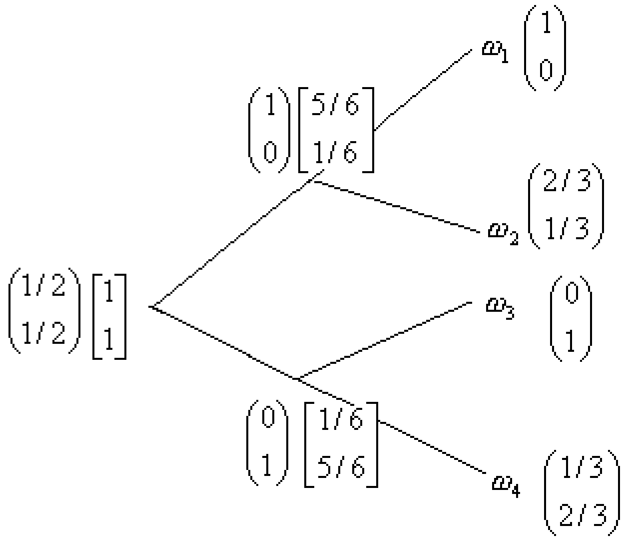
时间-事件或有权益是一种理想中的证券，现实经济中交易的通常是股票、期货、期权等长生命证券，他们都是一些复杂证券。

定义：一个复杂证券是由时间 0 消费品和一族时间-事件或有权益构成的证券，它可以被表示为$X=\{x_0,x_{a_t}\mid a_t\in F_t,t=1,2,\ldots,T\}$，其中 x_0 和 x_{a_t} 分别为以消费品衡量的时间 0 和时间 t、时间 a_t 下的红利。

定义：一个长生命证券(long-lived security)是一种在任意交易日都可以交易的复杂证券。

例 **4.1.1**（续）：在例 4.1.1 中，假定两类个体同时发行两种股票，股票代表着对果园收益的权益，其红利和价格如图 4.2.1 所示[1]。通过引入这两种股票，可以同样地达到 Pareto 最优配置。

[1] 此处总利率 $R=1$，价格系统保证了无套利机会出现。



(图 4.2.1)：两种股票的红利-价格图。

小括号中的是红利，中括号中的是扣除红利后的价格。

记这两种股票分别为 x^1 和 x^2。如果第 0 期一类个体出售 1/2 单位 x^1，购入 1/2 单位 x^2，二类个体出售 1/2 单位 x^2，购入 1/2 单位 x^1，则在一个完全竞争的经济中，第 0 期两类股票的价格相等，市场出清，且不管在哪一期、哪个事件下，两类个体的消费量都是 1/2，达到 Pareto 最优配置，该均衡配置通常被称为摊平均衡(pooled equilibrium)。

在该经济中，只有两个时时可交易的长生命证券（股票），经济一样达到了 Pareto 最优。在该经济中，任意一个时间-事件或有权益都可以通过对长生命证券动态管理达到。

在图 4.2.1 中，通过对长生命证券的动态管理，我们可以构造出关于 t=2、事件 ω_1 的或有权益。假定在 t=1、事件 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 发生时，个体持有 x 份 x^1 和 y 份 x^2，为了在 ω_1 发生时个体得到 1 单位消费品，ω_2 发生是一无所获，我们要求：

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x/3 + y/3 = 0 \end{cases},$$

因此有 $(x,y) = (1,-2)$。在 t=1 时，该投资组合的成本为 1/2。

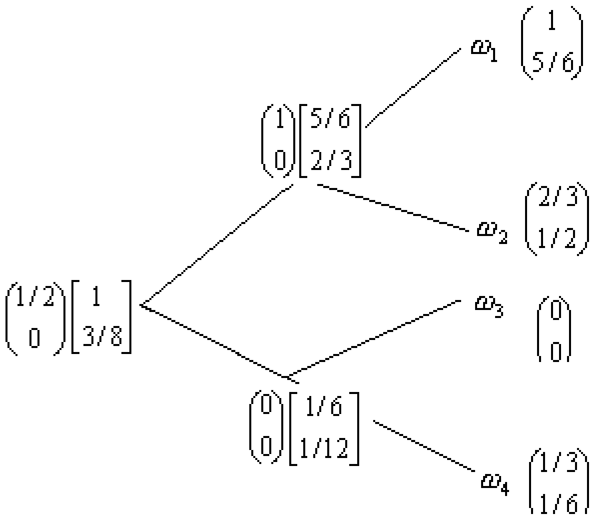
假定 t=0 时，个体持有 x 份 x^1 和 y 份 x^2，为了保证在 t=1、事件 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 发生时得到 1/2 单位消费品，事件 $\{\omega_3,\omega_4\}$ 发生时得到 0 单位的消费品，我们要求：

$$\begin{cases} x(1+5/6)+y/6=1/2 \\ x/6+y(1+5/6)=0 \end{cases}。$$

因此有 $(x,y)=(11/40,-1/40)$。在 t=0 时，扣除红利后该投资组合的成本 1/4。

从上面的讨论可以看出，要保证通过长生命证券的动态管理得到所有 Arrow 证券（完备化市场），一个必要条件是从每一个节点出发的证券数要大于等于分枝数，更进一步，一个充分必要条件是从每一个节点出发，由证券回报率向量所构成的矩阵的秩要等于分枝数。如果上述条件不满足，我们就无法通过动态管理完备化市场，这时候我们可以通过引入期权来完备化市场。

例 **4.2.1**：如果在上述经济中仅有一种长生命证券，不妨设为 x^1，此时经济无法完备化，竞争均衡配置也无法达到 Pareto 最优。为完备化市场，我们可以引入各式期权。比如，为构造出关于 t=2、事件 ω_1 的或有权益，我们可以引入一个标的在股票 x^1 上，操作价格为 1/6，成熟期为 t=2 的欧式看涨期权。股票与期权的红利和价格如图 4.2.2 所示。



(图 4.2.2)：股票和期权的红利-价格图。

小括号中的是红利，中括号中的是扣除红利后的价格。

通过引入一个看涨期权 $c(x^1)$，然后对长生命证券进行动态管理，我

们可以完备化市场。下面来构造出关于 t=2、事件 ω_1 的或有权益。假定在 t=1、事件 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 发生时，个体持有 x 份 x^1 和 y 份 $c(x^1)$ ，为了在 ω_1 发生时个体得到 1 单位消费品，ω_2 发生是一无所获，我们要求：

$$\begin{cases} x+5y/6=1 \\ 2x/3+y/2=0 \end{cases},$$

因此有 $(x,y)=(-9,12)$ 。在 t=1 时，该投资组合的成本为 1/2。

假定 t=0 时，个体持有 x 份 x^1 和 y 份 $c(x^1)$ ，为了保证在 t=1、事件 $\{\omega_1,\omega_2\}$ 发生时得到 1/2 单位消费品，事件 $\{\omega_3,\omega_4\}$ 发生时得到 0 单位的消费品，我们要求：

$$\begin{cases} x(1+5/6)+2y/3=1/2 \\ x/6+y/12=0 \end{cases}。$$

因此有 $(x,y)=(1,-2)$ 。在 t=0 时，扣除红利后该投资组合的成本 1/4。

4.2.2 模型的建立

考虑一个由 N+1 份长生命证券(j=0,1,2,…,N)和 I 位个体(i=1,2,…,I)构成的 T+1 期证券市场经济。假定所有证券都严格地正供给，假定对任意证券 j，其每期红利非负，且至少存在某一期、某个事件下其红利严格大于零。假定第 0 期个体

记第 j 种资产的随机红利流为：

$$x_j=\{x_j(t)\,|\,t=0,1,2,...,T\}。$$

则 x_j 是一个随机过程；记该资产的除红价格过程为：

$$S_j=\{S_j(t)\,|\,t=0,1,2,...,T\}。$$

该价格过程也是一个随机过程，且有 $S_j(T)=0$ 。

定义：称一个随机过程 $S=\{S(t)\,|\,t=0,1,...\}$ 关于 $\mathbf{F}$ 适应(adapted to $\mathbf{F}$)，如果对于任意的 t，$S(t)$ 关于 F_t 可测。

定义：称一个随机过程 S 关于 $\mathbf{F}$ 可料的(predictable to $\mathbf{F}$)，如果对于任意的 t，$S(t)$ 关于 F_{t-1} 可测。

考虑到 t 期事件 $a_t\in F_t$ 发生时，个体无法区分 a_t 中的自然状态，因此 $x_j(t)$ 和 $S_j(t)$ 在 $a_t\in F_t$ 中的所有自然状态上的值相同，$x_j(t)$ 和

$S_j(t)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测，红利过程 x_j 和价格过程 S_j 关于 $\mathbb{F}$ 适应。

定义：一个交易策略 θ 是一个 N+1 维的随机过程：

$$\theta=\{(\theta_j(t)); j=0,1,2,\ldots,N, t=0,1,2,\ldots,T\}，$$

其中 $\theta_j(t)$ 代表个体在 t-1 期交易发生后，到 t 期交易发生前个体所持有的第 j 种资产的数量。

由于 $\theta_j(t)$ 是在 t-1 期被决定的，它们关于 $\mathcal{F}_t$ 和 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测，因此交易策略关于 $\mathbb{F}$ 适应，且关于 $\mathbb{F}$ 可料。

个体的消费计划是一个随机过程，可以简记为：

$$c=\{c(t)\mid t=0,1,2,\ldots,T\}。$$

其中 $c(t)$ 是 t 期消费量。

定义：称一个交易策略 θ 是可接受的(admissible)，如果存在一个消费计划 c，满足：

$$\theta^T(t+1)S(t)=\theta^T(t)(S(t)+X(t))-c(t)，\quad \forall t=0,1,\ldots,T-1，$$

(4.2.1)

且有：

$$\theta^T(T)X(T)=c(T)。\qquad (4.2.2)$$

其中 $S(t)=(S_0(t),\ldots,S_N(t))^T$，$X(t)=(x_0(t),\ldots,x_N(t))^T$。通常我们也称该消费计划 c 是由交易策略 θ 融资的。

定义：如果一个消费计划由可接受的交易策略所融资的，则该消费计划称为上市的(marketed)。

记所有可接受交易策略的全体为 H，则个体最大化问题可以表示为：

$$\max_{\theta\in H} u_{i0}(c_0)+E[\sum_{t=1}^{T}u_{it}(c(t))]。\qquad (4.2.3)$$

Subject to:

$$\theta(0)=\bar{\theta}^i(0),$$

$\{c(t)\}$ 由 θ 融资。

记 t 期财富量为 $W(t)=\theta^T(t)(S(t)+X(t))$，将 t 期财富 $W(t)$ 和公

共信息 F_t 作为状态变量，$\theta(t+1)$ 为控制变量，则上述最大化问题可以用如下 Bellman 方程来刻画：

$$V(W(t),F_t)=\max_{\theta(t+1)}\{E[u_{it}(\theta^T(t)(S(t)+X(t))-\theta^T(t+1)S(t))\,|\,F_t]$$

$$+E[V(W(t+1),F_{t+1})\,|\,F_t]\}。\quad t=0,1,\ldots,T-1 \qquad (4.2.4)$$

该 Bellman 方程的求解可以由 T-1 期开始逐期向前求解。

定理 **4.2.1**：对于个体 i ，存在一个依赖于 F_t 的函数 g，个体 t 期最优消费策略满足：

$$c(t)=g(W(t);F_t)\ , \qquad (4.2.5)$$

其中 g 是一个关于 W(t)的严格增函数。

证明：如果 c(t)是个体 t 期的最优消费函数，则 c(t)满足：

$$V(W(t),F_t)=\max_{\theta(t+1)}\{u_{it}(c_t)+E[V(W(t+1);F_{t+1})\,|\,F_t]\}。$$

从上式可以求解得包络条件为：

$$V_W(W(t);F_t)=u'(c_t)\ ,$$

其中 V_W 和 $u'(.)$ 都是增函数，所以 $u'(.)$ 存在逆函数，相应地我们有：

$$c(t)=(u')^{-1}(V_W(W(t);F_t))=g(W(t),F_t)。$$

显然，$g(W(t);F_t)$ 关于 W(t)严格单调增。证明完毕。■

上述定理蕴涵，个体拥有的财富量越多，其消费越高；同时，对资产回报的一些公共信息也会影响到个体消费。

4.2.3 证券市场理性预期均衡

定义：一个证券市场理性预期均衡由 I 对可行策略和消费计划 $\{\theta^i,c^i;i=1,2,\ldots,I\}$ 和长生命证券价格 $\{S(t);t=0,1,\ldots,T\}$ 构成，满足：

1、 交易策略 θ^i 是最大化问题(4.2.3)的解，消费计划 c^i 由 θ^i 融资；

2、 价格水平保证证券市场出清，即 $\sum_{i=1}^{I}\theta_j^i(t)=1$ 对任意 t=1,2,…,T，j=0,1,…,N 成立。

在定义中，当所有证券市场出清时，根据 Walras 法则，余下的一个市场（商品市场）也出清，因此我们有：

$$\sum_{i=1}^{I} c^i(t) = \sum_{j=0}^{N} x_j(t) \text{ ，}$$

即商品需求等于商品供给。其中商品供给由所有资产上的红利构成，商品需求是所有个体需求的加总。

定理 **4.2.2**：在一个理性预期均衡中，个体不存在对第 0 期所选策略的偏离动机。

证明：（采用反证法）假定 $\{\theta^i(t), c^i(t)\}$ 是均衡的交易策略和消费计划，该策略由个体在第 0 期决定。假定存在时间 t、事件 $a_t \in F_t$ ，个体有偏离其最初决策的动机，即存在一个从 t 期、事件 a_t 开始的交易策略 θ 和消费计划 c，满足：

$$\theta^T(t+1)S(t) = \theta^{i^T}(t)(S(t)+X(t)) - c(t) \text{ ，}$$

$$\theta^T(t+k+1)S(t+k) = \theta^T(t+k)(S(t+k)+X(t+k)) - c(t+k) \text{ ，}$$

有 $\sum_{s=t}^{T} \sum_{a_s \subseteq a_t} \pi_{a_s}(a_t) u_{is}(c_{a_s}) > \sum_{s=t}^{T} \sum_{a_s \subseteq a_t} \pi_{a_s}(a_t) u_{is}(c^i_{a_s})$。

由此我们可以定义一个从时间 0 开始的交易策略 $\hat{\theta}$ 和消费计划 $\hat{c}$ ，满足：

$$\hat{\theta}(s) = \begin{cases} \theta^i(s) & s \le t \\ \theta^i(s) & s > t, a_s \not\subseteq a_t \\ \theta(s) & s > t \text{，} a_s \subseteq a_t \end{cases} \text{ ，}$$

$$\hat{c}(s) = \begin{cases} c^i(s) & s \le t \\ c^i(s) & s > t, a_s \not\subseteq a_t \\ c(s) & s > t \text{，} a_s \subseteq a_t \end{cases} \text{ 。}$$

很显然，交易策略 $\hat{\theta}$ 是一个可接受的交易策略，可行消费计划 $\hat{c}$ 由该交易策略融资，并且有：

$$E[\sum_{s=t}^{T} u_{is}(\hat{c}(s)) \mid F_t] \ge E[\sum_{s=t}^{T} u_{is}(c^i(s)) \mid F_t] \text{。}$$

在上式中，当 $a_t \in F_t$ 发生时，不等式取严格大于号。

对上式在时间 0 取无条件期望，有：

$$E[\sum_{s=t}^{T} u_{is}(\hat{c}(s))] > E[\sum_{s=t}^{T} u_{is}(c^i(s))] \text{，}$$

另外考虑到：

$$E[\sum_{s=0}^{t-1} u_{is}(\hat{c}(s))] = E[\sum_{s=0}^{t-1} u_{is}(c^i(s))] \text{，}$$

因此我们有：

$$E[\sum_{s=0}^{T} u_{is}(\hat{c}(s))] > E[\sum_{s=0}^{T} u_{is}(c^i(s))] \text{。}$$

上式蕴涵，存在另外一个可接受的交易策略和消费计划，该消费计划要好于均衡配置中的消费计划，这与均衡消费配置是给定价格下个体最大化决策的结果相矛盾，所以假设不成立。证明完毕。●

注意到在一个理性预期完备市场均衡中，一个长生命证券在 t 期事件 a_t 发生时的价格可以表示为：

$$S_x(a_t,t) = \sum_{s=t+1}^{T} \sum_{\substack{a_s \in F_s \\ a_s \subseteq a_t}} \phi_{a_s}(a_t) x_{a_s}$$

$$= \sum_{s=t+1}^{T} \sum_{\substack{a_s \in F_s \\ a_s \subseteq a_t}} \frac{\pi_{a_s}(a_t) u'_{is}(c^i_{a_s})}{u'_{it}(c^i_{a_t})} x_{a_s}$$

$$= \sum_{\substack{a_{t+1} \in F_{t+1} \\ a_{t+1} \subseteq a_t}} \frac{\pi_{a_{t+1}}(a_t) u'_{it+1}(c^i_{a_{t+1}})}{u'_{it}(c^i_{a_t})} (x_{a_t} + S_x(a_{t+1}, t+1)) \text{。} \quad (4.2.6)$$

因此 t 期长生命证券的价格可以简单表示为：

$$S_x(t) = E[\sum_{s=t+1}^{T} \frac{u'_{is}(c^i(s))}{u'_{it}(c^i(t))} x(s) \mid F_t] \quad (4.2.7)$$

$$= E[\frac{u'_{it+1}(c^i(t+1))}{u'_{it}(c^i(t))} (x(t+1) + S_x(t+1) \mid F_t] \text{。} \quad (4.2.8)$$

定义：一个证券市场理性预期均衡被称为实现了一个完备市场理性预期均衡，如果该证券市场理性预期均衡满足：

1、证券市场理性预期均衡中的长生命证券的价格和完备市场理性预期均衡中的长生命证券的价格完全相等。

2、在该证券市场理性预期均衡中可通过对长生命证券的动态管理来完备化市场。

3、 两个均衡中的均衡消费配置相同。

根据我们前面的讨论可以看出，一般情形下，完备市场理性预期均衡可以通过证券市场理性预期均衡来实现。

4.2.4 代表性个体经济与分散经济价格过程的等价性

假定个体效用函数是时间可加、状态独立的，所有个体具有相同的概率估计，同时个体可以通过对长生命证券的动态管理来完备化市场，则个体 i 的决策可以表示为：

$$\max_{\{z_0^i, z_{a_t}^i, a_t \in F_t\}_{t=1}^T} \left\{ u_{i0}\left(z_0^i\right) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \pi_{a_t} u_{it}\left(z_{a_t}^i\right) \right\} \tag{4.2.9}$$

Subject to：

$$\phi_0 z_0^i + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \phi_{a_t} z_{a_t}^i = \phi_0 e_0^i + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \phi_{a_t} e_{a_t}^i \text{。}$$

此处约束方程是个体 i 的跨时财富约束方程，它表示个体总消费等于其总的禀赋收入，其中 z_0^i、$z_{a_t}^i$ 是个体 i 第 0 期和第 t 期、事件 a_t 发生时的消费量，e_0^i、$e_{a_t}^i$ 是个体 i 所拥有的第 0 期消费品禀赋和第 t 期、事件 a_t 发生时的或有消费权益禀赋，ϕ_0、ϕ_{a_t} 是时间 0 消费品价格和 t 期、事件 a_t 发生时的或有消费权益价格。当我们取时间 0 消费品为计价单位时，$\phi_0 = 1$。

求解个体 i 的效用最大化问题，记最优消费决策为$\left\{c_{0i}, c^{i}_{a_t}; a_t \in F_t\right\}$，

则一阶条件可以表示为：

$$u_{i0}'(c_0^i) = \gamma_i \;; \tag{4.2.10a}$$

$$\pi_{a_t} u_{it}'(c_{a_t}^i) = \gamma_i \phi_{a_t}, \quad \forall a_t \in F_t, \; t=1,2,\ldots,T。 \tag{4.2.10b}$$

其中 γ_i 最优化问题(4.2.9)的拉格朗日乘子。

记 $\lambda_i = \gamma_i^{-1}$，下面来构造一个代表性个体经济。记该代表性个体的效用函数为：

$$u_t(z) = \max_{(z_i)_{i=1}^I} \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_{it}(z_i)。 \tag{4.2.11}$$

$$\text{Subject to: } \sum_{i=1}^{I} z_i = z$$

因此我们有：

$$u_t'(c_{a_t}) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i u_{it}'(c_{a_t}^i) \frac{dc_{a_t}^i}{dc_{a_t}}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \frac{\phi_{a_t}}{\pi_{a_t} u_{it}'(c_{a_t}^i)} u_{it}'(c_{a_t}^i) \frac{dc_{a_t}^i}{dc_{a_t}}$$

$$= \phi_{a_t} / \pi_{a_t}。 \tag{4.2.12}$$

在一个由效用函数满足(4.2.11)的代表性个体构成的经济中，该代表性个体的最优决策可以刻画为：

$$\max_{c_0, \{c_{a_t}, a_t \in F_t\}_{t=1}^T} u_0(c_0) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \pi_{a_t} u_t(c_{a_t}) \tag{4.2.13}$$

Subject to：

$$\hat{\phi}_0 c_0 + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \hat{\phi}_{a_t} c_{a_t} = \hat{\phi}_0 e_0 + \sum_{t=1}^{T} \sum_{a_t \in F_t} \hat{\phi}_{a_t} e_{a_t}。$$

此处的约束方程是代表性个体的跨时约束方程，其中 $e_0 = \sum_{i=1}^{I} e_0^i$、

$e_{a_t} = \sum_{i=1}^{I} e_{a_t}^{i}$ 是代表性个体所拥有的关于时间 0 消费品和 t 期-事件 a_t 或有权益的禀赋，$\hat{\varphi}_0$ 和 $\hat{\varphi}_{a_t}$ 是该代表性个体经济中的价格。如果以时间 0 消费品为计价单位，则有 $\hat{\varphi}_0 = 1$。

求解该代表性个体的最优化问题，一阶条件可以表示为：

$$u_0'(c_0) = \gamma\ ; \qquad (4.2.14a)$$

$$\pi_{a_t} u_t'(c_{a_t}) = \gamma \hat{\varphi}_{a_t}\ 。 \qquad (4.2.14b)$$

其中 γ 是最优化问题(4.2.13)的拉格朗日乘子。

将(4.2.14a) 中的 γ 代入(4.2.14b)，求解的该代表性经济中的价格水平服从：

$$\hat{\varphi}_{a_t} = \pi_{a_t} u_t'(c_{a_t}) / u_0'(c_0) = \phi_{a_t}\ 。 \qquad (4.2.15)$$

因此我们有如下定理：

定理 **4.2.3**：在所有个体的效用函数时间可加、状态独立，所有个体的概率估计相同，市场可以通过对长生命证券的动态管理完备化的假定下，存在一个代表性个体经济，该经济中的价格过程与完全竞争分散经济中的价格过程完全相同。

由于上述定理的存在，我们在研究资产定价时，可以仅考虑一个代表性个体经济。该代表性个体具有与分散经济中个体一样的概率估计，其效用函数时间可加、状态独立；该个体拥有整个经济中的所有初始禀赋，因此该代表性个体始终持有所有资产，每一期消费所有资产上的红利。

§4.3 多周期资本资产定价理论

4.3.1 模型的建立和求解

假定经济中存在大量的完全相同的个体，这些个体都具有无穷长的生命。假定经济中存在一种消费品、J 种风险资产和一种无风险资产。假定消费品是不可储藏的，但是资产可以被长期保存，是耐用品，个体持有资产可以得到红利收益（消费品）。以消费品为单位，记第 j 种资产 t 期扣除红利后的价格和红利分别为 $\tilde{S}_t^{\,j}$ 和 $\tilde{d}_t^{\,j}$ ，假定无风险资产为零息票债券，t 期价格记为 B_t 。假定 t 期开始时个体在第 j 种资产上投资的财富量为 a_{jt} ，

$j=1,2,\ldots,J$，个体在无风险资产上投资的财富量为 a_{0t}。假定个体除了买卖资产和获得红利外，没有其他收入。假定个体偏好仅与个体消费量有关，可以用一个单调增、严格凹、二次可微的效用函数来刻画。个体最优化问题可表示为：

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \quad 0<\beta<1 \text{。} \qquad (4.3.1)$$

Subject to：

$$\sum_{j=1}^{J} a_{jt}(\tilde{S}_t^j+\tilde{d}_t^j)+a_{0t}B_t=\sum_{j=1}^{J} a_{jt+1}\tilde{S}_t^j+a_{0t+1}B_t+c_t \text{。} \qquad (4.3.2)$$

此处 c_t 是个体在 t 期的消费量。

因为未来红利流和价格流具有不确定性，所以上述最大化问题是一个随机最优控制问题，我们可以用动态规划方法来求解，定义状态变量为 $(\{a_{jt}\}_{j=1}^J, a_{0t})$，控制变量为 $(\{a_{jt+1}\}_{j=1}^J, a_{0t+1})$，则上述最优化问题可以用如下 Bellman 方程来刻画：

$$V(\{a_{jt}\}_{j=1}^J, a_{0t})=\max_{\{a_{jt+1}\}_{j=1}^J, a_{0t+1}} \{u(c_t)+\beta E_t V(\{a_{jt+1}\}_{j=1}^J, a_{0t+1})\} \text{。} \qquad (4.3.3)$$

求得一阶条件为：

$$-u'(c_t)\tilde{S}_t^j+\beta E_t \frac{\partial V(\{a_{jt+1}\}_{j=1}^J, a_{0t+1})}{\partial a_{jt+1}}=0 \text{，} j=1,2,\ldots,J \text{；}$$

$$-u'(c_t)B_t+\beta E_t \frac{\partial V(\{a_{jt+1}\}_{j=1}^J, a_{0t+1})}{\partial a_{0t+1}}=0 \text{。}$$

包络条件可以表示为：

$$\frac{\partial V(\{a_{jt}\}_{j=1}^J, a_{0t})}{\partial a_{jt}}=u'(c_t)(\tilde{S}_t^j+d_t^j) \text{，} j=1,2,\ldots,J \text{；}$$

$$\frac{\partial V(\{a_{jt}\}_{j=1}^J, a_{0t})}{\partial a_{0t}}=u'(c_t)B_t \text{。}$$

因此欧拉方程为：

$$\beta E_t[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(\frac{\tilde{S}_{t+1}^j+\tilde{d}_{t+1}^j}{S_t^j})]=1, t=0,1,2\ldots, \quad j=1,2,\ldots,J$$

（4.3.4a）

$$\beta E_t[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\frac{B_{t+1}}{B_t}]=1, t=0,1,2\ldots \qquad (4.3.4b)$$

即 t 期放弃一单位消费所带来的边际效用损失等于 t+1 期额外消费增加所带来的期望边际效用的增加。

将等式（4.3.4a），整理得：

$$S_t^j=E_t\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(\tilde{S}_{t+1}^j+\tilde{d}_{t+1}^j)。 \qquad (4.3.5)$$

根据期望算符的迭代法则，对（4.3.5）作前向迭代得：

$$S_t^j=E_t\sum_{s=1}^{\infty}\beta^j\frac{u'(c_{t+j})}{u'(c_t)}d_{t+j}。 \qquad (4.3.6)$$

这样我们就得到了均衡价格的一个形式解。该形式解表明，资产价格依赖于未来红利流。

4.3.2 跨期 CAPM 的推导

假定该经济中存在 J 种风险资产和一种无风险资产，第 j 种风险资产的随机回报率为：

$$1+\tilde{r}_{t+1}^j=\frac{\tilde{a}_{t+1}^j+\tilde{d}_{t+1}^j}{a_t^j}, \quad j=1,2,\ldots,J$$

则(4.3.5)式可以改写为：

$$1=\beta E_t[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(1+r_{t+1}^j)], \quad j=1,2,\ldots,J。 \qquad (4.3.7)$$

整理得：

$$1=\beta E_t[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}]E_t[1+r_{t+1}^j]+\beta\operatorname{cov}_t(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)},r_{t+1}^j), \qquad (4.3.8)$$

对于无风险资产，我们类似地有：

$$1=\beta E_t[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}](1+\bar{r}_{t+1})。 \qquad (4.3.9)$$

因此我们有：

$$E_t[r_{t+1}^j]-\bar{r}_{t+1}=-\frac{\operatorname{cov}_t(u'(c_{t+1}),r_{t+1}^j)}{E_t(u'(c_{t+1}))}\text{，}\qquad(4.3.10)$$

由此我们有：

$$E_t[r_{t+1}^j]-\bar{r}_{t+1}=\frac{\operatorname{cov}_t(u'(c_{t+1}),r_{t+1}^j)}{\operatorname{cov}_t(u'(c_{t+1}),r_{t+1}^m)}(E_t(r_{t+1}^m)-\bar{r}_{t+1})\text{，}$$

$$j=1,2,\ldots,J$$

$$(4.3.11)$$

假定个体效用函数是二次多项式的形式，则上式可以进一步改写为：

$$E_t[r_{t+1}^j]-\bar{r}_{t+1}=\frac{\operatorname{cov}_t(c_{t+1},r_{t+1}^j)}{\operatorname{cov}_t(c_{t+1},r_{t+1}^m)}(E_t(r_{t+1}^m)-\bar{r}_{t+1})\text{，}$$

$$=\frac{\beta_{cj}}{\beta_{mj}}(E_t[r_{t+1}^m]-\bar{r}_{t+1})\text{。}\qquad(4.3.12)$$

其中 $\beta_{cjt}=\dfrac{\operatorname{cov}(r_{ct+1},r_{t+1}^j)}{\operatorname{var}(r_{ct+1})}$，$\beta_{cmt}=\dfrac{\operatorname{cov}(r_{ct+1},r_{t+1}^m)}{\operatorname{var}(r_{ct+1})}$ 是贝塔系数，$\widetilde{r}_{ct}$ 是市场中与总消费高度民主正相关的资产组合。上式被称为 CCAPM。

Lucas（1978）的模型经常被形象地称为水果树模型。当我们把资产看作水果树时，红利收入就相当于树上所结的水果，资产价格就相当于树的价格，该模型在资产定价理论中扮演着非常重要的角色。

§4.4 股票溢金难题和无风险利率难题

4.4.1 问题的提出

股票溢金难题首先是由 Mehra 和 Prescott（1985）提出的。1979 年 Mehra 和 Prescott 在一篇研究报告中给出了一个非常奇怪的结论：从理论上讲，股票和债券的回报率应该很接近，因为两者面对相同的自然状态和经济背景；但他们从实际数据中发现，美国 1889—1978 年间短期国债上的平均实际回报率仅为每年 0.8%，而股票上的平均实际回报率高达 6.98%，因此平均股票溢金达 618 个基点（basis points），即两者之间存在着相当大的回报率差。在随后的六年中他们经过反复研究，确信自己的发现是正确的，并提出了“股票溢金难题”，该结论发表在 1985 年的《货币经济学杂志》上。

在他们的论文中，Mehra 和 Prescott（1985）在市场无摩擦、完备和效用函数时间可分、状态独立的假定下，采用 $c^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ 的即期效用函数，

利用 Lucas（1978）的禀赋经济多期资产定价模型，分析了股票的风险溢金。

此处采用 $c^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ 的效用函数来分析股票的风险溢金，一是因为它是尺度不变的（scale invariant），当宏观经济总变量（例如资本存量）增长时，均衡回报过程是平稳的，二是其相对风险回避系数等于 α ，是个常数，从而经济总量和代表作个体行为不受初始禀赋分布的影响。通过求解个体效用最大化问题，可以得到 Euler 方程为：

$$c_t^{-\alpha} = \beta E_t[(1+\tilde{r}_{t+1})c_{t+1}^{-\alpha}] \text{，} \qquad (4.4.1)$$

其中 $\tilde{r}_{t+1}$ 是风险资产的随机回报率，α 是相对风险回避系数。记消费增长率为 $g_{t+1}^c = \frac{c_{t+1}}{c_t} - 1$，略去下标，上式可以改写为：

$$E[(1+\tilde{r})(1+g^c)^{-\alpha}] = 1/\beta \text{。} \qquad (4.4.2)$$

通过 Taylor 展开，略去高阶项，上式可以近似表示为：

$$E[\tilde{r}] \cong \frac{1}{\beta} - 1 + \alpha E[g^c] + \alpha Cov(\tilde{r}, g^c) - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)Var(g^c) \text{。}$$

类似地，对于无风险资产我们有：

$$\bar{r} \cong \frac{1}{\beta} - 1 + \alpha E[g^c] - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)Var(g^c) \text{。}$$

将上述两式相减，得：

$$E[\tilde{r}] - \bar{r} \cong \alpha Cov(\tilde{r}, g^c) \text{。} \qquad (4.4.3)$$

随后 Mehra 和 Prescott（1985），根据美国 1889—1978 年间债券回报和股票回报的时间序列数据，可以求出了费增长率和市场回报间的协方差。他们发现，要产生 618 个基点的股票溢金 α 必须取值在 30 到 50 之间，这简直是不可接受的。一个人的风险回避系数为 30，那么他会愿意付出其财产的 49%来避免参加一个以 50%的概率使其财产增加一倍，50%的概率使其财产减少一半的赌博。这便是“股票溢金难题”，即股票超出债券的风险不足以解释它超出债券的回报。

Weil（1989）在同样的时间序列数据上提出了另一个难题。在 Mehra-Prescott 模型中要产生出 618 个基点的风险溢金，相对风险回避系数必须很高，这意味着消费者希望尽可能地平滑消费流，因为消费的减少对其造成的损失远远大于消费增加给其带来的好处[1]。因此，当经济不断增长时，

[1]在 Mehra-Prescott 模型中，跨时替代弹性为 1/，它和相对风险回避系数互为倒数。

消费者会将未来的收入提前进行消费，这种普遍的借贷需求会导致较高水平的实际利率。而实际数据表明实际利率小于 1%，甚至经常为负值，Weil 将此称为“无风险利率难题”。

需要说明的是，较高的股票溢金和较低的无风险利率共存的现状并非只在美国存在。例如德国 1978-1997 年间市场指数的年实际回报率为 9.8%，无风险资产的回报率为 3.2%，风险溢金为 6.6%；法国 1973-1998 年间市场指数的年实际回报率为 9.0%，无风险资产的回报率为 2.7%，风险溢金为 6.3%。因此“股票溢金难题”和“无风险利率难题”存在一定的普遍性。

4.4.2 相关研究进展

上述两个难题引起了许多理论经济学家的注意，他们通过各种途径对 Mehra-Prescott (1985)的标准模型进行修正，希望找到解决两个难题的方法。Mehra(2003)总结了目前这方面的主要结果，他认为从目前的研究看来，归纳起来不外乎如下三条途径：修改偏好、修改概率分布以引入灾难性事件、放松市场完备、无摩擦的假定。从每一条研究途径出发，都可以部分地解释两大难题，但离问题完全解决还相距尚远。下面我们分别介绍这几条途径。

途径 **1.** 对效用函数的修正

在 Mehra 和 Prescott 的讨论中，□既代表相对风险回避系数，又代表跨时消费替代弹性，但这是两个完全不同的概念。因此在标准模型中要产生出足够高的股票溢金，□必须足够大；同时要保证足够低的无风险利率，□就必须足够小，因此我们可以通过打破标准模型中相对风险回避系数和跨时替代弹性之间的关系，通过对效用函数的修改，来解释这两个难题。目前，比较有影响的有：

1、非期望效用效用函数

考虑到传统的效用函数中没有区分消费者的相对风险系数与消费的跨时替代弹性，Epstein 和 Zin（1991）将 Mehra-Prescott 模型中的标准期望效用函数作了修改，他们将消费者 t 期的效用表示为：

$$U_t = \{c_t^{1-\rho} + \beta(E_t U_{t+1}^{1-\alpha})^{(1-\rho)/(1-\alpha)}\}^{1/(1-\rho)}。 \qquad (4.4.4)$$

因为这个函数与 von Neuman-Morgenstern 期望效用公理不一致，所以我们

将其称为“非期望效用函数”。这种函数打破了标准期望效用函数中相对风险回避系数和跨时替代弹性之间的严格联系，此时，相对风险回避系数为 α ，而跨时替代弹性为 $1/\rho$。在非期望效用函数的假设下，Epstein 和 Zin（1991）给出个体的最优消费组合必须满足下面的条件：

$$E_t\left[U_{t+1}^{\rho-\alpha}(c_{t+1}/c_t)^{-\rho}\left(R_{t+1}^s-R_{t+1}^b\right)\right]=0 \qquad (4.4.5a)$$

$$\beta E_t\left[\left(E_tU_{t+1}^{1-\alpha}\right)^{(\alpha-\rho)/(1-\alpha)}U_{t+1}^{\rho-\alpha}(c_{t+1}/c_t)^{-\rho}R_{t+1}^b\right]=1 \qquad (4.4.5b)$$

注意到这里的边际替代率依赖于代表性个体在 $t+1$ 期的效用，而此效用在 t 期是不可观测的，这就给模型的检验带来了困难。考虑到在实际中我们很难用当前的信息来预测将来的消费增长，所以不妨假设将来的消费增长和当前的信息是不相关的。于时方程（4.4.5a）和（4.4.5b）可改写为：

$$E\left[(c_{t+1}/c_t)^{-\alpha}\left(R_{t+1}^s-R_{t+1}^b\right)\right]=0 \qquad (4.4.6a)$$

$$\beta\{E(c_{t+1}/c_t)^{1-\alpha}\}^{(\alpha-\rho)/(1-\alpha)}E\left[(c_{t+1}/c_t)^{-\alpha}R_{t+1}^b\right]=1$$

（4.4.6b）

由于股票溢金难题只和相对风险回避系数有关，而非期望效用并没有改变对相对风险回避系数的假设，一阶条件（4.4.6a）和 Mehra-Prescott 模型中的 Euler 方程完全相同，所以引入非期望效用函数后较高的股票溢金仍然蕴涵较大的相对风险回避系数，因此股票溢金难题仍然没有得到很好的解决。另一方面，导致无风险利率难题的主要原因是标准期望效用函数中没有区分相对风险回避系数和跨时替代弹性，非期望效用将两者分开，可以使相对风险回避系数和跨时替代弹性同时达到很高。如果同时选取适当的α和ρ值，由（4.4.6b）得到的无风险利率比标准模型的会有所下降，这样就可以部分解决无风险利率难题。虽然由（4.4.6b）得到的无风险利率比标准模型的有所下降，但和历史数据仍然存在较大差距,所以我们这里说的只是部分解释无风险利率难题。

2、习惯效应

在标准模型中，效用函数是时间可分的。Sundaresan(1989) 和 Constantinides(1990)将效用函数的时间可分假定放松，通过在效用函数中引入习惯效应来解释这两个难题。习惯效应建立在心理学的一个基本结论上：重复

刺激减少了对刺激的感觉和反应。习惯形成可以用来解释为什么消费者所说的幸福的感觉更偏重于最近消费的增长而不是消费的绝对水平。在宏观经济中，习惯的持续(habit persistence)可以解释为什么紧缩是如此的令人害怕，即使它们对产出的效应要小于几年来的增长。

Sundaresan(1989)、Constantinides(1990)和 Campbell 和 Cochrane(1999)等假定 t 期个体的效用函数为：

$$(c_{t+s} - x_{t+s})^{1-\alpha}/(1-\alpha) \ , \qquad (4.4.7)$$

其中 x_t 是习惯水平，可以表示为过去消费水平的几何加权平均。他们认为，由于 Mehra-Prescott 模型中的效用函数是时间可分的，所以消费增长的下界限定了边际替代率的上界，从而导致了股票溢金难题。而习惯效应是时间不可分的，引入习惯水平后个体对于短期消费的减少更加敏感，即当消费增长发生小的扰动时会使得边际替代率有较大的变化，从而较小风险回避系数可以同较高的股票溢金相容。不引入习惯效应，要解释美国的时间序列数据中所蕴涵的风险溢金，相对风险系数必须超过 10；引入习惯效应后，相对风险系数只要为 2 即可，这样似乎就解决了股票溢金难题。实际上 Constantinides 模型引入习惯效应函数后得到的只是较小的长期风险回避系数，短期的风险回避系数仍然很大，所以股票溢金难题还没有真正解决。但是 Constantinides 等人的模型对于解决无风险利率难题有一定的帮助，因为考虑到习惯效应，个体对将来的消费需求会越来越高，从而比标准模型有更高的储蓄需求。

3、攀比效应

在习惯效应模型中，与当前消费相比较的标准被设定为个体的过去消费，其实该标准还可以被设定为其它变量。Duesenberry（1952）指出，个体消费时存在相互攀比，个体效用不仅同他自己的消费量有关，还受到社会消费水平的影响，实际上就是将比较标准设定为社会平均消费水平。在这种假设下，个体在投资决策时不仅关心他们的绝对消费水平，还关心他们的相对消费水平，从而个人消费可通过影响社会平均消费水平而对他人的消费—投资决策造成影响，即消费存在外部效应。

Abel（1990）和 Jordi Gali（1994）将消费攀比引入模型，分析了消费攀比程度对资产定价的影响，并部分地解释了上述两个难题。Kocherlakoto（1996）将 Abel（1990）和 Jordi Gali（1994）模型中对效用的假设结合起来，将代表性个体 t 期的期望效用函数表示为：

$$c_{t+s}^{1-\alpha} C_{t+s-1}^{\lambda} C_{t+s}^{\gamma} /(1-\alpha) \text{ ,} \qquad (4.4.8)$$

其中 c_t 是个体 t 期的消费水平，C_t 是 t 期的社会平均消费水平。此效用函数说明，个体不仅会将当前的消费水平与当前的人均消费水平进行比较，还会将它与前一期的人均消费水平进行比较。此外不同值 λ 和 γ 表明了不同类型的个体，例如当 λ 和 γ 均小于零时，这样的个体是"善妒"的，因为别人消费水平的提高会使他不快乐；而如果 λ 和 γ 均大于零时，这样的个体是"博爱"的，因为整个社会消费水平的提高会使他感到快乐。对于代表性个体而言人均消费水平是外生给定的，因此均衡时一阶条件为：

$$E_t\{(C_{t+1}/C_t)^{\gamma-\alpha}(C_t/C_{t-1})^{\lambda}(R_{t+1}^s - R_{t+1}^b)\} = 0 \qquad (4.4.9a)$$

$$\beta E_t\{(C_{t+1}/C_t)^{\gamma-\alpha}(C_t/C_{t-1})^{\lambda} R_{t+1}^b\} = 1 \qquad (4.4.9b)$$

在这个模型中由于多出了两个参数 λ 和 γ，所以对于任意设定的贴现因子 β 及相对风险回避系数 α 都可以找到合适的 λ 和 γ 值，使得历史统计数据满足上面的两个一阶条件，这样股票溢金难题便可能得到解决。直观上可以这样理解：当 γ 的绝对值很大时，个体自身消费的边际效用对人均消费的波动非常敏感，而股票的风险会增加人均消费的风险，因此即使代表性投资者的风险回避系数 α 相对较小时，他仍会在风险溢金很大时才对股票进行投资。实际数据分析也表明，在此模型中，相对风险回避系数只需为 6 便可解释时间序列数据中所蕴涵的风险溢金，虽然这个值仍然较高，但比 30 要合理得多。此外引入"攀比效用"后，将来较高水平的人均消费使得个体将来消费的边际效用也较高，从而个体的借贷需求降低，相应地无风险利率也较低。

4、将社会地位引入效用函数

Weber 认为资本主义经济中的资本积累并不仅仅是为了最大化长期的消费，还受到财富积累所带来的满足感的驱动[1]。根据这一思想，Heng-fu Zou（1994）将资本存量引入到效用函数中，讨论了宏观增长理论和储蓄，修正后的效用函数不仅反映了人类行为的经济性，还反映了其社会性。Bakshi 和 Zhiwu Chen （1996）在此基础上建立了一个更为一般的效用函数，采用社会地位来描述资本主义精神，并将这种含有资本主义精神的效用函数引入资产定价模型。Bakshi-Chen 模型中代表性投资者的效用函数为 $u(c_t, s_t)$,其中

[1] Max M.Weber 将此称为资本主义精神。

s_t 表示投资者的相对社会地位,它是关于其财富及其所处社会群体的函数 $s_t = f(w_t, v_t)$, w_t 表示投资者的财富, v_t 表示社会财富指标用来描述投资者所出社会群体的平均水平。如果 t 期效用函数取为：

$$u(c_t, w_t, v_t) = (w_t / v_t)^{-\lambda} c_t^{1-\alpha} / (1-\alpha)。 \qquad (4.4.10)$$

通过求解投资者的最优化问题，均衡时风险溢金可以表示为：

$$R^s - R^b = \alpha\sigma_{s,c} + \lambda\sigma_{s,w} - \lambda\sigma_{s,v} \qquad (4.4.11)$$

其中 $\sigma_{s,c}$ ， $\sigma_{s,w}$ 和 $\sigma_{s,v}$ 分别表示风险资产的回报与个体消费增长、个体的财富增长以及社会财富指标增长的协方差。由此可见，个体在进行投资决策时不仅会考虑风险资产对消费造成的影响，还会考虑对个体财富及社会财富指标的影响。因此效用函数中引入社会地位后，在不增加个体的相对风险回避系数下,只要假设个体对财富风险或社会财富指标的风险足够厌恶，就可以产生出足够大的股票溢金,从而解决股票溢金难题。另一方面,在 Bakshi-Chen 模型中，风险回避系数和跨时替代弹性之间的严格联系仍没有打破,所以它无法解决无风险利率难题。

5、区分两种相对风险回避系数

Black(1990)从另外的角度重新考虑了这两个难题，他的主要思想是把直接效用函数表示风险的相对风险系数与间接效用函数中刻画风险的相对风险系数区分开来，即对于直接效用函数为 $c^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ ，我们猜测间接效用函数为 $bw^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ ，此时 α 与 γ 不一定相等。从而我们不能得到消费水平与收入水平成比例的结论，此时消费水平的波动与收入水平波动之比为 γ/α ，这也可以用来解释宏观经济学中实际数据给出的“消费比收入更光滑”的现象。在这个模型中，Black 通过模拟美国的数据得到 $\alpha = 16.7$ 而 $\gamma = 5.7$ 。虽然此时还是需要较高的相对风险回避系数，但是他为我们解决股票溢金难题提供了一条新的路径。

6、几种方法的混合

从前面对效用函数进行改进的四种方法来看，有些可以较好的解释无风险利率难题，但无法解决股票溢金难题；而有些可以对风险溢金难题给出较合理的解释，却难以解释无风险利率难题。对此，一些学者在尝试将以上几种方法进行合并，希望由此可以同时解决股票溢金难题和无风险利率难题。例如，Yunhong Yang（1999）在非期望效用函数中引入资本主义精神，由于 Yang

模型采用了非期望的假设，所以相对风险回避系数和跨时替代弹性之间的严格联系不再存在。根据前面的分析可以知道引入非期望效用函数后个体对待风险和增长的态度不再由一个参数来描述，因此无风险利率难题可以得到一定的解决，因此含有资本主义精神的非期望效用对于解释无风险利率难题也是有效的。那么对于股票溢金难题此效用函数是否仍然有效呢？Yang（1999）将此效用函数应用于资产定价模型中，可以得到并推导出均衡时的风险溢金值满足的关系式。从这一关系式出发可以得到和 Bakshi-Chen 模型相类似的分析结果，也就是说 Yang 模型也有可能解决股票溢金难题。Gong 和 Zou（2002）在一个具有社会地位偏好的效用函数的宏观均衡模型中也讨论了资产定价的问题，他们也能部分地解释股票溢金难题。

途径 **2.** 灾难性事件的引入

Reitz（1988）通过在模型中引入小概率的灾难性事件（对应于大的消费下降），来解释股票溢金难题和无风险利率难题。他发现，具有很小概率的灾难性事件的存在，会加大无风险利率和股票回报率之间的差距，从而产生一个较大的股票溢金。遗憾的是，在相对风险回避系数等于 10 时，这需要 1%概率发生消费下降 25%的灾难性事件，才能产生意愿的股票溢金，但近一百年来美国的数据中并没有出现这一幕。

途径 **3.** 对市场描述的修正

解决两个难题的另外一条途径是，放宽 Prescott 和 Mehra（1985）对市场完备、无摩擦的要求

1、 市场不完备

Prescott 和 Mehra（1985）在分析时假定了市场的完备性，因此自然地可以想到，可能是该假设造成了难以解释的股票溢金。在 Mehra-Prescott 模型中个体的消费行为是用人均消费行为代替的。这是因为完备市场中个体可以利用市场来对冲个人风险，从而个体之间消费流十分相似，近似地等于人均消费流，均衡时个体消费的一阶条件与人均消费的一阶条件相同。但是真实经济中金融市场并不完备，所以人均消费增长所具有的风险不能完全反映出个体消费增长上的风险，相应地股票给个体消费增长所带来的波动比给人均消费增长所带来的波动大，这可能是造成股票溢金难题的原因。

Weil（1992）在一个两期模型中讨论了金融市场的不完备。他指出，

如果个体偏好是谨慎的（边际效用凸），由市场不完备带来的个体消费增长上波动的增加有助于解释无风险利率难题。因为在不完备市场中个体需要增加储蓄以防范个体消费所面临的风险，储蓄的增加使得无风险利率降低。Weil 还指出，如果个体偏好是递减的、严格谨慎的，由市场不完备导致的消费增长的额外风险也可以用来解释股票溢金难题，因为这部分额外风险使得股票对个体投资者来说要比对“代表性”消费者更缺少吸引力。

遗憾的是两期模型并不能很好地刻画个体的投资行为，因为两期模型中个体只进行一次投资，个体收入的波动完全反应到他的消费上，而真实经济中个体可以通过动态自我保险[1]来减轻由收入波动所引起的消费波动。也就是说在无穷期经济中，个体可以通过动态自我保险，而不是增加过多的储蓄来平滑消费，所以市场不完备对利率造成的影响是很小的。Huggett（1993）和 Heato 和 Lucas（1995b）通过数据分析也得到了同样的结论。但是如果收入冲击是永久的，情况便会完全不同。Constantinides 和 Duffie（1996）认为，在永久性冲击下动态自我保险是没有任何作用的，收入波动会完全反应到消费上，从而利率会比完备市场中的低。从以上分析可以看出，对无风险利率难题的研究实际上可归结到分析持续多久的冲击才是不可分散的，但由于数据的有限目前还很难将冲击进行分类。市场不完备对股票溢金难题的解释与无风险利率难题的解释非常相似。如果收入冲击是暂时的，个体可以通过动态自我保险使其消费和完备市场下的消费非常近似，从而资产价格和 Mehra-Prescott 模型中的价格非常近似；如果收入冲击是永久的，则市场不完备就有可能解释股票溢金难题。

2、引入市场摩擦

在 Mehra-Prescott 的讨论中，市场被假定是无摩擦的，但真实经济中个体不可能无限制地借贷和卖空，也不可能无成本地进行交易，而且并非所有个体都会进行资产交易，即真实经济中市场是有摩擦的。下面引入 4 种类型的摩擦来解释股票溢金难题和无风险利率难题。

（1）借贷和卖空限制：

许多经济学家认为，市场无摩擦的假定忽略了一个很重要的因素，那便是真实经济中由于有借贷和卖空的限制，投资者通常不能将未来的收入全部资本化。这种借贷和卖空的限制使得信贷需求缩减，均衡利率下降；

[1]动态的自我保险是指个体通过在借贷市场上借贷来减缓收入波动对消费的冲击。在最低收入除以利率的值小于借款的上界以及收入的冲击是暂时的假设下，个体由于借贷而导致破产的概率几乎为零。

约束越紧，均衡利率也会越小。Huggett（1993） 以及 Heato 和 Lucas（1995，1996）的数据分析也得出了同样的结果。但是 Heato 和 Lucas（1995,1996）认为，借贷和卖空的限制并不能解决股票溢金难题。因为如果投资者在债券市场上受到约束，那么在股票市场上同样也会受到约束；反之亦然。债券市场上的限制使得无风险利率降低，股票市场上的限制也会使风险资产的回报率下降，这样便无法得出所希望的较高的股票溢金。

（2）交易成本的引入

在真实经济中，进行资产交易时必须交付一定数额的交易费用，由此自然可以想到，交易成本的引入是否对解释上述两个难题会有所帮助。Kocherlakoto（1996）给出了一个简单的例子：设股票红利为 d ，价格恒为 p ，其回报率为 $r^s = d/p$ ，买卖股票的交易成本为 $p\tau$ ，设短期债券的回报率为 r^b。如果投资者持有股票的期限为无穷, 由无套利条件可以计算出股票溢金的上界满足：$r^s - r^b \le \tau r^b$。该式表明风险资产的回报率不能比无风险资产回报率高出很多，因此交易成本的引入并不能很好地解释股票溢金难题。Aiyagari 和 Gertler（1991）以及 Heaton 和 Lucas（1995a）发现，要采用交易成本来解释股票溢金难题，必须要求股票交易和债券交易的成本相差很大，而关于这方面的证据很不充分。

（3）市场分割的引入

Mehra-Prescott 模型中有一个关键的处理方法是将人均消费代替个体消费。 Mankiw 和 Zeldes（1991）指出，在美国只有百分之三十的人拥有股票，由于只有一部分人投资于股票市场，经济中的个体被分为两部分：股票持有者和非股票持有者，因此代入一阶条件的应该是股票持有者的人均消费（Campbell 1993）。因为股票持有者的消费波动大于非股票持有者的消费波动，所以将市场分割后有利于解释股票溢金难题。但 Mankiw 和 Zeldes（1991）同时指出，引入市场分割后，股票持有者比非股票持有者所面临的额外消费波动并不足以解释百分之六的风险溢金，所以市场分割引入了股票溢金难题仍然存在。

（4）货币的引入

Ravi 和 Coleman(1996)从交易服务的角度考虑了股票溢金难题。由于除法定货币外，还有许多资产也可以促进交易，从而影响其回报率，例如：短期国债、货币市场互助基金等。根据这一思想，Ravi 和

Coleman（1996）建立了一个货币模型。他们假定个体购买商品可以通过三种方式来支付：现金支付，支票支付和信用卡支付。其中支票支付额度由个体所拥有的债券数量决定，从而债券具有促进交易的功能，个体拥有债券不仅可以获得无风险利率回报，还可以带来交易便利。债券的这一功能使得个体对债券的需求上升，无风险利率下降；由于股票不能带来交易便利，所以股票和债券的期望回报率差上升。遗憾的是，实际数据模拟表明，该模型仍只能部分地解释这两个难题。

（5）税收调整

在 Mehra 和 Prescott（1985）的讨论中没有考虑到税率改变、政策管制和制度变化对资产市场的影响，McGrattan 和 Prescott(2001、2003)对股票溢金难题给出了一个基于税率调整的解释。他们发现，自 1960 年后美国的公司税率几乎没有变化，而个体收入税率下降显著，且税率的下降绝大部分是不可预测的，这大致股票价格产生了大的非预期的增加。粗略估计，1960—2000 年间由此而导致股票价格翻了一番，相应地股票回报率也显著提高。另外，假定个体的债券持有具有流动性动机，债券回报将较低，相应地股票溢金也就很大。因此他们认为，至少在战后股票溢金难题并不存在。

需要说明的是，这一种解释并非基于股票的风险，因此将较高的股票溢金归因于税率变化，而不是股票的超额风险。这种解释的潜在问题是，尽管战后边际税率急剧下降，但应用于边际投资者(marginal investor)的税率并没有同步下降，这样定价时就必须估计应用于边际投资者的税率，但估计的精确性是一个问题。

4.4.3 小结

股票溢金难题和无风险利率难题这两个问题的研究对宏观经济学来说是十分重要的。因为无风险利率难题说明我们还不知道为什么在利率如此低的情况下人们还要储蓄，表明我们的模型中可能忽略了影响总储蓄的某些重要因素。而股票溢金难题说明我们还不了解为什么在股票回报率较高的情况下人们仍不愿意投资于股票。如果没有这两个问题的很好解决我们便无法真正解决宏观经济学的很多问题。从本节中提到的各种解决途径来看，许多方法都可以得到比标准模型中更高的储蓄，从而可以对无风险利率难题作出较圆满的回答。然而对于股票溢金难题的回答则要困难许多。

在整篇文章中，几乎还没有一种方法能从理论和实践检验上对股票溢金难题作出合理解释。虽然我们还没有找到能圆满解决两个难题的方法，但是在对这两个问题的研究中所出现的各种思想对资产定价模型的发展以至对宏观经济学的发展都有很大的推动作用。

习题：

1、在图 4.2.1 中，试通过对长生命证券的动态管理，我们可以构造出关于 t=2、事件 ω_5 的或有权益。