CHAPTER 3

内生增长模型

上海财经大学

内容提要

- 本章主要讨论劳动效率或知识如何生产。
  - 研发模型的基本假设、动态特征和结论。
  - 罗默模型的基本假设、动态特征和结论。
  - 克莱默模型的简要介绍。

研发（R&D）模型

- 假设：
  - 时间是连续的；
  - 经济中存在两个部门：产品生产部门和研发部门；
  - 劳动和资本用于研发部门的外生比例分别为 a_L 和 a_K；
  - 储蓄率、人口增长率、折旧率外生不变；
  - 生产函数为 C-D 函数。
- 生产：

$$Y(t) = [(1-a_K)K(t)]^{\alpha}[A(t)(1-a_L)L(t)]^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$$

$$\dot{A}(t) = B[a_K K(t)]^{\beta}[a_L L(t)]^{\gamma}A(t)^{\theta}, \quad B>0, \quad \beta\geq 0, \quad \gamma\geq 0.$$

$$\dot{K}(t) = sY(t)-\delta K(t), \quad 0<s<1.$$

$$\dot{L}(t) = nL(t), \quad n\geq 0.$$

简化模型

- 假设没有资本：

$$Y(t) = A(t)(1-a_L)L(t),$$

$$\dot{A}(t) = B[a_L L(t)]^{\gamma}A(t)^{\theta}, \quad B>0, \quad \gamma\geq 0.$$

- A 的增长率为 $g_A(t)\equiv\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = Ba_L^{\gamma}L(t)^{\gamma}A(t)^{\theta-1}$

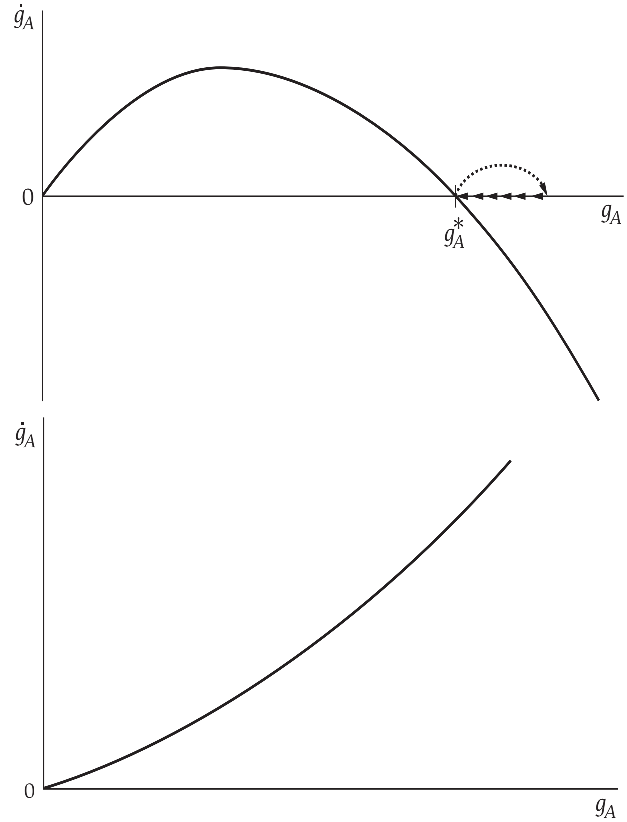
$$\frac{\dot{g}_A(t)}{g_A(t)} = \gamma n+(\theta-1)g_A(t)$$

$$\dot{g}_A(t) = \gamma n g_A(t)+(\theta-1)[g_A(t)]^2$$

- 产出增长率为：$g_Y(t)=g_A(t)+n$，人均产出增长率为 $g_A(t)$。
- a_L 上升将会导致 g_A 上升，即 A 增加得更快。
- 同样，人口规模会影响知识的增长率 $g_A(t)$。
- 人口正增长是长期经济增长所必需的，并且长期增长率随人口增长率递增。

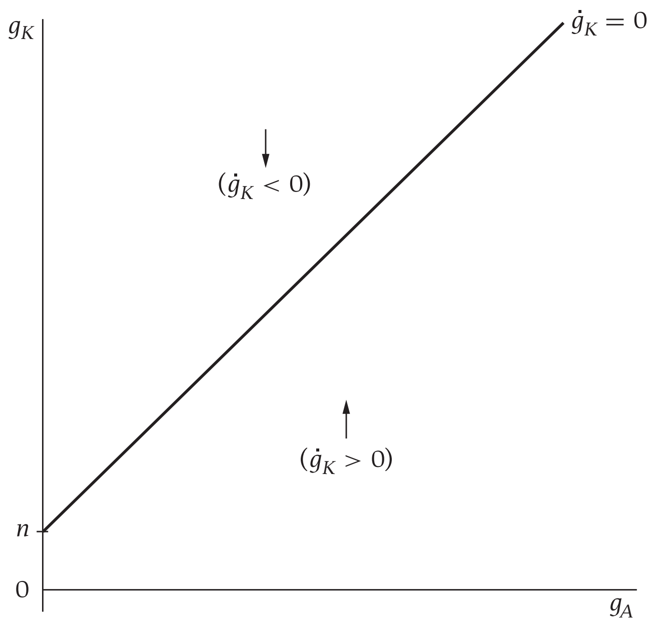
θ 不同取值下的情形

- 若 $\theta < 1$，则 $g_A(t)$ 收敛于 $g_A^* = \frac{\gamma n}{1-\theta}$，$a_L$ 上升并不影响该增长率。
- 若 $\theta > 1$，则 $\dot{g}_A$ 恒为正，因此知识增长率 g_A 不断上升。
- 若 $\theta = 1$，如果人口增长率 $n = 0$，则经济在任何初始点均可以稳定增长，a_L 影响长期增长率。此时模型也称为**线性增长模型**。



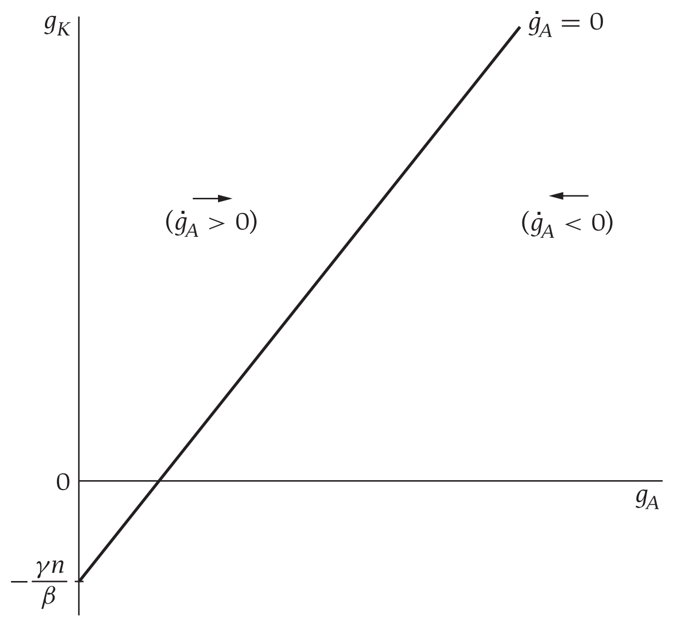
研发模型的一般形式：资本的运动方程

- $\dot{K}(t) = s\left[(1-a_K)K(t)\right]^{\alpha}\left[A(t)(1-a_L)L(t)\right]^{1-\alpha} - \delta K(t)$
- $g_K(t) \equiv \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \equiv c_K\left[\frac{A(t)L(t)}{K(t)}\right]^{1-\alpha} - \delta$
- $\frac{\dot{g}_K(t)}{g_K(t)+\delta} = (1-\alpha)\left[g_A(t) + n - g_K(t)\right]$。



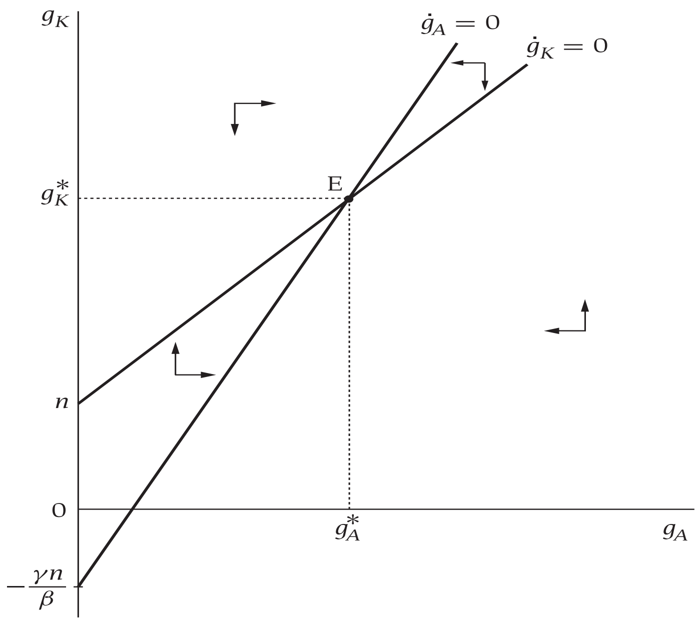
研发模型的一般形式：知识的运动方程

- $\dot{A}(t) = B\left[a_K K(t)\right]^{\beta}\left[a_L L(t)\right]^{\gamma} A(t)^{\theta}$，
  $g_A(t) \equiv \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = B a_L^{\gamma} a_K^{\beta} K(t)^{\beta} L(t)^{\gamma} A(t)^{\theta-1}$。
- $\frac{\dot{g}_A(t)}{g_A(t)} = \beta g_K(t) + \gamma n + (\theta-1) g_A(t)$。



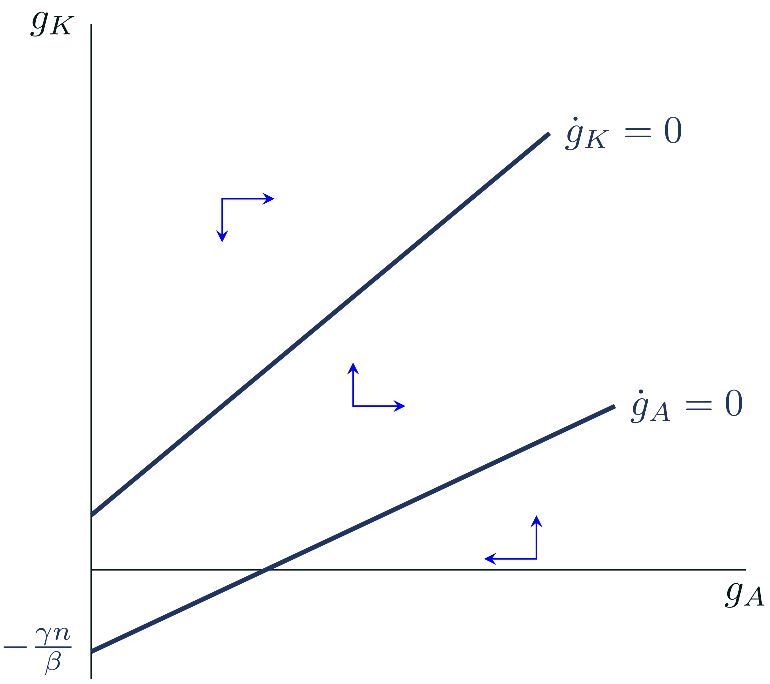
情形 1：$\beta + \theta < 1$

- $\beta + \theta < 1$，则 $\dot{g}_A = 0$ 线的斜率 $\frac{1-\theta}{\beta}$ 大于 $\dot{g}_K = 0$ 线的斜率 1。
- 均衡是稳定的：$g_K^* = g_A^* + n$，$g_A^* = \frac{\beta+\gamma}{1-(\beta+\theta)} n$。
  $g_Y^* = \alpha g_K^* + (1-\alpha)\left[g_A^* + n\right] = g_K^*$。



情形 2：$\beta+\theta>1$

- $\beta+\theta>1$，则 $\dot{g}_A=0$ 线的斜率 $\frac{1-\theta}{\beta}$ 小于 $\dot{g}_K=0$ 线的斜率 1。
- 经济的增长率最终将持续增加，模型不存在均衡。



知识的性质与研发资源配置

- 前面的分析假设 s、a_L 和 a_K 是外生的。那么 a_L 和 a_K 如何确定?
- 知识的性质：
  - 非竞争性：知识的生产和配置不能由竞争性市场决定。
  - 排他性：知识自身的特性和知识产权制度。
- 影响资源配置于知识生产的因素：
  - 基础科学研究：Phelps(1966) 和 Shell（1966）研究了基础研究的最优补贴制度。
  - 民间研发与创新。研发具有三种外部性：
    - **消费者剩余效应**：获得专利授权的个人/企业可以得到剩余。
    - **偷生意效应**：开发先进技术会降低现有技术的吸引力，损害现有技术所有者的利益。
    - **研发效应**：创新的收益来自知识在产品生产中发挥作用，而并不直接来自对新知识生产的促进作用。
  - 创新环境：
    - 市场规模。
    - 报酬递减程度。
    - 产权保护制度。
  - 干中学。

干中学模型

- 生产函数：$Y(t) = K(t)^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$，其中，$A(t) = BK(t)^{\phi}$。$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$，$\dot{L}(t) = nL(t)$。

$$\dot{K}(t) = sY(t) = sB^{1-\alpha}K(t)^{\alpha+\phi(1-\alpha)}L(t)^{1-\alpha}$$

  - 如果 $\alpha + \phi(1-\alpha) < 1$，即 $\phi < 1$，则经济的长期增长率是人口增长率的函数，$g_K^* = \frac{n}{1-\phi}$。
  - 如果 $\phi > 1$，或者 $\phi = 1$ 且 $n > 0$，则经济存在爆炸性增长。
  - 如果 $\phi = 1$ 且 $n = 0$，则经济存在稳定增长。此时 $Y(t) = bK(t)$，$\dot{K}(t) = sbK(t)$。
- 储蓄率影响长期增长：
  - 资本增加不仅直接提高产出，还间接通过促进新知识的生产而提高所有资本的生产效率。
  - 此类模型通常被称为AK **模型**（生产函数中的 b 经常用符号 A 来表示）。

罗默模型

- 罗默模型中，知识生产的动力来自民间研发与创新。
- 和干中学模型不同，知识并不需要伴随产品生产进行积累，而是有一个独立的生产函数。
- 简化假设：
  - 人口数量固定，没有物质资本。
  - 家庭劳动禀赋固定，寿命无限，劳动供给无弹性。
  - 厂商包括中间产品厂商和最终产品厂商。
  - 最终产品厂商是竞争性的，其生产需要使用 $(0, A(t))$ 区间上的所有创意对应的中间投入品。
  - 中间产品厂商是专利持有人，其生产分为两个部门：
    - 知识生产或研发部门完全竞争，可以自由进入。
    - 中间产品产品生产部门是垄断竞争，利用专利/技术/创意/知识进行生产，可获得垄断利润。
  - 劳动市场是竞争性的，中间品厂商和最终品厂商支付的工资相等。
  - 最终产品只能用于消费。

最终产品的生产

- CES 生产函数 [伊瑟（Ethier，1982）]:

$$Y(t) = \left[\int_0^{A(t)} y(i,t)^{\phi}\, di \right]^{\frac{1}{\phi}},\ 0 < \phi < 1.$$

  - 边际替代弹性:

$$\sigma = -\frac{d\ln\left(\frac{y(1)}{y(2)}\right)}{d\ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} = \frac{1}{1-\phi}, \quad \text{其中} f_i(y_i) = \left(\frac{Y}{y(i)}\right)^{1-\phi}.$$

    - $\phi \to 1 \Rightarrow \sigma = \infty$，线性生产函数，完全替代。
    - $\phi \to 0 \Rightarrow \sigma = 1$，C-D 生产函数。
    - $\phi \to -\infty \Rightarrow \sigma = 0$，Leontif 生产函数，完全互补。

最终产品的生产

- 最终品厂商的最大化问题:

$$\max_{y(i)} \left[\int_0^{A(t)} y(i,t)^{\phi}\, di \right]^{\frac{1}{\phi}} - \int_0^{A(t)} p(i,t)\, y(i,t)\, di,\ i \in (0, A(t)).$$

- 一阶条件为:

$$p(i,t) = \left(\frac{Y(t)}{y(i,t)}\right)^{1-\phi}$$

- 投入要素需求函数为:

$$y(i,t) = p(i,t)^{-\sigma}\, Y(t)$$

- 需求弹性为 $-\sigma = \frac{1}{\phi-1}$。

中间产品的生产

- 生产函数：$y(i,t) = l_Y(i,t)$，$L_Y = \int_0^{A(t)} l_Y(i,t)\, di$。
- 利润最大化问题：

$$\max_{l(i)} p(i,t)\, y(i,t) - w(t)\, l_Y(i,t) = \left[\left(\frac{Y(t)}{l_Y(i,t)} \right)^{1-\phi} - w(t) \right] l_Y(i,t)$$

- 一阶条件：

$$\phi \left(\frac{Y(t)}{l_Y(i,t)} \right)^{1-\phi} = w(t)$$

$$\Rightarrow p(i,t) = \frac{w(t)}{\phi}$$

  - 价格加成为 $\frac{1}{\phi}$ 或 $\frac{\sigma}{\sigma-1}$。
  - 中间品生产的利润为：

$$\pi(i,t) = \frac{1-\phi}{\phi} w(t)\, l_Y(i,t) = \frac{1}{\sigma-1} w(t)\, l_Y(i,t)$$

研发部门

- 知识的生产函数：$\dot{A}(t) = BL_A(t)\, A(t)$，假设 $A(0) > 0$。
  - $B > 0$，表示知识生产的效率，即产生新发明的难易程度。
  - 存量增长率是研发人口比例的增函数，

$$g_A(t) = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = BL_A(t)$$

  - 劳动市场：$L_Y(t) + L_A(t) = \bar{L}$
- 知识生产是自由进入的竞争市场，获得利润为零。

$$\pi_A(t) = p_A(t)\, \dot{A}(t) - w(t)\, L_A(t) = 0$$

$$p_A(t) = \frac{w(t)}{BA(t)}$$

研发部门

- 研发部门的专利价格为中间厂商生产部门可获未来利润流的现值。
- 中间产品厂商可以使用专利进行生产，也可机会成本为专利价格 $p_A(t)$，预期收益的现值为 $[\pi(t)+\dot{p}_A(t)]/r(t)$，最优决策满足：$\pi(t)+\dot{p}_A(t)=r(t)p_A(t)$。求解微分方程可得：

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_A(t)-r(t)p_A(t) &= -\pi(t) \\
\Rightarrow [\dot{p}_A(t)-r(t)p_A(t)]e^{-rt} &= -\pi(t)e^{-rt} \\
\frac{d\left(p_A(t)e^{-rt}\right)}{dt} &= -\pi(t)e^{-rt} \\
p_A(t)e^{-rt} &= \int_t^{\infty}\pi(\tau)e^{-r\tau}d\tau \\
p_A(t) &= \int_t^{\infty}\pi(\tau)e^{-r(\tau-t)}d\tau
\end{aligned}
$$

家庭部门

- 家庭行为类似于 Ramsey 模型：

$$
\max_c \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\ln c(t)\,dt,
$$

$$
s.t.\dot{x}(t)=w(t)+r(t)x(t)-c(t),\ \lim_{s\to\infty} e^{-\int_0^s r(t)dt}x(s)\geq 0
$$

其中 $\rho>0$ 为折现率，x 表示家庭的财富存量。

- Hamiltonian：$H=\ln c(t)+\lambda(t)[w(t)+r(t)x(t)-c(t)]$
- 最优问题的解满足以下条件：
  - 最优条件：$\frac{\partial H}{\partial c}=0\Rightarrow c(t)^{-1}=\lambda(t)\Rightarrow\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}=-\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$，
  - 欧拉方程：$\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}-\rho\lambda=0\Rightarrow\lambda(t)[r(t)-\rho]+\dot{\lambda}(t)=0$

$$
\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=r(t)-\rho
$$

  - 可行性条件：$\frac{\partial H}{\partial\lambda}=\dot{x}(t)=w(t)+r(t)x(t)-c(t)$
  - **横截条件**（TVC）：$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda(t)x(t)=0$。

均衡求解 I

- 产品市场均衡条件：$c(t) = C(t)/\bar{L} = Y(t)/\bar{L}$
- 对称均衡：$y(i,t) = l(i,t) = y(t) = l(t)$
  - 总产出：$Y(t) = A(t)^{\frac{1}{\phi}-1} L_Y(t)$
  - 增长率：$g_Y(t) = \frac{1-\phi}{\phi} g_A(t) + g_L(t)$
- 假设 $g_A(t)$ 为常数，则 $g_A = BL_A$。从而 $L_Y = \bar{L} - L_A$ 也是常数，$g_L = 0$，

$$g_Y = \frac{1-\phi}{\phi} BL_A = g_C = r - \rho$$

  可见：$r = \frac{1-\phi}{\phi} BL_A + \rho$。
- 根据最终产品生产商的零利润条件：
  $Y(t) = \int_0^{A(t)} p(i,t)\, y(i,t)\, di = \frac{w(t)}{\phi} L_Y$，$g_w = g_Y$。
- 中间产品生产商的利润：$\pi(t) = \frac{1-\phi}{\phi} w(t)\, l_Y(t) = \frac{1-\phi}{\phi} w(t) \frac{\bar{L}-L_A}{A(t)}$。

$$g_\pi = g_w - g_A = \frac{1-\phi}{\phi} BL_A - BL_A = \frac{1-2\phi}{\phi} BL_A$$

均衡求解 II

- $\phi < \frac{1}{2} \Rightarrow g_\pi > 0$
- $\phi > \frac{1}{2} \Rightarrow g_\pi < 0$
- 未来利润的现值：

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_t^\infty \pi(\tau)\, e^{-r(\tau-t)} d\tau \\ &= \int_t^\infty \pi(t)\, e^{g_\pi(\tau-t)} e^{-r(\tau-t)} d\tau \\ &= \pi(t)\, e^{(r-g_\pi)t} \int_t^\infty e^{-(r-g_\pi)\tau} d\tau \\ &= \frac{\pi(t)}{r-g_\pi} \end{aligned}$$

均衡求解 III

- 根据自由进入条件：$\frac{\pi(t)}{r-g_\pi} = \frac{1-\phi}{\phi}\frac{\bar{L}-L_A}{r-g_\pi}\frac{w(t)}{A(t)} = \frac{w(t)}{BA(t)}$ 可得

$$\begin{aligned} L_A &= \bar{L} - \frac{\phi}{1-\phi}\frac{1}{B}(r-g_\pi) \\ &= \bar{L} - \frac{\phi}{1-\phi}\frac{1}{B}\left(\frac{1-\phi}{\phi}BL_A + \rho - \frac{1-2\phi}{\phi}BL_A\right) \\ &= \bar{L} - \frac{\phi}{1-\phi}\left(\frac{\rho}{B} + L_A\right) \\ &= (1-\phi)\bar{L} - \frac{\phi\rho}{B} \end{aligned}$$

  - 由于上式不能保证为正，因此 $L_A = \max\left\{(1-\phi)\bar{L} - \frac{\phi\rho}{B}, 0\right\}$。
- 综合以上结果：$g_A = \max\{(1-\phi)B\bar{L} - \phi\rho, 0\}$，$g_Y = g_C = g_w = \frac{1-\phi}{\phi}g_A$，$g_\pi = \frac{1-2\phi}{\phi}g_A$。

经济增长的决定因素

- 影响经济增长率的参数包括 $\rho, \phi, B, \bar{L}$。
  - $\rho\uparrow$，家庭缺乏耐心，进入研发部门的工人减少，增长减慢。
  - $\phi\uparrow$，投入品之间的替代性 $\sigma\uparrow$，从事研发的工人减少，专利持有人的市场势力会削弱，并且新知识对产出的贡献下降，因此增速减小。
    - 如果 $\rho > \frac{1-\phi}{\phi}B\bar{L}$，则研发部门消失，经济增速为 0。
  - $B\uparrow$，知识生产部门的生产效率上升，并吸引更多工人进入研发部门，经济增速加快。
  - $\bar{L}\uparrow$，经济规模/可用劳动力增加，经济增速提高。(Kremer,1993)。

最优增长

- 分散均衡在不完全竞争下并不是社会最优的。
- 假设 $c(t) = e^{g_c t} c(0)$，其中 $g_c = \frac{1-\phi}{\phi} B L_A$，
  $c(0) = \frac{C(0)}{\bar{L}} = \frac{Y(0)}{\bar{L}} = A(0)^{\frac{1-\phi}{\phi}} \frac{\bar{L}-L_A}{\bar{L}}$

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln c(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln c(0) + g_c t]\, dt \\
&= \frac{\ln c(0)}{\rho} + \frac{g_c}{\rho^2} \\
&= \frac{1}{\rho}\left[\frac{1-\phi}{\phi} \ln A(0) + \ln \frac{\bar{L}-L_A}{\bar{L}} + \frac{1-\phi}{\phi}\frac{B}{\rho} L_A\right]
\end{aligned}
$$

最优增长

- 社会计划者的最优化问题

$$
\max_{L_A} \frac{1}{\rho}\left[\frac{1-\phi}{\phi} \ln A(0) + \ln \frac{\bar{L}-L_A}{\bar{L}} + \frac{1-\phi}{\phi}\frac{B}{\rho} L_A\right]
$$

- 一阶条件：

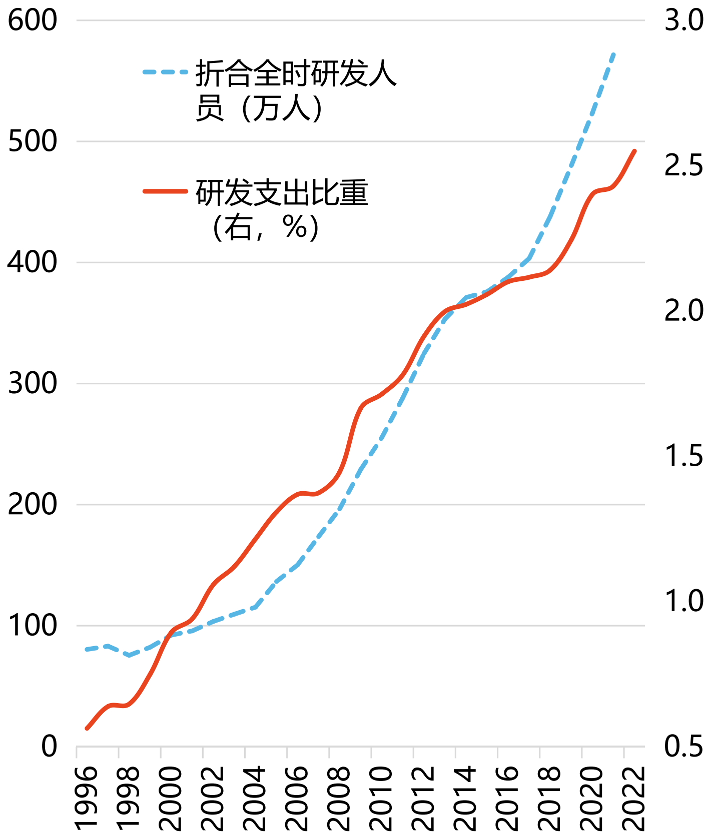
$$
\frac{1}{\bar{L}-L_A} = \frac{1-\phi}{\phi}\frac{B}{\rho} \Rightarrow L_A^{OPT} = \frac{\frac{1-\phi}{\phi}\frac{B}{\rho}\bar{L} - 1}{\frac{1-\phi}{\phi}\frac{B}{\rho}} = \bar{L} - \frac{\phi}{1-\phi}\frac{\rho}{B}
$$

- 对比分散均衡和社会最优可知：

$$
L_A^{EQ} = (1-\phi) L_A^{OPT} < L_A^{OPT}
$$

中国的研发和创新

- 我国明确提出建设创新型国家，并制定了相关政策。
  - 2006 年研发支出 3000 亿元，占 GDP 比重 1.37%。
  - 2022 年研发支出突破 3 万亿元，占比 2.55%。
- 大企业，民营企业，出口企业更具创新性。
  - 资产规模前 10% 的企业专利申请数占比超过 40%。
  - 民营企业和出口企业的专利比率即专利申请数量/资产总额更高。



人口增长与技术变迁

- 内生增长模型中，技术进步通常是人口数量的增函数。Kremer(1993) 认为，技术进步会进一步促进人口增长。
- 模型假设：
  - 产出取决于技术、劳动和土地资源：$Y(t) = T^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha}$。
  - 人口增长会促进新知识的积累：$\dot{A}(t) = BL(t)A(t)^{\theta}$。
  - 马尔萨斯假设：人口增长会使得人均收入仅能维持生存：$Y(t) = \bar{y}L(t)$。
- 求解模型：$L(t) = \frac{1}{\bar{y}}T^{\alpha}[A(t)L(t)]^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{\bar{y}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} TA(t)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$

$$g_L = \frac{1-\alpha}{\alpha}g_A = \frac{1-\alpha}{\alpha}BL(t)\left[\bar{y}^{\frac{1}{1-\alpha}}T^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}L(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]^{\theta-1}$$
$$\equiv DL(t)^{\psi}, \quad 其中\psi \equiv 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\theta)$$

  - 当 $\theta = 1$ 时，$g_L = \frac{1-\alpha}{\alpha}BL(t)$。
  - $\theta > 2 - \frac{1}{\alpha}$，则 g_L 是 $L(t)$ 的增函数。

实证结果

■ Kremer(1993) 使用公元前 100 万年到 1990 年的人口数据，得到人口增长率与人口数量间的强正相关关系：

$$n_t = \underset{(0.0355)}{-0.0023} + \underset{(0.026)}{0.524}\, L_t, \quad R^2 = 0.92, \quad D.W. = 1.10$$