金融经济学
第五讲

上海财经大学金融学院

第五章 静态套利定价理论

§5.1 套利机会和无套利原理

- 一．、套利机会
- 定义：一个投资组合被称为套利组合，如果其成本为零 。
- 定义：称一个投资组合是第一类套利机会，如果它具有非正的成本，却在将来有可能获得正的收益，获得负的收益的可能为零。
- 定义：称一个投资组合是第二类套利机会，如果其成本为负，未来收益非负。
- 定义：极限情形下的套利机会，是指一个具有期望回报率的下界大于零、方差收敛到零的套利组合序列。（无成本，且几乎无风险地得到正的回报）
- 无套利原理： 经济中并不存在套利机会，即使存在，也为投资者所快速消除

第五章 静态套利定价理论

- 二·、期权价格关系
- 定义：一个或有权益（或衍生资产）是期末回报完全由其它资产回报率决定的资产。包括远期合约 **(forward contract)**、期权等。
- 例如：一份远期合约 **(forward contract)** ，指在期末以期初约定的价格购买特定资产的义务。假定该资产的随机回报为 $\tilde{y}$ ，操作价格为 **X** ，则该远期合约的随机回报为：
- $$\tilde{y}_f = \tilde{y} - X$$
- 例如：一份一期的看涨期权 **(call option)** ，代表了一种在期末以特定价格购买指定资产的权利。如果标的资产的随机回报为 $\tilde{y}$ ，期权的操作价格为 **X** ，则该期权的随机回报为：
- $$\tilde{y}_c = \max(\tilde{y} - X, 0)$$

第五章 静态套利定价理论

- 例如：一份一期的看跌期权 (put option) ，代表了一种在期末以特定价格卖出指定资产的权利。如果标的资产的随机回报为 $\tilde{y}$，期权的操作价格为 X ，则该期权的随机回报为：

$$\tilde{y}_p = \max(X - \tilde{y}, 0)$$

- 假定期权的标的资产期初价格为 S_0，期末价格为 S_T，期权的执行价格为 K ，经济中的无风险利率为 r_f。记看涨期权价格为 $c(S_0,K)$，看跌期权价格为 $p(S_0,K)$，根据无套利定价原理，期权价格有如下性质：
- 性质 1 ： $c(S_0,K) \geq \max[S_0 - K/(1+r_f),0]$。
- 性质 2 ：看涨期权的价格是其执行价格的凸函数，即：
- $ac(S_0,K_1)+(1-a)c(S_0,K_2) \geq c(S_0,aK_1+(1-a)K_2)$，$a \in (0,1)$
- 性质 3 ：在相同操作价格 K 下，标的在 n 种资产构成的投资组合上的看涨期权的价格，要小于标的在各资产上的看涨期权的价格的相同权重的加权和，即：$c(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j S_{j0},K) \leq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j c(S_{j0},K)$ $\alpha_j \in (0,1)$

第五章 静态套利定价理论

- 性质 4 ：（看跌 - 看涨平价关系） $S_0 + p = c + K/(1+r_f)$

§5.2 因子模型与 APT

- 一、因子模型
- 定义：因子模型 (factor model) 是指一种假设证券回报率仅与不同因子变化有关的经济模型。
- 因子模型的特点是：
- （ 1 ）因子模型中的因子系统地影响所有证券价格的经济因素；
- （ 2 ）证券回报率之间的相关性仅源于对因子变化的共同反应；
- （ 3 ）证券回报率中不能由因子模型解释的部分是该证券独有的部分，与其它证券独有部分无关。

第五章 静态套利定价理论

- 在因子模型中，资产的随机回报率可以表示为：
- $$\tilde{r}_i = \sum_{k=1}^{K} b_{ik} \tilde{F}_k + a_i + \tilde{\varepsilon}_i$$ ，
- 在这类模型中，资产风险可以分为因子风险和非因子风险，通过分散化投资可以缩小非因子风险。
- 根据因子的个数，因子模型可以分为单因子模型和多因子模型。
- 例如：
- **1**、单因子模型：**CAPM** 模型是一个单因子模型，因子为市场组合回报率（或切点组合回报率）。
- **2**、多因子模型：资产价格可能依赖于 **GDP** 增长率、利率水平、通货膨胀率与石油价格，则这些变量都可以当作因子。在实践中，通常可以选取与这些变量高度相关的资产或投资组合作为因子。

第五章 静态套利定价理论

- 在 **CAPM** 模型中，我们要求二基金分离成立，即：对于任意可行投资组合 **p** 的随机回报率满足：
- $$\tilde{r}_p = (1-\beta_{pe})r_f + \beta_{pe}\tilde{r}_e + \tilde{\varepsilon}_{pe}$$
- 其中 **e** 为切点组合，$\mathrm{cov}(\tilde{r}_e, \tilde{\varepsilon}_{pe}) = E[\tilde{\varepsilon}_{pe}] = 0$，且 $E[\tilde{\varepsilon}_{je} \mid \tilde{r}_e] = 0$，$j = 1,2,\dots,N$。
- 如果上述条件不成立，直观地我们可以想到，通过分散化投资也应该可以将非系统风险消除，从而投资组合的期望收益率之间存在着类似的线性关系。 **Ross(1976)** 创立的套利定价理论（ **APT** ）告诉我们，如果经济中存在着大量的资产，并且不存在（极限情形下的）套利机会，那么在绝大多数资产的期望回报率之间仍然存在着一种近似线性关系。 **Ross(1976)** 的 **APT** 是一种多因子模型。

第五章 静态套利定价理论

- 二、 **Ross 的 APT 理论**
- **1**、模型建立
- 考虑一个资产数上升的经济序列，假定市场是完全竞争的、无摩擦的，投资者是理性的、不饱和的，当经济中存在套利机会时，投资者会通过构造套利组合来增加自己的财富。假定在第 **n** 个经济中，存在 **n** 个风险资产和一个无风险资产，风险资产回报率由一个 **K-** 因子模型生成：

$$\tilde{r}_j^n = a_j^n + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \tilde{\delta}_k^n + \tilde{\varepsilon}_j^n \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

- ， 。 **(5.1)**
- 满足 ： $E[\tilde{\varepsilon}_j^n] = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$
-

$$\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j^n) \le \overline{\sigma}^2 > 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$E[\tilde{\varepsilon}_j^n \tilde{\varepsilon}_l^n] = 0 \qquad l \ne j$$

第五章 静态套利定价理论

- 1、不存在非因子风险的情形
- 定理 5.1 ：当 $\tilde{\varepsilon}_j^n \equiv 0, \forall j$，即风险资产回报完全由 K 因子和无风险资产生成时，如果经济中不存在套利机会，则资产回报率之间存在一个严格的线性关系：
- $$E[\tilde{r}_j^n] - r_f = \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n (E[\tilde{\delta}_k^n] - r_f) \quad (5.3)$$ 。
- 2、存在非因子风险的情形
- 引理 5.1 ：对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，$N(n)$ 为满足 $|a_j^n - (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f| \geq \varepsilon$ 的资产数，如果极限情形下的套利机会不存在，则存在一个 $\bar{N} < +\infty$，对任意的 $n > 0$，$N(n) \leq \bar{N}$ 成立。
- 定理 5.2 （ Ross(1976) 的 APT ）：当经济中的资产数足够多，且不存在极限情形下的套利机会时，对绝大多数资产而言，其期望回报率之间存在一个近似线性关系。

第五章 静态套利定价理论

- 三、均衡套利定价理论
- 在 Ross(1976) 的 APT 理论中，当资产数足够大时，近似线性关系对绝大多数资产都成立；但对特定的资产而言，对这种线性关系的偏离可能很大，因此对任意给定的风险资产，我们希望来估计其期望回报率对线性关系偏离的程度。这方面的研究由 Dybvig(1983)、 Crinblatt &Titmam(1983) 和 Connor(1984) 等给出。
- 1、 模型假设
- 假定经济中存在 N 种风险资产和一种无风险资产，其回报率分别为
- $\tilde{r}_j, j=1,2,\ldots,N$ 和 r_f。假定风险资产严格地正供给，风险资产回报率由 K- 因子模型生成：
- $$\tilde{r}_j = a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_j \qquad j=1,2,\ldots,N$$ 。
- 其中 $E[\tilde{\varepsilon}_j]=0$，$\tilde{\varepsilon}_j \geq -1$，$(\tilde{\varepsilon}_1,\tilde{\varepsilon}_2,\ldots,\tilde{\varepsilon}_N,\tilde{\delta}_1,\ldots,\tilde{\delta}_K)$ 相互独立。

第五章 静态套利定价理论

- 假定效用函数单调增、严格凹、三次连续可微，$u_i'''(z) \geq 0$，且所有个体的绝对风险回避系数存在一个上界，即：
- $R_A^i(z) = -u_i''(z)/u_i'(z) \leq A$ ，对 i 成立。
- 假定市场是均衡的，经济中不存在套利机会。

- 2、 均衡套利定价理论
- 定理（均衡 APT ）：在上述假定下，对任意的风险资产 j ，我们有：
- $$|E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k] - r_f)| \leq \bar{A} e^{\bar{A} S_j / I} Var(\tilde{\varepsilon}_j) S_j / I$$
- 其中 S_j 为投资在风险资产 j 上的市场总值， I 为投资者总数。