第三章 静态资本资产定价理论[1]

资本资产定价模型（CAPM）是60年代由Linter(1965,1969)、Mossin(1965)和Sharpe(1964)等发展起来的。该理论认为，如果人们对预期收益率和风险的预测相同，并且都愿意持有有效投资组合，那么均衡时任意资产的风险溢价等于该资产的β系数和市场组合的风险溢价之积。CAPM理论之所以重要，是基于如下两个原因：（1）、该理论为目前广泛采用的一类消极投资法（指数方法）提供了理论根据，该投资方法完全按照市场指数构成的组合权重来被动地进行投资；同时该方法为衡量积极的投资管理策略业绩提供了一个简单可行的基准。（2）、该理论给出了各种财务应用中对预期收益的估计方法，为公司理财决策提供了理论依据（见Black、Jensen和Scholes(1972)，Fama和MacBeth(1973)，Bodie和Merton(1997)）。

§3.1 市场组合

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。

3.3.1 不存在无风险资产的情形

假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产，假定其中N种风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这N种风险资产随机回报率的线性组合。假定经济中存在I位投资者，个体i的初始财富量$W_0^i > 0$，w_{ij}为个体i投资在资产j上的财富份额，则个体投资在无风险资产上的财富份额为$w_{i0} = 1 - \sum_{i=1}^{I} w_{ij}$。记经济中总的初始财富量为$W_{m0} = \sum_{i=1}^{I} W_0^i$，整个市场投资在第$j$种资产上的市场份额为$w_{mj}$，则$w_{mj}$满足：

$$\sum_{i=1}^{I} w_{ij} W_0^i = w_{mj} W_{m0}\text{，} j=1,2,\ldots N\text{。} \qquad (3.1.1)$$

[1]本章的编写，主要参考了Huang和Litzenberger(1998)、杨云红（2000）、Leroy, 和Werner (2003)、王江(2006)等教材及相关论文。

整理得：

$$w_{mj}=\sum_{i=1}^{I}w_{ij}\frac{W_0^i}{W_{m0}}\text{，j=1,2,…N。}\qquad(3.1.2)$$

以向量形式表示，我们有：

$$\begin{pmatrix}w_{m0}\\ \vdots\\ w_{mN}\end{pmatrix}=\frac{W_0^1}{W_{m0}}\begin{pmatrix}w_{10}\\ \vdots\\ w_{1N}\end{pmatrix}+\frac{W_0^2}{W_{m0}}\begin{pmatrix}w_{20}\\ \vdots\\ w_{2N}\end{pmatrix}+\cdots+\frac{W_0^I}{W_{m0}}\begin{pmatrix}w_{I0}\\ \vdots\\ w_{IN}\end{pmatrix}\text{。}\qquad(3.1.2`)$$

因此市场组合的权重向量是个体投资组合权重向量的凸组合。记个体i的投资组合为p_i，其随机回报率向量为$\tilde{r}_{p_i}$，记$\lambda_i=W_0^i/W_{m0}$，记市场组合的随机回报率为$\tilde{r}_m$，则市场组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_m\equiv\sum_{j=1}^{N}w_{mj}\tilde{r}_j=\sum_{i=1}^{I}\lambda_i\tilde{r}_{p_i}\text{。}\qquad(3.1.3)$$

即市场组合回报率是个体投资组合回报率的凸组合。

3.1.2 存在无风险资产的情形

假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产和一种无风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种风险资产随机回报率的线性组合，假定无风险资产的回报率为r_f。假定经济中存在I位投资者，个体i的初始财富量$W_0^i>0$，w_{ij}为个体i投资在资产j上的财富份额，以$j=0$代表无风险资产，则w_{i0}代表在无风险资产上的财富份额，个体投资在无风险资产上的财富份额为$w_{i0}=1-\sum_{i=1}^{I}w_{ij}$。记经济中总的初始财富量为$W_{m0}=\sum_{i=1}^{I}W_0^i$，整个市场投资在第$j$种资产上的市场份额为$w_{mj}$，则$w_{mj}$满足：

$$\sum_{i=1}^{I}w_{ij}W_0^i=w_{mj}W_{m0}\text{，j=0,1,2,…N。}\qquad(3.1.4)$$

整理得：

$$w_{mj} = \sum_{i=1}^{I} w_{ij} \frac{W_0^i}{W_{m0}}，j=0,1,2,\ldots N。 \qquad (3.1.5)$$

以向量形式表示，我们有：

$$\begin{pmatrix} w_{m0} \\ \vdots \\ w_{mN} \end{pmatrix} = \frac{W_0^1}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{10} \\ \vdots \\ w_{1N} \end{pmatrix} + \frac{W_0^2}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{20} \\ \vdots \\ w_{2N} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{W_0^I}{W_{m0}} \begin{pmatrix} w_{I0} \\ \vdots \\ w_{IN} \end{pmatrix}。 \qquad (3.1.5`)$$

因此市场组合的权重向量是个体投资组合权重向量的凸组合。类似地，记个体i的投资组合为p_i，其随机回报率向量为$\tilde{r}_{p_i}$，记$\lambda_i = W_0^i / W_{m0}$，记市场组合的随机回报率为$\tilde{r}_m$，则市场组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_m = \sum_{j=1}^{N} w_{mj} \tilde{r}_j + (1 - \sum_{j=1}^{N} w_{mj}) r_f = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \tilde{r}_{p_i}。 \qquad (3.1.6)$$

即市场组合回报率是个体投资组合回报率的凸组合。

§3.2 资本资产定价模型（CAPM）

3.2.1 零-贝塔 CAPM

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中不存在无风险资产，风险资产可以无限卖空。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。

在上述假定下，在标准偏差-期望回报率($\sigma(\tilde{r})$ -$E[\tilde{r}]$)平面内组合前沿是一条双曲线，有效组合是双曲线上面半支，且有效组合的凸组合也是有效组合。由于投资者都选择有效组合，所以市场组合也是一个有效组合，位于双曲线的上支。考虑到不可能所有投资者都选择最小方差投资组合 mvp，所以市场组合也不可能是最小方差投资组合。

一、证券市场线(Security Market Line)

由于市场组合是一个不等于 mvp 的有效组合，根据性质 2.2.7，对任意可行投资组合q，我们有：

$$E[\tilde{r}_q] = (1-\beta_{qm})E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}E[\tilde{r}_m]。 \qquad (3.2.1)$$

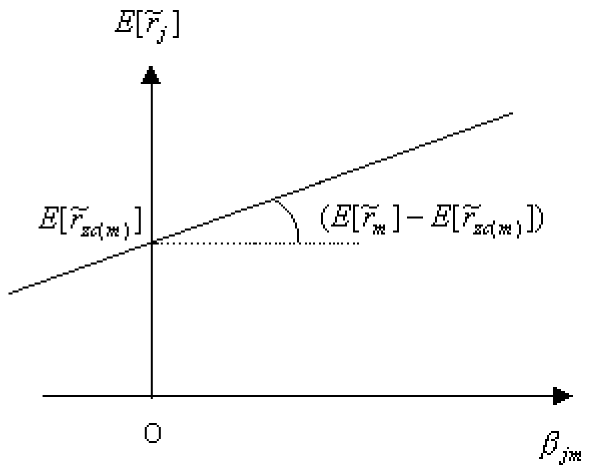
因为所有风险资产都是可行投资组合，所以对$\forall j = 1,2,\cdots,J$，我们有：

$$E[\tilde{r}_j] = (1-\beta_{jm})E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{jm}E[\tilde{r}_m]\text{，} \qquad (3.2.2)$$

方程式(3.2.1)和(3.2.2)蕴涵，所有风险资产（和可行投资组合）的期望回报率依赖于该资产（可行投资组合）期望回报率与市场组合期望回报率的协方差。(3.2.2)可以进一步改写为：

$$E[\tilde{r}_j] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{jm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])\text{，} \qquad (3.2.3)$$

因此所有风险资产和可行组合的期望回报率都位于同一条直线上，该直线被称为证券市场线，如图 3.2.1 所示。



（图 3.2.1）：完全风险资产下市场组合是有效组合时的证券市场线

二、零-贝塔 CAPM

定理：**3.2.1**：在上述假定下，由于市场组合是一个有效组合，其零-协方差组合$zc(m)$是一个无效组合，所以对于任意可行投资组合q，其期望回报率满足：

$$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])\text{，} \qquad (3.2.4)$$

$$E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0\text{，} \qquad (3.2.5)$$

关系式(3.2.4)和(3.2.5)称为零-贝塔 CAPM (Zero-Beta Capital Asset Pricing Model)，由 Black(1972)和 Lintner(1969)给出。零-贝塔 CAPM 蕴涵，均衡时资产和可行投资组合的期望回报率仅反映了同市场组合相关的那部分风险。

3.2.2 传统 CAPM

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中存在许多风险资产和一种无风险资产，风险资产可以无限卖空，无风险资产可以以一个无风险利率r_f无限制地借贷。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。

在上述假定下，在标准偏差-期望回报率($\sigma(\tilde{r})$ -$E[\tilde{r}]$)平面内组合前沿是两条射线，有效组合是两条射线的上面一支，且有效组合的凸组合也是有效组合。由于投资者都选择有效组合，所以市场组合也是一个有效组合，位于两条射线的上面一支。根据性质 2.3.2，我们有如下定理：

定理：**3.2.2**：对于任意可行投资组合q，有：

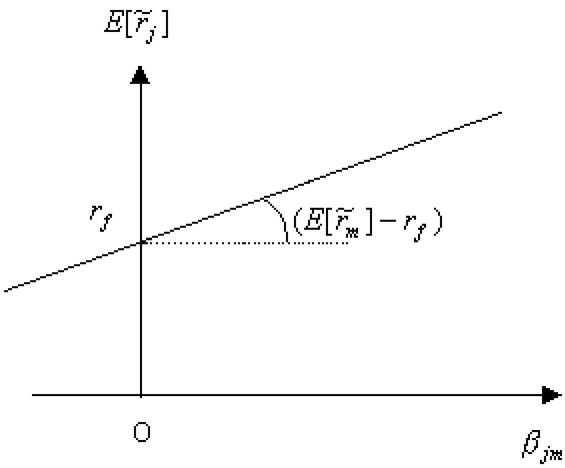
$$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - r_f), \qquad (3.2.6)$$

关系式(3.2.6)被称为传统资本资产定价模型（传统 CAPM），该模型由 Linter (1965)、Mossin(1965)和 Sharpe(1964)独立得到。在该模型中，任意投资组合的风险溢金等于该投资组合的贝塔系数乘以市场组合的风险溢金。

因为所有风险资产都是可行投资组合，所以对$\forall j = 1,2,\cdots,J$，我们有：

$$E[\tilde{r}_j] = r_f + \beta_{jm}(E[\tilde{r}_m] - r_f), \qquad (3.2.7)$$

在期望回报率-贝塔系数平面内，所有风险资产和可行组合都位于同一条直线上，即存在无风险市场的证券市场线上，如图 3.2.2 所示。



（图 3.2.2）：存在无风险资产时的证券市场线

§3.3 CAPM 的两个例子

假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收；假定信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中风险资产可以无限卖空，个体可以以相同的利率借贷。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。

假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产和一种无风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种风险资产随机回报率的线性组合，假定无风险资产的回报率为r_f。假定经济中存在I位投资者，个体i的初始财富量$W_0^i>0$，w_{ij}为个体i在资产j上的投资组合权重。

在上述假定下，当个体效用函数取二次多项式形式，或者资产回报率服从多变量正态分布时，则个体偏好有均值-方差效用函数表示，同时可以直接从个体最优决策推导出传统 CAPM，该工作由 Rubinstein(1976)给出。

3.3.1 效用函数取二次多项式时的 CAPM 推导

假定所有个体效用函数都取二次多项式形式，即：

$$u_i(\widetilde{W}_i) = a_i\widetilde{W}_i - \frac{b_i}{2}\widetilde{W}_i{}^2, \quad i = 1,2,\cdots,I。 \qquad (3.3.1)$$

个体i的最大化问题可以刻画为：

$$\max_{w_{ij}} E[u_i(\widetilde{W}_i)] = E[u_i(W_0^i(1 + r_f + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}(\tilde{r}_j - r_f)))]。 \qquad (3.3.2)$$

求解个体i的最大化问题，得一阶条件为：

$$E[(a_i - b_i\widetilde{W}_i)W_0^i(\tilde{r}_j - r_f)] = 0。 \quad j = 1,2,\cdots,N \qquad (3.3.3)$$

考虑到$E[AB] = E[A]E[B] + cov(A,B)$，所以上式可以改写为：

$$E[(a_i - b_i\widetilde{W}_i)](E[\tilde{r}_j] - r_f)] + cov(a_i - b_i\widetilde{W}_i, \tilde{r}_j - r_f) = 0。$$

整理得：

$$(\frac{a_i}{b_i} - E[\widetilde{W}_i])(E[\tilde{r}_j] - r_f) = cov(\widetilde{W}_i, \tilde{r}_j)。 \qquad (3.3.4)$$

将上式关于i求和，注意到：

$$\sum_{i=1}^{I}\widetilde{W}_i \equiv \widetilde{M} = W_{m0}(1 + \tilde{r}_m),$$

我们有：

$$(E[\tilde{r}_j] - r_f) = (\sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{b_i} - E[\widetilde{M}])^{-1}W_{m0}\,cov(\tilde{r}_m, \tilde{r}_j)。 \qquad (3.3.5)$$

其中W_{m0}和$\widetilde{M}$分别为市场上的初始财富总量和期末随机财富总量，$\tilde{r}_m$为市场回报率。对任意可行组合q，记其随机回报率为：

$$\tilde{r}_q = w_{qj}\tilde{r}_j$$

其中w_{qj}为该组合在资产 j 上的权重。在(3.3.5)两边乘上w_{qj}，然后对 j 求和，整理得：

$$(E[\tilde{r}_q]-r_f)=(\sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{b_i}-E[\widetilde{M}])^{-1}W_{m0}\,cov(\tilde{r}_m,\tilde{r}_q)\text{；}\qquad(3.3.6)$$

考虑到市场组合也是一个可行组合，因此有：

$$(E[\tilde{r}_m]-r_f)=(\sum_{i=1}^{I}\frac{a_i}{b_i}-E[\widetilde{M}])^{-1}W_{m0}\,var(\tilde{r}_m)\text{。}\qquad(3.3.7)$$

将(3.3.6)除以(3.3.7)，整理得：

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f)\text{。}$$

因此传统 CAPM 定价公式成立。

3.3.2 多变量正态分布下的 CAPM 推导

假定经济中风险资产回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$服从多变量正态分布，因此投资者期末随机财富$\widetilde{W}_i$，$i=1,2,\ldots,I$也服从多变量正态分布。个体i的最大化问题为：

$$\max_{w_{ij}}E[u_i(\widetilde{W}_i)]=E[u_i(W_0^i(1+r_f+\sum_{j=1}^{N}w_{ij}(\tilde{r}_j-r_f)))]\text{。}$$

求解上述最大化问题，得一阶条件为：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)](\tilde{r}_j-r_f)]=0\text{，}$$

上式蕴涵：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)]E[\tilde{r}_j-r_f]=-cov(u_i'(\widetilde{W}_i),\tilde{r}_j)\text{。}\qquad(3.3.8)$$

考虑到$\widetilde{W}_i$和$\tilde{r}_j$都服从正态分布，假定效用函数二次连续可微，由 Stein 引理[2]可得：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)](E[\tilde{r}_j]-r_f)=-E[u_i''(\widetilde{W}_i)]\,cov(\widetilde{W}_i,\tilde{r}_j)\text{。}\qquad(3.3.9)$$

记$\theta_i\equiv-E[u_i''(\widetilde{W}_i)]/E[u_i'(\widetilde{W}_i)]$为个体$i$的整体绝对风险回避系数，则(3.3.9)可以改写为：

---

[2] Stein 引理表明，如果 $\widetilde{Y}$ 和 $\widetilde{X}$ 服从二变量正态分布，函数 $g(.)$ 连续可微，则有：

$$\mathrm{cov}(g(\widetilde{X}),\widetilde{Y})=E[g'(\widetilde{X})]\mathrm{cov}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\text{。}$$

$$E[\tilde{r}_j] - r_f = \theta_i\, cov(\widetilde{W}_i, \tilde{r}_j)\,, \qquad (3.3.10)$$

(3.3.10)蕴涵，风险资产 j 的股票溢价等于个体i的整体绝对风险回避系数乘以个体i的随机财富与资产 j 的随机回报率的协方差。

(3.3.10)可以进一步改写为：

$$\theta_i^{-1}(E[\tilde{r}_j] - r_f) = cov(\widetilde{W}_i, \tilde{r}_j)。$$

将上式关于i求和，整理得：

$$E[\tilde{r}_j] - r_f = (\textstyle\sum_i \theta_i^{-1})^{-1} cov(\widetilde{M}, \tilde{r}_j)$$

$$= (\textstyle\sum_i \theta_i^{-1})^{-1} W_{m0}\, cov(\tilde{r}_m, \tilde{r}_j)\,, \qquad (3.3.11)$$

其中$W_{m0}(\sum_i \theta_i^{-1})^{-1}$可以看成均衡时整个经济的总相对风险回避系数。

类似于 3.3.1，对于任意可行投资组合q，记其随机回报率为：

$$\tilde{r}_q = w_{qj}\tilde{r}_j$$

其中w_{qj}为该组合在资产 j 上的权重。在(3.3.5)两边乘上w_{qj}，然后对 j 求和，整理得：

有：

$$E[\tilde{r}_q] - r_f = (\textstyle\sum_i \theta_i^{-1})^{-1} W_{m0}\, cov(\tilde{r}_m, \tilde{r}_q)\,, \qquad (3.3.12)$$

即投资组合q的风险溢金，等于该组合回报率与市场组合回报率的协方差乘上总相对风险回避系数。考虑到市场组合也是一个可行组合，因此有：

$$E[\tilde{r}_m] - r_f = (\textstyle\sum_i \theta_i^{-1})^{-1} W_{m0}\, var(\tilde{r}_m)。 \qquad (3.4.12)$$

所以市场组合的风险溢金等于经济中总相对风险回避系数乘上该组合的方差。

将(3.4.11)式除以(3.4.12)式，整理后即得传统 CAPM 的定价公式：

$$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - r_f)。$$

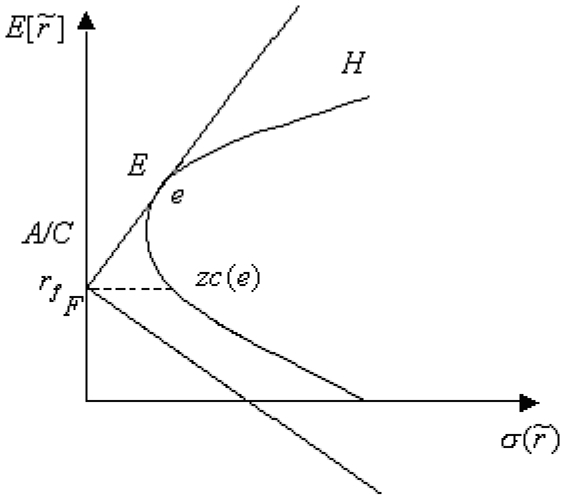
§3.4 带约束的 CAPM

前面的讨论都假定了个体可以无限制地以相同的利率借取或贷出无风险资金，这种假定同真实经济是不相吻的。在真实经济环境中，投资者要受到资金约束，不可能无限制地借取无风险资产；同时存贷款利率也并不相同。Merton(1982)在假定个体不能借钱投资或借、贷利率不同的假定下，给出了带约束的资本资产定价模型(constrained CAPM)，下面我们来介绍该模型。

3.4.1 禁止贷款时的 CAPM

假定市场中存在 I 位投资者，所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，风险资产和无风险资产正供给，假定风险资产可以无限卖空，无风险资产不允许卖空（即投资者无法通过贷款方式获得资金来进行风险投资）；假定市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。

假定投资者都选择持有有效组合，在投资者不允许通过贷款方式获得资金以进行风险投资的假定下，有效组合位于图 3.4.1 中的曲线 FEH 上。



（图 3.4.1）：禁止借款情形下的前沿组合

在该经济中，部分对期望回报率要求低于切点组合期望回报率$E[\tilde{r}_e]$的个体，他们将选择部分持有无风险资产和部分持有风险资产，其投资组合位于线段$\overline{FE}$上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i e + (1-\lambda_i) f\text{，}\ 0 \le \lambda_i \le 1\text{，}\ i = 1,2,\dots,k \qquad (3.4.1)$$

其中e和f分别为切点组合和无风险资产。

当投资者对期望回报率的要求高于切点组合期望回报率$E[\tilde{r}_e]$时，需要卖空无风险资产以投资切点组合。在不允许借贷的假定下，投资者为获得高于切点组合的期望回报率，由于无法借贷，只有卖空较低回报率的风险资产以获得资金，再投资在较高回报率的资产上，其投资组合位于双曲线EH 段上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i e + (1-\lambda_i) zc(e)\text{，}\ \lambda_i \ge 1 i = k+1,\dots,I\text{，。} \qquad (3.4.2)$$

注意到此处$E[\tilde{r}_{zc(e)}] = r_f$，$\sigma^2(\tilde{r}_{zc(e)}) > 0$。

由于市场组合是个体组合的凸组合，因此市场组合可以表示为：

$$m = af + be + (1-a-b) zc(e)\text{，} \qquad (3.4.3)$$

其中$1 > a > 0$，$b > 0$，$a + b \ge 1$。比较(3.4.1-2)与(3.4.3)可以看出，在上述假定下，市场组合一般来说并不是有效组合。

定理 **3.4.1**：在个体都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，以无风险利率贷款被严格禁止的假定下，对任意可行投资组合q，有：

$$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])\text{，} \qquad (3.4.4)$$

且有

$$E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0\text{，}\ E[\tilde{r}_{zc(m)}] \ge r_f\text{。} \qquad (3.4.5)$$

证明：留作习题，略。

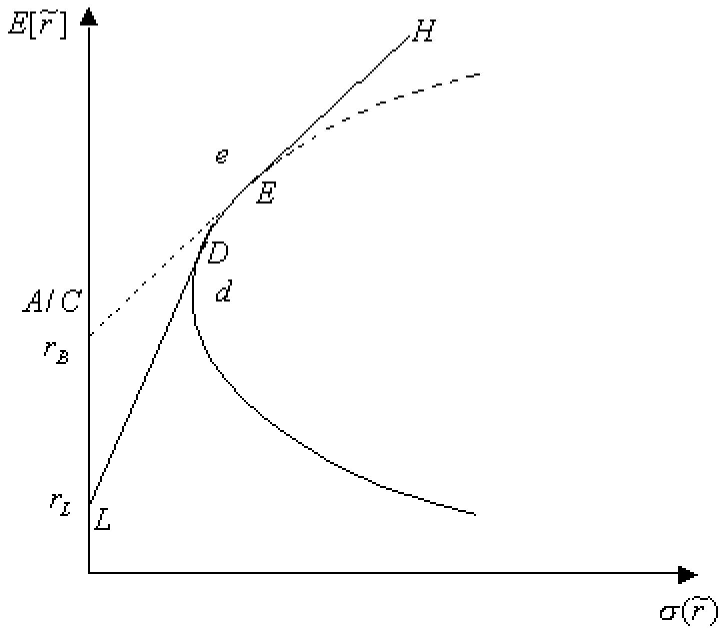
3.4.2 存、贷款利率不等时的 **CAPM**

在真实经济中存贷款利率通常并不相同，因此我们仅给出一个无风险利率的做法是不恰当的，需要给以修正。当投资者都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，借款利率大于贷款利率时，个体投资组合都位于图 3.4.2 中的曲线 LDEH 上。该经济中存在两个切点组合d和e。

当个体部分投资无风险资产l，部分投资风险资产时，个体投资组合位于线段$\overline{LE}$上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i l + (1-\lambda_i)d \text{，} 0 \le \lambda_i \le 1 \text{，} \qquad (3.4.6)$$

其投资组合的期望回报率满足$r_l \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_d]$；



（图 3.4.2）：借款利率不等于贷款利率时的前沿组合

当个体希望获得的期望回报率介于$E[\tilde{r}_d]$和$E[\tilde{r}_e]$之间时，个体无法通过以无风险利率r_l来获得资金，因此个体只能通过风险资产组合来达到，该组合可以表示为：

$$p_i = \lambda_i d + (1-\lambda_i)e \text{，} 0 \le \lambda_i \le 1 \text{。} \qquad (3.4.7)$$

其期望回报率满足：$E[\tilde{r}_d] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_e]$。

当个体希望获得的期望回报率高于$E[\tilde{r}_e]$时，个体可以以无风险利率r_b获取资金b，投资在风险资产上时，个体的投资组合位于射线$\overrightarrow{EH}$上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i b + (1-\lambda_i)e \text{ , } \lambda_i < 0 \text{ ,} \qquad (3.4.8)$$

其投资组合的期望回报率满足：$E[\tilde{r}_{p_i}] \geq E[\tilde{r}_e]$。

考虑到市场组合是个体组合的凸组合，因此市场组合可以表示为：

$$m = a_l l + a_d d + a_e e + (1-a_l-a_d-a_e)b \text{ ,} \qquad (3.4.9)$$

其中$a_l > 0$，$a_d > 0$，$a_e > 0$，$1-a_l-a_d-a_e < 0$。很显然，此时市场组合通常不是一个有效组合

市场组合的随机回报率可以表示为

$$\tilde{r}_m = a_l r_l + a_d \tilde{r}_d + a_e \tilde{r}_e + (1-a_l-a_d-a_e)r_b \text{ ,} \qquad (3.4.10)$$

定理 **3.4.2**：在个体都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，借款利率要严格高于贷款利率的假定下，对任意可行投资组合q，有：

$$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}]) \text{ ,} \qquad (3.4.11)$$

且有

$$E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0 \text{ , } \quad r_B \geq E[\tilde{r}_{zc(m)}] \geq r_L \text{。} \qquad (3.4.12)$$

证明：留作习题，略

§3.5 市场摩擦和 CAPM 的失效

在前面各节中假定了个体可以无限卖空风险资产，可以以无风险利率无限借贷，在真实经济中显然是不可能的。如果经济中投资者不能无限制地卖空风险资产，不能无限制地借贷，则上述讨论不再成立，静态 CAPM 定理也不再成立。下面我们在个体不能卖空风险资产，经济中不存在无风险资产的假定下，给出一个 CAPM 不成立的例子。

假定经济中只有三种风险资产a_1、a_2和a_3，不存在无风险资产，个体

不能卖空风险资产，假定这三种风险资产的随机回报率分别为：

$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3 = -\tilde{r}_1 + (1+\frac{1}{2})\tilde{r}_2$，　　(3.5.1)

满足：

$3E[\tilde{r}_1] = E[\tilde{r}_2]$，　　(3.5.2a)

$cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) = 0$，$var(\tilde{r}_1) = \sigma_1^2 < \sigma_2^2 = var(\tilde{r}_2)$。　　(3.5.2b)

a_3的期望回报率和方差分别为：

$E[\tilde{r}_3] = -E[\tilde{r}_1] + \frac{3}{2}E[\tilde{r}_2] = \frac{7}{2}E[\tilde{r}_1]$；　　(3.5.3a)

$var(\tilde{r}_3) = \sigma_1^2 + \frac{9}{4}\sigma_2^2 > \sigma_2^2$。　　(3.5.3b)

记投资组合p为由a_1和a_2构成的、与a_3有相同期望回报率的投资组合，其权重向量为($\lambda,1-\lambda$)，则λ必须满足：

$E[\tilde{r}_p] = \lambda E[\tilde{r}_1] + (1-\lambda)E[\tilde{r}_2] = E[\tilde{r}_3] = \frac{7}{2}E[\tilde{r}_1]$，

求解上述方程，得：

$\lambda = -1/4$。　　(3.5.4)

该组合的方差满足：

$var(\tilde{r}_p) = \frac{1}{16}\sigma_1^2 + \frac{25}{16}\sigma_2^2 < var(\tilde{r}_3)$。　　(3.5.5)

如果个体可以无限制地卖空风险资产，则a_3是一个被占优资产，经济中的组合前沿是一条包含a_1和a_2的双曲线，组合前沿上的任意投资组合都可以表示为a_1和a_2的线性组合，此时零-贝塔 CAPM 成立。

当个体无法卖空风险资产时，经济中的投资组合前沿由两段双曲线构

成，如图 3.5.1 所示。下面我们来证明 CAPM 定理并不成立：

假定在该经济中，所有个体都持有前沿组合。由于组合前沿由两段双曲线构成，因此市场中个体所持有的投资组合p_i刻画如下：

当$E[\tilde{r}_1] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_2]$时，$p_i$位于组合前沿的 AB 段，满足：

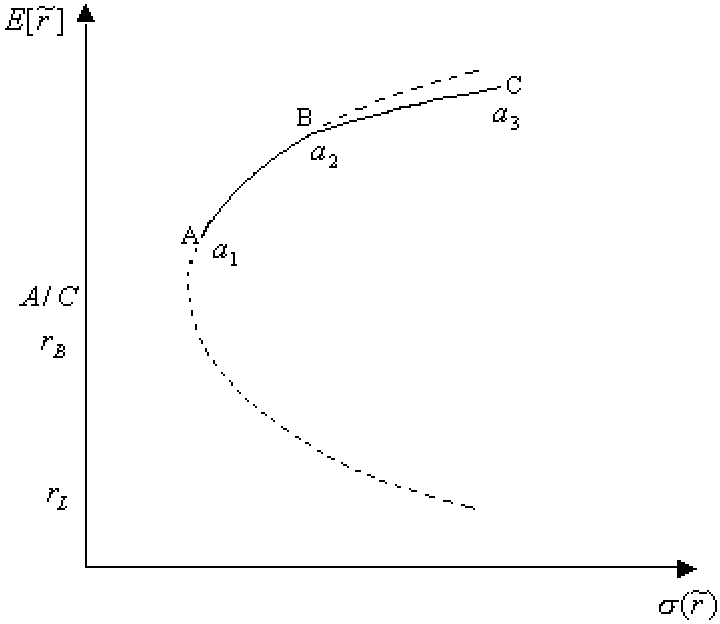
$$\alpha_i a_1 + (1-\alpha_i) a_2 \text{，} 0 \le \alpha_i \le 1\text{；} \qquad (3.5.6a)$$

当$E[\tilde{r}_2] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_3]$时，$p_i$位于组合前沿的 AB 段，满足：

$$\alpha_i a_2 + (1-\alpha_i) a_3 \text{，} 0 \le \alpha_i \le 1\text{。} \qquad (3.5.6b)$$

因此市场组合可以表示为：

$$m = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + (1-\beta_1-\beta_2) a_3 = w_1 a_1 + w_2 a_2\text{。} \qquad (3.5.7)$$



(图 3.5.1)：风险资产不可以卖空时的前沿组合

——实线是不允许卖空时的前沿组合，由两段双曲线构成

——虚线是允许卖空时的前沿组合，由一条双曲线构成。

如果 CAPM 定理成立，则对任意可行投资组合q，有：

$$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]=\frac{cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_m)}{var(\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}])$$ 。(3.5.8)

因为资产a_1、a_2和a_3也是可行组合，因此有

$$E[\tilde{r}_j]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]=\frac{cov(\tilde{r}_j,\tilde{r}_m)}{var(\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}])$$ ，$j=1,2,3$。

通过简单计算可得：

$$E[\tilde{r}_3]-E[\tilde{r}_1]=\frac{cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_1,\tilde{r}_m)}{cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_2,\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_3]-E[\tilde{r}_2])$$ 。 (3.5.9)

因为：

$$cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_1,\tilde{r}_m)=cov(-2\tilde{r}_1+\frac{3}{2}\tilde{r}_2,w_1\tilde{r}_1+w_2\tilde{r}_2)$$

$$=-2w_1\sigma_1^2+\frac{3}{2}w_2\sigma_2^2$$ ； (3.5.10a)

$$cov(\tilde{r}_3-\tilde{r}_2,\tilde{r}_m)=cov(-\tilde{r}_1+\frac{1}{2}\tilde{r}_2,w_1\tilde{r}_1+w_2\tilde{r}_2)$$

$$=-w_1\sigma_1^2+\frac{1}{2}w_2\sigma_2^2$$ 。 (3.5.10b)

将(3.5.2a)、(3.5.3a)和(3.5.10a)、(3.5.10b)代入(3.5.9)，整理得：

$$\frac{-2w_1\sigma_1^2+1.5w_2\sigma_2^2}{-w_1\sigma_1^2+0.5w_2\sigma_2^2}=5$$ ，

这等价于：

$$3w_1\sigma_1^2=w_2\sigma_2^2$$ 。 (3.5.11)

因此在该经济中，如果市场组合权重不满足(3.5.11)，则零-贝塔 CAPM 定理不再成立。例如，如果$\sigma_1^2=1$ ，$\sigma_2^2=2$ ，假定市场组合在第一种资产上的权重为$w_1=1/3$，$w_2=1/3$，则 CAPM 不再成立。

通常，市场组合权重满足(3.5.11)的可能性几乎为零，因此一般说来，CAPM 定理并不成立。

上述讨论可以推广到更一般的情形，只要市场组合的风险资产部分无

法由两个前沿组合线性生成，则零-贝塔 CAPM 定理或传统 CAPM 定理便不再成立。

习题

1、假定经济中存在三种风险资产，其期望回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3$彼此独立，其期望回报率和方差满足：$E[\tilde{r}_1]=1$，$E[\tilde{r}_2]=2$，$E[\tilde{r}_3]=3$，$\sigma^2(\tilde{r}_1)=1$，$\sigma^2(\tilde{r}_2)=2$和$\sigma^2(\tilde{r}_3)=10$。假定经济中存在许多个体，初始财富为$W_{0i}=1$，$i=1,2,\cdots,I$。假定所有个体效用函数都取二次多项式形式，即：

$$u_i(\widetilde{W}_i)=\widetilde{W}_i-\frac{b_i}{2}\widetilde{W}_i^{\,2},\quad i=1,2,\cdots,I。$$

假定$1/b_i$服从[1,14]上的均匀分布。

（1）假定风险资产可以无限卖空，试计算个体i的最优投资组合和市场组合，并计算这三种风险资产和市场组合的贝塔系数，试验证 CAPM 定理是否成立。

（2）假定风险资产禁止卖空，试计算个体i的最优投资组合和市场组合，并计算这三种风险资产和市场组合的贝塔系数，试验证 CAPM 定理是否成立。

2、假定经济中只有三种风险资产a_1、a_2和a_3，不存在无风险资产，个体不能卖空风险资产，假定这三种风险资产的随机回报率分别为：$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3=-\tilde{r}_1+(1+\frac{1}{2})\tilde{r}_2$，且满足：$E[\tilde{r}_1]=1$，$E[\tilde{r}_2]=4$，$cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=0$，$var(\tilde{r}_1)=\sigma_1^2=1$，$var(\tilde{r}_2)=\sigma_2^2=4$。假定个体效用函数可以由定义在均

值-方差上的函数刻画：$U_i(E[\tilde{r}],\sigma^2(\tilde{r})) = E[\tilde{r}] - \frac{b_i}{2}\sigma^2(\tilde{r})$。

（1）假定风险资产可以无限卖空，试求该经济中的前沿组合和市场组合，并求出上述 3 种资产与市场组合的贝塔系数，并就这三种资产验证 CAPM 定理，并将这三种资产分解为系统性风险部分和非系统性风险部分。

（2）假定风险资产禁止卖空，试计算前沿组合和市场组合，并验证市场组合是否前沿组合，验证 CAPM 是否成立。

3、试证明带约束条件下的 CAPM，即定理 3.4.1 和定理 3.4.2。