第五章 静态套利定价理论[1]

§5.1　套利机会

定义：称一个投资组合是第一类套利机会，如果它具有非正的成本，却在将来有可能获得正的收益，获得负的收益的可能为零。

例 **5.1.1**：个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他提出这样的一个赌博方案：抛出正面给对方１００元，抛出反面给对方０元。对其他人来说，这是没有任何投入就可以得到非负收入，且有５０%概率得到正收入。该方案对其它人来说，成本为零，收益非负，属于第一类套利机会。

定义：称一个投资组合是第二类套利机会，如果其成本为负，未来收益非负。

例 **5.1.2**：个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他提出这样的一个赌博方案：先给对方１００元，然后与对方抛硬币，抛出正面给对方１００元，抛出反面给对方０元。对其他人来说，投入为负，就可以得到非负收入，且有５０%概率得到正收入，属于第二类套利机会。

容易看出，例 5.1.1 是第一类套利机会，但不是第二类套利机会；例 5.1.2 既是第一类套利机会，又是第二类套利机会。

例 **5.1.3**：个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他提出这样的一个赌博方案：先给对方１００元，然后与对方抛硬币，抛出正面给对方０元，抛出反面给对方０元。对其他人来说，投入为负，未来收入为０，属于第二类套利机会，但不是第一类套利机会。

定义：极限情形下的套利机会，是指一个具有期望回报率的下界大于零、方差收敛到零的套利组合序列。

上述定义蕴含，极限情形下的套利机会是一个成本为零，且几乎无风

1主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002).、杨云红（2000）、王江（2006）等教材及相关论文

险地得到正的回报投资机会。

无套利原理： 经济中不存在套利机会，即使存在，也为投资者的套利活动所快速消除

在例 5.1.1 中，当个体 A 希望有人陪他抛硬币赌博，为此他的赌博方案时，该方案属于第一类套利机会。如果周围有许多别的个体，则他们将相互竞争。如果个体 B 答应愿意按照个体 A 的方案陪他赌博；个体 C 可能提出对个体 A 较有利的方案，比如：抛出正面个体 A 给对方 50 元，抛出反面给对方 0 元；个体 D 可能提出对个体 A 更有利的方案，比如：抛出正面个体 A 给对方 30 元，抛出反面给对方 0 元；……；以此类推，直到将个体 A 给对方的钱降为 0，从而第一类套利机会消除。

§5.2 无套利定价的应用

无套利原理蕴涵，经济中不存在套利机会，从而通过构造投资组合，我们可以对一些衍生性资产定价。下面我们利用无套利原理，我们可以给出期权价格关系的几个重要性质。

假定期权的标的资产期初价格为 S_0 ，期末价格为 S_T ，期权的执行价格为 K，经济中的无风险利率为 r_f 。记看涨期权价格为 $c(S_0,K)$ ，看跌期权价格为 $p(S_0,K)$ 。

性质 5.2.1： $c(S_0,K)\geq \max[S_0-K/(1+r_f),0]$ 。

证明：构造一个投资组合，在期初买入一份看涨期权，卖空一份资产，贷出 $K/(1+r_f)$ 资金，该投资组合的总成本为 $c(S_0,K)-S_0+K/(1+r_f)$ ；在期末，该投资组合的总收益 Y 满足：

当 $S_T>K$ 时，看涨期权执行， $Y=S_T-K-S_T+K=0$ ；

当 $S_T\leq K$ 时，看涨期权不执行， $Y=0-S_T+K\geq 0$ 。

考虑到经济中不存在套利机会，期末收益大于等于 0 ，期初成本不能为负，

所以我们有 $c(S_0,K)\geq S_0-K/(1+r_f)$ ；另外，期权是一种权利，投资者可以选择执行该期权而获利，也可以放弃，所以 $c(S_0,K)\geq 0$ 。由此我们有 $c(S_0,K)\geq max¿[¿S_0-K/(1+r_f),0]$ 。

性质 **5.2.2**：看涨期权的价格是其执行价格的凸函数，即：$ac(S_0,K_1)+(1-a)c(S_0,K_2)\geq c(S_0,aK_1+(1-a)K_2)$ ，$a\in(0,1)$ 。

证明：构造一个投资组合，在期初买入 α 份执行价格为 K_1 的看涨期权，买入 $1-\alpha$ 份执行价格为 K_2 的看涨期权，卖空 1 份执行价格为 $\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$ 的看涨期权，不妨假定 $K_1\geq\alpha K_1+(1-\alpha)K_2\geq K_2$

该投资组合在期初的总成本为：

$$ac(S_0,K_1)+(1-a)c(S_0,K_2)-c(S_0,aK_1+(1-a)K_2)$$ 。

在期末，该投资组合的总收益 Y 满足：

当 $S_T>K_1$ 时，三种期权都执行，从而该投资组合的收益可以表示为：

$$Y=\alpha(S_T-K_1)+(1-\alpha)(S_T-K_2)-(S_T-\alpha K_1-(1-\alpha)K_2)=0$$;

当 $K_1\geq S_T>\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$ 时，执行价格为 K_1 的看涨期权不执行，执行价格为 K_2 和 $\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$ 的看涨期权执行，从而该投资组合的收益可以表示为：

$$Y=0+(1-\alpha)(S_T-K_2)-(S_T-\alpha K_1-(1-\alpha)K_2)=\alpha(K_1-S_T)\geq 0$$;

当 $\alpha K_1+(1-\alpha)K_2\geq S_T>K_2$ 时，执行价格为 K_1 和 $\alpha K_1+(1-\alpha)K_2$ 的看涨期权不执行，执行价格为 K_2 的看涨期权执行，从而该投资组合的收益可以表示为：

$$Y=0+(1-\alpha)(S_T-K_2)-0=(1-\alpha)(S_T-K_2)\geq 0$$;

当 $S_T\leq K_2$ 时，三种看涨期权都不执行，从而该投资组合的收益满足：

$$Y=0+0-0=0$$ 。

由此可见，该投资组合的期末回报大于等于 0 ，考虑到经济中不存在无套利机会，其期初成本也应非负，性质 5.2.2 成立。

性质 **5.2.3**：在相同操作价格 K 下，标的在 n 种资产构成的投资组合上的看涨期权的价格，要小于标的在各资产上的看涨期权的价格的相同权重的加权和，即：

$$\alpha_j S_{j0}, K$$

$$\sum_{j=1}^{n} ¿$$

$$¿$$

$$c ¿$$

， $a \in (0,1)$ 。

证明：略

性质 **5.2.4**：（看跌-看涨平价关系） $S_0+p=c+K/(1+r_f)$ 。

证明：构造一个投资组合：在期初购买一份资产，购买 1 份标的在该资产上的执行价格为 K 的看跌期权，同时卖出一份标的在该资产上的执行价格为 K 的看涨期权，借入 $K/(1+r_f)$ 的资金。该投资组合在期初的成本为 $S_0+p-c-K/(1+r_f)$ 。该投资组合在期末的总收益 Y 可以刻画为：

当 $S_T>K$ 时，看涨期权被执行，看低期权放弃执行，从而有：

$$Y=S_T-(S_T-K)-K=0$$ ；

当 $S_T \le K$ 时，看跌期权被执行，看涨期权放弃执行，从而有：

$$Y=S_T+(K-S_T)-K=0$$ 。

因此该投资组合的期末收益为零，考虑到经济中不存在套利机会，该投资组合的期初成本也应该等于 0，性质 5.2.4 得证。

§5.3 因子模型与 APT

在 CAPM 理论中，可以将风险资产的随机回报率分解为一个系统性风险和一个非系统性风险： $\tilde{r}_q=(1-\beta_{qm})r_f+\beta_{qm}\tilde{r}_m+\tilde{\varepsilon}_{qm}$ ，从而风险资产

的期望回报率存在一个简单线性关系 $E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qm})r_f+\beta_{qm}[\tilde{r}_m]$ 。在上一章中我们发现，CAPM 定理在许多情况下并不成立。直观地我们可以想到，通过分散化投资也应该可以将非系统风险消除，从而投资组合的期望收益率之间存在着类似的线性关系。为此，Ross(1976)等将 CAPM 的思想进一步推广，考虑将风险分解为系统性风险和非系统性风险，但系统性风险不再依赖于市场组合，而是多个因子的情形，即因子模型；同时假定经济系统不存在套利机会，在一定条件下给出了风险资产期望回报率之间的线性关系或近似线性关系。

5.3.1 因子模型

考虑一个无摩擦经济，假定投资者在期初进行投资决策，期末的资产回报具有不确定性。假定该经济中存在 $N\geq 2$ 种可以进行交易的风险资产和一种无风险资产。风险资产的随机回报率向量 $\tilde{r}_1$ 、 $\tilde{r}_2$ 、…、 $\tilde{r}_N$ 线性无关，具有有限方差和期望回报率，其它风险资产和投资组合都是这 N 种风险资产的线性组合；无风险资产的回报率为 r_f 。假定风险资产可以无限卖空，资产无限可分，信息对称、完全，可以同时传递到所有人手中。

定义：因子模型(factor model)是指一种假设证券回报率仅与不同因子变化有关的经济学模型。

因子模型的特点包括：

（1） 因子模型中的因子系统地影响所有证券价格的经济因素；

（2） 证券回报率之间的相关性仅源于对因子变化的共同反应；

（3） 证券回报率中不能由因子模型解释的部分是该证券独有的部分，与其它证券独有部分无关。

在因子模型中，资产的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_i=\sum_{k=1}^{K} b_{ik}\tilde{F}_k+a_i+\tilde{\varepsilon}_i \quad ,$$

在这类模型中，资产风险可以分为因子风险和非因子风险，通过分散化投资可以缩小非因子风险。

根据因子的个数，因子模型可以分为单因子模型和多因子模型。

单因子模型：CAPM 模型是一个单因子模型，因子为市场组合回报率（或切点组合回报率）。

多因子模型：资产价格可能依赖于 GDP 增长率、利率水平、通货膨胀率与石油价格，则这些变量都可以当作因子。在实践中，通常可以选取与这些变量高度相关的资产或投资组合作为因子。

5.3.2 Ross 的 APT 理论

Ross(1976)创立的套利定价理论（APT）告诉我们，如果经济中存在着大量的资产，并且不存在（极限情形下的）套利机会，那么在绝大多数资产的期望回报率之间仍然存在着一种近似线性关系。Ross(1976)的 APT 是一种多因子模型。

一、模型建立

考虑一个资产数上升的经济序列，假定市场是完全竞争的、无摩擦的，投资者是理性的、不饱和的，当经济中存在套利机会时，投资者会通过构造套利组合来增加自己的财富。假定在第 n 个经济中，存在 n 个风险资产和一个无风险资产，风险资产回报率由一个 K-因子模型生成：

$$\tilde{r}_j^n = a_j^n + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \tilde{\delta}_k^n + \tilde{\varepsilon}_j^n \quad , \quad j = 1,2,\dots,n \quad 。 \qquad (5.3.1)$$

满足：

$$E[\tilde{\varepsilon}_j^n] = 0 \quad , \quad j = 1,2,\dots,n \quad ;$$

$$E[\tilde{\varepsilon}_j^n \tilde{\varepsilon}_l^n] = 0 \quad , \quad l \neq j \quad 。$$

$$\sigma^2\left(\tilde{\varepsilon}_j^n\right) \leq \bar{\sigma}^2 > 0 \quad , \quad j = 1,2,\dots,n \quad 。$$

利用线性代数(5.1)式可以改写为：

$$\tilde{r}^n = a^n + B^n \tilde{\delta}^n + \tilde{\varepsilon}^n \quad 。 \qquad (5.3.2)$$

二、不存在非因子风险的情形：（ $\tilde{\varepsilon}_j^n \equiv 0, \forall j$ ）

定理 **5.3.1**：当 $\tilde{\varepsilon}_j^n \equiv 0, \forall j$ ，即风险资产回报完全由 K 因子和无风险资产生成时，如果经济中不存在套利机会，则资产回报率之间存在一个严格的线性关系：

$$E[\tilde{r}_j^n] - r_f = \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n (E[\tilde{\delta}_k^n] - r_f) \quad 。 \tag{5.3.3}$$

证明：对资产 j，首先构造一个由无风险资产和 K 因子构成的投资组合 y_j^n ，其投资组合权重满足：

$$y_{j0}^n = 1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \quad ,$$

$$y_{jk}^n = \beta_{jk}^n \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

该投资组合的随机回报率为：

$$(1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \tilde{\delta}_k^n \quad 。$$

下面我们根据无套利条件，来证明关系式 $a_j^n = (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f$ ：

（1）如果 $a_j^n < (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f$ ，则卖空一单位货币在证券 j 上，投资一单位货币在 y_j^n 上，该组合是一个套利组合，成本为零，但期末回报 $(1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f - a_j^n > 0$ ，这蕴涵经济中存在套利机会，与命题的假设矛盾。

（2）如果 $a_j^n > (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f$ ，则卖空一单位货币在 y_j^n 上，投资一单位货币在证券 j 上，该组合是一个套利组合，成本为零，但期末回报 $a_j^n - (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f > 0$ ，这蕴涵经济中存在套利机会，与命题的假设矛盾。

由此我们有 $a_j^n = (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n) r_f$ ，所以由(5.3.1)得，资产的期望回报率之

间存在着如下的线性关系式：

$$E[\tilde{r}_j^n]-r_f=\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^n\left(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f\right)$$ 。

证明完毕。■

三、存在非因子风险的情形（ $\exists j$ ， $\tilde{\varepsilon}_j^n \neq 0$ ）

引理 **5.3.1** ：对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$ ， $N(n)$ 为满足

β_{jk}^n

$1-\sum_{k=1}^{K} ¿ r_f$ 的资产数，如果极限情形下的套利机会不存在，则存在一个

¿

$¿ a_j^n - ¿$

$\bar{N}<+\infty$ ，对任意的 $n>0$ ， $N(n)\leq\bar{N}$ 成立。

证明：采用反证法，假定不存在这样一个 $\bar{N}$ ，使得对所有的 n，满足 $N(n)\leq\bar{N}$ ，则序列 $\{K+2,K+3,\ldots\}$ 存在一个子序列 $\{n_l\}$ ，满足当 $n_l\to+\infty$ 时， $N(n_l)\to+\infty$ 。

下面我们来构造套利组合：对于给定的 n_l ，不妨假定满足

β_{jk}^n

$1-\sum_{k=1}^{K} ¿ r_f$ 的资产为 $j=1,2,\ldots,N(n_l)$ 。

¿

$¿ a_j^{n_l} - ¿$

（1）对于每一个满足条件的 j，首先构造一个由 K 个因子和无风险资产构成的投资组合 y_j^n ，其投资组合权重满足：

$$y_{j0}^n=1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^n ,$$

$$y_{jk}^n=\beta_{jk}^n , \quad k=1,2,\ldots,K$$

该投资组合的随机回报率为：

$$\left(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^n\right)r_f+\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^n\tilde{\delta}_k^n$$ 。

接着构造套利投资组合 $c_j^{n_l}$ ：当 $a_j^{n_l} > (1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^{n})r_f$ 时，卖空一单位货币在 y_j^n 上，投资一单位货币在证券 j 上；当 $a_j^{n_l} < (1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^{n})r_f$ 时，卖空一单位货币在证券 j 上，投资一单位货币在 y_j^n 上。该组合是一个套利组合，其回报率为：

$$\text{¿}a_j^n-(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^{n})r_f \vee + s_j^{n_l}\tilde{\varepsilon}_j^{n_l}$$ 。

其中 $s_j^{n_l}=\begin{cases} 1 & \text{如果} a_j^{n_l} > (1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^{n_l})r_f \\ -1 & \text{如果} a_j^{n_l} < (1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^{n_l})r_f \end{cases}$ 。

（2）通过 $N(n_l)$ 个套利组合 $\{c_j^{n_l}\}_{j=1}^{N(n_l)}$ 来构造套利组合 D^{n_l} ，在 D^{n_l} 中，在每个 $c_j^{n_l}$ 上的权重相等，都是 $1/N(n_l)$ 。因此套利组合 D^{n_l} 的期望回报率和方差分别为：

$$\text{¿}a_j^{n_l}-(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^{n_l})r_f \vee \text{¿} \geq \varepsilon > 0$$

$$E[D^{n_l}]=\frac{1}{N(n_l)}\sum_{j=1}^{N(n_l)}\text{¿}$$ ，

$$\sigma^2(D^{n_l})=\frac{1}{N^2(n_l)}\sum_{j=1}^{N(n_l)}\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j^{n_l}) \leq \frac{\bar{\sigma}^2}{N(n_l)} \to 0$$ 。

由此出现了极限情形下的套利机会，与假设矛盾。证明完毕。■

定理 **5.3.2**（**Ross(1976)**的 **APT**）：当经济中的资产数足够多，且不存在极限情形下的套利机会时，对绝大多数资产而言，其期望回报率之间存在一个近似线性关系。

证明：根据引理 5.3.1，对任意给定的正数 $\varepsilon > 0$ ，至多存在 $\bar{N}$ 个风险资产，其随机回报率可以表示为 $\tilde{r}_j^n = a_j^n + \sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}^n\tilde{\delta}_k^n + \tilde{\varepsilon}_j^n$ ，

$j=1,2,\ldots,N\left(n_l\right)$ ，且有：

$$\beta_{jk}^{n}$$

$$1-\sum_{k=1}^{K} ¿ r_f$$ 。

¿

$$¿ a_j^n - ¿$$

相应地这些资产的期望回报率满足：

$$¿ E[\tilde{r}_j^n]-r_f-\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \left(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f\right) \vee \geq \varepsilon$$

因此当 n 足够大时，经济中绝大多数资产满足：

$$¿ E[\tilde{r}_j^n]-r_f-\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \left(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f\right) \vee ¿ \varepsilon$$ ，

即期望回报率之间存在一个近似线性关系。

证明完毕。■

在 Ross(1976)的 APT 理论中，如果取 ε 充分小，比如 0.01 元，那么对绝大多数资产而言，都有 $E[\tilde{r}_j^n] \approx r_f+\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}^n \left(E[\tilde{\delta}_k^n]-r_f\right)$ ；但仍然存在一些资产，对线性关系的偏离可能比较大。尤其麻烦的是，我们并不知道是哪些资产存在较大偏离，因此如果用这些近似线性关系式来给特定资产定价的话，很有可能产生较大的偏离，因此该理论似乎并不能很好地用来给资产定价。

5.3.3 均衡套利定价理论

在 Ross(1976)的 APT 理论中，当资产数足够大时，近似线性关系对绝大多数资产都成立；但对特定的资产而言，对这种线性关系的偏离可能很大，因此对任意给定的风险资产，我们希望来估计其期望回报率对线性关系偏离的程度。这方面的研究由 Dybvig(1983)、Grinblatt 与 Titmam(1983)和 Connor(1984)等给出。

一、模型假设

假定经济中存在 N 种风险资产和一种无风险资产，其回报率分别为 $\tilde{r}_j, j=1,2,\ldots,N$ 和 r_f 。假定风险资产严格地正供给，风险资产回报率由 K-因子模型生成：

$$\tilde{r}_j = a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_j \quad , \quad j=1,2,\ldots,N \quad 。$$

其中 $E[\tilde{\varepsilon}_j]=0$ ， $\tilde{\varepsilon}_j \geq -1$ ， $(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_N, \tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_K)$ 相互独立。

假定效用函数单调增、严格凹、三次连续可微， $u_i'''(z) \geq 0$ ，且所有个体的绝对风险回避系数存在一个上界，即：

$$R_A^i(z) = -u_i''(z)/u_i'(z) \leq \bar{A} \quad ，对 \quad \forall i \quad 成立。$$

假定市场是均衡的，经济中不存在套利机会。

二、均衡套利定价理论

定理（均衡 **APT**）：在上述假定下，对任意的风险资产 j，我们有：

$$¿ E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} (E[\tilde{\delta}_k] - r_f) \vee \leq \bar{A} e^{\bar{A} S_j / I} Var(\tilde{\varepsilon}_j) S_j / I$$

其中 S_j 为投资在风险资产 j 上的市场总值，I 为投资者总数。

证明：（1）当 $\tilde{\varepsilon}_j \equiv 0$ 时，类似于定理 5.1 的证明，有 $a_j = (1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}) r_f$ ，因此风险资产 j 的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_j] - r_f - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} (E[\tilde{\delta}_k] - r_f) = 0 \quad 。$$

（2）当 $\tilde{\varepsilon}_j \not\equiv 0$ 时，首先考虑一个投资组合 y_j ，该组合在无风险资产和 K 因子上的权重分别为：

$$y_{j0} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \quad ,$$

$$y_{jk} = \beta_{jk} \quad , \quad k=1,2,\ldots,K$$

该投资组合的随机回报率为：

$$(1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}) r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \tilde{\delta}_k \quad 。$$

接下来构造一个套利组合 b_j ：投资单位货币在投资组合 y_j 上，

同时卖空单位货币的资产 j，该套利组合的随机回报率为：

$$\tilde{r}=(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j-\tilde{\varepsilon}_j$$ 。

设个体 i 的初始财富量为 W_{i0} ，期末的随机财富量为 $\widetilde{W}_i$ ，因为经济中不存在套利机会，如下最大化问题

$$\max_{\alpha} E[u_i(\widetilde{W}_i+\alpha\tilde{r})]$$

的解为 $\alpha=0$ 。

在 $\alpha=0$ 处，上述最大化问题的一阶条件可以表示为：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)\tilde{r}]=0$$ ，

即 $$E\{u_i'(\widetilde{W}_i)[(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j-\tilde{\varepsilon}_j]\}=0$$ 。

上式可以改写为：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]=((1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j)E[u_i'(\widetilde{W}_i)]$$ ，

因此有：

$$cov\frac{(¿u_i'(\widetilde{W}_i),\tilde{\varepsilon}_j)}{E[u_i'(\widetilde{W}_i)]}$$

$$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j=\frac{E[u_i'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]}{E[u_i'(\widetilde{W}_i)]}=¿$$ 。

注意到 $\widetilde{W}_i=\sum_{j=1}^{N}W_{ij}(a_j-r_f+\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}\tilde{\delta}_k+\tilde{\varepsilon}_j)+W_{i0}(1+r_f)$ ，且风险资产严格地正供给，因此至少存在一个个体 i ，其投资在资产 j 上的财富量严格大于零，即 $W_{ij}>0$ ，因此我们有：

$$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j<0$$ 。

相应地，当 $\tilde{\varepsilon}_j\neq 0$ 时，我们有所有个体在资产 j 上的投资量都严格大于零。

下面我们通过估计 $E[u_i'(\widetilde{W}_i)]$ 、 $E[u_i'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]$ 的界，来估计

$(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j$ 的界，我们分三步来讨论：

（1） 估计 $E[u_i'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]$ 的界：

对于任意固定的 j，当 $\tilde{\varepsilon}_j\neq 0$ ，个体 i 投资在资产 j 上的财富量严格大于零，即 $W_{ij}>0$ ，记 $\widetilde{W}_i^{\text{¿}}=\widetilde{W}_i-W_{ij}\tilde{\varepsilon}_j$ ，这是把第 j 种风险资产的非因子风险剔除后个体 i 的期末随机财富量。根据中值定理，我们有：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)\tilde{\varepsilon}_j]=E[u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}})\tilde{\varepsilon}_j]+W_{ij}E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]$$

$$\text{¿}E[u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}})]E[\tilde{\varepsilon}_j]+W_{ij}E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]$$

$$\text{¿}W_{ij}E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]\quad ,$$

其中 $\tilde{\xi}\geq\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij}$ ，而 $\text{¿}E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]\vee\leq E[\underset{z\geq\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij}}{\text{¿}}\vee u_i''(z)\vee\tilde{\varepsilon}_j^2]$ 。

引理 **5.2**： $\underset{Z\geq\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij}}{\text{¿}}\vee u_i''(z)\vee\leq u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}})\bar{A}e^{\bar{A}W_{ij}}$

证明：因为 $\dfrac{-u_i''(z)}{u_i'(z)}\leq\bar{A}$ ，所以有：

$$\underset{z\geq\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij}}{\text{¿}}\vee u_i''(z)\vee\leq\bar{A}^{\text{¿}}z\geq\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij}u_i'(z)\leq\bar{A}u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij})\quad ;$$

又根据 $\dfrac{-u_i''(z)}{u_i'(z)}\leq\bar{A}$ ，我们有 $\bar{A}u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}}-W_{ij})\leq u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}})e^{\bar{A}W_{ij}}$ 。引理得证。

根据引理 5.2，我们有：

$$(\text{¿}\tilde{\varepsilon}_j)$$

$$\text{¿}E[u_i''(\tilde{\xi})\tilde{\varepsilon}_j^2]\vee\leq\bar{A}e^{\bar{A}W_{ij}}E[u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}})]var\,\text{¿}\quad 。$$

（2） 估计 $E[u_i'(\widetilde{W}_i)]$ 的界：

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i)]=E[u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}}+W_{ij}\tilde{\varepsilon}_j)]$$

$$E[u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}}+W_{ij}\tilde{\varepsilon}_j)\vee\widetilde{W}_i^{\text{¿}}]$$

$$\text{¿}E\text{¿}$$

$$\geq E[u_i'(\widetilde{W}_i^{\text{¿}})]$$

（3） 估计 $(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j$ 的界：

根据（1）和（2），我们有：

$$(¿\tilde{\varepsilon}_j)W_{ij}$$

$$¿(1-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk})r_f-a_j\vee\leq\bar{A}\,e^{\bar{A}\,W_{ij}}var¿$$，

因此我们有：

$$(¿\tilde{\varepsilon}_j)W_{ij}$$

$$¿E[\tilde{r}_j]-r_f-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k]-r_f)\vee\leq\bar{A}\,e^{\bar{A}\,W_{ij}}var¿$$ 。

考虑到 $S_j=\sum_i W_{ij}$ ，因此一定存在某位个体 i ，满足：$W_{ij}\leq S_j/I$ ，代入上式，整理得：

$$¿E[\tilde{r}_j]-r_f-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k]-r_f)\vee\leq\bar{A}\,e^{\bar{A}S_j/I}Var(\tilde{\varepsilon}_j)S_j/I$$ 。

证明完毕。■

习题：

1、利用无套利定价理论，证明§5.2 中的性质 3，即在相同操作价格 K 下，标的在 n 种资产构成的投资组合上的看涨期权的价格，要小于标的在各资产上的看涨期权的价格的相同权重的加权和。

2、假定某支股票当前价格为 30 元，无风险利率为月息 1%，(1) 假定在未来一个月内该股票不会支付红利，标的在该股票上、成熟期为一个月的欧式看涨期权价格为 5，标的在该股票上、成熟期为一个月的欧式看跌期权价格为 3 ，问是否存在套利机会？如果有，请构造一个套利投资组合。(2) 假定在月末该股票支付红利 2 元，期权价格不变，问该价格系统是否存在套利机会，请证明你的观点。

3、假定某支股票当前价格为 100 元，标的在该资产上的看涨期权的执行价格为 120 元，成熟期为一年，无风险利率为年息 5% ，试给出该看涨

期权价格的下限。

4、对欧式看跌期权，试分析是否存在与欧式看涨期权性质 5.2.1-3 类似的性质，并证明你的想法。

5、在均衡套利定价理论中，假定 $\tilde{\varepsilon}_j \geq -1/S_j$ ，其中 S_j 为资产 j 的总市值，试证明：

$$¿ E[\tilde{r}_j]-r_f-\sum_{k=1}^{K}\beta_{jk}(E[\tilde{\delta}_k]-r_f) \vee \leq \bar{A}\, e^{\bar{A}/I} Var(\tilde{\varepsilon}_j) S_j / I$$

。