

## § 2.9 随机解释变量

# Random Independent Variable

- 一、随机解释变量问题
- 二、随机解释变量的后果
- 三、工具变量法
- 四、案例
- 五、广义矩方法（GMM）的概念

# 一、随机解释变量问题

## 1、随机解释变量问题

- 单方程线性计量经济学模型假设之一是：

$$\text{Cov}(X_i, \mu_i) = 0$$

即解释变量与随机项不相关。

**这一假设实际是要求：**

或者X是确定性变量，不是随机变量；

或者X虽是随机变量，但与随机误差项不相关。

- 违背这一假设的问题被称为**随机解释变量问题**。

## 2、随机解释变量问题的3种情况

- 对于模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$
$$i=1,2,\dots,n \quad (2.7.1)$$

为讨论方便，假设(2.7.1)中 $X_2$ 为随机解释变量。

- 对于随机解释变量问题，又分三种不同情况：

(1) 随机解释变量与随机误差项不相关，即

$$E(X_2 \mu) = 0 \quad (2.7.2)$$

(2) 随机解释变量与随机误差项在小样本下相关，  
在大样本下渐近无关，即

在小样本下

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}_2\mu) \neq 0$$

在大样本下

$$P \lim (\sum \mathbf{X}_{2i}\mu_i/n) = 0 \quad (2.7.3)$$

$$\text{或: } P(\lim (\sum \mathbf{X}_{2i}\mu_i/n) = 0) = 1$$

(3) 随机解释变量与随机误差项高度相关，且

$$P \lim (\sum \mathbf{X}_{2i}\mu_i/n) \neq 0 \quad (2.7.4)$$

## 2、实际经济问题中的随机解释变量问题

- 在实际经济问题中，经济变量往往都具有随机性。
- 但是在单方程计量经济学模型中，凡是外生变量都被认为是确定性的。
- 于是随机解释变量问题主要表现于用滞后被解释变量作为模型的解释变量的情况。

例如：

### 耐用品存量调整模型：

耐用品的存量 $Q_t$ 由前一个时期的存量 $Q_{t-1}$ 和当期收入 $I_t$ 共同决定：

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 Q_{t-1} + \mu_t \quad t=1, \dots, T$$

这是一个滞后被解释变量作为解释变量的模型。

但是，如果模型不存在随机误差项的序列相关性，那么随机解释变量 $Q_{t-1}$ 只与 $\mu_{t-1}$ 相关，与 $\mu_t$ 不相关，属于上述的第1种情况。

## 合理预期的消费函数模型

**合理预期理论**认为消费是由对收入的预期所决定的，或者说消费是有计划的，而这个计划是根据对收入的预期制定的。于是有：

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t^e + \mu_t$$

$$C_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}^e + \mu_{t-1}$$

其中  $Y_t^e$  表示 t 期收入预期值。

而预期收入与实际收入之间存在差距，表现为：

$$Y_t^e = (1 - \lambda)Y_t + \lambda Y_{t-1}^e$$

该式是由合理预期理论给出的。



容易推得：

$$\begin{aligned}C_t &= \beta_0 + \beta_1(1-\lambda)Y_t + \beta_1\lambda Y_{t-1}^e + \mu_t \\&= \beta_0 + \beta_1(1-\lambda)Y_t + \lambda(C_{t-1} - \beta_0 - \mu_{t-1}) + \mu_t \\&= \beta_0(1-\lambda) + \beta_1(1-\lambda)Y_t + \lambda C_{t-1} + \mu_t - \lambda\mu_{t-1}\end{aligned}$$

在该模型中，作为解释变量的 $C_{t-1}$ 不仅是一个随机解释变量，而且与模型的随机误差项 $(\mu_t - \lambda\mu_{t-1})$ 高度相关（因为 $C_{t-1}$ 与 $\mu_{t-1}$ 高度相关）。属于上述第3种情况。

## 二、随机解释变量的后果

## 1、出发点

- 计量经济学模型一旦出现随机解释变量，如果仍采用OLS法估计模型参数，不同性质的随机解释变量会产生不同的后果。
- 对回归模型

$$Y=XB+N \quad (2.7.5)$$

其 OLS 参数估计量为：

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y = (X'X)^{-1} X'(XB + N)$$

取期望，有

$$\begin{aligned} E(\hat{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} E(\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{X}'\mathbf{N}) \\ &= \mathbf{B} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} E(\mathbf{X}'\mathbf{N}) \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

- 可见，随机解释变量带来什么后果取决于它与随机误差项是否相关。

## 2、随机解释变量与随机误差项不相关

- 这时采用**OLS**法估计模型参数，得到的参数估计量仍然是无偏估计量

### 3、随机解释变量与随机误差项在小样本下相关，在大样本下渐近无关

- 根据(2.7.3)和(2.7.6)，这时采用OLS法估计模型参数，得到的参数估计量在小样本下是有偏的，在大样本下具有渐近无偏的。

## 4、随机解释变量与随机误差项高度相关

- 根据(2.7.4)和(2.7.6)，这时采用OLS法估计模型参数，得到的参数估计量在小样本下是有偏的，在大样本下也不具有渐近无偏性。
- OLS法失效，需要发展新的方法估计模型。

## 5、滞后被解释变量作解释变量，并且与随机误差项相关

如果模型中的随机解释变量是滞后被解释变量，并且与随机误差项相关时，除了OLS法参数估计量是有偏外，还带来两个后果：

①**模型必然具有随机误差项的自相关性**。因为该滞后被解释变量与滞后随机误差项相关，又与当期随机误差项相关。

②**D. W. 检验失效**。因为不管D.W.统计量的数值是多少，随机误差项的自相关性总是存在的。



### 三、工具变量法

## **Instrumental Variables Method**

## 1、工具变量的选取

**工具变量：**在模型估计过程中被作为工具使用，以替代模型中与随机误差项相关的随机解释变量。

**选择为工具变量的变量必须满足以下条件：**

- (1) 与所替代的随机解释变量高度相关；
- (2) 与随机误差项不相关；
- (3) 与模型中其它解释变量不相关，以避免出现多重共线性。

## 2、工具变量的应用

- 对于多元线性模型

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i$$
$$i=1,2,\dots,n$$

- 用普通最小二乘法估计模型，最后归结为求解一个关于参数估计量的正规方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma y_i = \Sigma (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) \\ \Sigma y_i x_{1i} = \Sigma (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) x_{1i} \\ \Sigma y_i x_{2i} = \Sigma (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) x_{2i} \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_{ki} = \Sigma (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) x_{ki} \end{array} \right.$$

- 该方程组也可以看作为矩方法的结果。用每个解释变量分别乘以模型的两边，并对所有样本点求和：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma y_i = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) \\ \Sigma y_i x_{1i} = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{1i} \\ \Sigma y_i x_{2i} = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{2i} \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_{ki} = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{ki} \end{array} \right.$$

- 然后再对方程的两边求期望：

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\Sigma y_i) = E(\Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i)) \\ E(\Sigma y_i x_{1i}) = E(\Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{1i}) \\ E(\Sigma y_i x_{2i}) = E(\Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{2i}) \\ \vdots \\ E(\Sigma y_i x_{ki}) = E(\Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{ki}) \end{array} \right.$$

- 利用下列条件得到的:

$$E(\mu_i) = 0$$

$$E(\mu_i x_{ji}) = 0, j = 1, 2, \dots, k$$

$$E(\beta_j) = \hat{\beta}_j, j = 0, 1, 2, \dots, k$$

- 如果 $\mathbf{x}_2$ 为随机变量，且与随机误差项相关；选择 $\mathbf{z}$ 作为它的工具变量。在应该用 $\mathbf{x}_2$ 乘方程两边时，不用 $\mathbf{x}_2$ ，而用 $\mathbf{z}$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma y_i = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) \\ \Sigma y_i x_{1i} = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{1i} \\ \Sigma y_i \mathbf{z}_i = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) \mathbf{z}_i \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_{ki} = \Sigma(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i) x_{ki} \end{array} \right.$$



- 得到采用工具变量法的正规方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma y_i = \Sigma(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) \\ \Sigma y_i x_{1i} = \Sigma(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) x_{1i} \\ \Sigma y_i z_i = \Sigma(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) z_i \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_{ki} = \Sigma(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) x_{ki} \end{array} \right.$$

- 求解该方程组即可得到关于原模型参数的工具变量法估计量。

- 对于矩阵形式:

$$Y = XB + N$$

采用工具变量法（假设  $x_2$  与随机项相关，用工具变量  $z$  替代）得到的正规方程组为：

$$Z'Y = Z'X\hat{B}$$

参数估计量为：

$$\hat{B} = (Z'X)^{-1} Z'Y$$

其中

$$Z' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & & & \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

通常，对于没有选择另外的变量作为工具变量的解释变量，可以认为用自身作为工具变量。于是被称为**工具变量矩阵**。

### 3、工具变量法估计量是无偏估计量

一元线性模型中，用工具变量法所求的参数估计量  $\hat{\beta}_1$  与总体参数真值  $\beta_1$  之间的关系为

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum z_i (\beta_1 x_i + \mu_i)}{\sum z_i x_i} = \beta_1 + \frac{\sum z_i \mu_i}{\sum z_i x_i}$$

两边取概率极限得：

$$P \lim(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + \frac{P \lim \frac{1}{n} \sum z_i \mu_i}{P \lim \frac{1}{n} \sum z_i x_i}$$

如果工具变量  $z$  选取恰当，即有

$$P\lim \frac{1}{n} \sum z_i \mu_i = \text{cov}(z_i, \mu_i) = 0,$$

$$P\lim \frac{1}{n} \sum z_i x_i = \text{cov}(z_i, x_i) \neq 0$$

则有：
$$P\lim(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

- 对于多元线性模型

$$\begin{aligned} E(\hat{B}) &= E((Z'X)^{-1} Z'Y) \\ &= (Z'X)^{-1} E(Z'(XB + N)) \\ &= B + E(Z'N) \\ &= B \end{aligned}$$

其中利用了工具变量与随机误差项不相关。

## 4、几点注解

- 工具变量并没有替代模型中的解释变量，只是在估计过程中作为“工具”被使用。
- 如果模型中有两个以上的随机解释变量与随机误差项相关，就必须找到两个以上的工具变量。但是，一旦工具变量选定，它们在估计过程被使用的次序不影响估计结果。为什么？
- OLS可以看作工具变量法的一种特殊情况。为什么？

## 四、案例：消费模型



# 1、OLS估计结果

Dependent Variable: CONS

Method: Least Squares

Date: 03/20/03 Time: 22:05

Sample(adjusted): 1981 1996

Included observations: 16 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	540.5286	84.30153	6.411848	0.0000
GDP	0.480948	0.021861	22.00035	0.0000
CONS1	0.198545	0.047409	4.187969	0.0011
R-squared	0.999773	Mean dependent var	13618.94	
Adjusted R-squared	0.999739	S.D. dependent var	11360.47	
S.E. of regression	183.6831	Akaike info criterion	13.43166	
Sum squared resid	438613.2	Schwarz criterion	13.57652	
Log likelihood	-104.4533	F-statistic	28682.51	
Durbin-Watson stat	1.450101	Prob(F-statistic)	0.000000	

## 2、IV估计结果

Dependent Variable: CONS

Method: Two-Stage Least Squares

Date: 03/20/03 Time: 22:07

Sample(adjusted): 1981 1996

Included observations: 16 after adjusting endpoints

Instrument list: C GDP GDP1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	557.7307	85.67812	6.509605	0.0000
GDP	0.489100	0.022767	21.48264	0.0000
CONS1	0.180759	0.049394	3.659516	0.0029
R-squared	0.999771	Mean dependent var	13618.94	
Adjusted R-squared	0.999736	S.D. dependent var	11360.47	
S.E. of regression	184.6748	Sum squared resid	443362.1	
F-statistic	28373.31	Durbin-Watson stat	1.387119	
Prob(F-statistic)	0.000000			

## 五、广义矩估计（GMM）的概念

- 如果1个随机解释变量可以找到多个互相独立的工具变量，人们希望充分利用这些工具变量的信息，就形成了**广义矩方法（GMM）**。
- 一般讲，矩条件大于待估参数的数量，就是**广义矩方法**。
- **GMM**是近20年计量经济学理论方法发展的重要方向之一。
- **L. Hansen, Large Sample Properties of GMM Estimators, Econometrics, 50, 1982.**

- 显然，在**GMM**中，如何求解成为它的核心问题。

$$\hat{\beta} = \arg \min (m(\beta)'W^{-1}m(\beta))$$

$$m(\beta) = \begin{pmatrix} m_1(\beta) \\ m_2(\beta) \\ \vdots \\ m_J(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_i z_{1i} e_i \\ \frac{1}{n} \sum_i z_{2i} e_i \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_i z_{Ji} e_i \end{pmatrix}$$

- 参考《高等计量经济学》 § 3.6
- 在应用软件中可以方便地实现。
- **IV**是**GMM**的一个特例。
- **OLS**是**GMM**的一个特例。

# GMM估计结果

Dependent Variable: CONS

Method: Generalized Method of Moments

Date: 03/20/03 Time: 22:26

Sample(adjusted): 1981 1996

Included observations: 16 after adjusting endpoints

No prewhitening

Bandwidth: Fixed (2)

Kernel: Bartlett

Convergence achieved after: 3 weight matrices, 4 total coef iterations

Instrument list: C GDP GDP1 CONSG

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	565.0009	68.12409	8.293701	0.0000
GDP	0.491428	0.011075	44.37421	0.0000
CONS1	0.174992	0.023809	7.349952	0.0000
R-squared	0.999769	Mean dependent var	13618.94	
Adjusted R-squared	0.999733	S.D. dependent var	11360.47	
S.E. of regression	185.6382	Sum squared resid	448000.1	
Durbin-Watson stat	1.360786	J-statistic	0.029837	

## 综合练习一

- 自己选择研究对象，完成建立模型、收集数据、估计模型和检验模型的全过程。
- 4月23日交打印稿。
- 尽可能用统计年鉴数据，以减少收集数据的工作量。
- 必须列出数据表，以便于检查。