高级宏观经济学作业一

邓皓天　2023310114

一、在索洛模型中考虑财政政策。假设生产函数$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$满足索洛模型的基本假设。政府消费为$G(t)$，资金来源为总额税$T(t)$，每期预算平衡。储蓄为可支配收入的固定比例，储蓄率为s。

1. 写出总资本的运动方程。

2. 写出单位有效工人平均资本的运动方程。（令$g(t) \equiv \frac{G(t)}{A(t)L(t)}$。）

3. 假设单位有效工人平均政府消费不随时间变化，即$g(t) = \gamma > 0$。作图说明模型可能存在多重均衡并判断不同均衡点是否是稳定的。

4. 请根据稳态条件推导，政府消费增加会让稳态资本存量、产出、消费分别如何变化？（提示：判断$\frac{\partial k^*}{\partial \gamma}$的符号）

答：

1. $Y = C + I + G = C + S + T \quad \Rightarrow \quad I = S \quad (T = G)$

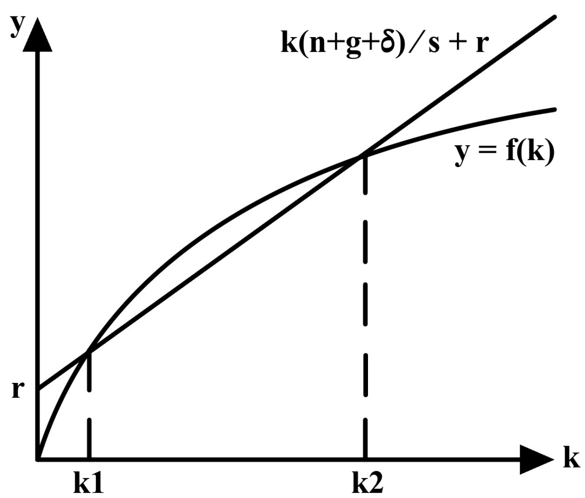
$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = S \cdot [Y(t) - T(t)] - \delta K(t) = S \cdot [Y(t) - G(t)] - \delta K(t)$

2. $k = \frac{K}{AL} \quad \Rightarrow \quad \frac{dk}{dt} = \frac{1}{(AL)^2}\left[\frac{dK}{dt} \cdot AL - K \cdot \left(A \cdot \frac{dL}{dt} + L \cdot \frac{dA}{dt}\right)\right]$

$$
\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - k(t)\cdot\left[\frac{1}{L(t)}\cdot\frac{dL}{dt} + \frac{1}{A(t)}\cdot\frac{dA}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{A(t)L(t)}\{S[Y(t)-G(t)] - \delta K(t)\} - (n+g)k(t) \\
&= S\cdot[y(t)-g(t)] - (n+g_A+\delta)\,k(t)
\end{aligned}
$$

3.当$r = g(t) > 0$时，$\dot{k}(t) = s\cdot f[k(t)] - s\gamma - (n+g+\delta)k(t)$。令$\dot{k}(t) = 0$，则$y = f[k(t)] = \gamma + \frac{(n+g+\delta)}{s}k(t)$。

- 当$0 < k < k_1$时，$r + \frac{(n+g+\delta)}{s}k(t) > f[k(t)]$，$\dot{k}(t) < 0$，$k$将降低。
- 当$k_1 < k < k_2$时，$r + \frac{(n+g+\delta)}{s}k(t) < f[k(t)]$，$\dot{k}(t) > 0$，$k$将增加。
- 当$k > k_2$时，$r + \frac{(n+g+\delta)}{s}k(t) > f[k(t)]$，$\dot{k}(t) < 0$，$k$将降低。



综上所述，模型可能存在多重均衡，但k_1不稳定，k_2稳定。

4.根据第3题结论可知$f\left[k^*(t)\right] = r + \frac{n+g+\delta}{s}\cdot k^*(t)$，令$k^* = k_2$，等式两侧

对r求偏导得

$$f'\left[k^*(\tau)\right]\cdot\frac{\partial k^*}{\partial r}=1+\frac{n+g+\delta}{s}\cdot\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}$$

因此可得

$$\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}=\frac{1}{f'\left[k^*(t)\right]-\frac{n+g+\delta}{s}}=\frac{1}{f'\left[k^*(t)\right]-\beta}\quad,\quad\beta=\frac{n+g+\delta}{s}$$

在$k=k_2$处，$f'\left[k^*(t)\right]<\beta$，因此$\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}<0$，又因为$\frac{\partial y}{\partial\gamma}=\frac{\partial y}{\partial k^*}\cdot\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}$，根据稻田条件有$\frac{\partial y}{\partial k}>0$，故$\frac{\partial y}{\partial\gamma}<0$。而$C=(1-S)(y-r)$，所以$\frac{\partial C}{\partial\gamma}=(1-s)\left(\frac{\partial y}{\partial r}-1\right)<0$。

综上，政府消费γ增加，会让k^*、C和y都减少。

二、在RCK模型中，假设折旧率$\delta=0$，折现率为$\beta>0$，跨期替代弹性为σ，人口增长率为n，技术进步率为g。假设在BGP上，g突然永久性下降。

1. $\dot{c}=0$曲线和$\dot{k}=0$曲线会如何变化?

2. 当g下降时，c会上升、下降、保持不变还是无法确定?

3. 假设C—D生产函数$f(k)=k\alpha$，说明g的边际变化对BGP上储蓄率的影响（提示：判断$\frac{\partial s}{\partial g}$的符号）。

答：

1.令$\frac{\dot{C}(t)}{c(t)}=r(t)-n-g-\beta\delta=0$，$r(t)=f'[k(t)]$。因此$r(t)=n+g+\beta=f'[k(t)]$。当$g$下降时，$f'[k(t)]$也应下降。由稻田条件可知，$k$会增加，$\dot{c}=0$会右移。又因为$\dot{k}(t)=w(t)+[r(t)-n-g]k(t)-c(t)=0$，$w(t)=f[k(t)]-k(t)\cdot f[k(t)]$，因此$C(t)=f[k(t)]-k(t)\cdot f'[k(t)]+k(t)\cdot f'[k(t)]-(n+g)k(t)=f[k(t)]-(n+g)k(t)$，当$g$下降时，$C(t)$会增加。

2.k_t的变动由k_{t-1}决定，存在一定粘性，而C的变动为刚性变动，但由于无法确定新旧均衡点的推对位置，故无法确定。

3.根据C-D生产函数可知$y=f(k)=k^{\alpha}$，因此$f'(k)=n+g+\beta=\alpha k^{\alpha-1}$

$$1=\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\cdot\frac{\partial k}{\partial g}\Rightarrow\frac{\partial k}{\partial g}=\frac{1}{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}}$$

$$\begin{aligned}
c&=k^{\alpha}-(n+g)k\\
S&=\frac{y-c}{y}=\frac{(n+g)k}{k^{\alpha}}=\frac{n+g}{k^{\alpha-1}}\\
\frac{\partial S}{\partial g}&=\frac{1\cdot k^{\alpha-1}-(n+g)(\alpha-1)k^{\alpha-2}\cdot\frac{\partial k}{\partial g}}{\left(k^{\alpha-1}\right)^2}=\frac{k^{\alpha-1}-(n+g)\cdot\frac{1}{\alpha}}{k^{2\alpha-2}}\\
&=\frac{\alpha k^{\alpha-1}-(n+g)}{\alpha k^{2\alpha-2}}=\frac{\beta}{\alpha\left(k^{2-1}\right)^2}>0
\end{aligned}$$

综上所述，g的变化会使BGP上的储蓄率s同向变化。

三、资源的有限性。假设生产函数为$Y=K^{\alpha}(AL)^{\beta}R^{1-\alpha-\beta}$，其中$\alpha>0$，$\beta>0$且$\alpha+\beta<1$。资本存量的变动方程为：$\dot{K}=sY-\delta K$。假设技术进步率和人口增长率分别为$g$和$n$。$R$代表总量有限的自然资源，增长率

为0。

1. 该经济是否有唯一的平衡增长路径？如果有，Y和K的增长率分别是多少？该路径是否稳定？如果没有，请解释原因。

2. 自然资源总量有限是否意味着人均收入的增长最终必然会停滞？

答：

1.如果存在BGP，则$\frac{\dot{K}}{K}$为常数。又由于$\frac{\dot{K}}{K}=s\cdot\frac{Y}{K}-\delta$，意味着$\frac{Y}{K}$为常数，即$\frac{d\ln Y}{dt}=\frac{d\ln K}{dt}=g$。又由于$Y=K^{\alpha}(AL)^{\beta}\cdot R^{1-\alpha-\beta}$，因此

$$
\begin{aligned}
\ln Y &= \alpha\ln K+\beta(\ln A+\ln L)+(1-\alpha-\beta)\ln R \\
\frac{d\ln Y}{dt} &= \alpha\cdot\frac{d\ln K}{dt}+\beta\left(g_A+n\right)\Rightarrow g_Y=\alpha g_K+\beta\left(g_A+n\right) \\
g^{*} &= \frac{\beta\left(n+g_A\right)}{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

- 如果$g_Y>g_K$，则$\frac{Y}{K}$增加，$\frac{\dot{K}}{K}$上升，直到$g_Y=g_K$。

- 如果$g_Y<g_K$，则$\frac{Y}{K}$减少，$\frac{\dot{K}}{K}$下降，直到$g_Y=g_K$。

综上所述，存在BGP。

2.

$Y=K^{\alpha}(AL)^{\beta}R^{1-\alpha-\beta}$

$g_{\frac{Y}{L}}=g_Y-g_L=g^{*}-n=\frac{\beta(n+g_A)}{1-\alpha}-n=\frac{\beta(n+g_A)-n+n\alpha}{1-\alpha}=\frac{n(\beta-1+\alpha)+\beta g_A}{1-\alpha}=\frac{\beta g_A-(1-\beta-\alpha)n}{1-\alpha}$

令$g_{\frac{Y}{L}}=0$，则$g_A=\frac{(1-\alpha-\beta)n}{\beta}=\Delta$，当$g_A>\Delta$时，人均产出将增长，反之则下降。

四、在标准的RCK模型中，假设生产函数为$f(k)=k^\alpha$，资本折旧率为δ，从而资本积累方程变为$\dot{k}(t)=f(k(t))-(n+g+\delta)k(t)-c(t)$。

1. 请写出社会计划者的最优化问题和期值哈密尔顿函数。

2. 求解最优化问题的一阶条件。

3. 在稳态附近对$\dot{c}(t)$和$\dot{k}(t)$取一阶泰勒近似，推导线性微分方程系统的系数矩阵Δ并计算其特征值。

4. 假设中美两国经济的模型参数如下表所示，请使用计算器计算中美两国经济向稳态收敛的速度。

	θ	n	g	β	δ	α
中国	1	1%	1%	0.04	10%	0.5
美国	1	1%	1%	0.01	4%	1/3

答:

1.

$$\begin{aligned}
\max \quad & U(0)=\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{k}(t)=k^\alpha(t)-(n+g+\delta)k(t)-C(t) \\
& k(0)>0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{-R(t)+(n+g+\delta)t}k(s)\geqslant 0 \\
H= \quad & \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}+\lambda(t)\left[k^\alpha(t)-(n+g+\delta)k(t)-C(t)\right]
\end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial H}{\partial C}=0\Rightarrow C(t)^{-\theta}=\lambda(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}=-\theta\cdot\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k}+\dot{\lambda}(t)=\beta\lambda\Rightarrow\lambda(t)\left[\alpha k^{\alpha-1}(t)-(n+g+\delta)\right]-\theta\cdot\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}\cdot\lambda(t)=\beta\cdot\lambda(t)$$

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\frac{\alpha k^{\alpha-1}(t)-(n+g+\delta+\beta)}{\theta}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\beta t}\lambda(t)\cdot k(t)=0$$

3.

$$\left.\begin{aligned}
\dot{c}(t)&=\left[\alpha k^{\alpha-1}(t)-(n+g+\delta+\beta)\right]\cdot\frac{C(t)}{\theta} \\
\dot{k}(t)&=k^\alpha(t)-(n+g+\delta)k(t)-C(t)
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&\alpha k^{\alpha-1}(t)=n+g+\delta+\beta \\
&c(t)=k^\alpha(t)-(n+g+\delta)k(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{k}(t)\\ \dot{c}(t)\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}\frac{\partial\dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial\dot{k}}{\partial C}\\ \frac{\partial\dot{c}}{\partial k} & \frac{\partial\dot{C}}{\partial C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k-k^*\\ c-c^*\end{bmatrix}=\Delta\begin{bmatrix}k-k^*\\ c-c^*\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\dot{k}}{\partial k}=\alpha k^{\alpha-1}(t)-(n+g+\delta)=\beta \\
&\frac{\partial\dot{k}}{\partial c}=-1 \\
&\frac{\partial\dot{C}}{\partial k}=\frac{C(t)}{\theta}\cdot\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}(t) \\
&\frac{\partial\dot{C}}{\partial c}=\frac{1}{\theta}\left[\alpha k^{\alpha-1}-(n+g+\delta+\beta)\right]=0
\end{aligned}$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}\beta & -1\\ \frac{C(t)}{\theta}\alpha\cdot(\alpha-1)k^{\alpha-2}(t) & 0\end{bmatrix} \quad \begin{aligned}&\operatorname{tr}(\Delta)=\beta>0.\\ &|\Delta|=\frac{C(t)}{\theta}\alpha\cdot(\alpha-1)k^{\alpha-2}(t)<0\end{aligned}$$

设$\lambda_1 > 0$，$\lambda_2 < 0$。解方程

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \frac{C(t)}{\theta}\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}(t) = 0$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \frac{4C(t)}{\theta}\alpha(t-1)k^{\alpha 2}(t)}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \frac{4C(t)}{\theta}\alpha(t)\Big)\, k^{\alpha-2}(t)}}{2}$$

4. 中国

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2\sqrt{k}} &= 0.16 \\ C(t) &= \sqrt{k} - 0.12k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k^* &= 9.765652 \\ C^* &= 1.953125 \end{aligned}$$

$$\lambda = \tfrac{0.04 \pm \sqrt{0.04^2 - \frac{4c}{1} \cdot 0.5(-05) \cdot k^{-1.5}}}{2} \Rightarrow \quad \lambda_1 \approx 0.1481 \quad \lambda_2 \approx -0.1081$$

美国

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2\sqrt{k}} &= 0.07 \\ C(t) &= \sqrt{k} - 0.06k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k^* &= 51.020408 \\ C^* &= 4.081633 \end{aligned}$$

$$\lambda = \tfrac{0.01 \pm \sqrt{0.01^2 - \frac{4C}{1} \cdot (-0.25)k^{-15}}}{2} \Rightarrow \lambda \approx 0.01065 \quad \lambda_2 \approx 0.00065$$