金融经济学第三讲

上海财经大学金融学院

陈利平

金融经济学第三讲

- 第三章　CAPM 理论
- 资本资产定价模型（CAPM）是60年代由Linter(1965,1969)、Mossin(1965)和Sharpe(1964)等发展起来的。该理论认为，如果人们对预期收益率和风险的预测相同，并且都愿意持有有效投资组合，那么均衡时任意资产的风险溢价等于该资产的系数和市场组合的风险溢价之积。CAPM理论之所以重要，是基于如下两个原因：（1）、该理论为目前广泛采用的一类消极投资法（指数方法）提供了理论根据，该投资方法完全按照市场指数构成的组合权重来被动地进行投资；同时该方法为衡量积极的投资管理策略业绩提供了一个简单可行的基准。（2）、该理论给出了各种财务应用中对预期收益的估计方法，为公司理财决策提供了理论依据（见Black、Jensen和Scholes(1972)，Fama和MacBeth(1973)，Bodie和Merton(1997)）。

金融经济学第三讲

§3.1 市场组合

- 假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。

- 一、不考虑无风险资产的情形
- 假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量 $\tilde{r}_1$ 、$\tilde{r}_2$ 、…、$\tilde{r}_N$ 线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种风险资产随机回报率的线性组合。

金融经济学第三讲

- 假定经济中存在 I 位投资者，个体 i 的初始财富量为 $W_0^i > 0$，个体投资在资产 j 上的财富份额为 w_{ij} 。记经济中总的初始财富量为：
- $$W_{m0} = \sum_{i=1}^{I} W_0^i$$ ，
- 记整个市场投资在第种资产上的市场份额为 w_{mj} ，w_{mj} 则满足：
- $$\sum_{i=1}^{I} w_{ij} W_0^i = w_{mj} W_{m0}$$ ，j=1,2,…N。
- 整理得：$$w_{mj} = \sum_{i=1}^{I} w_{ij} \frac{W_0^i}{W_{m0}}$$ ，j=1,2,…N 。
- 以向量形式表示，我们有
$$\begin{bmatrix} w_{m0} \\ \vdots \\ w_{mN} \end{bmatrix} = \frac{W_0^1}{W_{m0}} \begin{bmatrix} w_{10} \\ \vdots \\ w_{1N} \end{bmatrix} + \frac{W_0^2}{W_{m0}} \begin{bmatrix} w_{20} \\ \vdots \\ w_{2N} \end{bmatrix} + \cdots + \frac{W_0^I}{W_{m0}} \begin{bmatrix} w_{I0} \\ \vdots \\ w_{IN} \end{bmatrix}$$

金融经济学第三讲

- 因此市场组合的权重向量是个体投资组合权重向量的凸组合。记个体 i 的投资组合为 p_i，其随机回报率向量为 $\tilde{r}_{p_i}$，记 $\lambda_i = W_0^i / W_{m0}$，记市场组合的随机回报率为 $\tilde{r}_m$，则市场组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_m \equiv \sum_{j=1}^{N} w_{mj}\tilde{r}_j = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \tilde{r}_{p_i}$$

- 即市场组合回报率是个体投资组合回报率的凸组合。
-
- ## 二、引入无风险资产的情形
- 假定经济中存在许多可以进行交易的风险资产和一种无风险资产，假定其中 N 种风险资产的随机回报率向量 $\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$ 线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产的随机回报率向量都可以表示为这 N 种风险资产随机回报率的线性组合，假定无风险资产的回报率为 r_f。

金融经济学第三讲

- 假定经济中存在 **I** 位投资者，个体 **i** 的初始财富量 $W_0^i > 0$，个体 **i** 投资在资产 **j** 上的财富份额为 w_{ij}，以 $j=0$ 代表无风险资产，则 w_{i0} 代表在无风险资产上的财富份额，个体 **i** 投资在无风险资产上的财富份额为 $w_{i0} = 1 - \sum_{i=1}^{I} w_{ij}$，记经济中总的初始财富量为 $W_{m0} = \sum_{i=1}^{I} W_0^i$，整个
- 市场投资在第 **j** 种资产上的市场份额为 w_{mj}，则 w_{mj} 满足：
- $\sum_{i=1}^{I} w_{ij} W_0 = w_{mj} W_{m0}$，**j=0,1,2,…N**。
- 整理得：$w_{mj} = \sum_{i=1}^{I} w_{ij} \frac{W_0^i}{W_{m0}}$
- ，**j=0,1,2,…N**。
- 以向量形式表示，我们有：

$$\begin{bmatrix} w_{m0} \\ \vdots \\ w_{mN} \end{bmatrix} = \frac{W_0^1}{W_{m0}} \begin{bmatrix} w_{10} \\ \vdots \\ w_{1N} \end{bmatrix} + \frac{W_0^2}{W_{m0}} \begin{bmatrix} w_{20} \\ \vdots \\ w_{2N} \end{bmatrix} + \cdots + \frac{W_0^I}{W_{m0}} \begin{bmatrix} w_{I0} \\ \vdots \\ w_{IN} \end{bmatrix}$$

金融经济学第三讲

- 因此市场组合的权重向量是个体投资组合权重向量的凸组合。
- 记个体 i 的投资组合为 p_i，其随机回报率向量为 $\tilde{r}_{p_i}$，记 $\lambda_i = W_0^i / W_{m0}$，
- 记市场组合的随机回报率为 $\tilde{r}_m$，则市场组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_m = \sum_{j=1}^{N} w_{mj}\tilde{r}_j + (1-\sum_{j=1}^{N} w_{mj}) r_f = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \tilde{r}_{p_i}$$

- 即市场组合回报率是个体投资组合回报率的凸组合。

金融经济学第三讲

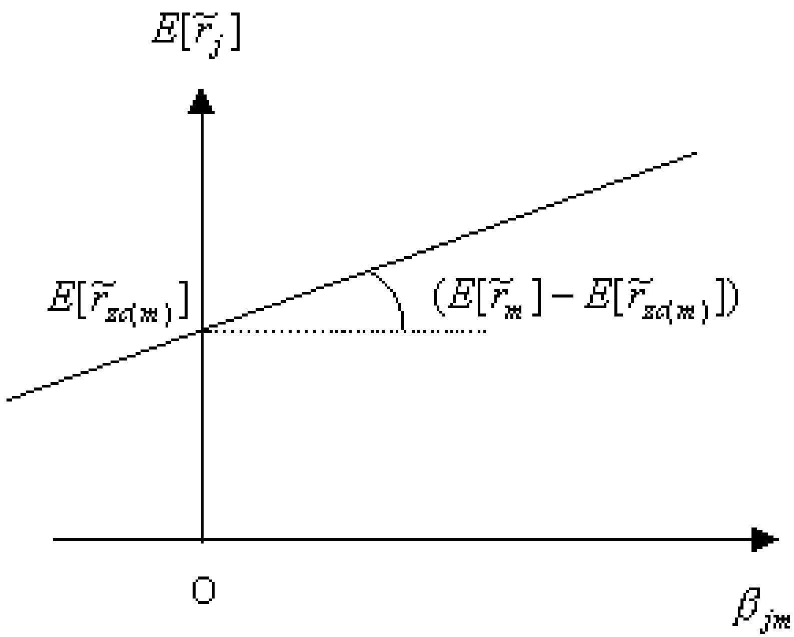
- §3.2 资本资产定价理论
- **3.3.1 零 - 贝塔 CAPM 和传统 CAPM**
- 假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中不存在无风险资产，风险资产可以无限卖空。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值 - 方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。
- 在上述假定下，在 $\sigma(\tilde{r})$ $E[\tilde{r}]$ 平面内组合前沿是一条双曲线，有效组合是双曲线上面半支，且有效组合的凸组合也是有效组合。由于投资者都选择有效组合，所以市场组合也是一个有效组合，位于双曲线的上支。考虑到不可能所有投资者都选择最小方差投资组合 **mvp**，所以市场组合也不可能是最小方差投资组合。

金融经济学第三讲

- 一、证券市场线 (**Security Market Line**)
- 由于市场组合 **m** 是一个不等于 **mvp** 的有效组合，根据 **ch2** 的讨论，对任意可行投资组合 **q**，我们有：
- $E[\tilde{r}_q] = (1 - \beta_{qm})E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}E[\tilde{r}_m]$ 。
- 因为所有风险资产都是可行投资组合，所以对 $\forall j = 1, 2, \cdots, J$，我们有：$E[\tilde{r}_j] = (1 - \beta_{jm})E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{jm}E[\tilde{r}_m]$
- ，
- 上两式蕴涵，所有风险资产（和可行投资组合）的期望回报率依赖于该资产（可行投资组合）期望回报率与市场组合期望回报率的协方差。此式可以进一步改写为 $E[\tilde{r}_j] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{jm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])$

金融经济学第三讲

- 因此所有风险资产和可行组合的期望回报率都位于同一条直线上，该直线被称为证券市场线，如图 3.2.1 所示。



- （图 3.2.1 ）：完全风险资产下市场组合是有效组合时的证券市场线

金融经济学第三讲

- 二、零 - 贝塔 **CAPM**
- 在上述假定下，由于市场组合 **m** 是一个有效组合，其零 - 协方差组合 **zc(m)** 是一个无效组合，所以对于任意可行投资组合 **q**，其期望回报率满足：
- $$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])$$
  ，
- $$E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0$$
-

  ，
- 上述关系式被称为零 - 贝塔 **CAPM (Zero-Beta Capital Asset Pricing Model)**，由 **Black(1972)** 和 **Lintner(1969)** 给出。零 - 贝塔 **CAPM** 蕴涵，均衡时资产和可行投资组合的期望回报率仅反映了同市场组合相关的那部分风险。

金融经济学第三讲

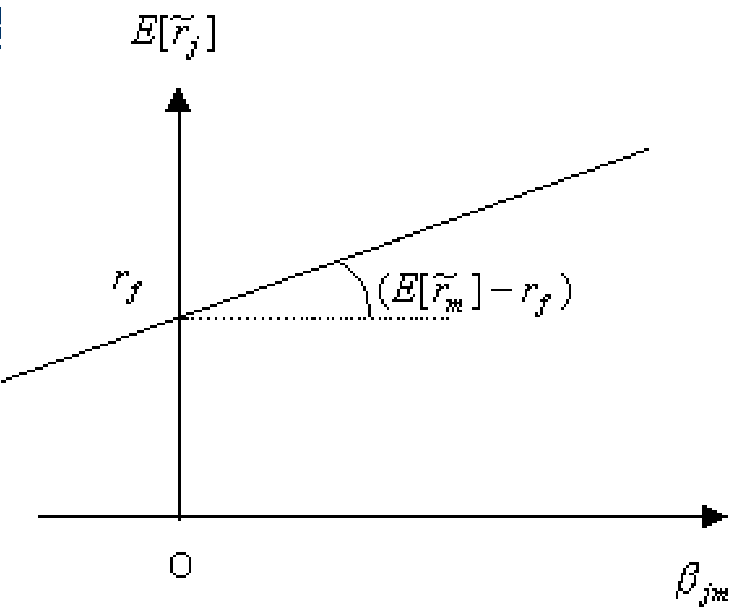
- **3.2.2 传统 CAPM**
- 假定市场中所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。假定经济中存在许多风险资产和一种无风险资产，风险资产可以无限卖空，无风险资产可以以无风险利率 r_f 无限制地借贷。假定每一位投资者的偏好关系都可以用一个均值-方差的函数来刻画，且投资者都选择有效组合。
- 在上述假定下，在标准偏差-期望回报率平面内组合前沿是两条射线，有效组合是两条射线的上面一支，且有效组合的凸组合也是有效组合。由于投资者都选择有效组合，所以市场组合也是一个有效组合，位于两条射线的上面一支。

金融经济学第三讲

- 根据 ch2 的性质，对于任意可行投资组合，有：
- $$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qm}(E[\tilde{r}_m]-r_f)$$

，

- 上式被称为传统资本资产定价模型（传统 CAPM），该模型由 Linter (1965)、 Mossin(1965) 和 Sharpe(1964) 独立得到。在该模型中，任意投资组合的风险溢金等于该投合的风险溢金。
- 因为所有风险资产都是可行
- 投资组合，所以对，我们有：$$E[\tilde{r}_j]=r_f+\beta_{jm}(E[\tilde{r}_m]-r_f)$$
-
- 在期望回报率 - 贝塔系数平面内，
- 所有风险资产和可行组合都位于
- 同一条直线上，即存在无风险市
- 场的证券市场线上，如图 3.2.2 所示。



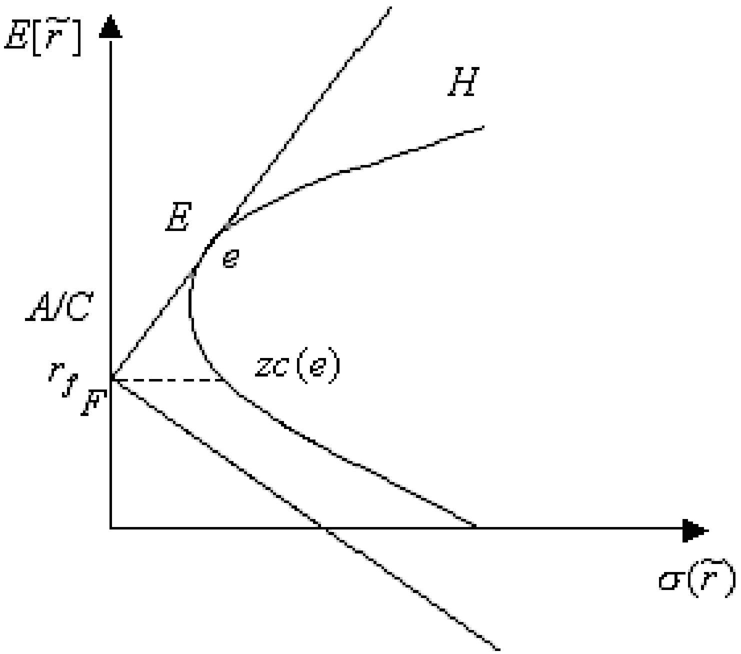
金融经济学第三讲

- **§3.3 带约束的 CAPM**
- 前面的讨论都假定了个体可以无限制地以相同的利率借取或贷出无风险资金，这种假定同真实经济是不相吻的。在真实经济环境中，投资者要受到资金约束，不可能无限制地借取无风险资产；同时存贷款利率也并不相同。 **Merton(1982)** 在假定个体不能借钱投资或借、贷利率不同的假定下，给出了带约束的资本资产定价模型 **(constrained CAPM)** ，下面我们来介绍该模型。

- **3.3.1 禁止贷款时的 CAPM**
- 假定市场中存在 **I** 位投资者，所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，风险资产和无风险资产正供给，假定风险资产可以无限卖空，无风险资产不允许卖空（即投资者无法通过贷款方式获得资金来进行风险投资）；假定市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。

金融经济学第三讲

- 　　假定投资者都选择持有有效组合，在投资者不允许通过贷款方式获得资金以进行风险投资的假定下，有效组合位于图 **3.5.1** 中的曲线 **FEH** 上。
- （图 **3.5.1** ）：禁止
- 借款情形下的前沿
- 组合



金融经济学第三讲

- 在该经济中，部分对期望回报率要求低于切点组合期望回报率的个体，他们将选择部分持有无风险资产和部分持有风险资产，其投资组合位于线段 $\overline{FE}$ 上，可以表示为：
- $p_i = \lambda_i e + (1 - \lambda_i) f$，$0 \le \lambda_i \le 1$，$i = 1,2,\dots,k$
- 其中 e 和 f 分别为切点组合和无风险资产。
- 当投资者对期望回报率的要求高于切点组合期望回报率 $E[\tilde{r}_e]$ 时，需要卖空无风险资产以投资切点组合。在不允许借贷的假定下，投资者为获得高于切点组合的期望回报率，由于无法借贷，只有卖空较低回报率的风险资产以获得资金，再投资在较高回报率的资产上，其投资组合位于双曲线 **EH** 段上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i e + (1 - \lambda_i) zc(e)$$

- 注意到此处 $E[\tilde{r}_{zc(e)}] = r_f$，$\sigma^2(\tilde{r}_{zc(e)}) > 0$。

金融经济学第三讲

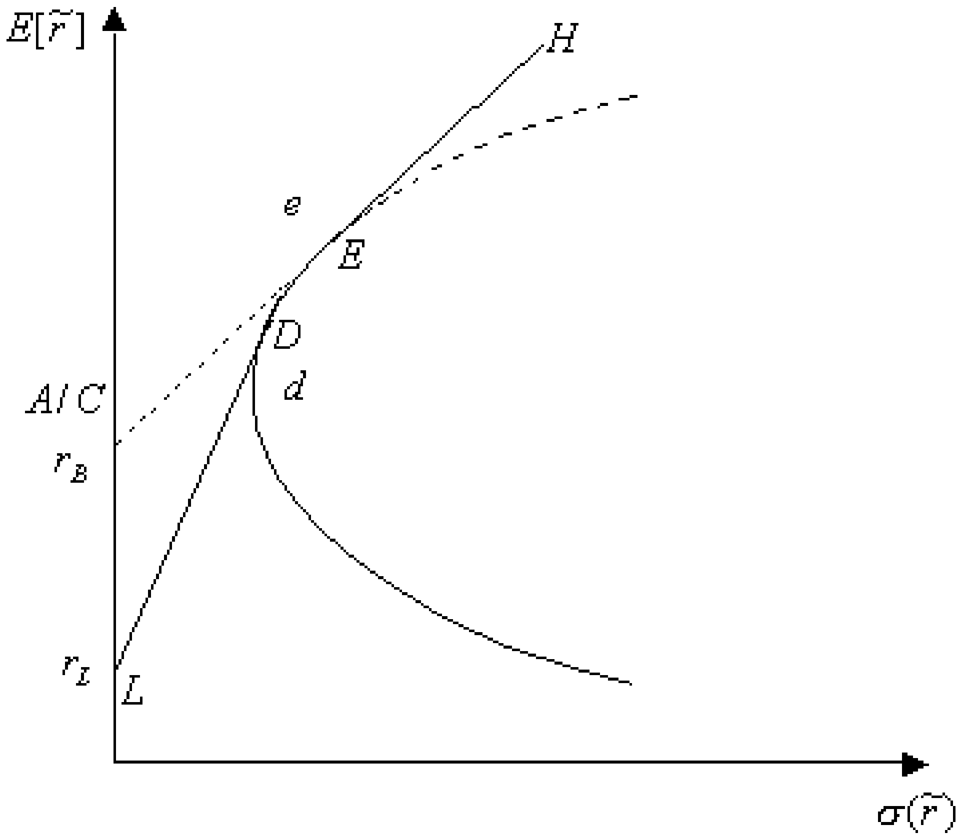
- 由于市场组合是个体组合的凸组合，因此市场组合可以表示为：
- $m = af + be + (1 - a - b)zc(e)$ ，
- 其中 $1 > a > 0$ $b > 0$ $a + b \geq 1$ 。
- 比较上面三个等式可以看出，在上述假定下，市场组合一般来说并不是有效组合。
- 定理：在个体都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，以无风险利率贷款被严格禁止的假定下，对任意可行投资组合，有：
- $E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])$
，
- 且有 $E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0$ $E[\tilde{r}_{zc(m)}] \geq r_f$ ， 。
-

金融经济学第三讲

- **3.3.2 存、贷款利率不等时的 CAPM**
- 假定市场中存在 I 位投资者，所有投资者都是风险回避的、不饱和的，他们有着相同的投资周期，对资产回报率有相同的预期；假定每一种证券都是无限可分的，风险资产和无风险资产正供给，假定风险资产可以无限卖空，同时无风险资产的贷款利率大于存款利率；假定市场是无摩擦的，即没有交易成本和税收，信息会自动地传递到每一个投资者手中。
- 当投资者都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，借款利率大于贷款利率时，个体投资组合都位于图 3.5.2 中的曲线 LDEH 上。该经济中存在两个切点组合 d 和 e 。

金融经济学第三讲

- （图 3.5.2 ）：借款利率不等于贷款利率时的前沿组合



金融经济学第三讲

- 当个体部分投资无风险资产 l ，部分投资风险资产时，个体投资组合位于线段 $\overline{lE}$ 上，可以表示为：
- $p_i = \lambda_i l + (1 - \lambda_i) d \quad 0 \le \lambda_i \le 1$ ，
- 其投资组合的期望回报率满足 $r_l \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_d]$ ；
- 当个体希望获得的期望回报率介于 $E[\tilde{r}_d]$ 和 $E[\tilde{r}_e]$ 之间时，个体无法通过以无风险利率 r_l 来获得资金，因此个体只能通过风险资产组合来达到，该组合可以表示为：

$$p_i = \lambda_i d + (1 - \lambda_i) e \quad 0 \le \lambda_i \le 1$$

- 其期望回报率满足：$E[\tilde{r}_d] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_e]$ 。
- 当个体希望获得的期望回报率高于 $E[\tilde{r}_e]$ 时，个体可以以无风险利率 r_b 获取资金投资在风险资产上时，个体的投资组合位于射线 $\overrightarrow{EH}$ 上，可以表示为：

$$p_i = \lambda_i b + (1 - \lambda_i) e \quad \lambda_i < 0$$

金融经济学第三讲

- 其投资组合的期望回报率满足：$E[\tilde{r}_{p_i}] \geq E[\tilde{r}_e]$。
- 考虑到市场组合是个体组合的凸组合，因此市场组合可以表示为：

$$m = a_l l + a_d d + a_e e + (1 - a_l - a_d - a_e) b$$

- 其中 $a_l > 0$，$a_d > 0$，$a_e > 0$，$1 - a_l - a_d - a_e < 0$。
- 因此市场组合的随机回报率可以表示为
- $$\tilde{r}_m = a_l r_l + a_d \tilde{r}_d + a_e \tilde{r}_e + (1 - a_l - a_d - a_e) r_b$$，

- 定理：在个体都选择持有有效组合，风险资产和无风险资产正供给，借款利率要严格高于贷款利率的假定下，对任意可行投资组合，有：
- $$E[\tilde{r}_q] = E[\tilde{r}_{zc(m)}] + \beta_{qm}(E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}])$$，
- 且有 $E[\tilde{r}_m] - E[\tilde{r}_{zc(m)}] > 0$，$r_B \geq E[\tilde{r}_{zc(m)}] \geq r_L$。
-

金融经济学第三讲

- §3.4 市场摩擦和 CAPM 的失效
- 在前面讨论中假定了个体可以无限卖空风险资产，可以以无风险利率无限借贷，在真实经济中显然是不可能的。如果经济中投资者不能无限制地卖空风险资产，不能无限制地借贷，则上述讨论不再成立，静态 **CAPM** 定理也不再成立。下面我们在个体不能卖空风险资产，经济中不存在无风险资产的假定下，给出一个 **CAPM** 不成立的例子。
- 假定经济中只有三种风险资产 a_1 a_2、a_3 和 ，不存在无风险资产，个体不能卖空风险资产，假定这三种风险资产的随机回报率分别为：

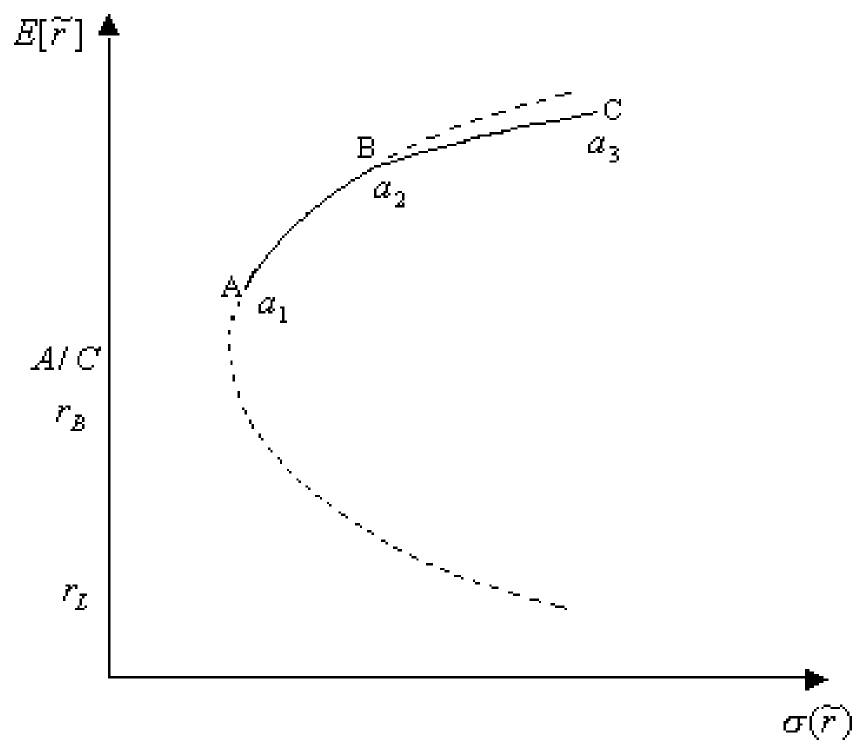
  $\tilde{r}_1$ $\tilde{r}_2$ $\tilde{r}_3 = -\tilde{r}_1 + (1+\frac{1}{2})\tilde{r}_2$
- 、 和 ，

金融经济学第三讲

- 满足： $3E[\tilde{r}_1]=E[\tilde{r}_2]$
- $\mathrm{cov}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=0$ ， $\mathrm{var}(\tilde{r}_1)=\sigma_1^2<\sigma_2^2=\mathrm{var}(\tilde{r}_2)$ 。
- a_3 的期望回报率和方差分别为： $E[\tilde{r}_3]=-E[\tilde{r}_1]+\frac{3}{2}E[\tilde{r}_2]=\frac{7}{2}E[\tilde{r}_1]$
- ； $\mathrm{var}(\tilde{r}_3)=\sigma_1^2+\frac{9}{4}\sigma_2^2>\sigma_2^2$
- 记投资组合 p 为由 a_1 和 a_2 构成的、与 a_3 有相同期望回报率的投资组合，其权重向量为 $(\lambda,1-\lambda)$ ，则 λ 必须满足：
- $E[\tilde{r}_p]=\lambda E[\tilde{r}_1]+(1-\lambda)E[\tilde{r}_2]=E[\tilde{r}_3]=\frac{7}{2}E[\tilde{r}_1]$ ，
- 求解上述方程，得：
- $\lambda=-1/4$ 。
- 该组合的方差满足：
- $\mathrm{var}(\tilde{r}_p)=\frac{1}{16}\sigma_1^2+\frac{25}{16}\sigma_2^2<\mathrm{var}(\tilde{r}_3)$ 。

金融经济学第三讲

- 如果个体可以无限制地卖空风险资产，则 a_3 是一个被占优资产，经济中的组合前沿是一条包含 a_1 和 a_2 的双曲线，组合前沿上的任意投资组合都可以表示为 a_1 和 a_2 的线性组合，此时零 - 贝塔 **CAPM** 成立。
- 当个体无法卖空风
- 险资产时，经济中的投
- 资组合前沿由两段双曲
- 线构成，如图 **3.6** 所示，
- 此时 **CAPM** 定理并不成立。



金融经济学第三讲

- 假定在该经济中，所有个体都持有前沿组合。由于组合前沿由两段双曲线构成，因此市场中个体所持有的投资组合 p_i 刻画如下：
- 当 $E[\tilde{r}_1] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_2]$ 时，p_i 位于组合前沿的 **AB** 段，满足：
- $\alpha_i a_1 + (1 - \alpha_i) a_2$，$0 \le \alpha_i \le 1$；
- 当 $E[\tilde{r}_2] \le E[\tilde{r}_{p_i}] \le E[\tilde{r}_3]$ 时，p_i 位于组合前沿的 **AB** 段，满足：

  $\alpha_i a_2 + (1 - \alpha_i) a_3$，$0 \le \alpha_i \le 1$。
- 因此市场组合 **m** 可以表示为：
- $m = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + (1 - \beta_1 - \beta_2) a_3 = w_1 a_1 + w_2 a_2$。
- 显然，市场组合一般说来并非有效组合。

金融经济学第三讲

- 如果零 - 贝塔 **CAPM** 成立，则对任意可行投资组合 **q**，有：
- $$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]=\frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_q,\tilde{r}_m)}{\mathrm{var}(\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}])$$ 。
- 因为资产 a_1，a_2 和 a_3 也是可行组合，因此有：
- $$E[\tilde{r}_j]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]=\frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_j,\tilde{r}_m)}{\mathrm{var}(\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_m]-E[\tilde{r}_{zc(m)}]),\quad j=1,2,3$$ 。
- 通过简单计算可得：
- $$E[\tilde{r}_3]-E[\tilde{r}_1]=\frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_3-\tilde{r}_1,\tilde{r}_m)}{\mathrm{cov}(\tilde{r}_3-\tilde{r}_2,\tilde{r}_m)}(E[\tilde{r}_3]-E[\tilde{r}_2])$$ 。
- 根据三种资产和市场组合之间的关系，我们有 $:3w_1\sigma_1^2=w_2\sigma_2^2$
- 由于市场组合权重满足上式的可能性几乎为零，因此一般说来，**CAPM** 定理并不成立。