CHAPTER 2

拉姆塞模型与戴蒙德模型

内容提要

- 家庭储蓄决策的微观基础。
- 动态最优化在宏观经济学中的应用。
- 拉姆塞模型的基本假设、动态特征和结论。
- 戴蒙德模型的基本假设、动态特征和结论。

拉姆塞模型

- Representative Agent (RA) Model v.s. Overlapping Generation Model。
- 拉姆塞模型又称拉姆塞—卡斯—库普曼斯模型（RCK）或最优增长模型。
- 厂商的假设:
  - 经济中存在大量相同的厂商，由家庭所有，每个厂商的生产函数都是 $F(K, AL)$。
  - 要素市场和产品市场都是竞争性的。
  - 技术进步率 g 是外生的。
  - 资本折旧率为 0。
- 家庭的假设:
  - 经济中存在大量相同的家庭，人口增长率为 n。
  - 每个家庭成员提供 1 单位劳动。
  - 家庭拥有资本，并全部租赁给厂商。
  - 家庭选择消费来最大化终生效用 $U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(C(t)) \frac{L(t)}{H} dt$。

厂商最优化问题

- 厂商生产函数可根据规模报酬不变性质写为紧凑形式: $y(t) = f(k(t))$。
- 厂商的最优化问题为

$$\max_{k} f(k(t)) - w(t) - r(t)k(t)$$

- 一阶条件:

$$\begin{aligned} r(t) &= f'(k(t)) \\ w(t) &= f(k(t)) - k(t) f'(k(t)) \end{aligned}$$

- 实际工资

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{\partial F(K(t), A(t)L(t))}{\partial L(t)} \\ &= A(t) \frac{\partial F(K(t), A(t)L(t))}{\partial [A(t)L(t)]} \\ &= A(t)w(t) \end{aligned}$$

家庭效用函数

- 家庭的瞬时效用函数为

$$u(C(t))=\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

其中 $C(t)$ 表示家庭中每个人的消费，$\theta>0$ 表示相对风险规避系数。

  - 绝对风险规避系数：$-\frac{u''(C)}{u'(C)}$，
  - 相对风险规避系数：$-\frac{Cu''(C)}{u'(C)}$，
  - 跨期替代弹性，θ 越高意味着家庭越不愿意在不同时期间替换消费：$\epsilon_{ts}=-\frac{\partial \ln\frac{C(t)}{C(s)}}{\partial \ln\frac{P(t)}{P(s)}}=-\frac{\partial \ln\frac{C(t)}{C(s)}}{\partial \ln\frac{u'(C(t))}{u'(C(s))}}=\frac{1}{\theta}$。
- Constant Relative Risk Aversion(CRRA) 效用函数的性质：
  - $\lim_{\theta\to 1}\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}=\ln C$
  - $\lim_{\theta\to 0}\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}=C$

家庭的最大化问题

- 令 $c(t)$ 表示单位有效劳动的平均消费，$C(t)$ 表示人均消费，即 $C(t)=A(t)c(t)$。
- 家庭的目标函数为：

$$\begin{aligned}
U=&\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\frac{L(t)}{H}dt\\
=&\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{[A(t)c(t)]^{1-\theta}}{1-\theta}\frac{L(t)}{H}dt\\
=&\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{\left[A(0)e^{gt}c(t)\right]^{1-\theta}}{1-\theta}\frac{L(0)e^{nt}}{H}dt\\
=&A(0)^{(1-\theta)}\frac{L(0)}{H}\int_0^\infty e^{-[\rho-n-(1-\theta)g]t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt\\
\equiv&B\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt
\end{aligned}$$

- 其中：$B\equiv A(0)^{(1-\theta)}\frac{L(0)}{H}$，$\beta\equiv\rho-n-(1-\theta)g$。
- 假设 $\beta>0$。

禁止庞氏骗局条件

- **庞氏骗局**是指通过不断借债来滚动还贷的骗局，即债券发行者在债券到期时总是通过发行新债券来清偿债务，从而可以使发行者的终生消费的现值超过其终生财富的现值。
- **禁止庞氏骗局条件**即家庭的终生消费不能超过终生财富总量：$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} W(t) \frac{L(t)}{H} dt.$
- 令 $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$ 表示单位有效劳动的平均资本存量，则：

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) \frac{A(t)L(t)}{H} dt \leq k(0) \frac{A(0)L(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) \frac{A(t)L(t)}{H} dt.$$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)+(n+g)t} c(t)\, dt \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)+(n+g)t} w(t)\, dt.$$

- 上式可以写为极限形式：

$$\lim_{s\to\infty} \left[k(0) + \int_{t=0}^{s} e^{-R(t)+(n+g)t} [w(t) - c(t)]\, dt \right] \geq 0.$$

家庭的预算约束

- 家庭的预算约束可写为：

$$\dot{K}(t)/H = W(t)L(t)/H + r(t)K(t)/H - C(t)L(t)/H$$

- 写为单位有效劳动形式，$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$：

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \left(\frac{\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)}{A(t)L(t)} \right)$$

$$= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - k(t)(n+g)$$

$$\dot{k}(t) = w(t) + [r(t) - n - g]k(t) - c(t)$$

- 家庭把 $w(t)$ 和 $r(t)$ 看做给定的。

家庭的预算约束

- 家庭预算约束可写为:

$$\dot{k}(t) - [r(t) - n - g]\, k(t) = w(t) - c(t).$$

- 两边同时乘以 $e^{-R(t)+(n+g)t}$:

$$e^{-R(t)+(n+g)t}\left\{\dot{k}(t) - [r(t) - n - g]\, k(t)\right\} = e^{-R(t)+(n+g)t}[w(t) - c(t)].$$

- 上式两边在 $(0, s)$ 上对 t 求积分可得:

$$e^{-R(s)+(n+g)s}k(s) = k(0) + \int_{t=0}^{s} e^{-R(t)+(n+g)t}[w(t) - c(t)]\, dt.$$

- 重新整理即得 Romer(2019) 中的 (2.10) 式:

$$\begin{aligned} k(s) &= e^{R(s)-(n+g)s}k(0) + e^{R(s)-(n+g)s}\int_{t=0}^{s} e^{-R(t)+(n+g)t}[w(t) - c(t)]\, dt. \\ &= e^{R(s)-(n+g)s}k(0) + \int_{t=0}^{s} e^{R(s)-R(t)}[w(t) - c(t)]\, dt. \end{aligned}$$

- 可见禁止庞氏骗局（NPG）条件也可写为:

$$\lim_{s\to\infty} e^{-R(s)+(n+g)s}k(s) \geq 0.$$

最优控制基础 I

- 最优控制问题 [参见蒋中一（1992）第七、八章，Barro and Xavier Sala-i-Martin（2003）Appendix A.3]

$$\max_{c(t)} V(0) = \int_0^T v[s(t), c(t), t]\, dt$$

$$s.t.: \dot{s}(t) = g[s(t), c(t), t], \quad s(0) > 0, \quad e^{-r(T)T}s(T) \geq 0.$$

  - 状态变量：$s(t)$；控制变量：$c(t)$；协态变量：$\lambda(t)$。

- 根据非线性最优化问题的 Kuhn-Tucker 定理，Lagrangian 可以写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T \{v[s(t), c(t), t] + \lambda(t)(g[s(t), c(t), t] - \dot{s}(t))\}\, dt + \phi e^{-r(T)T}s(T) \\ &\equiv \int_0^T \{H[s(t), c(t), \lambda(t), t] - \lambda(t)\dot{s}(t)\}\, dt + \phi e^{-r(T)T}s(T) \\ &= \int_0^T \left\{H[s(t), c(t), \lambda(t), t] + \dot{\lambda}(t)s(t)\right\} dt \\ &\quad - \lambda(t)s(t)|_0^T + \phi e^{-r(T)T}s(T) \end{aligned}$$

最优控制基础 II

- 假设最优路径为 $\bar{c}(t)$、$\bar{s}(t)$。令 $p_1(t)$、$p_2(t)$ 和 $ds(T)$ 表示扰动函数。ϵ 为扰动参数。
  - $c(t) = \bar{c}(t) + \epsilon p_1(t)$，
  - $s(t) = \bar{s}(t) + \epsilon p_2(t)$，
  - $s(T) = \bar{s}(T) + \epsilon ds(T)$。
- Lagrangian 可以写为扰动参数的函数：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\epsilon) &= \int_0^T \left\{ H[s(t), c(t), \lambda(t), t] + \dot{\lambda}(t) s(t) \right\} dt - \lambda(t) s(t) |_0^T \\ &+ \phi e^{-r(T)T} s(T) \\ &= \int_0^T \left\{ H[s(t,\epsilon), c(t,\epsilon), \lambda(t), t] + \dot{\lambda}(t) s(t,\epsilon) \right\} dt + \lambda(0) s(0) \\ &- \lambda(T) s(T,\epsilon) + \phi e^{-r(T)T} s(T,\epsilon)\end{aligned}$$

最优控制基础 III

- 最优化意味着：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = 0$。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} &= \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial \epsilon} + \dot{\lambda} \frac{\partial s}{\partial \epsilon} \right] dt + \left[\phi e^{-r(T)T} - \lambda(T) \right] \frac{\partial s(T)}{\partial \epsilon} \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial c} p_1(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \dot{\lambda} \right) p_2(t) \right] dt + \left[\phi e^{-r(T)T} - \lambda(T) \right] ds(T)\end{aligned}$$

- 哈密尔顿函数：

$$H[s(t), c(t), \lambda(t), t] = v[s(t), c(t), t] + \lambda(t) g[s(t), c(t), t]$$

  - $v[s(t), c(t), t]$ 是 $s(t)$ 和 $c(t)$ 对瞬时效用函数的直接贡献，
  - $\lambda(t) g[s(t), c(t), t]$ 是 $c(t)$ 通过影响 $s(t)$ 产生的间接贡献。
- Pontryagin 最大值原理：
  - $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$，
  - $\frac{\partial H}{\partial s} + \dot{\lambda} = 0$，
  - $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{s}$，
  - $\lambda(T) s(T) = 0$

最优控制基础 IV

- 如果最优化问题是自治的（Autonomous），即目标函数和约束条件均不直接依赖于时间，则 Hamiltonian 函数在最优路径上的值不随时间变化。

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial s}\dot{s}+\frac{\partial H}{\partial c}\dot{c}+\frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

在最优路径上，$\frac{\partial H}{\partial c}=0$，$\frac{\partial H}{\partial s}=-\dot{\lambda}$，$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\dot{s}$。因此 $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$。

最优控制基础 I

- 最优控制问题（参见蒋中一（1992）第九章）

$$\max_{c(t)} V(0)=\int_0^{\infty} e^{-\rho t}v\left[s(t),c(t),t\right]dt$$

$$s.t.:\dot{s}(t)=g\left[s(t),c(t),t\right]$$

$$s(0)>0,\quad \lim_{t\to\infty} e^{-r(t)t}s(t)\geq 0.$$

- 根据非线性最优化问题的 Kuhn-Tucker 定理，Lagrangian 可以写为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\int_0^T e^{-\rho t}\left\{v\left[s(t),c(t),t\right]+\mu(t)\left(g\left[s(t),c(t),t\right]-\dot{s}(t)\right)\right\}dt+\phi e^{-r(T)T}s(T)\\&\equiv\int_0^T e^{-\rho t}\left\{H\left[s(t),c(t),\mu(t),t\right]-\mu(t)\dot{s}(t)\right\}dt+\phi e^{-r(T)T}s(T)\\&=\int_0^T e^{-\rho t}\left\{H\left[s(t),c(t),\mu(t),t\right]+\left[\dot{\mu}(t)-\rho\mu(t)\right]s(t)\right\}dt\\&\quad-e^{-\rho t}\mu(t)s(t)\big|_0^T+\phi e^{-r(T)T}s(T)\end{aligned}$$

最优控制基础 II

- 假设最优路径为 $\bar{c}(t)$、$\bar{s}(t)$。令 $p_1(t)$、$p_2(t)$ 和 $ds(T)$ 表示扰动函数。ϵ 为扰动参数。
  - $c(t) = \bar{c}(t) + \epsilon p_1(t)$，
  - $s(t) = \bar{s}(t) + \epsilon p_2(t)$，
  - $s(T) = \bar{s}(T) + \epsilon ds(T)$。
- Lagrangian 可以写为扰动参数的函数：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\epsilon) = & \int_0^T e^{-\rho t}\left\{H[s(t), c(t), \mu(t), t] + [\dot{\mu}(t) - \rho\mu(t)] s(t)\right\} dt \\
& - e^{-\rho t}\mu(t) s(t)|_0^T + \phi e^{-r(T)T} s(T) \\
= & \int_0^T e^{-\rho t}\left\{H[s(t,\epsilon), c(t,\epsilon), \mu(t), t] + [\dot{\mu}(t) - \rho\mu(t)] s(t,\epsilon)\right\} dt \\
& + \mu(0) s(0) - e^{-\rho T}\mu(T) s(T,\epsilon) + \phi e^{-r(T)T} s(T,\epsilon)
\end{aligned}
$$

最优控制基础 III

- 最优化意味着：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = 0$。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = & \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial \epsilon} + [\dot{\mu} - \rho\mu]\frac{\partial s}{\partial \epsilon}\right] dt + \left[\phi e^{-r(T)T} - e^{-\rho T}\mu(T)\right]\frac{\partial s(T)}{\partial \epsilon} \\
= & \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial c} p_1(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \dot{\mu} - \rho\mu\right) p_2(t)\right] dt \\
& + \left[\phi e^{-r(T)T} - e^{-\rho T}\mu(T)\right] ds(T)
\end{aligned}
$$

- 哈密尔顿函数：
  $H[s(t), c(t), \mu(t), t] = e^{-\rho t} v[s(t), c(t), t] + \lambda(t) g[s(t), c(t), t]$
- 期值哈密尔顿函数：
  $H[s(t), c(t), \mu(t), t] = v[s(t), c(t), t] + \mu(t) g[s(t), c(t), t]$
- 最优化条件
  - $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$，
  - $\frac{\partial H}{\partial s} + \dot{\mu} - \rho\mu = 0$，
  - $\frac{\partial H}{\partial \mu} = \dot{s}$，
  - $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mu(t) s(t) = 0$

家庭的最优行为

$$\max_{c(t)} U(0)=\int_0^{\infty} e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt$$
$$s.t.:\dot{k}(t)=w(t)+[r(t)-n-g]k(t)-c(t)$$
$$k(0)>0,\quad \lim_{s\to\infty} e^{-R(s)+(n+g)s}k(s)\geq 0.$$

- 期值哈密尔顿函数：
$H=\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}+\lambda(t)\{w(t)+[r(t)-n-g]k(t)-c(t)\}$
- 最优问题的解满足以下条件：
  - 最优条件：$\frac{\partial H}{\partial c}=0\Rightarrow c(t)^{-\theta}=\lambda(t)\Rightarrow\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}=-\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$，
  - 欧拉方程：
$\frac{\partial H}{\partial k}+\dot{\lambda}-\beta\lambda=0\Rightarrow\lambda(t)[r(t)-n-g-\beta]+\dot{\lambda}(t)=0$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{r(t)-n-g-\beta}{\theta}\qquad(1)$$

  - 可行性条件：$\frac{\partial H}{\partial\lambda}=\dot{k}(t)=w(t)+[r(t)-n-g]k(t)-c(t)$
  - **横截条件**（TVC）：$\lim_{t\to\infty}e^{-\beta t}\lambda(t)k(t)=0$。

TVC 和 NPG

- 禁止庞氏骗局条件 (NPG)：$\lim_{s\to\infty}e^{-R(s)+(n+g)s}k(s)\geq 0$
- 横截条件 (TVC)：$\lim_{t\to\infty}e^{-\beta t}\lambda(t)k(t)=0$
- NPG 条件以等式成立时，等价于 TVC：

$$\lambda(t)[r(t)-n-g-\beta]+\dot{\lambda}(t)=0$$
$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}=\frac{d\ln\lambda(t)}{dt}=-[r(t)-n-g-\beta]$$

- 在 $(0,s)$ 上积分：

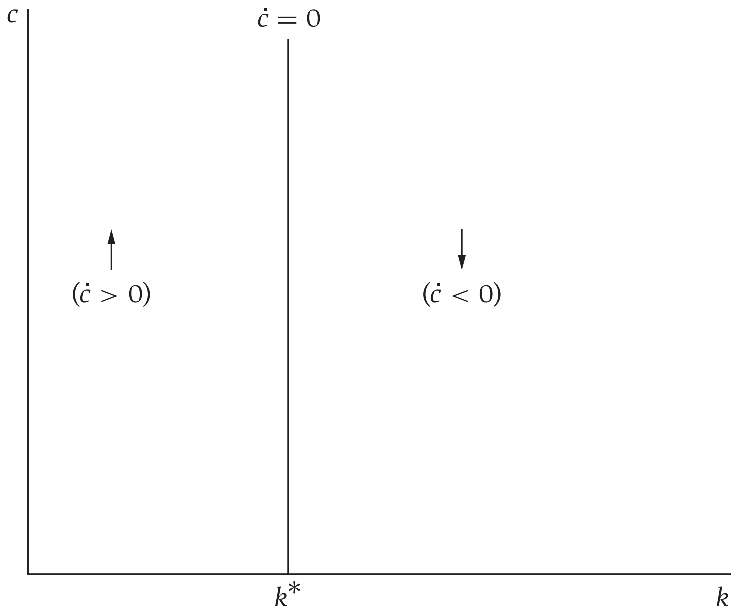
$$\ln\frac{\lambda(s)}{\lambda(0)}=-\int_0^s[r(t)-n-g-\beta]dt$$
$$\lambda(s)=\lambda(0)e^{-\int_0^s r(t)dt+(n+g+\beta)s}$$
$$e^{-\beta s}\lambda(s)=\lambda(0)e^{-R(s)+(n+g)s}$$

消费的动态变化

厂商的一阶条件为：$w(t) = f(k(t)) - k(t) f'(k(t))$，$r(t) = f'(k(t))$。可见：

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - n - g - \beta}{\theta}$$

- $\dot{c}(t) = 0$ 时，$f'(k^*) = n + g + \beta$。
- $k < k^* \Rightarrow \dot{c}(t) > 0$，$k > k^* \Rightarrow \dot{c}(t) < 0$。



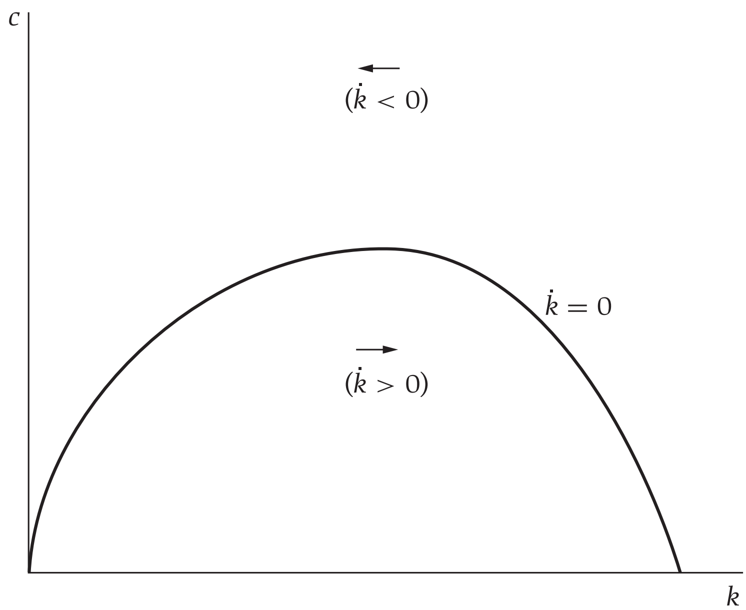
资本存量的动态变化

资本的运动方程为：$\dot{k}(t) = w(t) + [r(t) - n - g] k(t) - c(t)$，即

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n+g) k(t) - c(t).$$

- $\dot{k}(t) = 0$ 时，$c(t) = f(k(t)) - (n+g) k(t)$。
- 消费达到最大的位置即 k 的黄金律水平由 $\frac{\partial c(t)}{\partial k(t)} = 0$ 决定：

$$f'(k^*_{GR}) = n + g$$

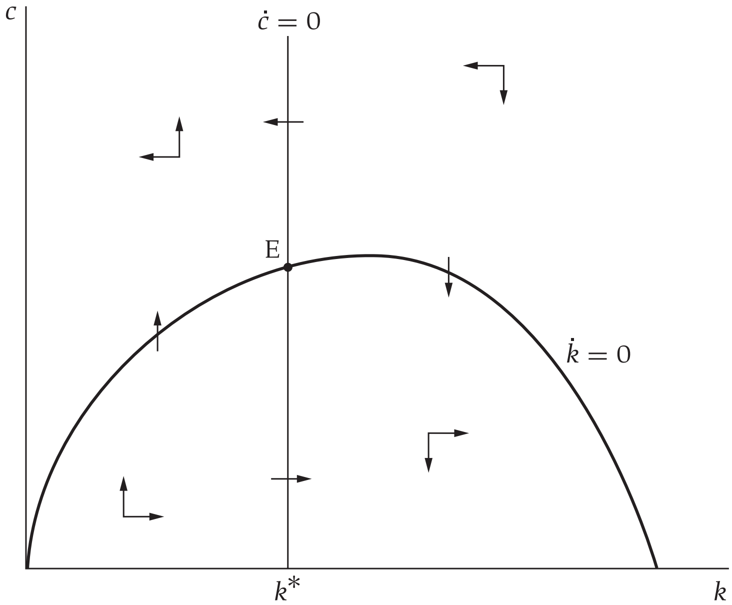


相图

- $\dot{c}(t) = 0$ 时，$f'(k^*) = n + g + \beta$
- k 的黄金律水平由 $f'(k^*_{GR}) = n + g$ 决定。

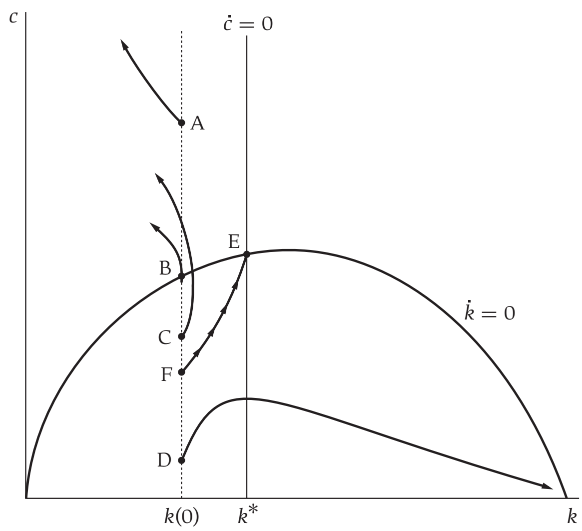
$$f'(k^*) > f'(k^*_{GR})$$

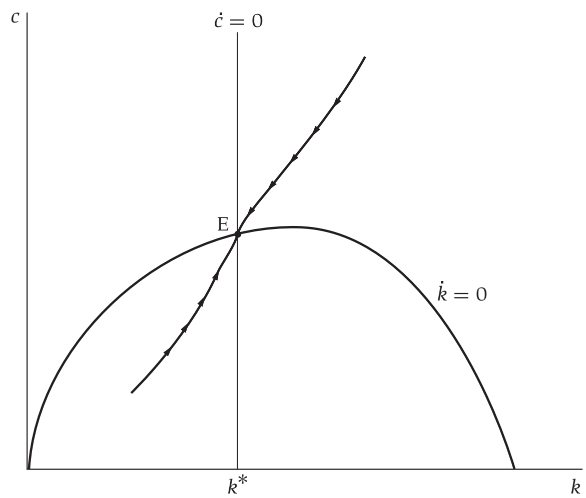
$$k^* < k^*_{GR}$$



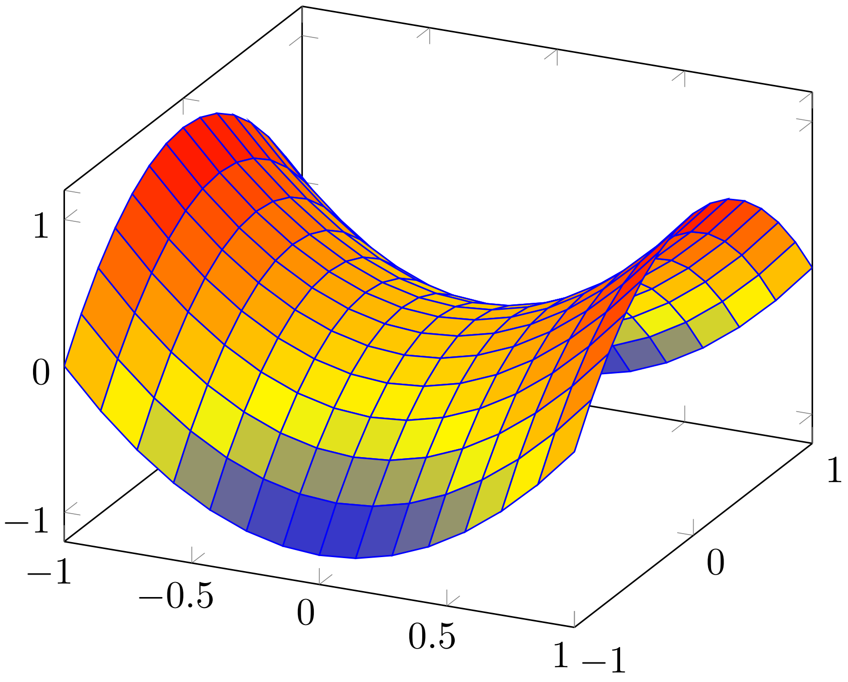
鞍点路径

- 消费的不同初始值会产生截然不同的消费路径。
- 只有始于点 F 的消费路径才是均衡路径。
- 修正的黄金律资本存量。
  - 家庭可以通过牺牲短期消费增加储蓄提高未来平均消费。
  - 但是，由于家庭对当前消费的评价更高，永久增加消费的好处有限，这种取舍可能会降低而不是提高家庭的终生效用。
  - 最终资本会收敛于低于黄金律水平的值。





鞍点路径



鞍点路径：线性近似 I

- 鞍点均衡系统的收敛性：

$$\frac{\dot{c}\left(t\right)}{c\left(t\right)}=\frac{f'\left(k\left(t\right)\right)-n-g-\beta}{\theta}. \tag{2}$$

$$\dot{k}\left(t\right)=f\left(k\left(t\right)\right)-c\left(t\right)-\left(n+g\right)k\left(t\right). \tag{3}$$

- 在稳态附近取一阶泰勒近似可得微分方程系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{k}\\ \dot{c}\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}\frac{\partial\dot{k}}{\partial k} & \frac{\partial\dot{k}}{\partial c}\\ \frac{\partial\dot{c}}{\partial k} & \frac{\partial\dot{c}}{\partial c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k-k^{*}\\ c-c^{*}\end{bmatrix}\equiv\Delta\begin{bmatrix}k-k^{*}\\ c-c^{*}\end{bmatrix} \tag{4}$$

鞍点路径：线性近似 II

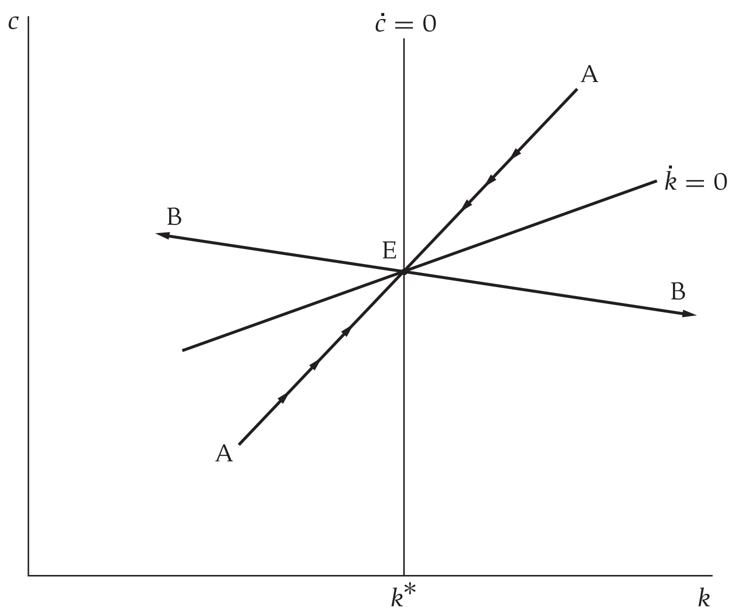
- 根据方程 (2) 和 (3) 计算可得：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{k}(t)}{\partial k(t)}|_{k^*} &= f'(k^*) - n - g = \beta \\
\frac{\partial \dot{k}(t)}{\partial c(t)}|_{k^*} &= -1 \\
\frac{\partial \dot{c}(t)}{\partial k(t)}|_{k^*} &= \frac{f''(k^*)\, c^*}{\theta} \\
\frac{\partial \dot{c}(t)}{\partial c(t)}|_{k^*} &= \frac{f'(k^*) - n - g - \beta}{\theta} = 0 \\
\Rightarrow \Delta &= \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

- 根据韦达定理，该线性微分方程系统对应的特征根满足 $tr(\Delta) = \lambda_1 + \lambda_2 = \beta > 0$，$|\Delta| = \lambda_1\lambda_2 = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} < 0$。可见特征根中一个为正，一个为负，即均衡点是鞍点稳定的。

收敛速度

- 特征方程 $\lambda^2 - \beta\lambda + \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} = 0$ 的解为：$\lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}}}{2}$。因此，经济的收敛速度为 $-\lambda$，其中 $\lambda = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}}}{2} < 0$。即鞍点路径为图中的 AA 线。



收敛速度

■ 根据 (4) 式可得

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-k^* \\ c-c^* \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{(k\dot{-}k^*)}{k-k^*} = \lambda = \beta - \frac{c-c^*}{k-k^*}$$

即

$$\frac{c-c^*}{k-k^*} = \beta - \lambda$$

■ 可见，收敛路径 AA 的斜率为 $\beta - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}}}{2} > 0$。发散路径 BB 的斜率为 $\beta - \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\frac{f''(k^*)c^*}{\theta}}}{2} < 0$。

收敛速度

在给定参数下通过计算稳态值即可得到收敛速度。

$$f'(k^*) = n+g+\beta \Rightarrow k^* = \left(\frac{n+g+\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

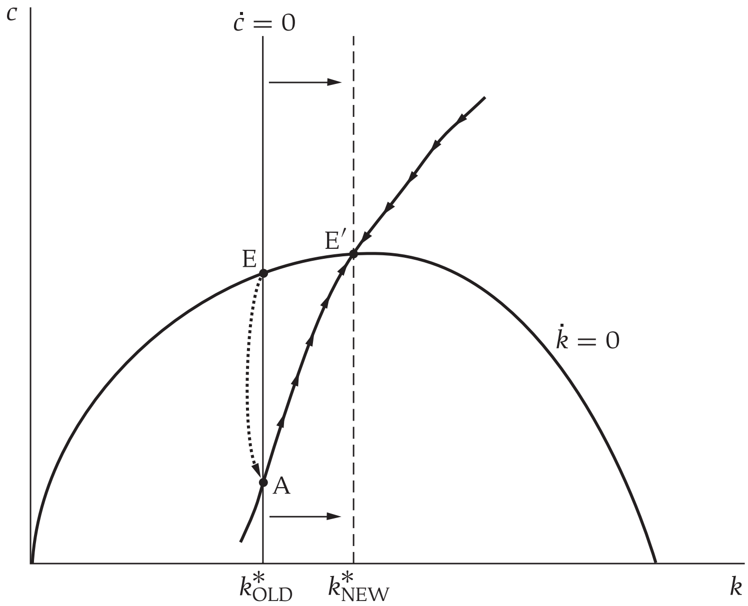
$$c^* = k^{*\alpha} - (n+g)k^*$$

$$f''(k^*) = \alpha(\alpha-1)k^{*\alpha-2}$$

■ 假设中国：$n=1\%$，$g=1\%$，$\beta=0.08$，$\alpha=0.5$。
■ 假设美国：$n=1\%$，$g=1\%$，$\beta=0.04$，$\alpha=1/3$。

折现率下降的影响

- RCK 模型中，β 代表家庭对当期消费的重视程度，β 意外下降意味着家庭更有耐心，当期消费的重要性下降。
- 根据欧拉方程，$\dot{c}(t)=0$ 时，$f'(k^*)=n+g+\beta$，可见 β 下降会提高 k^*，因此 $\dot{c}(t)=0$ 线向右移动。



折现率下降的影响

- 稳态资本存量 k^* 增加，产量增加，但消费一开始减少，最后会增加。和索洛模型的区别在于，储蓄率在调整过程中会发生变化。

$$
\begin{aligned}
f'(k^*) &= n+g+\beta \\
\Rightarrow 1 &= f''(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial \beta} \\
\frac{\partial k^*}{\partial \beta} &= \frac{1}{f''(k^*)} < 0 \\
\frac{\partial y^*}{\partial \beta} &= f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial \beta} = \frac{f'(k^*)}{f''(k^*)} < 0 \\
c^* &= f(k^*) - (n+g)k^* \\
\frac{\partial c^*}{\partial \beta} &= [f'(k^*) - (n+g)]\frac{\partial k^*}{\partial \beta} \\
&= \frac{\beta}{f''(k^*)} < 0
\end{aligned}
$$

在模型中加入政府

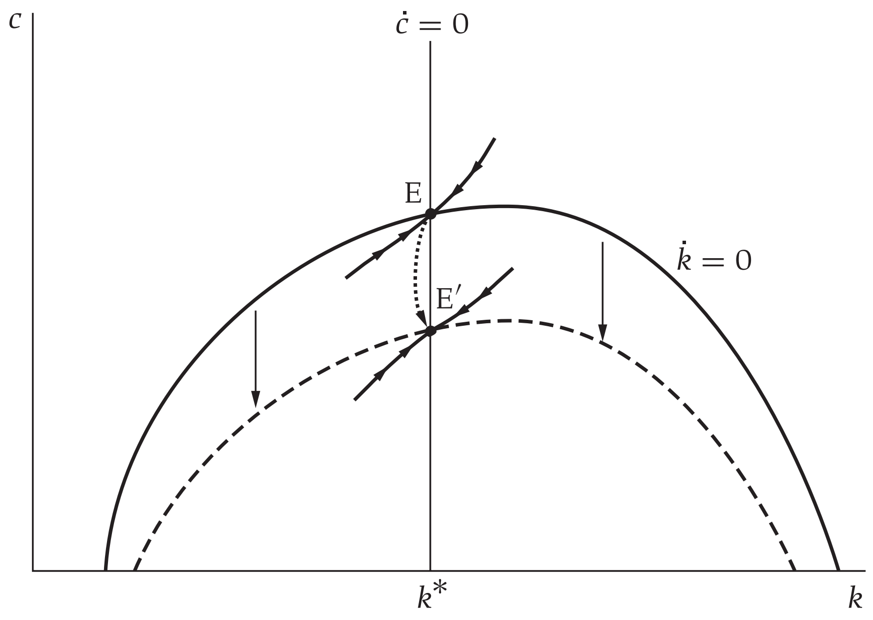
- 假设:
  - 单位有效劳动的平均政府购买为 $g(t)=\gamma$;
  - 政府购买不影响家庭效用和未来产出;
  - 政府购买的资源来源是定额税;
  - 政府预算在每一期保持平衡。
- k 的运动方程 (3) 变为：$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-\gamma-(n+g)k(t)$
- 最优条件和欧拉方程均不变，即 (2) 仍然成立。

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-n-g-\beta}{\theta}.$$

- γ_0 的值越高，$\dot{k}=0$ 线就向下平移得越多。

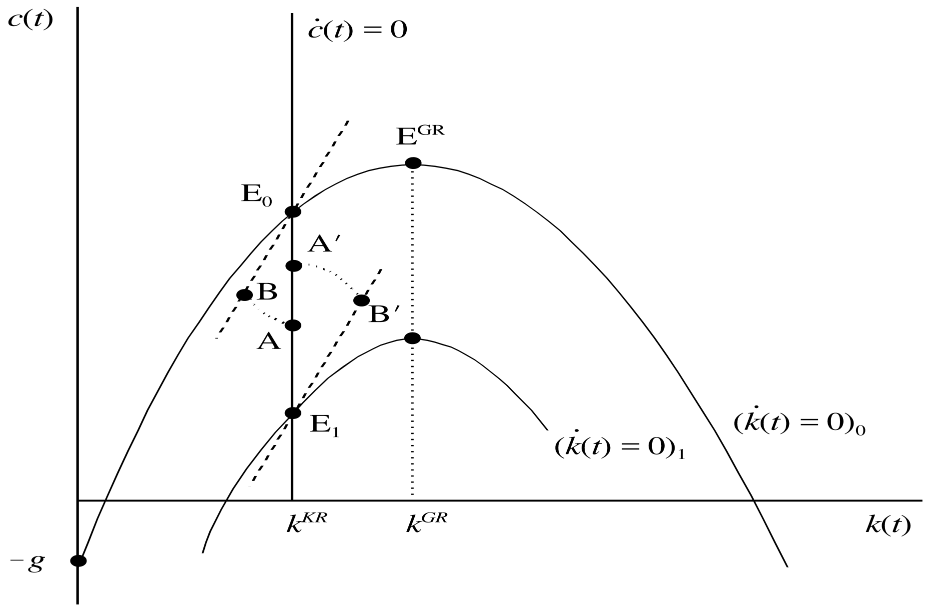
政府购买的永久变化

- 未预期到的永久变化，消费被完全挤出，资本、产出不受影响：
  - 均衡系统在点 (c^*,k^*) 处对 γ 求导可得：$f''(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}=0$，$\frac{\partial c^*}{\partial\gamma}=f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}-1-(n+g)\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}$。可见 $\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}=0$，从而 $\frac{\partial y^*}{\partial\gamma}=f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial\gamma}=0$，$\frac{\partial c^*}{\partial\gamma}=-1$。



政府购买的暂时变化

- 暂时变化：c 跳跃至 A，下降幅度小于 γ 的增加幅度 $\gamma_1-\gamma_0$，当 γ 回到 γ_0 时，c 恰好回到原来鞍点路径上的 B 点。
- 预期到的永久变化：c 跳跃至 A'，下降幅度小于 γ 的增加幅度 $\gamma_1-\gamma_0$，当 γ 增加至 γ_1 时，c 恰好达到新鞍点路径上的 B' 点。



福利分析

- 福利经济学第一定理：完备市场的竞争性均衡是帕累托有效的。
- 社会计划者的均衡条件和分散均衡条件完全等价。

$$\max_{c(t)} U(0)=\int_0^{\infty} e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt$$

$$s.t.: \dot{k}(t)=f(k(t))-(n+g)k(t)-c(t)$$

$$k(0)>0,\quad \lim_{t\to\infty} e^{-R(t)+(n+g)t}k(s)\geq 0.$$

- $H=\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}+\lambda(t)[f(k(t))-(n+g)k(t)-c(t)]$
- 最优化问题的解满足以下条件：
  - 最优条件：$\frac{\partial H}{\partial c}=0\Rightarrow c(t)^{-\theta}=\lambda(t)\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}=-\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$，
  - 欧拉方程：$\frac{\partial H}{\partial k}+\dot{\lambda}-\beta\lambda=0\Rightarrow \lambda(t)[f'(k(t))-n-g-\beta]+\dot{\lambda}(t)=0$
  - $$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-n-g-\beta}{\theta}$$
  - TVC：$\lim_{t\to\infty} e^{-\beta t}\lambda(t)k(t)=0$。

平衡增长路径

- 在均衡点 E，模型中各变量的增长率与 BGP 上的索洛模型完全一致。
  - 单位有效劳动的平均资本、平均产出和平均消费都是常数。
  - **内生**决定的储蓄率 $1-c/y$ 也是常数。为什么？

$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+g)k(t)=0$. 可见 $1=\frac{c}{y}+(n+g)\frac{k}{y}$。
$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-n-g-\beta}{\theta}=0 \Rightarrow f'(k(t))=\alpha\frac{y}{k}=n+g+\beta$，因此
$s=(n+g)\frac{k}{y}=\frac{\alpha(n+g)}{n+g+\beta}$。

  - 1.6 节中的分析仍然适用。劳动效率的增长是人均收入增长的源泉。
- 拉姆塞模型和索洛模型的主要区别：
  - 一般均衡分析。
  - 储蓄率内生。
  - 由于考虑了家庭的跨期偏好，经济不能达到黄金律稳态。经济自动收敛于低于黄金律水平的稳态，该处的 k^* 称为修正的黄金律资本存量。

拉姆塞模型的离散时间形式 I

- 家庭的最优化问题：

$$\max_{c_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(c_t\right)$$
$$s.t. c_t=f\left(k_t\right)+(1-\delta)k_t-(1+n)(1+g)k_{t+1}$$

- 求解方法：
  - 根据预算约束写出 c_t 的表达式代入效用函数，求解无条件最优化问题。

$$\max_{k_{t+1}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left[f\left(k_t\right)+(1-\delta)k_t-(1+n)(1+g)k_{t+1}\right]$$

    - 一阶条件：

$$(1+n)(1+g)u'\left(c_t\right)=\beta u'\left(c_{t+1}\right)\left[f'\left(k_{t+1}\right)+(1-\delta)\right]$$

拉姆塞模型的离散时间形式 II

- 写出最优问题的 Bellman 方程，用动态规划方法求解。

$$v(k)=u\left[f(k)+(1-\delta)k-(1+n)(1+g)k^{+}\right]+\beta v\left(k^{+}\right)$$

  - 一阶条件：

$$\begin{aligned}\beta v'\left(k^{+}\right)&=(1+n)(1+g)u'(c)\\ v'(k)&=u'(c)\left[f'(k)+1-\delta\right]\end{aligned}$$

- 利用拉格朗日函数求解。

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}\left\{u(c_t)+\lambda_t\left[f(k_t)+(1-\delta)k_t-(1+n)(1+g)k_{t+1}-c_t\right]\right\}$$

  - 一阶条件：

$$u'(c_t)=\lambda_t=\beta\lambda_{t+1}\frac{1+r_{t+1}}{(1+n)(1+g)}$$

拉姆塞模型的离散时间形式 III

- 计算稳态：

$$f'(k^*)=\frac{(1+n)(1+g)}{\beta}-1+\delta$$

$$c^*=f(k^*)-(n+g+ng+\delta)k^*$$

- 相图分析：
  - $\Delta c_t=0\Rightarrow f'(k_{t+1})=\frac{(1+n)(1+g)}{\beta}-1+\delta=f'(k^*)$。CD 生产函数下，$k^*=\left(\frac{(1+n)(1+g)-\beta(1-\delta)}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$。
  - $\Delta k_t=0\Rightarrow c_t=f(k_t)-(n+g+ng+\delta)k_t$。

戴蒙德模型

- 基本假设：
  - 考虑家庭人口的异质性。每人仅生存两期。
  - 离散时间。$L_{t+1}=(1+n)L_t$。
  - 第 t 期老人和年轻人的消费分别为 C_{1t} 和 C_{2t}。
  - 家庭初始财富为零，没有遗产。
- 家庭的最优化问题：

$$\max_{C_{1t},C_{2t+1}} \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta}+\beta\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$s.t. C_{1t}+\frac{1}{1+r_{t+1}}C_{2t+1}=w_tA_t$$

  - β，**折现因子**：一定单位未来收益/成本/效用/利润折算到现在的等价值。
  - **折现率**：折现因子所使用的利率。
  - 折现率越低，折现因子越大。消费者对未来消费赋予的权重越大，即越有耐心。
- 完全竞争，厂商经济利润为零：

$$r_t+\delta=f'(k_t)$$

$$w_t=f(k_t)-f'(k_t)k_t$$

求解模型

- 拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}=\frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta}+\beta\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}+\lambda\left[w_tA_t-\left(C_{1t}+\frac{1}{1+r_{t+1}}C_{2t+1}\right)\right]$$

- 一阶条件：$C_{1t}^{-\theta}=\lambda$，$\beta C_{2t+1}^{-\theta}=\lambda\frac{1}{1+r_{t+1}}$。即：

$$\beta C_{2t+1}^{-\theta}=\frac{1}{1+r_{t+1}}C_{1t}^{-\theta}$$

- 解出 C_{2t+1} 并代入预算约束式可得：

$$C_{1t}=\frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\theta}}(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}w_tA_t\equiv(1-s(r_{t+1}))w_tA_t$$

其中 $s(r_{t+1})\equiv\frac{1}{1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}(1+r_{t+1})^{1-\frac{1}{\theta}}}$。如果 $\theta=1$，则 $s=\frac{\beta}{1+\beta}$。

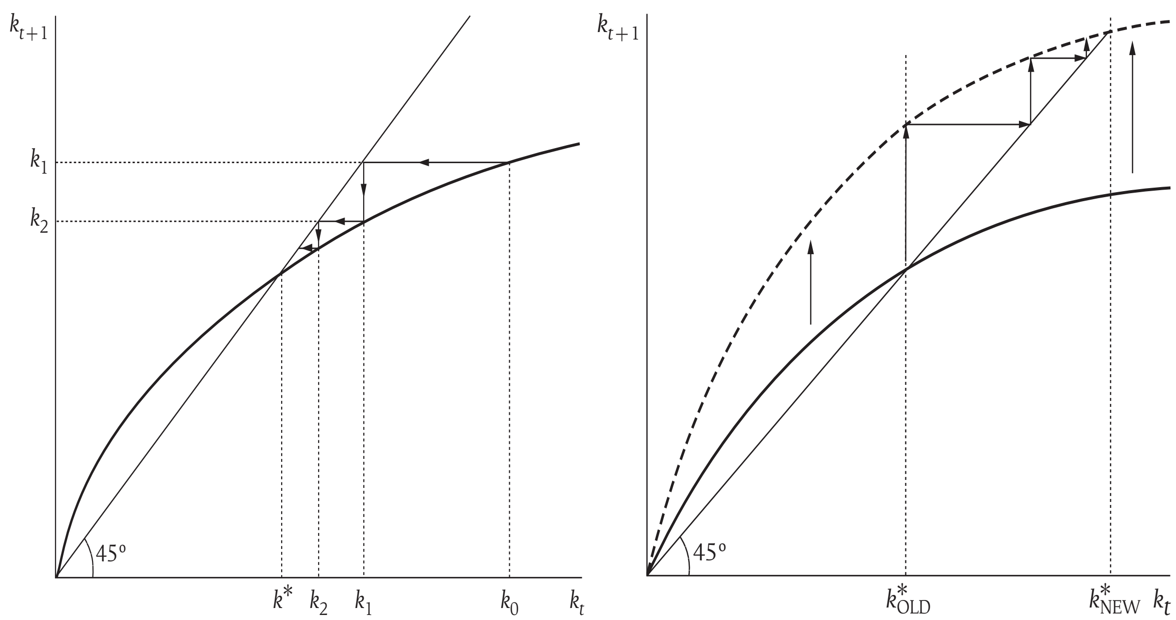
家庭的储蓄决策

$$\frac{\partial s\left(r_{t+1}\right)}{\partial r_{t+1}}=\frac{1-\theta}{\theta}\frac{\left[\beta\left(1+r_{t+1}\right)\right]^{-\frac{1}{\theta}}}{\left[1+\beta^{-\frac{1}{\theta}}\left(1+r_{t+1}\right)^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{2}}$$

- 从直观上看，r 上升同时具有收入效应和替代效应：
  - 替代效应表现为，由于在两期之间的权衡中第二期消费变得更为有利，因此储蓄倾向于增加；
  - 收入效应表现为，由于即定储蓄下可以获得更多的第二期消费，因此储蓄倾向于减少。
- 如果 $\theta>1$，即替代弹性 $\frac{1}{\theta}$ 较小，则 $\frac{\partial s}{\partial r}<0$，$r$ 上升的替代效应小于收入效应，储蓄将减少。
  - 当经济个体强烈偏好于在两期之间平衡消费（即当 θ 较大）时，收入效应处于主导地位。
- 如果 $\theta<1$，即替代弹性 $\frac{1}{\theta}$ 较大，则 $\frac{\partial s}{\partial r}>0$，$r$ 上升的替代效应大于收入效应，储蓄将增加。
  - 当经济个体更加愿意在不同回报率的激励下在两期消费之间替换（即当 θ 较小）时，替代效应处于主导地位。
- 如果 $\theta=1$，则效用函数为对数形式，$s=\frac{\beta}{1+\beta}$，$\frac{\partial s}{\partial r}=0$，替代效应和收入效应互相抵消，储蓄和利率无关。

k 的动态变化和 β 增大的影响

- 资本的运动方程：$K_{t+1}=s\left(r_{t+1}\right)w_tA_tL_t$，即有效工人的平均资本存量为：$k_{t+1}=\frac{1}{(1+n)(1+g)}s\left(f'\left(k_{t+1}\right)\right)\left[f\left(k_t\right)-k_tf'\left(k_t\right)\right]$。
- 假设 $\theta=1$，即 $u\left(c\right)=\ln c$，且 $f\left(k\right)=k^{\alpha}$，则 $k_{t+1}=\frac{\beta}{(1+n)(1+g)}\frac{1-\alpha}{1+\beta}k_t^{\alpha}$：



收敛速度

$$
\begin{aligned}
\frac{dk_{t+1}}{dk_t}|_{k_t=k^*} &= \frac{\alpha\beta}{(1+n)(1+g)}\frac{1-\alpha}{1+\beta}k^{*\alpha-1} \\
&= \frac{\alpha\beta}{(1+n)(1+g)}\frac{1-\alpha}{1+\beta}\left[\frac{\beta}{(1+n)(1+g)}\frac{1-\alpha}{1+\beta}\right]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

- k 的运动方程在稳态附近线性展开得：

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= k^* + \frac{dk_{t+1}}{dk_t}|_{k_t=k^*}(k_t-k^*) \\
&= k^* + \alpha(k_t-k^*) \\
(k_t-k^*) &= \alpha^t(k_0-k^*)
\end{aligned}
$$

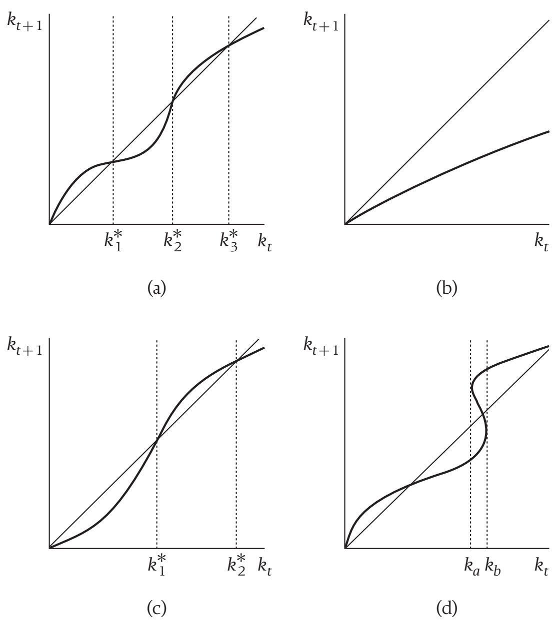
- 当 $\alpha=1/3$ 时，每期（半生）减少 2/3 的剩余距离。

多重均衡

- 有效工人平均资本的运动方程可写为：

$$
k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}s\left(f'(k_{t+1})\right)\frac{w(k_t)}{f(k_t)}f(k_t)
$$

- 根据储蓄函数和劳动收入份额的性质，上述关系可能存在几种不同形式。



多重均衡

- 有效工人平均资本的运动方程可写为：

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} s\left(f'\left(k_{t+1}\right)\right) \frac{w\left(k_t\right)}{f\left(k_t\right)} f\left(k_t\right)$$

- 四项的乘积：有效劳动的增长率，劳动收入的储蓄率，劳动收入的份额，有效劳动的平均产出。
- 出现多重均衡的可能性：
  - 如果对数效用，劳动收入的储蓄率 $s\left(f'\left(k_{t+1}\right)\right)$ 不随 k 变化；同时如果 CD 生产函数，则 $\frac{w(k_t)}{f(k_t)}$ 不随 k 变化。由于 $f\left(k_t\right)$ 是单调函数，因此不会出现多重均衡。
- 要有多个均衡点，则
  - 要么 $s\left(f'\left(k_{t+1}\right)\right)$ 随 k 增加，由于边际产出 $f'\left(k_{t+1}\right)$ 递减，则 s 是资本回报率（$f'\left(k_{t+1}\right)-\delta$）的减函数（$\theta > 1$），即资本回报率越低，储蓄率就越高。
  - 要么 k 越高，劳动份额就越大（生产函数的曲率大于 CD 生产函数就会出现这种情况）。
  - 上述两者同时发生。

戴蒙德模型对增长问题的回答

- 戴蒙德对经济增长的基本问题并没有提供更好的回答。
  - 有效工人的平均资本并不能无限增长，劳动效率增长仍然是平均产出增长的唯一源泉。
  - 仍然只能通过工人平均资本和回报率的巨大差距来解释跨国收入差距。
  - 多重均衡意味着初始条件不同的经济确实有可能收敛到不同的平衡增长路径。

动态无效率 I

- 假设对数效用和 C-D 生产函数，则稳态资本存量为
$k^* = \left[\frac{\beta}{(1+n)(1+g)}\frac{1-\alpha}{1+\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$，$f'(k^*) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1+\beta}{\beta}(1+n)(1+g)$。
- **黄金时代路径**是指资本劳动比不随时间变化的路径，即 $k_{t+1} = k_t = k$（假设 $g = 0$）。
- 如果该路径下，所有人的效用水平相等，且每个人都获得了最高的效用，则称为**最优黄金时代路径**（Optimal Golden-Age Path）。

$$\max_c u(c_1) + \beta u(c_2)$$
$$s.t. c_1 + \frac{c_2}{1+n} = f(k) - (n+\delta)k$$

动态无效率 II

- 对应总体变量的预算约束：

$$C_t \equiv C_{1t}L_t + C_{2t}L_{t-1} = Y_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}$$

转换为单位有效劳动的平均变量：

$$c_t = f(k_t) + (1-\delta)k_t - (1+n)(1+g)k_{t+1}$$

当消费最大化时：

$$f'(k_{GR}) = n + g + ng + \delta$$

$\delta = 1$ 时，$f'(k_{GR}) = (1+n)(1+g)$。$g = 0$ 时，$f'(k_{GR}) = n + \delta$。

- 一阶条件：$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \beta(1+n)$，　$f'(k) = n + \delta$. Samuelson(1968) 把这两个一阶条件分别叫做 Biological-interest-rate consumption golden rule (生物利率消费黄金律) 和 production golden rule（生产黄金律)。

动态无效率 III

- 当 $r = f'(k) - \delta = n$ 时，两个一阶条件均正好满足。此时分散经济下的均衡正好达到最优 GAP。但是分散经济下的 $f'(k^*)$ 非常有可能小于 $f'(k_{GR})$，即出现资本过度积累。
- 当 α 充分小时，$f'(k^*) < f'(k_{GR})$，此时资本过度积累，存在帕累托改进空间，经济出现了**动态无效率**。
- 假设 $g = 0.f'(k^*) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1+\beta}{\beta}(1+n)$，$f'(k_{GR}) = n + \delta = 1 + n - (1-\delta)$。

$$\begin{aligned} & f'(k^*) < f'(k_{GR}) \\ \Leftrightarrow & \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1+\beta}{\beta} < 1 - \frac{1-\delta}{1+n} \\ \Leftrightarrow & \alpha < \frac{\beta(n+\delta)}{(1+\beta)(1+n)+\beta(n+\delta)} \end{aligned}$$

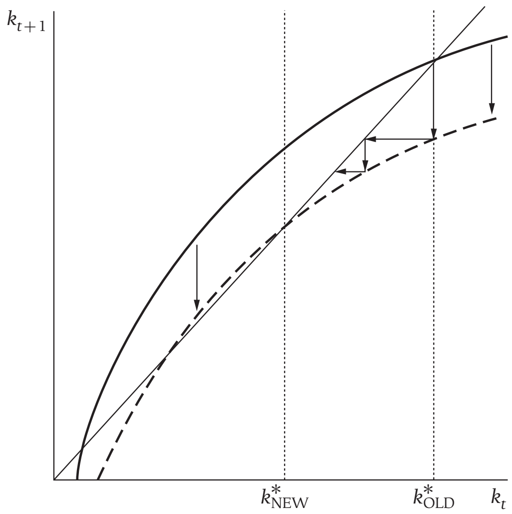
假设 $\delta = 1 - 0.94^{30} = 0.844$，$n = 1.01^{30} - 1 = 0.348$，$\beta = 0.99^{30} = 0.74$，则 $\alpha < 0.35$ 就会导致资本过度积累。注意这里 $g = 0$.

戴蒙德模型中引入政府

- 假设 $g(t) = \gamma_t$ 表示单位有效劳动的平均政府购买，资金来源是年轻人缴纳的定额税。则 k 的运动方程变为：

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1-\alpha)k_t^{\alpha} - \gamma_t\right]$$

- γ_t 的值越高，k_{t+1} 线就向下平移得越多。
  - γ_t 永久性增加，k^* 减少，实际利率 $r = f'(k^*) - \delta$ 上升。
  - γ_t 暂时性增加，未来的 γ 值不影响现在的行为。



本章小结

- 拉姆塞最优增长模型
  - 把家庭、厂商和政府部门同时纳入一般均衡分析框架。
  - 储蓄是内生决定的。
  - 黄金律资本存量无法达到，但均衡是帕累托有效的。
  - 技术仍然是外生的。
- 戴蒙德模型模型
  - 世代交叠考虑了消费者的异质性。
  - 基本结论与索洛模型一致。
  - 存在动态无效率问题。