§4.4联立方程模型的单方程估计方法

Single-Equation Estimation Methods

一、狭义的工具变量法（IV）

二、间接最小二乘法(ILS)

三、二阶段最小二乘法(2SLS)

四、三种方法的等价性证明

五、简单宏观经济模型实例演示

六、主分量法的应用

七、其它有限信息估计方法简介

八、k级估计式

- 联立方程计量经济学模型的估计方法分为两大类：单方程估计方法与系统估计方法。
- 所谓单方程估计方法，指每次只估计模型系统中的一个方程，依次逐个估计。
- 所谓系统估计方法，指同时对全部方程进行估计，同时得到所有方程的参数估计量。
- 联立方程模型的单方程估计方法不同于单方程模型的估计方法 。

一、狭义的工具变量法
（IV，Instrumental Variables）

1. 方法思路

- “狭义的工具变量法” 与“广义的工具变量法”
- 解决结构方程中与随机误差项相关的内生解释变量问题。
- 方法原理与单方程模型的IV方法相同。
- 模型系统中提供了可供选择的工具变量，使得IV方法的应用成为可能。

2. 工具变量的选取

- 对于联立方程模型的每一个结构方程，例如第**1**个方程，可以写成如下形式：

$$Y_1 = \beta_{12} Y_2 + \beta_{13} Y_3 + \cdots + \beta_{1g_1} Y_{g_1} + \gamma_{11} X_1 + \gamma_{12} X_2 + \cdots + \gamma_{1k_1} X_{k_1} + \mathrm{N}_1$$

- 内生解释变量（$\mathbf{g_1}$**-1**）个，先决解释变量$\mathbf{k_1}$个。
- 如果方程是恰好识别的，有（$\mathbf{g_1}$**-1**）**=**（**k-** $\mathbf{k_1}$）。
- 可以选择（**k-** $\mathbf{k_1}$）个方程没有包含的先决变量作为（$\mathbf{g_1}$**-1**）个内生解释变量的工具变量。

3. IV参数估计量

- 方程的矩阵表示为

$$Y_1 = (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix}\mathrm{B}_{\boldsymbol{0}} \\ \Gamma_{\boldsymbol{0}}\end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

- 选择方程中没有包含的先决变量X_0*作为包含的内生解释变量Y_0的工具变量，得到参数估计量为：

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0\end{bmatrix}_{IV} = \left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0\end{pmatrix}' \begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0\end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0\end{pmatrix}' Y_1$$

4.讨论

- 该估计量与OLS估计量的区别是什么?
- 该估计量具有什么统计特性?
- （k- k_1）工具变量与（g_1-1）个内生解释变量的对应关系是否影响参数估计结果? 为什么?
- IV是否利用了模型系统中方程之间相关性信息?
- 对于过度识别的方程，可否应用IV ? 为什么?
- 对于过度识别的方程，可否应用GMM ? 为什么?

二、间接最小二乘法
(ILS, Indirect Least Squares)

1. 方法思路

- 联立方程模型的结构方程中包含有内生解释变量，不能直接采用OLS估计其参数。但是对于简化式方程，可以采用OLS直接估计其参数。
- 间接最小二乘法：先对关于内生解释变量的简化式方程采用OLS估计简化式参数，得到简化式参数估计量，然后通过参数关系体系，计算得到结构式参数的估计量。
- 间接最小二乘法只适用于恰好识别的结构方程的参数估计，因为只有恰好识别的结构方程，才能从参数关系体系中得到唯一一组结构参数的估计量。

2.一般间接最小二乘法的估计过程

$$Y_1 = (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix} \mathrm{B}_0 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

$$\downarrow$$

$$Y_1 - \mathrm{B}_0 \mathbf{Y}_0 - \Gamma_0 \mathbf{X}_0 = \mathrm{N}_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{B}_0 & -\Gamma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = \mathrm{N}_1$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}_{00} & \Gamma_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{00} \\ \mathbf{X}_{0} \end{pmatrix} = \mathrm{N}_{1}$$

$$\mathbf{Y}_{00} = \Pi_{00}\mathbf{X} + \mathrm{E}$$

$$\mathrm{B}_{00}\Pi_{00}\mathbf{X} + \Gamma_{00}\mathbf{X}_{0} = 0$$

$$\mathrm{B}_{00}\Pi_{00}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{0} \\ \mathbf{X}_{0}^{*} \end{pmatrix} + \Gamma_{00}\mathbf{X}_{0} = 0$$

$$\Pi_{00} = \begin{pmatrix} \Pi_{00}^{1} & \Pi_{00}^{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} B_{00}\Pi_{00}^{1} = \Gamma_{0} \\ B_{00}\Pi_{00}^{2} = 0 \end{cases}}$$

- 用**OLS**估计简化式模型，得到简化式参数估计量，代入该参数关系体系，先由第**2**组方程计算得到内生解释变量的参数，然后再代入第**1**组方程计算得到先决解释变量的参数。于是得到了结构方程的所有结构参数估计量。

3. 间接最小二乘法也是一种工具变量方法

- **ILS等价于一种工具变量方法：依次选择X作为（Y_0,X_0）的工具变量。**
- 数学证明见《计量经济学—方法与应用》（李子奈编著，清华大学出版社，**1992**年**3**月）第**126—128**页。
- 估计结果为：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{ILS} = \left(\mathbf{X}' \quad \left(\mathbf{Y}_0 \quad \mathbf{X}_0 \right) \right)^{-1} \mathbf{X}' Y_1$$

三、二阶段最小二乘法
(2SLS, Two Stage Least Squares)

1. 2SLS是应用最多的单方程估计方法

- IV和ILS一般只适用于联立方程模型中恰好识别的结构方程的估计。
- 在实际的联立方程模型中，恰好识别的结构方程很少出现，一般情况下结构方程都是过度识别的。为什么？
- 2SLS是一种既适用于恰好识别的结构方程，又适用于过度识别的结构方程的单方程估计方法。

2.2SLS的方法步骤

- 第一阶段：对内生解释变量的简化式方程使用OLS。得到：

$$\hat{\boldsymbol{Y}}_0 = \boldsymbol{X}\hat{\Pi}_0 = \boldsymbol{X}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_0)$$

- 用估计量代替结构方程中的内生解释变量，得到新的模型：

$$Y_1 = (\hat{\boldsymbol{Y}}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix} \mathrm{B}_{\boldsymbol{0}} \\ \Gamma_{\boldsymbol{0}} \end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

- 第二阶段：对该模型应用**OLS**估计，得到的参数估计量即为原结构方程参数的二阶段最小二乘估计量。

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{2SLS} = \left(\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

3. 二阶段最小二乘法也是一种工具变量方法

- 如果用Y_0的估计量作为工具变量，按照工具变量方法的估计过程，应该得到如下的结构参数估计量：

$$\boxed{\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1}$$

- 可以严格证明两组参数估计量是完全等价的，所以可以把2SLS也看成为一种工具变量方法。
- 证明过程见《计量经济学—方法与应用》（李子奈编著，清华大学出版社，1992年3月）第130—131页。

四、三种方法的等价性证明

1. 三种单方程估计方法得到的参数估计量

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{IV} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0^* & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{ILS} = \left(\mathbf{X}' \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \mathbf{X}' Y_1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix}_{2SLS} = \left(\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{Y}}_0 & \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}' Y_1$$

2. IV与ILS估计量的等价性

- 在恰好识别情况下
- 工具变量集合相同，只是次序不同。
- 次序不同不影响正规方程组的解。

2. 2SLS与ILS估计量的等价性

- 在恰好识别情况下
- **ILS**的工具变量是全体先决变量。
- **2SLS**的每个工具变量都是全体先决变量的线性组合。
- **2SLS**的正规方程组相当于**ILS**的正规方程组经过一系列的初等变换的结果。
- 线性代数方程组经过初等变换不影响方程组的解。

五、简单宏观经济模型实例演示

1. 模型

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 C_{t-1} + \mu_{1t} \\ I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \mu_{2t} \\ Y_t = I_t + C_t + G_t \end{cases}$$

- 消费方程是恰好识别的；
- 投资方程是过度识别的；
- 模型是可以识别的。

2. 数据

年份	Y	I	C	G
1978	3606	1378	1759	469
1979	4074	1474	2005	595
1980	4551	1590	2317	644
1981	4901	1581	2604	716
1982	5489	1760	2868	861
1983	6076	2005	3182	889
1984	7164	2469	3675	1020
1985	8792	3386	4589	817
1986	10133	3846	5175	1112
1987	11784	4322	5961	1501
1988	14704	5495	7633	1576
1989	16466	6095	8524	1847
1990	18320	6444	9113	2763
1991	21280	7517	10316	3447
1992	25864	9636	12460	3768
1993	34501	14998	15682	3821
1994	47111	19261	21230	6620
1995	59405	23877	27839	7689
1996	68498	26867	32589	9042

3. 用狭义的工具变量法估计消费方程

用G_t作为Y_t的工具变量

$$\hat{\alpha}_0 = 164.79951$$

$$\hat{\alpha}_1 = 0.3175387$$

$$\hat{\alpha}_2 = 0.3919359$$

- 估计结果显示

Dependent Variable: CC
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 04/11/03   Time: 22:06
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints
Instrument list: C G CC1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	164.8004	95.45182	1.726529	0.1048
Y	0.317539	0.032376	9.807786	0.0000
CC1	0.391935	0.087514	4.478510	0.0004

R-squared	0.999435	Mean dependent var	9875.667
Adjusted R-squared	0.999360	S.D. dependent var	9026.792
S.E. of regression	228.3835	Sum squared resid	782385.2
F-statistic	13200.10	Durbin-Watson stat	2.015655
Prob(F-statistic)	0.000000		

4. 用间接最小二乘法估计消费方程

$$\begin{cases} C_t = \pi_{10} + \pi_{11} C_{t-1} + \pi_{12} G_t + \varepsilon_{1t} \\ Y_t = \pi_{20} + \pi_{21} C_{t-1} + \pi_{22} G_t + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

$$\hat{\pi}_{10} = -63.594002$$
$$\hat{\pi}_{11} = 0.8132890$$
$$\hat{\pi}_{12} = 1.2191863$$

$$\hat{\pi}_{20} = -719.26343$$
$$\hat{\pi}_{21} = 1.3269366$$
$$\hat{\pi}_{22} = 3.8394822$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\pi}_{12} / \hat{\pi}_{22} = 0.31753925$$
$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\pi}_{11} - \hat{\alpha}_1 \hat{\pi}_{21} = 0.39193422$$
$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\pi}_{10} - \hat{\alpha}_1 \hat{\pi}_{20} = 164.800368$$

- **C**简化式模型估计结果

Dependent Variable: CC
Method: Least Squares
Date: 04/11/03 Time: 22:13
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-63.59400	279.1279	-0.227831	0.8229
CC1	0.813289	0.145306	5.597062	0.0001
G	1.219186	0.402482	3.029167	0.0085

R-squared	0.994079	Mean dependent var	9875.667
Adjusted R-squared	0.993289	S.D. dependent var	9026.792
S.E. of regression	739.4562	Akaike info criterion	16.20072
Sum squared resid	8201931.	Schwarz criterion	16.34911
Log likelihood	-142.8065	F-statistic	1259.163
Durbin-Watson stat	1.542608	Prob(F-statistic)	0.000000

- **Y简化式模型估计结果**

Dependent Variable: Y

Method: Least Squares

Date: 04/11/03 Time: 22:17

Sample(adjusted): 1979 1996

Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-719.2634	740.2944	-0.971591	0.3467
CC1	1.326937	0.385377	3.443215	0.0036
G	3.839482	1.067451	3.596869	0.0026

R-squared	0.991131	Mean dependent var	20506.28
Adjusted R-squared	0.989948	S.D. dependent var	19561.13
S.E. of regression	1961.163	Akaike info criterion	18.15147
Sum squared resid	57692390	Schwarz criterion	18.29987
Log likelihood	-160.3633	F-statistic	838.1285
Durbin-Watson stat	1.427616	Prob(F-statistic)	0.000000

5. 用两阶段最小二乘法估计消费方程

$$\hat{Y}_t = -719.26343 + 1.3269366 C_{t-1} + 3.8394822 G_t$$

代替原消费方程中的 $\boldsymbol{Y_t}$*，应用* ***OLS*** *估计*

$$\hat{\alpha}_0 = 164.90009$$
$$\hat{\alpha}_1 = 0.3175580$$
$$\hat{\alpha}_2 = 0.3918794$$

- 比较上述消费方程的**3**种估计结果，证明这**3**种方法对于恰好识别的结构方程是等价的。估计量的差别只是很小的计算误差。

- 第**2**阶段估计结果

Dependent Variable: CC
Method: Least Squares
Date: 04/11/03 Time: 22:22
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	164.8004	309.0523	0.533244	0.6017
YF	0.317539	0.104827	3.029167	0.0085
CC1	0.391935	0.283353	1.383203	0.1868

R-squared	0.994079	Mean dependent var	9875.667
Adjusted R-squared	0.993289	S.D. dependent var	9026.792
S.E. of regression	739.4562	Akaike info criterion	16.20072
Sum squared resid	8201931.	Schwarz criterion	16.34911
Log likelihood	-142.8065	F-statistic	1259.163
Durbin-Watson stat	1.542608	Prob(F-statistic)	0.000000

6. 用两阶段最小二乘法估计投资方程

- 投资方程是过度识别的结构方程，只能用**2SLS**估计。估计过程与上述**2SLS**估计消费方程的过程相同。得到投资方程的参数估计量为：

$$\hat{\beta}_0 = -380.11614$$
$$\hat{\beta}_1 = 0.4049326$$

- 至此，完成了该模型系统的估计。

- **2SLS第2阶段估计结果**

Dependent Variable: I

Method: Least Squares

Date: 04/11/03   Time: 22:28

Sample(adjusted): 1979 1996

Included observations: 18 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-380.2044	427.6175	-0.889123	0.3871
YF	0.404935	0.015324	26.42468	0.0000

R-squared	0.977599	Mean dependent var	7923.500
Adjusted R-squared	0.976199	S.D. dependent var	7975.613
S.E. of regression	1230.436	Akaike info criterion	17.17256
Sum squared resid	24223582	Schwarz criterion	17.27149
Log likelihood	-152.5531	F-statistic	698.2639
Durbin-Watson stat	1.376531	Prob(F-statistic)	0.000000

7. 用GMM估计投资方程

- 投资方程是过度识别的结构方程，也可以用**GMM**估计。选择的工具变量为**c**、**G**、**CC1,**得到投资方程的参数估计量为：

$$\hat{\beta}_0 = -388.2216$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.405241$$

- 与**2SLS**结果比较，结构参数估计量变化不大。残差平方和由**24223582**变为**3832486**，显著减少。为什么？利用了更多的信息。

- **GMM估计结果**

Dependent Variable: I
Method: Generalized Method of Moments
Date: 04/11/03 Time: 22:33
Sample(adjusted): 1979 1996
Included observations: 18 after adjusting endpoints
No prewhitening
Bandwidth: Fixed (2)
Kernel: Bartlett
Convergence achieved after: 2 weight matricies, 3 total coef iterations
Instrument list: C G CC1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-388.2216	82.86703	-4.684874	0.0002
Y	0.405241	0.004748	85.34159	0.0000

R-squared	0.996456	Mean dependent var	7923.500
Adjusted R-squared	0.996234	S.D. dependent var	7975.613
S.E. of regression	489.4184	Sum squared resid	3832486.
Durbin-Watson stat	1.357784	J-statistic	0.002874

六、主分量法的应用

1. 方法的提出

- 主分量方法本身并不是联立方程模型的估计方法，而是配合其它方法，例如**2SLS**使用于模型的估计过程之中。
- 数学上的主分量方法早就成熟，**Kloek**和**Mennes**于**1960**年提出将它用于计量经济学模型的估计。
- **2SLS**是一种普遍适用的联立方程模型的单方程估计方法，但是当它在实际模型估计中被应用时，立刻就会遇到不可逾越的困难。其第一阶段**—**用**OLS**估计简化式方程，是难以实现的。为什么？

2. 方法的原理

- 所谓主分量方法，就是用较少数目的新变量重新表示原模型中较多数目的先决变量的方法。
- 例如，如果能够找到**5**个左右的新变量表示宏观经济模型中的**30**个先决变量，那么只需要**15**组以上的样本，就可以进行**2SLS**第一阶段的估计。
- 对充当主分量的变量是有严格要求：一是它必须是先决变量的线性组合，二是它们之间必须是正交的。前一条是保证主分量对先决变量的代表性；后一条是保证主分量之间不出现共线性。

3. 主分量的选取

- 用两个主分量表示两个原变量

$$Z_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$

$$Z_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

可以证明，**a_1**、**a_2**分别是**X’X**的**2**个特征值对应的特征向量。

- 用k个主分量表示k个原变量

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{pmatrix}$$

同样可以证明，$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、…、$\mathbf{a}_k$分别是X'X的k个特征值对应的特征向量。

- 用**f**个主分量表示**k**个原变量

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_f \end{pmatrix}$$

选择$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、…、$\mathbf{a}_f$分别是**X'X**的**f**个最大特征值对应的特征向量。

- 在2SLS中主分量的选取

  对于简化式方程

$$\boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{X}\Pi_0 + \mathrm{E}_0 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_0 & \boldsymbol{X}_0^*\end{pmatrix}\Pi_0 + \mathrm{E}_0$$

一般情况下,结构方程包含的先决解释变量$\mathbf{x}_0$中变量的数目很有限，变量主要集中在结构方程未包含的先决变量$\mathbf{x}_0^*$中。所以只需要选择主分量重新表示$\mathbf{x}_0^*$,就可以有效地减少简化式方程中解释变量的数目，使得在有限样本的支持下模型得到估计。

4. 主分量法在ILS中的应用

- 对于**2SLS**，直接利用主分量完成第一阶段的估计，得到内生解释变量的估计量。
- 对于**ILS**，必须求得到简化式参数，进而计算结构式参数。
- 首先估计**Y=Z**Δ**+**Ε，然后将**Z=XA**代入，得到**Y=X**Π 中Π的估计量。

七、其它有限信息估计方法简介
(Limited Information Estimation Methods)

1. 有限信息最大或然法（LIML，**Limited Information Maximum Likelihood**）

- 以最大或然为准则、通过对简化式模型进行最大或然估计，以得到结构方程参数估计量的联立方程模型的单方程估计方法。
- 由**Anderson**和**Rubin**于**1949**年提出，早于两阶段最小二乘法。
- 适用于恰好识别和过度识别结构方程的估计。

- 在该方法中，以下两个概念是重要的：

  一是这里的“有限信息”指的是每次估计只考虑一个结构方程的信息，而没有考虑模型系统中其它结构方程的信息；

  二是这里的“最大或然法”是针对结构方程中包含的内生变量的简化式模型的，即应用最大或然法求得的是简化式参数估计量，而不是结构式参数估计量。

- 具体参见教科书。

2. 有限信息最小方差比方法（LVR，**Least Variable Ratio**）

- 估计某一个结构方程参数时，仍然只利用关于该方程的信息，没有利用方程系统的信息，所以是一种有限信息估计方法。
- 参见教科书。

八、k级估计式

1. k级估计式

- 本身不是一种估计方法，而是对上述几种方法得到的估计式的概括。
- 对于联立方程模型中的第**1**个结构方程：

$$Y_1 = (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix} \mathrm{B}_{\boldsymbol{0}} \\ \Gamma_{\boldsymbol{0}} \end{pmatrix} + \mathrm{N}_1$$

- **k**级估计式 为：

$$\boxed{\begin{bmatrix} \hat{\mathrm{B}}_0 \\ \hat{\Gamma}_0 \end{bmatrix} = ((\boldsymbol{Y}_0 + k(\hat{\boldsymbol{Y}}_0 - \boldsymbol{Y}_0), \boldsymbol{X}_0)'(\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{X}_0))^{-1}(\boldsymbol{Y}_0 + k(\hat{\boldsymbol{Y}}_0 - \boldsymbol{Y}_0), \boldsymbol{X}_0)'Y_1}$$

- 显然，当

  k=0时，即为**OLS**估计式；

  k=1时，即为**2SLS**估计式；

  k等于有限信息估计方法中的时，即为有限信息估计式。

2. k级估计式的性质

- 假设工具变量与随机误差项不相关，即

$$P\lim \tfrac{1}{n}(\boldsymbol{Y}_0 + k(\hat{\boldsymbol{Y}}_0 - \boldsymbol{Y}_0))\mathrm{N}_1 = 0$$

且先决变量与随机误差项不相关，即

$$P\lim \tfrac{1}{n}(\boldsymbol{X}_0'\mathrm{N}_1) = 0$$

那么，容易证明**k**级估计式是一致性估计式。

- 工具变量与随机误差项不相关，对**k**是有限制的，必须有（证明见教科书）：

$$P\lim(1-k)=0$$

- 这就是说，只有在**2SLS**或有限信息估计方法中，**k**级估计式是一致性估计式，而在**OLS**方法中，不具有一致性。