CHAPTER 7

动态随机一般均衡理论

内容提要

- 介绍 DSGE 分析框架。
  - 从动态视角分析名义刚性的微观基础。
  - 讨论不同动态价格调整模型。
    - 时间依存模型：Fischer 模型、Taylor 模型、Calvo 模型。
    - 状态依存模型：Caplin-Spulber 模型、Danziger—Golosov—Lucas 模型。
  - 交错价格调整模型：Christiano-Eichenbaum-Evans 模型、Mankiw-Reis 模型（信息粘性）。
  - 标准凯恩斯模型：Clarida-Galí-Gertler 模型。

基准模型：家庭

- 假设:
  - 不考虑资本，劳动是唯一投入要素：$Y_t = L_t$。
  - 代表性家庭的单期目标函数:

$$U\left(c_t, N_t\right) = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} - B\frac{L_t^{1+\gamma}}{1+\gamma}, \quad \theta, B, \gamma > 0$$

  - 家庭名义财富的动态路径为:
    $A_{t+1} = \left(A_t + W_t L_t - P_t C_t\right)\left(1+i_t\right)$
  - 实际形式：$a_{t+1}\left(1+\pi_t\right) = \left(a_t + w_t L_t - c_t\right)\left(1+i_t\right)$
- 一阶条件 (考虑价格刚性):

$$c_t^{-\theta} = \beta\frac{\left(1+i_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)}Ec_{t+1}^{-\theta} \equiv \beta\left(1+r_t\right)E_t c_{t+1}^{-\theta}$$

$$BL_t^{\gamma}c_t^{\theta} = \frac{W_t}{P_t}$$

基准模型

- 模型中产出的唯一作用是消费，因此 $c_t = Y_t = L_t$。代入一阶条件并对数线性化可得:

$$\hat{y}_t = E_t\hat{y}_{t+1} - \frac{1-\beta}{\theta}\hat{r}_t$$

$$\hat{y}_t = \frac{1}{\gamma+\theta}\hat{w}_t$$

- 厂商面临的需求函数：$Y_{it} = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\eta}Y_t$。
- 厂商在 t 期的利润:

$$\Pi_t = \left(\frac{P_{it}}{P_t} - \frac{W_t}{P_t}\right)Y_{it} = \left[\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{1-\eta} - \left(\frac{W_t}{P_t}\right)\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\eta}\right]Y_t$$

- 假设：厂商在第 0 期选择 P_i 最大化 $A \equiv \sum_{t=0}^{\infty} q_t\beta^t\left(\frac{c_0}{c_t}\right)^{\theta}\Pi_t$，其中 q_t 表示 P_i 在第 t 期仍然生效的已知概率。

定价策略

- 厂商决策：

$$\max_{p_i} E\sum_{t=0}^{\infty} q_t\beta^t\left(\frac{c_0}{c_t}\right)^{\theta}\left[\frac{P_i}{P_t}-\left(\frac{W_t}{P_t}\right)\right]\left[\frac{P_i}{P_t}\right]^{-\eta}Y_t$$
$$=E\sum_{t=0}^{\infty} q_t\beta^t\left(\frac{c_0}{c_t}\right)^{\theta}Y_tP_t^{\eta-1}\left[P_i^{1-\eta}-W_tP_i^{-\eta}\right]$$

- 一阶条件：

$$P_i=\frac{\eta}{\eta-1}\frac{E\sum_{t=0}^{\infty}q_t\beta^t\left(\frac{c_0}{c_t}\right)^{\theta}Y_tP_t^{\eta-1}W_t}{E\sum_{t=0}^{\infty}q_t\beta^t\left(\frac{c_0}{c_t}\right)^{\theta}Y_tP_t^{\eta-1}}$$

- 假设：$q_0=1$，$q_t=0,\forall t>0$，则回到成本加成定价的静态模型，最优价格为 $P_t^*=\frac{\eta}{\eta-1}W_t$。

定价策略

- 假设：$\beta^t\left(\frac{c_0}{c_t}\right)^{\theta}Y_tP_t^{\eta-1}$ 的变化相对 q_t、W_t 可以忽略。把这个部分看作不变的常数，利用 $P_t^*=\frac{\eta}{\eta-1}W_t$，可以把目标函数写为：$A=\sum_{t=0}^{\infty}q_t\omega\left[P_i^{1-\eta}-\frac{\eta-1}{\eta}P_t^*P_i^{-\eta}\right]=\sum_{t=0}^{\infty}q_tF\left(P_i,P_t^*\right)$。
  - 求解方法一：泰勒展开：$F\left(p_i,p_t^*\right)=F\left(p_t^*,p_t^*\right)+F'\left(p_i-p_t^*\right)+\frac{1}{2}F''\left(p_i-p_t^*\right)^2+o\left(n\right)$，其中根据利润最大化条件：$F'=0$，$F''<0$。因此：$F\left(p_i,p_t^*\right)\simeq F\left(p_t^*,p_t^*\right)-K\left(p_i-p_t^*\right)^2$，$K$ 为常数。最大化问题可转化为：$\min_{p_i}\sum_{t=0}^{\infty}q_tE\left(p_i-p_t^*\right)^2$。求解可得：$p_i=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{q_t}{\sum_{\tau=0}^{\infty}q_\tau}p_t^*\equiv\sum_{t=0}^{\infty}\omega_tp_t^*$，其中 $\omega_t\equiv\frac{q_t}{\sum_{t=0}^{\infty}q_\tau}$。
  - 求解方法二：一阶条件对数线性化可得：$\hat{p}_i=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\beta^tq_t}{\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^\tau q_\tau}\hat{p}_t^*\equiv\sum_{t=0}^{\infty}\omega_t\hat{p}_t^*$，其中 $\omega_t\equiv\frac{\beta^tq_t}{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^\tau q_\tau}$。
- 根据一阶条件 $BL_t^{\gamma}c_t^{\theta}=\frac{W_t}{P_t}$ 和最优定价 $P_t^*=\frac{\eta}{\eta-1}W_t$，$\hat{p}_t^*=\hat{w}_t=\hat{p}_t+\left(\gamma+\theta\right)\hat{y}_t=\phi\hat{m}_t+\left(1-\phi\right)\hat{p}_t$，其中 $\phi\equiv\gamma+\theta$。

$$\hat{p}_i=\sum_{t=0}^{\infty}\omega_tE\left[\phi\hat{m}_t+\left(1-\phi\right)\hat{p}_t\right]$$

Fischer 模型

- 前面我们看到，价格生效概率对最优定价具有重要影响。接下来分别介绍几个价格调整的具体模型。
- 交错价格制定：厂商在可以调整价格时设定后两期的价格，则 $p_t = \frac{1}{2}\left(p_t^1 + p_t^2\right)$, 其中 p_t^1 和 p_t^2 分别表示提前 1 期和 2 期设定的 t 期价格：

$$
\begin{aligned}
p_t^1 =& E_{t-1}p_t^* = E_{t-1}\left[\phi m_t + (1-\phi)\, p_t\right] \\
=& \phi E_{t-1}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}\left(p_t^1 + p_t^2\right) \\
=& \frac{2\phi}{1+\phi}E_{t-1}m_t + \frac{1-\phi}{1+\phi}p_t^2, \\
p_t^2 =& E_{t-2}\left[\phi m_t + (1-\phi)\, p_t\right] \\
=& \phi E_{t-2}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}\left(E_{t-2}p_t^1 + p_t^2\right), \\
E_{t-2}p_t^1 =& \frac{2\phi}{1+\phi}E_{t-2}m_t + \frac{1-\phi}{1+\phi}p_t^2, \\
p_t^2 =& \phi E_{t-2}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}\left(E_{t-2}p_t^1 + p_t^2\right) \\
=& \phi E_{t-2}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}\left(\frac{2\phi}{1+\phi}E_{t-2}m_t + \frac{1-\phi}{1+\phi}p_t^2 + p_t^2\right) \\
=& E_{t-2}m_t
\end{aligned}
$$

Fischer 模型

$$
\begin{aligned}
p_t^1 =& \frac{2\phi}{1+\phi}E_{t-1}m_t + \frac{1-\phi}{1+\phi}p_t^2, \\
p_t =& \frac{1}{2}\left(p_t^1 + p_t^2\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{2\phi}{1+\phi}E_{t-1}m_t + \frac{2}{1+\phi}p_t^2\right) \\
=& E_{t-2}m_t + \frac{\phi}{1+\phi}\left(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t\right) \\
y_t =& m_t - p_t \\
=& m_t - E_{t-2}m_t - \frac{\phi}{1+\phi}\left(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t\right) \\
=& m_t - E_{t-1}m_t + \frac{1}{1+\phi}\left(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t\right)
\end{aligned}
$$

Fischer 模型

$$\begin{aligned} p_t =& E_{t-2} m_t + \frac{\phi}{1+\phi}\left(E_{t-1} m_t - E_{t-2} m_t\right) \\ y_t =& m_t - E_{t-1} m_t + \frac{1}{1+\phi}\left(E_{t-1} m_t - E_{t-2} m_t\right) \end{aligned}$$

- 预料外的总需求冲击 $m_t - E_{t-1} m_t$，$E_{t-1} m_t - E_{t-2} m_t$ 具有实际效应。
- $\phi \equiv \gamma + \theta$ 代表最优价格对实际总产出的反应程度，因此 ϕ 较小表明实际刚性较强。
- $E_{t-2} m_t$ 影响价格，但不影响产出。
- 对比卢卡斯模型：

$$\begin{aligned} p &= E\left[m\right] + \frac{1}{1+b}\left(m - E\left[m\right]\right), \\ y &= \frac{b}{1+b}\left(m - E\left[m\right]\right) \end{aligned}$$

Taylor 模型

- 假设：
  - m 服从随机游走过程：$m_t = m_{t-1} + u_t$，其中 u_t 是白噪声。
  - 厂商选择的价格将固定两期，$x_t = \frac{1}{2}\left(p_t^* + E_t p_{t+1}^*\right) = \frac{1}{2}\left\{\left[\phi m_t + (1-\phi) p_t\right] + \left[\phi E_t m_{t+1} + (1-\phi) E_t p_{t+1}\right]\right\}$。因此，$p_t = \frac{1}{2}\left(x_t + x_{t-1}\right)$

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{2}\Bigg[\phi m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}\left(x_t + x_{t-1}\right) + \phi E_t m_{t+1} + (1-\phi)\frac{1}{2}\left(E_t x_{t+1} + x_t\right. \\ &= \frac{\phi}{2}\left(m_t + E_t m_{t+1}\right) + \frac{(1-\phi)}{4}\left(x_{t-1} + 2x_t + E_t x_{t+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}\left(x_{t-1} + E_t x_{t+1}\right) + \frac{\phi}{1+\phi}\left(m_t + E_t m_{t+1}\right) \end{aligned}$$

- 定义滞后算子 L：$L z_t = z_{t-1}$，恒等算子 $I = L^0$。上式可写为：

$$x_t = \frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}\left(L + L^{-1}\right) x_t + \frac{\phi}{1+\phi}\left(I + L^{-1}\right) m_t$$

$$\left(I - \frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi} L - \frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi} L^{-1}\right) x_t = \frac{\phi}{1+\phi}\left(I + L^{-1}\right) m_t$$

Taylor 模型

- 令 $A=\frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}$，$\left(I-\frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}L-\frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}L^{-1}\right)$ 可写为 $I-AL-AL^{-1}$。即

$$\left(I-AL-AL^{-1}\right)x_t=\frac{\phi}{1+\phi}\left(I+L^{-1}\right)m_t$$

- 仍然不好求解，为了解出模型，我们把 $I-AL-AL^{-1}$ 分解为 $\left(I-\lambda L^{-1}\right)(I-\lambda L)\frac{A}{\lambda}$，

$$\begin{aligned}\left(I-\lambda L^{-1}\right)(I-\lambda L)\frac{A}{\lambda}&=\left[I\left(1+\lambda^2\right)-\lambda L-\lambda L^{-1}\right]\frac{A}{\lambda}\\&=I\left(1+\lambda^2\right)\frac{A}{\lambda}-AL-AL^{-1}\\&=I-AL-AL^{-1}\end{aligned}$$

- 对比多项式系数可知，$\frac{\left(1+\lambda^2\right)}{\lambda}A=1$，即 $A\lambda^2+A-\lambda=0$。解出 λ 可得：

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-4A^2}}{2A}$$

Taylor 模型

- 代入 $A=\frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}$，得到：

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-\left(\frac{1-\phi}{1+\phi}\right)^2}}{\frac{1-\phi}{1+\phi}}=\frac{1+\phi}{1-\phi}\pm\frac{2}{1-\phi}\sqrt{\phi}$$

$$\lambda_1=\frac{\left(1+\sqrt{\phi}\right)^2}{1-\phi}=\frac{1+\sqrt{\phi}}{1-\sqrt{\phi}}$$

$$\lambda_2=\frac{\left(1-\sqrt{\phi}\right)^2}{1-\phi}=\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}$$

- 根据上述分解：

$$\begin{aligned}\left(I-AL-AL^{-1}\right)x_t&=\left(I-\lambda L^{-1}\right)(I-\lambda L)\frac{A}{\lambda}x_t\\&=\left(I-\lambda L^{-1}\right)(I-\lambda L)\frac{1}{2\lambda}\frac{1-\phi}{1+\phi}x_t\\&=\frac{\phi}{1+\phi}\left(I+L^{-1}\right)m_t\end{aligned}$$

Taylor 模型

- 可见，

$$\left(I-\lambda L\right)x_t=\left(I-\lambda L^{-1}\right)^{-1}2\lambda\frac{1+\phi}{1-\phi}\frac{\phi}{1+\phi}\left(I+L^{-1}\right)m_t$$

- 厂商定价为：

$$x_t=\lambda x_{t-1}+2\lambda\frac{\phi}{1-\phi}\left(I-\lambda L^{-1}\right)^{-1}\left(I+L^{-1}\right)m_t$$

其中：$\lambda=\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}<1$ 时，价格是稳定的。

$$\begin{aligned}\left(I-\lambda L^{-1}\right)^{-1}\left(I+L^{-1}\right)&=\left(I+\lambda L^{-1}+\lambda^2L^{-2}+...\right)\left(I+L^{-1}\right)\\&=I+\left(1+\lambda\right)L^{-1}+\left(1+\lambda\right)\lambda L^{-2}+\left(1+\lambda\right)\lambda^2L^{-3}+...\end{aligned}$$

$$x_t=\lambda x_{t-1}+2\lambda\frac{\phi}{1-\phi}\left[I+\left(1+\lambda\right)L^{-1}+\left(1+\lambda\right)\lambda L^{-2}+...\right]m_t$$

Taylor 模型

- 假设 $m_t=m_{t-1}+u_t$，则 $E_tm_{t+1}=m_t$。

$$\begin{aligned}x_t&=\lambda x_{t-1}+2\lambda\frac{\phi}{1-\phi}\left[1+\left(1+\lambda\right)+\left(1+\lambda\right)\lambda+\left(1+\lambda\right)\lambda^2+...\right]m_t\\&=\lambda x_{t-1}+2\frac{\phi}{1-\phi}\frac{\lambda}{1-\lambda}m_t=\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}x_{t-1}+\frac{2\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}m_t\end{aligned}$$

- 此时，经济总体价格水平、通货膨胀率和总产出分别为：

$$\begin{aligned}p_t&=\frac{1}{2}\left(x_t+x_{t-1}\right)=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}\left(x_{t-1}+x_{t-2}\right)+\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}\left(m_t+m_{t-1}\right)\\&=\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}p_{t-1}+\frac{\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}\left(2m_{t-1}+u_t\right)\end{aligned}$$

$$\pi_t\equiv p_t-p_{t-1}=\frac{\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}\left(2y_{t-1}+u_t\right)$$

$$\begin{aligned}y_t&=m_t-p_t=m_{t-1}+u_t-p_{t-1}-\frac{\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}\left(2y_{t-1}+u_t\right)\\&=\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}}y_{t-1}+\frac{1}{1+\sqrt{\phi}}u_t\end{aligned}$$

Taylor 模型

- 当 $\phi < 1$ 时，$\frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}} > 0$，总需求冲击对产出具有长期持续效应。
- $y_1 = \frac{1}{1+\sqrt{\phi}} u_1$，$y_2 = \frac{1-\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}} \frac{1}{1+\sqrt{\phi}} u_1$。$p_1 = \frac{\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}} u_1$，$p_2 - p_1 = \frac{2\sqrt{\phi}}{1+\sqrt{\phi}} \frac{1}{1+\sqrt{\phi}} u_1$。经济表现出价格水平的惯性。
- 根据最优定价 $p_{it}^* = \phi m_t + (1-\phi) p_t$，如果 $\phi = 1$，即价格对总需求冲击作出完全反应，则 y_1 上升 $\frac{u_1}{2}$，y_2 回到 0。
- $\phi < 1$ 时，迅速调整不是均衡，实际刚性。根据假设，第二期调价厂商会设定利润最大化价格。但是价格水平较低时，利润最大化价格也较低，因此第一期可调价的厂商不会完全调整价格，从而第二期调价厂商也不会完全调整，并进一步抑制第一期调价厂商的价格。

Calvo 模型

- Calvo 模型对 Taylor 模型做了一个变形，便于讨论多期情形。与 Taylor 模型一样，
  - 两次调价之间，价格固定不变。
  - 名义刚性（即每期能调整价格的厂商有限，不是所有厂商都能调价）导致价格逐步调整。
  - 实际刚性（即 $\phi < 1$）会放大名义刚性的作用。
  - 假设调价不是定期而是随机的，服从泊松过程，每期可调价概率固定为 $1-\alpha$。假设厂商选择的价格为 x_t，则 $p_t = (1-\alpha) x_t + \alpha p_{t-1}$，即 $\pi_t = (1-\alpha)(x_t - p_{t-1})$。
- 该价格在 $t+j$ 期仍然有效的概率 $q_{t+j} = \alpha^j$。

$$
\begin{aligned}
x_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j q_j}{\sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau q_\tau} E_t p_{t+j}^* = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j}{\sum_{\tau=0}^{\infty} (\alpha\beta)^\tau} E_t p_{t+j}^* \\
&= (1-\alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j E_t p_{t+j}^* \\
&= (1-\alpha\beta) p_t^* + \alpha\beta E_t x_{t+1}
\end{aligned}
$$

Calvo 模型

- 最优化问题的目标函数为：

$$\max_{p_{i,t+j}} E_t \sum_{j=0}^{\infty} q_j \beta^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[\frac{P_{i,t+j}}{P_{t+j}} - \frac{W_{t+j}}{P_{t+j}}\right] \left(\frac{P_{i,t+j}}{P_{t+j}}\right)^{-\eta} Y_{t+j}$$

其中 $q_j = \alpha$，$P_{i,t+j} = P_{it}^*$。

- 目标函数写为：

$E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[P_{it}^{1-\eta} - W_{t+j} P_{it}^{-\eta}\right] P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j} = 0$

- 一阶条件：

$$E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[(1-\eta) P_{it}^{-\eta} + \eta W_{t+j} P_{it}^{-\eta-1}\right] P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} P_{it} P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j} \\ &= \frac{\eta}{\eta-1} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} W_{t+j} P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j} \end{aligned}$$

Calvo 模型

$$P_{it}^* = \frac{\eta}{\eta-1} \frac{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} W_{t+j} P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j}}{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j}}$$

- 对数线性化，分子部分：$E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j c_{t+j}^{-\theta} W_{t+j} P_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j}$

$$\begin{aligned} &\frac{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j c^{-\theta} W P^{\eta-1} Y \left(-\theta \hat{c}_{t+j} + \hat{W}_{t+j} + (\eta-1) \hat{P}_{t+j} + \hat{Y}_{t+j}\right)}{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j c^{-\theta} W P^{\eta-1} Y} \\ &= \frac{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(-\theta \hat{c}_{t+j} + \hat{W}_{t+j} + (\eta-1) \hat{P}_{t+j} + \hat{Y}_{t+j}\right)}{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{it} &= \frac{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{w}_{t+j}}{\sum_{\tau=0}^{\infty} (\alpha\beta)^{\tau}} = (1-\alpha\beta) E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \hat{w}_{t+j} \\ &= (1-\alpha\beta) E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j p_{t+j}^* \\ &= (1-\alpha\beta) p_t^* + \alpha\beta \hat{p}_{it+1} \end{aligned}$$

Calvo 模型

- 利用 $(x_t - p_{t-1}) = \frac{\pi_t}{1-\alpha}$ 可得 $(E_t x_{t+1} - p_t) = \frac{E_t \pi_{t+1}}{1-\alpha}$。
- 根据 $p_t^* = \phi m_t + (1-\phi) p_t = p_t + \phi y_t$ 可得 $p_t^* - p_t = \phi y_t$。

$$
\begin{aligned}
x_t - p_t &= x_t - p_{t-1} - (p_t - p_{t-1}) \\
&= \frac{\pi_t}{1-\alpha} - \pi_t \\
x_t - p_t &= (1-\alpha\beta) p_t^* + \alpha\beta E_t x_{t+1} - p_t \\
&= (1-\alpha\beta)(p_t^* - p_t) + \alpha\beta (E_t x_{t+1} - p_t) \\
&= (1-\alpha\beta) \phi y_t + \alpha\beta \frac{E_t \pi_{t+1}}{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \phi y_t
$$

- 新凯恩斯菲利普斯曲线 NKPC：向前预期。
  - 卢卡斯供给曲线：上一期对当期通货膨胀率的预期 $E_{t-1}\pi_t$。
  - 加速主义菲利普斯曲线：适应性预期，上期通货膨胀率 π_{t-1}。

Rotemberg 模型

- 假设厂商可以随时调整价格，但是调价会产生成本。假设成本为二次函数，则利润最大化问题为：

$$
\max_{P_{it}} E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left(\frac{C_t}{C_{t+j}}\right)^{\sigma} \left[\left(\frac{P_{it+j}}{P_{t+j}} - \frac{W_{t+j}}{P_{t+j}}\right) Y_{it+j} - \frac{\psi}{2}\left(\frac{P_{it+j}}{P_{it+j-1}} - 1\right)^2 Y_{t+j}\right]
$$

其中：

$$
Y_{it+j} = \left(\frac{P_{it+j}}{P_{t+j}}\right)^{-\eta} Y_{t+j}
$$

- 一阶条件：

$$
\begin{aligned}
(\eta - 1)\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\eta} \frac{Y_t}{P_t} &= \eta \frac{W_t}{P_t}\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\eta-1} \frac{Y_t}{P_t} - \psi\left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}} - 1\right)\frac{Y_t}{P_{it-1}} \\
&+ \psi\beta E_t \left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{\sigma}\left(\frac{P_{it+1}}{P_{it}} - 1\right)\frac{P_{it+1}}{P_{it}}\frac{Y_{t+1}}{P_{it}}
\end{aligned}
$$

Rotemberg 模型

- 假设 $\sigma = 1$，并利用对称性：
  $(\eta-1) = \eta\frac{W_t}{P_t} - \psi\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}-1\right)\frac{P_t}{P_{t-1}} + \psi\beta E_t\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}-1\right)\frac{P_{t+1}}{P_t}$
- 没有调整成本时，$\psi = 0$，$P_t = \frac{\eta}{\eta-1}W_t$。
- 对数线性化，利用 $\frac{W}{P} = \frac{\eta-1}{\eta}$：

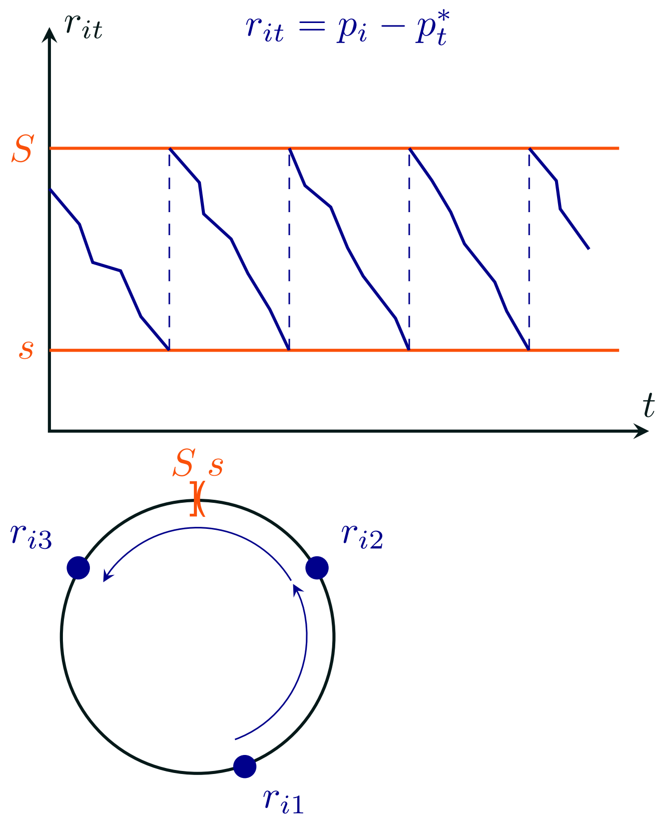
$$0 = \frac{1}{\eta-1}\left[(\eta-1)\left(\hat{w}_t - \hat{p}_t\right) - \psi\left(\hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}\right) + \psi\beta E_t\left(\hat{p}_{t+1} - \hat{p}_t\right)\right]$$

$$\psi\hat{\pi}_t = \psi\beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + (\eta-1)\,\phi\hat{y}_t$$

- 新凯恩斯菲利普斯曲线为：$\hat{\pi}_t = \beta E_t\hat{\pi}_{t+1} + \frac{\eta-1}{\psi}\phi\hat{y}_t$。
- 若 $\frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} = \frac{\eta-1}{\psi}$，即价格调整成本参数 $\psi = \frac{\alpha(\eta-1)}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}$，则 Rotemberg 定价模型等价于 Calvo 定价模型。

Caplin-Spulber 模型 (CS)

- 假设：
  - 连续时间。
  - m 的变化是连续的，且 $r_{it} = p_i - p_t^*$ 在厂商中的初始分布是 (s, S) 上的均匀分布。
  - 厂商调价具有固定成本。
  - 调价时机依赖于状态。
- Ss 法则：厂商在实际价格与最优价格之间的差额 $r_{it} = s$ 时调价，调价幅度为 $S - s$，即调价后 $r_{it} = S$，然后厂商保持价格不变，直到货币增长促使 p^* 提高到临界水平。



Caplin-Spulber **模型** (CS)

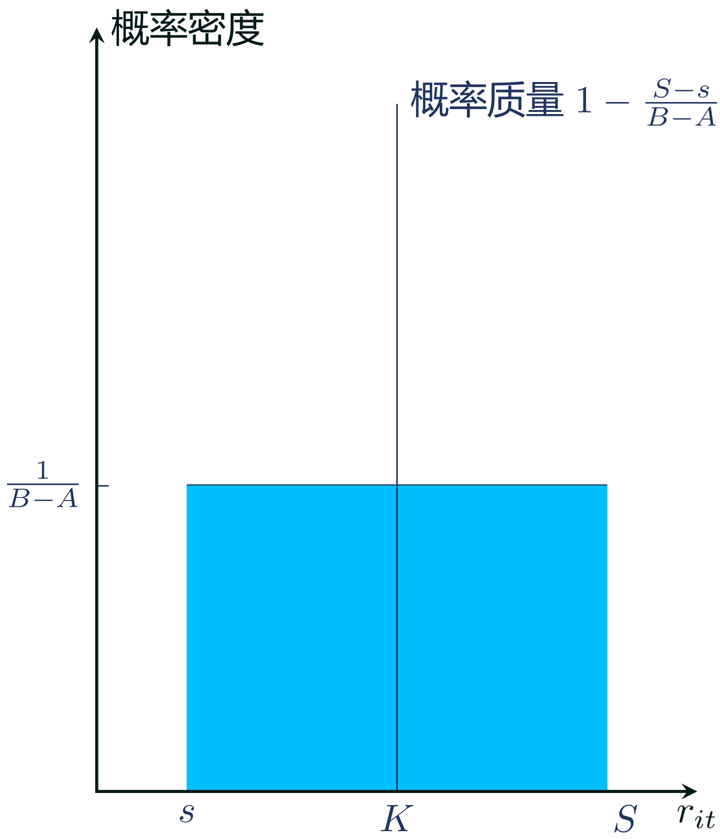
- m 上升的影响：$\Delta m < S - s$。
  - 根据 $p_t^* = \phi m + (1-\phi)\, p$，货币增长导致利润最大化价格的变化为 $\Delta p^* = \phi \Delta m + (1-\phi)\, \Delta p$。
  - 只有当实际价格下降到 $r_{it} = s$ 时，厂商调价。因此，只有初始值满足 $r_{it} < s + \Delta p^* = s + \phi \Delta m + (1-\phi)\, \Delta p$ 的厂商才会选择调价。
  - 根据 r_{it} 的分布，调价厂商的比例为：$d = \frac{(1-\phi)\Delta p + \phi \Delta m}{S-s}$。即调价厂商的数量是内生的。当总需求上升较快时，调价厂商的数量较大。这体现了调价的**频率效应**。
  - 每个厂商均在 $r_{it} = s$ 时调价，因此价格调整幅度均为 $S - s$，即价格会对 m 的变化做出充分反应。可见：

$$\Delta p = d\,(S-s) = \phi \Delta m + (1-\phi)\, \Delta p = \Delta m$$

  - 上式表明 $\Delta y = \Delta m - \Delta p = 0$。因此货币变动并不会影响总产出。

Danziger-Golosov-Lucas **模型** (DGL)

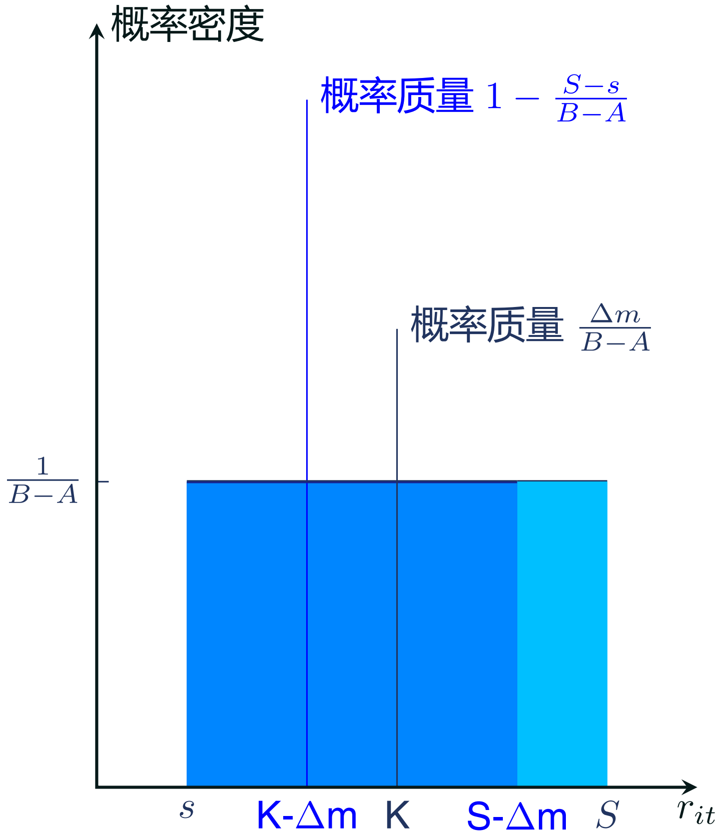
- 定价法则：
  $p_t^* = \phi m + (1-\phi)\, p$，令 $\phi = 1$，并考虑厂商的异质性，$p_{it}^* = m_t + \omega_{it}$。
- 假设：
  - 离散时间。
  - 厂商具有异质性，
    $\omega_{it} = \omega_{it-1} + \epsilon_{it}$。
  - $\epsilon_{it} \sim U(A, B)$，上下界满足：$S - s < B$，且 $A < -(S-s)$。
  - 当冲击导致 r_{it} 超出区间 $[s, S]$ 时，厂商把相对价格重新设为 $K \in [s, S]$。
- 稳态：不调价概率：$\frac{S-s}{B-A}$。调价概率为 $1 - \frac{S-s}{B-A}$。在 K 这个位置，概率质量等于调价概率。



Danziger-Golosov-Lucas 模型 (DGL)

- 冲击：m 意外上升 $\Delta m < K - s$，所有 p_i^* 提高 Δm，r_{it} 的分布向左平移 Δm。
- r_{it} 低于 s 的厂商会把 r_{it} 提高到 K。这部分厂商的比例为 $\frac{\Delta m}{B-A}$，即 K 处概率质量。
- 调价厂商并不是随机的，而是价格低于最优价格幅度最大的厂商。这就是选择效应。
- 下一期随着 ω_{it} 的变化，r_{it} 的分布回到稳态。

在状态依存定价下，货币冲击的实际效应远远小于时间依存定价。



Christiano-Eichenbaum-Evans 模型 (CEE)

- NKPC 形式上比较优美，但是并不符合通胀惯性的实证结果。
- CEE 通过通胀指数定价引入通胀惯性：两次调价之间，价格并不是固定不变的，而是会根据通货膨胀率进行调整。
- **通货膨胀指数定价**：$t+j$ 期的指数化价格为 $P_{i,t+j} = P_t^* \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdots \frac{P_{t+j-1}}{P_{t+j-2}}\right) = P_t^* \frac{P_{t+j-1}}{P_{t-1}}$。对数线性化，$p_{it+j} = p_{it} + \sum_{\tau=0}^{j-1} \pi_{t+\tau} = p_{it} + p_{t+j-1} - p_{t-1}, j \geq 1$。
- 假设：厂商可定最优价格 $x_t = p_t^*$ 的概率为 $1-\alpha$，按照通货膨胀指数定价 $p_t = p_{t-1} + \pi_{t-1}$ 的概率为 α，总体价格为：$p_t = (1-\alpha)\, x_t + \alpha\, (p_{t-1} + \pi_{t-1})$。

$$
\begin{aligned}
x_t - p_t &= x_t - \left[\alpha\, (p_{t-1} + \pi_{t-1}) + (1-\alpha)\, x_t\right] \\
&= \alpha x_t - \alpha\, (p_{t-1} + \pi_{t-1}) \\
&= \alpha\, (x_t - p_t) + \alpha\, (\pi_t - \pi_{t-1}) \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha}\, (\pi_t - \pi_{t-1})
\end{aligned}
$$

Christiano-Eichenbaum-Evans 模型 (CEE)

- 最优定价的目标函数为:

$$\max_{p_{i,t+j}} E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[\frac{P_{i,t+j}}{P_{t+j}} - \frac{W_{t+j}}{P_{t+j}}\right] \left(\frac{P_{i,t+j}}{P_{t+j}}\right)^{-\eta} Y_{t+j}$$

$$= E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[\frac{P_{it}\frac{P_{t+j-1}}{P_{t-1}}}{P_{t+j}} - \frac{W_{t+j}}{P_{t+j}}\right] \left(\frac{P_{it}\frac{P_{t+j-1}}{P_{t-1}}}{P_{t+j}}\right)^{-\eta} Y_{t+j}$$

- 上式可写为:

$$E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[P_{it}^{1-\eta} - W_{t+j} P_{it}^{-\eta} \frac{P_{t-1}}{P_{t+j-1}}\right] \left(\frac{P_{t+j-1}}{P_{t-1}P_{t+j}}\right)^{1-\eta} Y_{t+j}$$

- 一阶条件:

$$E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \left[P_{it} - \frac{\eta}{\eta-1} W_{t+j} \frac{P_{t-1}}{P_{t+j-1}}\right] \pi_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j} = 0$$

Christiano-Eichenbaum-Evans 模型 (CEE)

- 最优定价:

$$P_{it} = \frac{\eta}{\eta-1} \frac{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} W_{t+j} \frac{P_{t-1}}{P_{t+j-1}} \pi_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j}}{E_t \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(\frac{c_t}{c_{t+j}}\right)^{\theta} \pi_{t+j}^{\eta-1} Y_{t+j}}$$

- 对数线性化:

$$\begin{aligned} x_t = p_{it} &= (1-\alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(w_{t+j} - p_{t+j-1} + p_{t-1}\right) \\ &= (1-\alpha\beta) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\beta)^j \left(p_{t+j}^* - p_{t+j-1}\right) + p_{t-1} \\ &= (1-\alpha\beta)\left(p_t^* - p_{t-1}\right) + p_{t-1} + \alpha\beta\left(E_t x_{t+1} - p_t\right) \\ &= (1-\alpha\beta) p_t^* + \alpha\beta\left(E_t x_{t+1} - \pi_t\right) \end{aligned}$$

Christiano-Eichenbaum-Evans 模型 (CEE)

- 根据 $p_t^* = \phi m_t + (1-\phi)\, p_t = p_t + \phi y_t$，$p_t^* - p_t = \phi y_t$，以及 $x_t - p_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(\pi_t - \pi_{t-1})$：

$$
\begin{aligned}
x_t - p_t =& (1-\alpha\beta)(p_t^* - p_t) + \alpha\beta (E_t x_{t+1} - \pi_t - p_t) \\
=& \alpha\beta (E_t x_{t+1} - E_t p_{t+1} + E_t p_{t+1} - p_t - \pi_t) \\
& + (1-\alpha\beta)\,\phi y_t \\
=& \alpha\beta \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}(E_t \pi_{t+1} - \pi_t) + E_t \pi_{t+1} - \pi_t \right] \\
& + (1-\alpha\beta)\,\phi y_t \\
\pi_t - \pi_{t-1} =& \beta\,[E_t \pi_{t+1} - \pi_t] + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha} \phi y_t
\end{aligned}
$$

- 指数化的新凯恩斯菲利普斯曲线（NKPCI）：

$$
\pi_t = \frac{1}{1+\beta}\pi_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \pi_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha(1+\beta)} \phi y_t
$$

模型意义

- NKPCI 的推广：

$$
\pi_t = \frac{1}{1+\beta}\pi_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \pi_{t+1} + \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha(1+\beta)} \phi y_t
$$

- 历史通货膨胀的权重为 $\frac{1}{1+\beta}$，对当期通货膨胀具有直接影响，即存在通胀惯性。
- 加速主义菲利普斯曲线 $\pi_t = \pi_{t-1} + \lambda(y_t - \bar{y}_t)$ 表明，存在通胀惯性时，反通货膨胀需要牺牲产出（产出低于正常水平）。
- 卢卡斯供给曲线 $\pi_t = E_{t-1}\pi_t + \lambda(y_t - \bar{y}_t)$：理性预期下不存在惯性，可以无痛反通胀。
- CEE 模型的不足：价格随通货膨胀机械上升的假设可能不符合实际。

Mankiw-Reis 模型 (MR)

- 假设信息获取会产生成本，从而厂商并不会及时更新信息。
- 重新引入 Fischer 模型的思想，假设厂商在每次定价时会设定价格变动路径。令 P_{tj} 表示在 $t-j$ 期更新信息的厂商 i 设定的 t 期价格。即 P_{tj} 为如下定价问题的最优解：

$$\max_{P_{tj}} E_{t-j}\left(\frac{P_{tj}Y_{it}}{P_t}-\frac{W_tL_{it}}{P_t}\right)$$

- 根据生产函数 $Y_i=L_i$，以及需求函数 $Y_{it}=\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-\eta}Y_t$ 可把上述问题写为：

$$\max_{P_{tj}} E_{t-j}\left(\frac{P_{tj}}{P_t}-\frac{W_t}{P_t}\right)\left(\frac{P_{tj}}{P_t}\right)^{-\eta}Y_t$$

- 一阶条件：$E_{t-j}\left(\frac{P_{tj}}{P_t}-\frac{\eta}{\eta-1}\frac{W_t}{P_t}\right)\frac{Y_{ti}}{P_t}=0$，即 $P_{tj}=E_{t-j}\frac{\eta}{\eta-1}W_t$，对数线性化可得：$p_{tj}=E_{t-j}w_t=E_{t-j}p_t^*=E_{t-j}\left(p_t+\phi y_t\right)$。

Mankiw-Reis 模型

- 假设每期更新信息的厂商比例为 $1-\alpha$，则 α 的厂商根据上式设定价格。总价格水平为：

$$\begin{aligned}
p_t &= (1-\alpha)\,p_{t0}+(1-\alpha)\,\alpha p_{t1}+(1-\alpha)\,\alpha^2 p_{t2}+\ldots \\
&= (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j p_{tj} \\
&= (1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j E_{t-j}\left(p_t+\phi y_t\right) \\
&= (1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^j E_{t-j}\left(p_t+\phi y_t\right) \\
&= (1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j+1} E_{t-j-1}\left(p_t+\phi y_t\right) \\
&= (1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)+\alpha(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j} E_{t-j-1}\left(p_t+\phi y_t\right)
\end{aligned}$$

Mankiw-Reis 模型

- 往前推一期可得：$p_{t-1}=(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(p_{t-1}+\phi y_{t-1}\right)$，因此：

$$
\begin{aligned}
\pi_t =& p_t - p_{t-1} \\
=&(1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)+\alpha(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(p_t+\phi y_t\right) \\
&-(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(p_{t-1}+\phi y_{t-1}\right) \\
=&(1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(\pi_{t-1}+\phi\Delta y_t\right) \\
&-(1-\alpha)^2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(p_t+\phi y_t\right)
\end{aligned}
$$

Mankiw-Reis 模型

- 由于 $\alpha(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(p_t+\phi y_t\right)=p_t-(1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)$，代入上式可得粘性信息菲利普斯曲线（SIPC）：

$$
\begin{aligned}
\pi_t =&(1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(\pi_{t-1}+\phi\Delta y_t\right) \\
&-\frac{1-\alpha}{\alpha}\left[p_t-(1-\alpha)\left(p_t+\phi y_t\right)\right] \\
=&\frac{1-\alpha}{\alpha}\phi y_t+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^{j}E_{t-j-1}\left(\pi_{t-1}+\phi\Delta y_t\right)
\end{aligned}
$$

- SIPC 表明，通货膨胀率与产出缺口正相关，并且受通货膨胀缺口和产出增速的历史预期影响。
- MR 模型和 CEE 模型的共同缺点：
  - 厂商确定价格路径的假设过强。
  - 调价概率外生不变的假设过强。

标准新凯恩斯模型

- Clarida-Gali-Gertler 模型（CGG）。假设：交错价格调整，前瞻性利率规则。
- 核心方程：

$$
\begin{aligned}
y_t &= E_t\left[y_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta} r_t + u_t^{IS}, \quad \theta > 0, \\
\pi_t &= \beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa y_t + u_t^{\pi}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \kappa > 0, \\
r_t &= \phi_\pi E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \phi_y E_t\left[y_{t+1}\right] + u_t^{MP}, \quad \phi_\pi > 0, \quad \phi_y \geq 0.
\end{aligned}
$$

- 外生冲击：

$$
\begin{aligned}
u_t^{IS} &= \rho_{IS} u_{t-1}^{IS} + e_t^{IS}, \quad -1 < \rho_{IS} < 1, \\
u_t^{\pi} &= \rho_\pi u_{t-1}^{\pi} + e_t^{\pi}, \quad -1 < \rho_\pi < 1, \\
u_t^{MP} &= \rho_{MP} u_{t-1}^{MP} + e_t^{MP}, \quad -1 < \rho_{MP} < 1,
\end{aligned}
$$

其中 e^{IS}，e^{π} 和 e^{MP} 为互不相关的白噪声扰动项。

白噪声扰动

- 模型中变量均已对数线性化，因此所有变量的稳态值均为 0.
- 当 $\rho_{IS} = \rho_\pi = \rho_{MP} = 0$ 时，所有冲击均是白噪声：

$$
\begin{aligned}
u_t^{IS} &= \rho_{IS} u_{t-1}^{IS} + e_t^{IS} = e_t^{IS}, \\
u_t^{\pi} &= \rho_\pi u_{t-1}^{\pi} + e_t^{\pi} = e_t^{\pi}, \\
u_t^{MP} &= \rho_{MP} u_{t-1}^{MP} + e_t^{MP} = e_t^{MP},
\end{aligned}
$$

其中 e^{IS}，e^{π} 和 e^{MP} 为互不相关的白噪声扰动项。
- 模型中只有前瞻性因素，没有后顾性因素。基本解中 $E_t\left[y_{t+1}\right] = E_t\left[\pi_{t+1}\right] = 0$。代入模型方程可得：

$$
\begin{aligned}
y_t &= -\frac{1}{\theta} u_t^{MP} + u_t^{IS}, \quad \theta > 0, \\
\pi_t &= -\frac{\kappa}{\theta} u_t^{MP} + \kappa u_t^{IS} + u_t^{\pi}, \quad \kappa > 0, \\
r_t &= u_t^{MP}.
\end{aligned}
$$

一般情形

■ 假设:

$$\begin{aligned} y_t =& a_{IS}u_t^{IS} + a_\pi u_t^\pi + a_{MP}u_t^{MP}, \\ \pi_t =& b_{IS}u_t^{IS} + b_\pi u_t^\pi + b_{MP}u_t^{MP}. \end{aligned}$$

■ 代入模型方程可得:

$$\begin{aligned} y_t =& \left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)E_t\left[y_{t+1}\right] - \frac{\phi_\pi}{\theta}E_t\left[\pi_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta}u_t^{MP} + u_t^{IS}, \\ =& \left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)\left(a_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + a_\pi\rho_\pi u_t^\pi + a_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right) \\ &- \frac{\phi_\pi}{\theta}\left(b_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + b_\pi\rho_\pi u_t^\pi + b_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right) - \frac{1}{\theta}u_t^{MP} + u_t^{IS} \\ =& \left[\left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)a_{IS}\rho_{IS} - \frac{\phi_\pi}{\theta}b_{IS}\rho_{IS} + 1\right]u_t^{IS} \\ &+ \left[\left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)a_\pi - \frac{\phi_\pi}{\theta}b_\pi\right]\rho_\pi u_t^\pi \\ &+ \left[\left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)a_{MP}\rho_{MP} - \frac{\phi_\pi}{\theta}b_{MP}\rho_{MP} - \frac{1}{\theta}\right]u_t^{MP} \end{aligned}$$

一般情形

$$\begin{aligned} \pi_t =& \beta E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa y_t + u_t^\pi \\ =& \beta\left(b_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + b_\pi\rho_\pi u_t^\pi + b_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right) \\ &+ \kappa\left(a_{IS}u_t^{IS} + a_\pi u_t^\pi + a_{MP}u_t^{MP}\right) + u_t^\pi \\ =& \left(\kappa a_{IS} + \beta b_{IS}\rho_{IS}\right)u_t^{IS} + \left(\kappa a_\pi + \beta b_\pi\rho_\pi + 1\right)u_t^\pi \\ &+ \left(\kappa a_{MP} + \beta b_{MP}\rho_{MP}\right)u_t^{MP} \end{aligned}$$

■ 对比系数可知:

$$b_{IS} = \kappa a_{IS} + \beta b_{IS}\rho_{IS} = \frac{\kappa a_{IS}}{1-\beta\rho_{IS}}$$

$$b_\pi = \kappa a_\pi + \beta b_\pi\rho_\pi + 1 = \frac{\kappa a_\pi + 1}{1-\beta\rho_\pi}$$

$$b_{MP} = \kappa a_{MP} + \beta b_{MP}\rho_{MP} = \frac{\kappa a_{MP}}{1-\beta\rho_{MP}}$$

一般情形

$$
\begin{aligned}
a_{IS} &= \left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)a_{IS}\rho_{IS} - \frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\kappa a_{IS}}{1-\beta\rho_{IS}}\rho_{IS}+1 \\
&= \frac{1}{1-\left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)\rho_{IS}+\frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\kappa\rho_{IS}}{1-\beta\rho_{IS}}} \\
a_\pi &= \left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)a_\pi\rho_\pi - \frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\kappa a_\pi+1}{1-\beta\rho_\pi}\rho_\pi \\
&= \frac{-\frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\rho_\pi}{1-\beta\rho_\pi}}{1-\left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)\rho_\pi+\frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\kappa\rho_\pi}{1-\beta\rho_\pi}} \\
a_{MP} &= \left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)a_{MP}\rho_{MP} - \frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\kappa a_{MP}}{1-\beta\rho_{MP}}\rho_{MP}-\frac{1}{\theta} \\
&= \frac{-\frac{1}{\theta}}{1-\left(1-\frac{\phi}{\theta}\right)\rho_{MP}+\frac{\phi_\pi}{\theta}\frac{\kappa\rho_{MP}}{1-\beta\rho_{MP}}}
\end{aligned}
$$

一般情形

当 $\rho_{IS}=\rho_\pi=\rho_{MP}=0$ 时，

$$
\begin{aligned}
a_{IS} &= 1 \\
a_\pi &= 0 \\
a_{MP} &= -\frac{1}{\theta} \\
b_{IS} &= \kappa \\
b_\pi &= 1 \\
b_{MP} &= -\frac{\kappa}{\theta}
\end{aligned}
$$

即白噪声情形：

$$
\begin{aligned}
y_t &= -\frac{1}{\theta}u_t^{MP}+u_t^{IS}, \quad \theta>0, \\
\pi_t &= -\frac{\kappa}{\theta}u_t^{MP}+\kappa u_t^{IS}+u_t^\pi, \quad \kappa>0, \\
r_t &= u_t^{MP}.
\end{aligned}
$$

前瞻指引

- 假设经济一开始处于稳态，然后央行宣布将在 T 期后把实际利率降低 -1%，经济如何反应？
  - 根据 NKIS 曲线向前迭代：

$$
\begin{aligned}
y_t &= E_t y_{t+1} - \frac{1}{\theta} r_t + u_t^{IS}, \\
&= -\frac{1}{\theta} r_t - \frac{1}{\theta} E_t r_{t+1} + E_t y_{t+2} + u_t^{IS} \\
&= -\frac{1}{\theta} \left(r_t + E_t r_{t+1} + ... + E_t r_{t+T} \right) + E_t y_{t+T+1} + u_t^{IS} \\
&= \frac{1}{\theta}.
\end{aligned}
$$

  - 根据 NKPC：$\pi_t = \beta E_t \left[\pi_{t+1} \right] + \kappa y_t$, 即 $\pi_{t+1} - \frac{1}{\beta} \pi_t = -\frac{\kappa}{\beta} \frac{1}{\theta}$。差分方程的解为：

$$
\pi_t = \frac{\kappa}{(1-\beta)\,\theta} \left(1 - \beta^{-t} \right)
$$

  - 当 $\beta = 0.99$，$\theta = 1$，$\kappa = 0.172$ 时，$\pi_t = 17.2 \left(1 - 0.99^{-t} \right)$。

通货膨胀方程的通解

$$
\pi_t = \beta E_t \left[\pi_{t+1} \right] + \kappa y_t + u_t^{\pi}, \quad 0 < \beta < 1, \quad \kappa > 0,
$$

- 没有冲击时，可写为：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} \pi_t &= E_t \left[\pi_{t+1} \right] + \frac{\kappa}{\beta} y_t, \\
\pi_{t+1} - \frac{1}{\beta} \pi_t &= -\frac{\kappa}{\beta} \frac{1}{\theta}
\end{aligned}
$$

- 齐次差分方程的通解为：$\pi_t = C \beta^{-t}$。令 $\Delta \pi_t = 0$，得到

$$
\Delta \pi_1 + \pi_0 - \frac{1}{\beta} \pi_0 = -\frac{\kappa}{\beta} \frac{1}{\theta}
$$

$\pi_0 = \frac{-\kappa}{(1-\beta)\theta}$。即 $C = \frac{-\kappa}{(1-\beta)\theta}$，$\pi_t = \frac{-\kappa}{(1-\beta)\theta} \beta^{-t}$。

- 原方程的通解为 $\pi_t = \frac{-\kappa}{(1-\beta)\theta} \beta^{-t} + x$，代入原方程得 $x = \frac{\kappa}{(1-\beta)\theta}$。即差分方程的解为：

$$
\pi_t = \frac{\kappa}{(1-\beta)\,\theta} \left(1 - \beta^{-t} \right)
$$

完整的 NK 模型：家庭

- 重新考虑货币需求（MIU）。

$$\max_{c_t,m_t,B_{t+1},N_t} \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}+\frac{m_t^{1-\nu}}{1-\nu}-\frac{L_t^{1+\gamma}}{1+\gamma},$$
$$s.t.:P_tC_t+B_{t+1}+M_t=(1+i_{t-1})B_t+W_tL_t+M_{t-1}+\Pi_t$$

  - 一阶条件:

$$c_t^{-\theta}=\beta(1+i_t)E\frac{c_{t+1}^{-\theta}}{\pi_{t+1}}$$
$$m_t^{-\nu}=\frac{i_tc_t^{-\theta}}{(1+i_t)}$$
$$N_t^{\gamma}=c_t^{-\theta}w_t$$

完整的 NK 模型：厂商

- 考虑供给冲击。中间产品厂商生产函数：$Y_{jt}=A_tL_{jt}$。
  - 劳动需求：$\min W_tL_{jt},\ s.t.A_tL_{jt}\geq Y_{jt}$
- 完全竞争市场上的代表性厂商根据 Dixit-Stiglitz 生产技术生产最终产品：$Y_t=\left(\int_0^1 Y_{jt}^{\frac{\eta-1}{\eta}}dj\right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$。利润最大化问题:

$$\max_{Y_{jt}} P_tY_t-\int_0^1 P_{jt}Y_{jt}dj$$

  - 一阶条件：$P_t\left(\frac{Y_t}{Y_{jt}}\right)^{\frac{1}{\eta}}=P_{jt}$，即 $Y_{jt}=\left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\eta}Y_t$。
  - 根据零利润条件：$P_tY_t=\int_0^1 P_{jt}\left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\eta}Y_tdj$ 可得，

    Dixit-Stiglitz 总价格指数：$P_t=\left[\int_0^1 P_{jt}^{1-\eta}dj\right]^{\frac{1}{1-\eta}}$。

完整的 NK 模型：定价行为

- Calvo 定价机制：

$$\max_{p_{jt}} E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\alpha)^s \left(\frac{c_t}{c_{t+s}}\right)^{\theta} \left[\frac{P_{jt}}{P_{t+s}} - w_{t+s}\right] \left(\frac{P_{jt}}{P_{t+s}}\right)^{-\eta} Y_{t+s}$$

- 一阶条件：

$$E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\alpha)^s \left(\frac{c_t}{c_{t+s}}\right)^{\theta} \left(P_{jt} - \frac{\eta}{\eta-1} w_{t+s} P_{t+s}\right) P_{t+s}^{\eta} Y_{t+s} = 0$$

$$P_j^* = \frac{\eta}{\eta-1} \frac{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\alpha)^s \left(\frac{c_t}{c_{t+s}}\right)^{\theta} w_{t+s} P_{t+s}^{\eta} Y_{t+s}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\alpha)^s \left(\frac{c_t}{c_{t+s}}\right)^{\theta} P_{t+s}^{\eta} Y_{t+s}} \equiv \frac{\eta}{\eta-1} \frac{X_{1t}}{X_{2t}}$$

其中：$X_{1t} = w_t P_t^{\eta} Y_t + \alpha\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta} E_t X_{1t+1}$，

$X_{2t} = P_t^{\eta-1} Y_t + \alpha\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta} E_t X_{2t+1}$。

  - 定义：$x_{1t} \equiv X_{1t}/P_t^{\eta}$，$x_{2t} \equiv X_{2t}/P_t^{\eta-1}$，则：

    $x_{1t} = w_t Y_t + \alpha\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta} E_t \pi_{t+1}^{\eta} x_{1t+1}$，

    $x_{2t} = Y_t + \alpha\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta} E_t \pi_{t+1}^{\eta-1} x_{2t+1}$。

完整的 NK 模型：价格离散

- 劳动市场出清条件：

$L_t = \int_0^1 L_{jt} dj = \int_0^1 \frac{Y_{jt}}{A_t} dj = \frac{Y_t}{A_t} \int_0^1 \left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\eta} dj \equiv \frac{Y_t}{A_t} d_t$。其中 $d_t \equiv \int_0^1 \left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\eta} dj$ 表示价格离散程度。假设厂商在 $(0,1)$ 上均匀分布，则：

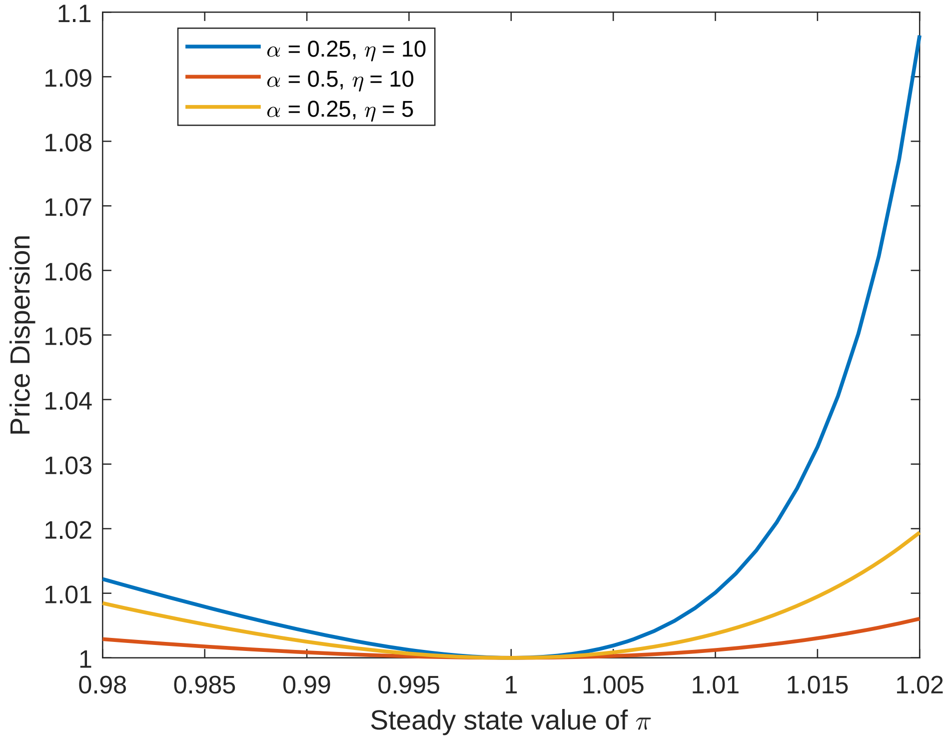
$$\begin{aligned} d_t &= \int_0^1 \left(\frac{P_{jt}}{P_t}\right)^{-\eta} dj \\ &= \int_0^{1-\alpha} \left(\frac{P_j^*}{P_t}\right)^{-\eta} dj + \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{P_{jt-1}}{P_t}\right)^{-\eta} dj \\ &= (1-\alpha)\, \pi_t^{*-\eta} \pi_t^{\eta} + \alpha \pi_t^{\eta} d_{t-1} \end{aligned}$$

- 根据总价格指数 $P_t = \left[\int_0^1 P_{jt}^{1-\eta} dj\right]^{\frac{1}{1-\eta}}$，

$P_t^{1-\eta} = \int_0^1 P_{jt}^{1-\eta} dj = (1-\alpha)\, P_j^{*1-\eta} + \alpha P_{t-1}^{1-\eta}$，即 $\pi_t^{1-\eta} = (1-\alpha)\, \pi_t^{*1-\eta} + \alpha$。

价格离散程度

- 稳态通货膨胀 π 为 1 时，价格离散程度为最小值 1。在 $\pi = 1$ 两侧，价格离散程度呈非对称分布。



完整的 NK 模型：货币规则

- McCallum 货币增长规则：

$$g_{Mt} \equiv \ln M_t - \ln M_{t-1} \simeq \frac{M_t - M_{t-1}}{M_{t-1}}$$
$$= (1-\rho_m)\ln\pi + \rho_m g_{Mt-1} + \epsilon_{Mt}$$

$$g_{mt} \equiv \ln m_t - \ln m_{t-1} = g_{Mt} - \ln\pi_t$$
$$= \rho_m\left(g_{mt-1} - \Delta\ln\pi_t\right) - (1-\rho_m)\left(\ln\pi_t - \ln\pi\right) + \epsilon_{mt}$$

- Taylor 规则：$i_t = i_{t-1}^{\rho_i}\left(\pi_t^{\phi_\pi} y_t^{\phi_y}\right)^{1-\rho_i} e^{\epsilon_{it}}$
- 市场出清条件：

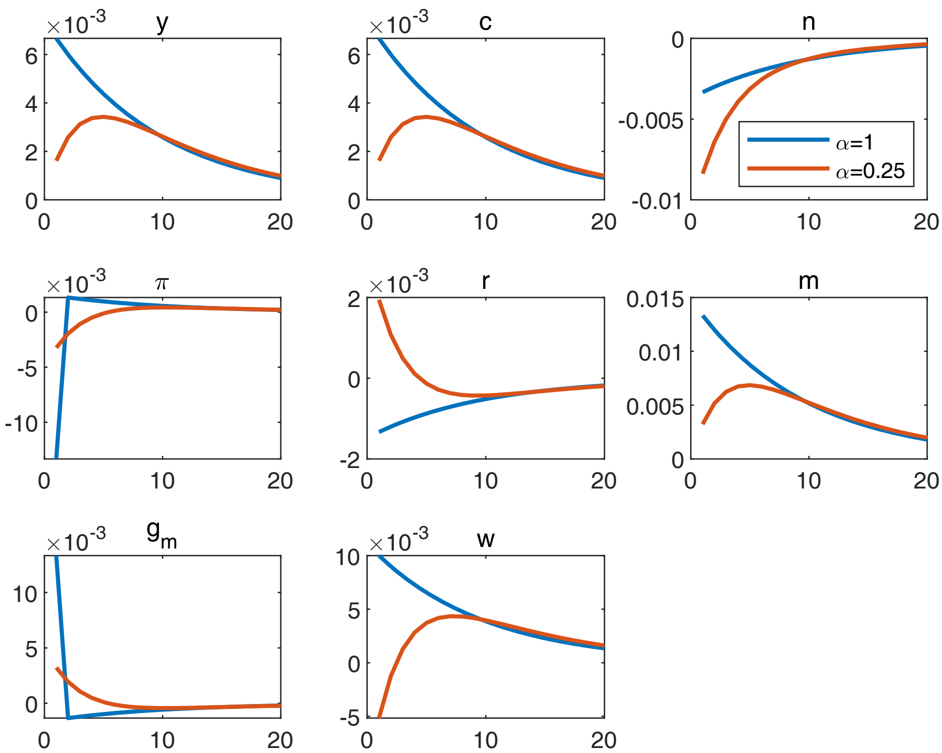
$$Y_t = C_t = \frac{A_t L_t}{d_t}, \quad B_t = 0$$
$$P_t C_t = W_t L_t + \Pi_t$$

均衡条件

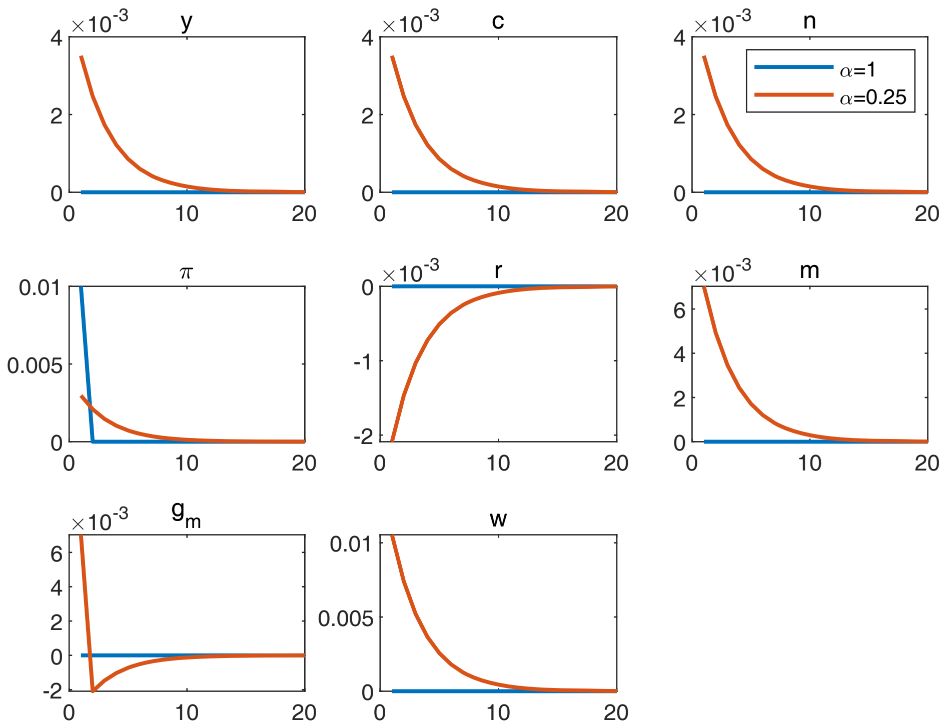
欧拉方程	$c_t^{-\theta}=\beta\left(1+i_t\right)E\frac{c_{t+1}^{-\theta}}{\pi_{t+1}}$
货币需求方程	$m_t^{-\nu}=\frac{i_t c_t^{-\theta}}{(1+i_t)}$
劳动供给方程	$L_t^{\gamma}=c_t^{-\theta}w_t$
通货膨胀递归方程	$\pi_t^{1-\eta}=(1-\alpha)\,\pi_t^{*1-\eta}+\alpha$
价格离散方程	$d_t=(1-\alpha)\,\pi_t^{*-\eta}\pi_t^{\eta}+\alpha\pi_t^{\eta}d_{t-1}$
辅助变量	$x_{1t}=w_tY_t+\alpha\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta}E_t\pi_{t+1}^{\eta}x_{1t+1}$
辅助变量	$x_{2t}=Y_t+\alpha\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta}E_t\pi_{t+1}^{\eta-1}x_{2t+1}$
最优定价方程	$\pi_t^{*}=\frac{\eta}{\eta-1}\pi_t\frac{x_{1t}}{x_{2t}}$
货币政策规则	$g_{mt}=\rho_m\left(g_{mt-1}-\Delta\ln\pi_t\right)-\left(1-\rho_m\right)\left(\ln\pi_t-\ln\pi\right)+\epsilon_{mt}$
货币增长率定义	$g_{mt}=\ln m_t-\ln m_{t-1}$
总生产函数	$Y_t=\frac{A_tL_t}{d_t}$
资源约束	$c_t=Y_t$

■ 内生变量：c_t，i_t，π_t，m_t，L_t，w_t，π_t^*，d_t，x_{1t}，x_{2t}，g_{mt}，A_t。

脉冲反应：技术冲击



脉冲反应：货币冲击



粘性工资模型：工会

- 工会把家庭提供的差异化劳动包装为劳动服务，并代表家庭与厂商进行工资谈判。$L_t = \left(\int_0^1 L_t(l)^{\frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w}} dl\right)^{\frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1}}$。工会的最优化问题：

$$\max_{L_t(l)} W_t L_t - \int_0^1 W_t(l) L_t(l) dl$$

- 一阶条件：

$$W_t \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \left(\int_0^1 L_t(l)^{\frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w}} dl\right)^{\frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} - 1} \frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w} L_t(l)^{\frac{\epsilon_w - 1}{\epsilon_w} - 1} = W_t(l)$$

即 $L_t(l) = \left(\frac{W_t(l)}{W_t}\right)^{-\epsilon_w} L_t$。

- 根据零利润条件：$W_t L_t = \int_0^1 W_t(l) L_t(l) dl$ 可得：

$$W_t^{1-\epsilon_w} = \int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} dl$$

$$\Rightarrow W_t = \left(\int_0^1 W_t(l)^{1-\epsilon_w} dl\right)^{\frac{1}{1-\epsilon_w}}$$

粘性工资模型：家庭

- 家庭效用最大化问题：

$$\max_{C_t,N_t(l),W_t(l),B_{t+1}} E_0\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}-\psi\frac{L_t(l)^{1+\gamma}}{1+\gamma}\right)$$

$$s.t.:P_tC_t+B_{t+1}=(1+i_{t-1})B_t+W_t(l)L_t(l)+\Pi_t$$

$$L_t(l)=\left(\frac{W_t(l)}{W_t}\right)^{-\epsilon_w}L_t$$

- 定义实际工资：$w_t(l)=\frac{W_t(l)}{P_t}$，$w_t=\frac{W_t}{P}$，则 $L_t(l)=\left(\frac{w_t(l)}{w_t}\right)^{-\epsilon_w}L_t$，拉格朗日函数可以写为：

$$\mathcal{L}=E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{\frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}-\psi\frac{\left[\left(\frac{w_t(l)}{w_t}\right)^{-\epsilon_w}L_t\right]^{1+\gamma}}{1+\gamma}\right.$$

$$\left.+\lambda_t\left[P_tw_t(l)\left(\frac{w_t(l)}{w_t}\right)^{-\epsilon_w}L_t+\Pi_t+(1+i_{t-1})B_t-P_tC_t-B_{t+1}\right]\right\}$$

粘性工资模型：家庭

- 一阶条件：

$$C_t^{-\theta}=\lambda_tP_t,\quad \lambda_t=\beta\lambda_{t+1}(1+i_t),\quad \psi L_t(l)^{\gamma}=W_t(l)\lambda_t$$

  - 欧拉方程：$C_t^{-\theta}=\beta E_tC_{t+1}^{-\theta}(1+i_t)\frac{P_t}{P_{t+1}}$。
  - 完全竞争市场下的实际工资：$w_t(l)=\psi C_t^{\theta}L_t(l)^{\gamma}=\frac{u_n'(C_t,L_t)}{u_c'(C_t,L_t)}\equiv MRS_t$。
- 假设工资符合 Calvo 类型的交错定价机制，则
  - 家庭每期可定价的概率为 $1-\phi$。在 $t+s$ 期的最优实际工资为 $w_{t+s}(l)=w_{t+s}^*$。
  - 不能定价的概率为 ϕ，在 $t+s$ 期获得的实际工资为 $w_{t+s}(l)=w_t(l)\frac{P_t}{P_{t+s}}$
- 拉格朗日函数相关部分按 t 期决策重新写为：

$$\tilde{\mathcal{L}}=E_t\sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\left\{C_{t+s}^{-\theta}w_{t+s}(l)\left(\frac{w_{t+s}(l)}{w_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w}L_{t+s}-\psi\frac{\left[\left(\frac{w_{t+s}(l)}{w_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w}L_{t+s}\right]^{1}}{1+\gamma}\right.$$

一阶条件

$$0 = E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s C_{t+s}^{-\theta} (1-\epsilon_w) w_t (l)^{-\epsilon_w} \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{1-\epsilon_w} w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}$$
$$+E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \psi \epsilon_w w_t (l)^{-\epsilon_w(1+\gamma)-1} \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)} \left(w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}\right)^{1+\gamma}$$

$$\Rightarrow 0 = w_t (l)^{1+\epsilon_w\gamma} (1-\epsilon_w) E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s C_{t+s}^{-\theta} \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{1-\epsilon_w} w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}$$
$$+\epsilon_w \psi E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)} \left(w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}\right)^{1+\gamma}$$

$$w_t^{*1+\epsilon_w\gamma} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \frac{\psi E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)} \left(w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}\right)^{1+\gamma}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s C_{t+s}^{-\theta} \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{1-\epsilon_w} w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}}$$
$$\equiv \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \frac{X_{1t}}{X_{2t}}$$

一阶条件

$$X_{1t} \equiv \psi E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)} \left(w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}\right)^{1+\gamma}$$
$$= \psi \left(w_t^{\epsilon_w} L_t\right)^{1+\gamma}$$
$$+ \psi\beta\phi E_t \left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s \left(\frac{P_{t+1}}{P_{t+1+s}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)} \left(w_{t+1+s}^{\epsilon_w} L_{t+1+s}\right)^{1+\gamma}$$
$$= \psi \left(w_t^{\epsilon_w} L_t\right)^{1+\gamma} + \beta\phi E_t \pi_{t+1}^{\epsilon_w(1+\gamma)} X_{1t+1}$$
$$X_{2t} \equiv E_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\phi)^s C_{t+s}^{-\theta} \left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{1-\epsilon_w} w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}$$
$$= C_t^{-\theta} w_t^{\epsilon_w} L_t + \beta\phi E_t \pi_{t+1}^{\epsilon_w - 1} X_{2t+1}$$

- 当工资灵活调整，即 $\phi = 0$ 时，所有家庭均可要求最优工资，

$$w_t^{1+\epsilon_w\gamma} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \frac{\psi \left(w_t^{\epsilon_w} L_t\right)^{1+\gamma}}{C_t^{-\theta} w_t^{\epsilon_w} L_t} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \psi C_t^{\theta} \left(w_t^{\epsilon_w} L_t\right)^{\gamma}$$

$$w_t = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1} \psi C_t^{\theta} L_t^{\gamma}$$

推导工资菲利普斯曲线

- 令 $\mu_t \equiv w_t/MRS_t = \frac{w_t}{\psi C_t^{\theta} L_t(l)^{\gamma}}$ 表示平均工资加成，$\hat{\mu}_t = \hat{w}_t - \theta\hat{C}_t - \gamma\hat{L}_t$。总工资水平 $w_t^{1-\epsilon_w} = \int_0^1 w_t(l)^{1-\epsilon_w} dl = (1-\phi) w_t^{*1-\epsilon_w} + \phi\left(\frac{w_{t-1}}{\pi_t}\right)^{1-\epsilon_w}$。
- 对数线性化：$\hat{w}_t = (1-\phi)\hat{w}_t^* + \phi(\hat{w}_{t-1} - \hat{\pi}_t)$

$$w_t^{*1+\epsilon_w\gamma} = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_w - 1}\frac{\psi E_t \sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{-\epsilon_w(1+\gamma)}\left(w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}\right)^{1+\gamma}}{E_t \sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s C_{t+s}^{-\theta}\left(\frac{P_t}{P_{t+s}}\right)^{1-\epsilon_w} w_{t+s}^{\epsilon_w} L_{t+s}}$$

- 对数线性化：

$$(1+\epsilon_w\gamma)\hat{w}_t^* = (1-\beta\phi) E_t \sum_{s=0}^{\infty}(\beta\phi)^s\left[(1+\epsilon_w\gamma)\left(\hat{P}_{t+s} - \hat{P}_t + \hat{w}_{t+s}\right) - \hat{\mu}_{t+s}\right]$$

$$\hat{w}_t^* = (1-\beta\phi)\left(\hat{w}_t - \frac{\hat{\mu}_t}{1+\epsilon_w\gamma}\right) + \beta\phi E_t\left(\hat{w}_{t+1}^* + \hat{\pi}_{t+1}\right)$$

对数线性化

$\hat{w}_t = (1-\phi)\hat{w}_t^* + \phi(\hat{w}_{t-1} - \hat{\pi}_t)$，
$\hat{w}_t^* = (1-\beta\phi)\left(\hat{w}_t - \frac{\hat{\mu}_t}{1+\epsilon_w\gamma}\right) + \beta\phi E_t\left(\hat{w}_{t+1}^* + \hat{\pi}_{t+1}\right)$

$$\hat{\pi}_t^w \equiv \hat{w}_t - \hat{w}_{t-1} = (1-\phi)(\hat{w}_t^* - \hat{w}_{t-1}) - \phi\hat{\pi}_t \equiv (1-\phi)\hat{\pi}_t^{w*} - \phi\hat{\pi}_t$$

$$\hat{w}_t^* - \hat{w}_{t-1} = (1-\beta\phi)\left(\hat{\pi}_t^w - \frac{\hat{\mu}_t}{1+\epsilon_w\gamma}\right) + \beta\phi E_t\left(\hat{\pi}_{t+1}^{w*} + \hat{\pi}_t^w + \hat{\pi}_{t+1}\right)$$

$$\frac{\hat{\pi}_t^w + \phi\hat{\pi}_t}{1-\phi} = (1-\beta\phi)\left(\hat{\pi}_t^w - \frac{\hat{\mu}_t}{1+\epsilon_w\gamma}\right) + \beta\phi E_t\left(\frac{\hat{\pi}_{t+1}^w + \phi\hat{\pi}_{t+1}}{1-\phi} + \hat{\pi}_t^w + \hat{\pi}_{t+1}\right)$$

$$\hat{\pi}_t^w + \hat{\pi}_t = \beta E_t\left(\hat{\pi}_{t+1}^w + \hat{\pi}_{t+1}\right) - \frac{(1-\phi)(1-\beta\phi)}{\phi(1+\epsilon_w\gamma)}\hat{\mu}_t$$

引入政府部门：税收

- 一次性税收：

$$P_tC_t + B_{t+1} = (1 + i_{t-1})\, B_t + W_t\,(l)\, L_t\,(l) - T_t + \Pi_t$$

- Mendoza et. al (1994)，直接税（收入税）和间接税（消费税）：

$$(1 + \tau_t^c)\, P_tC_t + B_{t+1} = (1 + i_{t-1})\, B_t + (1 - \tau_t^w)\, W_t\,(l)\, L_t\,(l) + \Pi_t + Tr_t$$

- 政府部门预算约束：

$$Tr_t = \tau_t^c P_t C_t + \tau_t^w \int_0^1 W_t\,(l)\, L_t\,(l)\, dl$$

- 市场出清条件仍然为：$Y_t = C_t$。

引入政府部门：公共支出

- McGrattan(1997)，公共消费 C_g 产生效用：

$$C_t = \left[\omega C_{pt}^{\eta} + (1 - \omega)\, C_{gt}^{\eta}\right]^{\frac{1}{\eta}}$$

- 直接税（收入税）和间接税（消费税）：

$$(1 + \tau_t^c)\, P_tC_t + B_{t+1} = (1 + i_{t-1})\, B_t + (1 - \tau_t^w)\, W_t\,(l)\, L_t\,(l) + \Pi_t + Tr_t$$

- 政府部门预算约束：

$$Tr_t + C_{gt} = \tau_t^c P_t C_t + \tau_t^w \int_0^1 W_t\,(l)\, L_t\,(l)\, dl$$

- 公共支出服从随机过程：

$$C_{gt} = \xi_t Y_t$$

- 市场出清条件仍然为：$Y_t = C_{pt} + C_{gt}$。

引入政府部门：公共投资

- Guo and Lansing(1997)，公共资本是一种投入要素：

$$Y_t = A_t \left[\sigma K_{gt}^{\gamma} + (1-\sigma)\left(K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

- 公共资本的积累过程：

$$K_{gt} = (1-\delta_g) K_{gt-1} + I_{gt}$$

- $\gamma = 0$ 时，$Y_t = A_t K_{gt}^{\sigma} \left(K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}\right)^{1-\sigma}$
- 政府部门预算约束：

$$Tr_t + C_{gt} + I_{gt} = \tau_t^c P_t C_t + \tau_t^w \int_0^1 W_t(l) L_t(l)\, dl$$

- 公共支出服从随机过程：$C_{gt} = \xi_t Y_t$。
- 公共投资服从随机过程：$I_{gt} = \zeta_t Y_t$。
- 市场出清条件为：$Y_t = C_{pt} + I_t + G_t = C_{pt} + I_t + C_{gt} + I_{gt}$。