§4.2平行数据计量经济学模型（二）
—扩展模型

一、变系数模型

二、动态模型

三、关于平行数据模型的总结

一、变系数模型

要点

- 变系数模型的表达式
- 固定影响模型——随机干扰项在不同横截面个体之间不相关——**OLS**估计
- 固定影响模型——随机干扰项在不同横截面个体之间相关——**GLS**估计
- 随机影响模型的复合误差项
- 随机影响模型的**GLS**估计

实际经济分析中的变系数问题

- 线性模型中，系数表示边际倾向（对于直接线性模型）或者弹性（对于对数线性模型），而它们相对于不同的截面个体经常是不同的。例如：
  - 不同地区收入的边际消费倾向不同。
  - 不同地区FDI的边际效益不同。
  - 不同家庭的边际储蓄倾向不同。
- 而它们在各自的时间序列中一般是相同的。
- 提出了变系数平行数据模型问题。

模型表达

系数随横截面上个体而改变的模型为：

$$y_{it} = X_{it}\beta_i + u_{it},\quad i = 1,\cdots,n;\ t = 1,\cdots,T$$

其中 X_{it} 和 β_i 是解释变量和参数向量。也可写成

$$y_i = X_i\beta_i + u_i$$

其中

$$y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{pmatrix}_{T\times 1} \qquad X_i = \begin{pmatrix} x_{1i1} & x_{2i1} & \cdots & x_{Ki1} \\ x_{1i2} & x_{2i2} & \cdots & x_{Ki2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1iT} & x_{2iT} & \cdots & x_{KiT} \end{pmatrix}_{T\times K}$$

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{iK} \end{pmatrix} \qquad u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{pmatrix}$$

1. 固定影响模型

- 将β$_i$视为固定的不同的常数时，可写成：

$$y = X\beta + u$$

将截距项也看作一个虚变量

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{nT\times 1} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_n \end{pmatrix}_{nT\times nK} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{nK\times 1} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{nT\times 1}$$

- 显然，如果随机干扰项在不同横截面个体之间不相关，上述模型的参数估计极为简单，即以每个截面个体的时间序列数据为样本，采用经典单方程模型的估计方法分别估计其参数。即使采用**GLS**估计同时得到的**GLS**估计量，也是与在每个横截面个体上的经典单方程估计一样。
- 条件：

$$Eu_i u_j' = 0 \qquad i \neq j$$

$$Eu_i u_i' = \sigma_i^2 I$$

- 如果随机项在不同横截面个体之间的协方差不为零，**GLS**估计比每个横截面个体上的经典单方程估计更有效。
- 为什么？

$$\Omega_{ij} = E u_i u_j'$$

$$V = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_{n1} & \Omega_{n2} & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix}_{nT\times nT}$$

> 各种文献中提出各种V矩阵的方法，形成了各种FGLS估计

$$\boxed{\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y}$$

2. 随机影响模型

令$\beta_i = \beta + \alpha_i$，假定

$$E\alpha_i = 0 \qquad E\alpha_i\alpha_j' = \begin{cases} \Delta & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$Ex_{it}\alpha_j' = 0 \qquad Eu_iu_j' = \begin{cases} \sigma_i^2 I_T & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

原模型写成：

$$y = X\beta + \tilde{X}\alpha + u$$

后两项组成复合随机项

问题变成具有复杂随机项结构的不变系数模型

- β 的最佳线性无偏估计是**GLS**估计：

$$\hat{\beta}_{GLS}=\left[\sum_{i=1}^{n}X_i'\Phi_i^{-1}X_i\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i'\Phi_i^{-1}y_i\right] = \sum_{i=1}^{n}W_i\hat{\beta}_i$$

$$\Phi_i = X_i\Delta X_i' + \sigma_i^2 I_T$$

复合随机项的协方差矩阵的第i个对角分块

$$W_i=\left\{\sum_{i=1}^{n}[\Delta+\sigma_i^2(X_i'X_i)^{-1}]^{-1}\right\}^{-1}[\Delta+\sigma_i^2(X_i'X_i)^{-1}]^{-1}$$

$$\hat{\beta}_i=(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_i$$

说明**GLS**估计是每一个横截面个体上最小二乘估计的矩阵加权平均。权与它们的协方差成比例。

GLS 估计的协方差矩阵为：

$$Var(\hat{\beta}_{GLS}) = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i' \Phi_i^{-1} X_i\right]^{-1} = \left\{\sum_{i=1}^{n} [\Delta + \sigma_i^2 (X_i' X_i)^{-1}]^{-1}\right\}^{-1}$$

Swamy 建议使用最小二乘估计 $\hat{\beta}_i = (X_i' X_i)^{-1} X_i' y_i$ 和它们的残差

$\hat{u}_i = y_i - X_i \hat{\beta}_i$ 得到 σ_i^2 和 Δ 的无偏估计：

一种**FGLS**

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{u}_i' \hat{u}_i}{T-K} = \frac{1}{T-K} y_i' [I - X_i (X_i' X_i)^{-1} X_i'] y_i$$

$$\hat{\Delta} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\hat{\beta}_i - n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \hat{\beta}_j)(\hat{\beta}_i - n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \hat{\beta}_j)' - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i^2 (X_i' X_i)^{-1}$$

二、动态模型

要点

- 动态模型的“动态”的含义及表达
- 不包含外生解释变量情况下的动态模型的IV估计
- 包含外生解释变量情况下的动态模型的IV估计
- 随机影响动态模型的一般表述
- 随机影响动态模型的IV估计

动态平行数据模型

- 动态模型，即指包含滞后被解释变量作为解释变量的模型。
- 当采用平行数据作为样本观测值时，变截距模型写为：

$$y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + x_{it}\beta + \alpha_i + u_{it} \qquad i = 1, \cdots, n; \quad t = 1, \cdots, T$$

其中 $Eu_{it} = 0$

$$Eu_{it}u_{js} = \begin{cases} \sigma_u^2 & i = j \text{且} t = s \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

1. 固定影响模型

首先考虑不包含外生解释变量的情况：

$$y_{it}=\gamma y_{i,t-1}+\alpha_i+u_{it} \qquad |\gamma|<1, \quad i=1,\cdots,n;\ t=1,\cdots,T$$

如果u_{it}是正态分布且y_{i0}是给定的常数，则动态固定影响模型参数

的 ML 估计在 T 较小时是有偏估计。利用工具变量法可得到在 T 固定、$n\to\infty$时参数的一致估计。

取差分消除α_i后，有

$$(y_{it}-y_{i,t-1})=\gamma(y_{i,t-1}-y_{i,t-2})+(u_{it}-u_{i,t-1}) \qquad i=1,\cdots,n;\ t=1,\cdots,T$$

因为$y_{i,t-2}$和$(y_{i,t-2}-y_{i,t-3})$与$(y_{i,t-1}-y_{i,t-2})$相关，但与$(u_{it}-u_{i,t-1})$不相关，

所以它们是有效的工具变量。

以$(y_{i,t-2}-y_{i,t-3})$作为$(y_{i,t-1}-y_{i,t-2})$的工具变量，得到：

$$\boxed{\hat{\gamma}_{IV}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=3}^{T}(y_{it}-y_{i,t-1})(y_{i,t-2}-y_{i,t-3})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=3}^{T}(y_{i,t-1}-y_{i,t-2})(y_{i,t-2}-y_{i,t-3})}}$$

以$y_{i,t-2}$作为$(y_{i,t-1}-y_{i,t-2})$的工具变量，得到：

$$\boxed{\hat{\gamma}_{IV}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{T}(y_{it}-y_{i,t-1})y_{i,t-2}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{T}(y_{i,t-1}-y_{i,t-2})y_{i,t-2}}}$$

在$n\to\infty$或$T\to\infty$时，都是一致估计。于是进一步得到：

$$\boxed{\hat{\alpha}_i=\bar{y}_i-\hat{\gamma}\bar{y}_{i,-1}} \qquad i=1,\cdots,n$$

- 在包含外生解释变量的情况下，类似地，首先采用工具变量方法估计差分方程模型，得到γ和β的估计量，然后求得α$_i$的估计量。

2. 随机影响模型

如果模型中α_i为随机变量，可以将模型写成：

$$y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + z_i \rho + x_{it}\beta + v_{it} \qquad i = 1,\cdots,n;\ t = 1,\cdots,T$$

其中 $|\gamma| < 1$ $\qquad v_{it} = \alpha_i + u_{it} \qquad E\alpha_i = Eu_{it} = 0$

$$E\alpha_i z_i = 0 \qquad E\alpha_i x_{it} = 0 \qquad E\alpha_i u_{jt} = 0$$

$$E\alpha_i\alpha_j = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 & i = j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$Eu_{it}u_{js} = \begin{cases} \sigma_u^2 & i = j, t = s \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

其中 z_i 是诸如性别、民族等随时间不变的 $1\times K_1$ 阶属性外生变量向量，x_{it} 是随时间变化的 $1\times K_2$ 阶外生变量向量，且让它的第一个元素为 1，以代表截距，γ 是 1×1 阶，ρ 和 β 分别是 $K_1\times 1$ 阶和 $K_2\times 1$ 阶的参数向量。

- 关于y_0的不同假设：

情况 1： y_{i0} 固定。一个横截面个体单位可能开始于某一任意位置 y_{i0}，并渐近地移向稳定的位置 $(\alpha_i + z_i\rho)/(1-\gamma) + \sum_{j=0} x_{i,t-j}\beta\gamma^j$。但如果何时开始抽样的决定是任意的且与 y_{i0} 的值无关，则将 y_{i0} 视为固定是值得怀疑的，因为 $E\alpha_i y_{i0} = 0$ 意味着个体影响 α_i 在第 0 期对模型不产生影响，但影响第一期以及之后的观察值。

情况 2： y_{i0} 随机。可假定初始值是随机的，均值为 μ_{y0}，方差为 σ_{y0}^2。

即 $$y_{i0} = \mu_{y0} + \varepsilon_i$$

这个假定的合理性在于人们将 y_{it} 视为状态，而且并不关心怎样到达初始状态，只需要知道它的分布有有限均值和方差。

情况 2a： y_{i0} 独立于 α_i，即 $Cov(\varepsilon_i, \alpha_i) = 0$。在这种情况下，初始赋值的影响逐渐随时间消失。模型有点象情况 1，初始值与影响 α_i 是独立的，只不过现在的初始值不是固定的而是来自均值为 μ_{y0}、方差为 σ_{y0}^2 总体的随机变量。

情况 2b： y_{i0} 与 α_i 相关。记它们的协方差为 $\phi\sigma_{y0}^2$，则随着时间的推移，初始赋值 $\varepsilon_i = y_{i0} - \mu_{y0}$ 通过它与 α_i 的相关性影响 y_{it} 的未来值，并最终达到：

$$\phi\varepsilon_i/(1-\gamma) = \lim_{t\to\infty} E[y_{it} - z_i\rho/(1-\gamma) - \sum_{j=0}^{t-1} x_{i,t-j}\beta\gamma^j \mid \varepsilon_i]$$

- 最大似然估计
  - 关于初始条件的不同假定蕴含着不同形式的似然函数。
  - 构造各种情况下的似然函数。
  - 使得上述似然函数达到最大化，就得到相应情况下参数的最大似然估计。
- 当横截面个体单位较多、时期长度较短时，初始条件的错误选择将导致得到的估计与正确的估计不是渐近等价的，也可能不是一致估计。
- 关于初始条件的选择是否正确，并没有什么判断依据。

- 工具变量估计
  - 能够得到与初始条件无关的参数的一致估计。
  - 同时也为ML迭代过程提供参数的初始值。
- 工具变量法参数一致估计的计算步骤：

第一步：对方程 $y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + z_i \rho + x_{it} \beta + v_{it}$ 进行差分，有

$$y_{it} - y_{i,t-1} = \gamma(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}) + (x_{it} - x_{i,t-1})\beta + u_{it} - u_{i,t-1}$$

利用 $y_{i,t-2}$ 和 $(y_{i,t-2} - y_{i,t-3})$ 作为 $(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})$ 的工具变量，

并利用工具变量法得到 γ 和 β 的估计 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\beta}$ 。

第二步：将估计出的$\tilde{\gamma}$和$\tilde{\beta}$代入$y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + z_i \rho + x_{it}\beta + v_{it}$，

在时间上求平均，得到：

$$\bar{y}_i - \gamma \bar{y}_{i,-1} - \bar{X}_i \beta = z_i \rho + \alpha_i + \bar{u}_i$$

其中$\bar{y}_i = \sum_{t=1}^{T} y_{it} / T$，$\bar{y}_{i,-1} = \sum_{t=1}^{T} y_{i,t-1} / T$，$\bar{X}_i = \sum_{t=1}^{T} x_{it} / T$，

$\bar{u}_i = \sum_{t=1}^{T} u_{it} / T$。 对该模型用 OLS 得到$\rho$的估计$\tilde{\rho}$。

第三步：估计σ_u^2和σ_α^2，得到

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=2}^{T}[(y_{it} - y_{i,t-1}) - \tilde{\gamma}(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}) - \tilde{\beta}(x_{it} - x_{i,t-1})]^2}{2n(T-1)}$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i - \tilde{\gamma}\bar{y}_{i,-1} - \tilde{z}_i\tilde{\rho} - \bar{X}_i\tilde{\beta})^2}{n} - \frac{1}{T}\hat{\sigma}_u^2$$

上述估计与初始值无关。当n或T趋于无穷大时，γ, β和σ_u^2是一致估计。而ρ和σ_α^2的估计只有当n趋于无穷大时，才是一致估计。

三、关于平行数据模型的总结

Analysis of Panel Data—Cheng Hsiao

Chapter 1. Introduction √
Chapter 2. Analysis of Covariance √
Chapter 3. Simple Regression with Variable Intercepts √
Chapter 4. Dynamic Model with Variable Intercepts √
Chapter 5. Simultaneous-Equations Models
Chapter 6. Variable-Coefficient Models √
Chapter 7. Discrete Data
Chapter 8. Truncated and Censored Data
Chapter 9. Incomplete Panel Data √×
Chapter 10. Miscellaneous Topics
Chapter 11. A Summary View

在研究经济问题时，采用平行数据比单纯采用横截面数据或时间序列数据的优势在那里？

⑴ **increasing degrees of freedom and reducing problems of data multicollinearity;**

⑵ **identifying economic models and discrimination between competing economic hypotheses;**

⑶ **eliminating or reducing estimation bias;**

⑷ **providing micro foundations for aggregate data analysis.**

Panel Data的前沿

——单位根检验和协整检验

- Panel Data 单位根检验
  - 截面不相关假定下的第一代单位根检验
  - 截面相关假定下的第二代单位根检验
- Panel Data 协整检验
  - 基于残差的Panel协整检验
    - 以存在协整为原假设的Panel协整检验
    - 以不存在协整为原假设的Panel协整检验
    - 结构突变的Panel协整检验理论
  - 基于向量误差纠正模型的Panel协整检验
- 模拟检验
  - Panel Data单位根模拟检验及评述
  - Panel Data协整模拟检验及评述

Panel Data 单位根检验

- 截面不相关假定下的第一代单位根检验