第二章 投资组合理论[1]

§2.1 均值方差模型的普适性

Markowitz(1952)的投资组合理论又称为均值-方差模型，其中心思想是投资者应该采用分散化的投资策略，形象地说，不要把所有鸡蛋放在一个篮子里。分散化投资的思想可以追溯到十六世纪，莎士比亚在《威尼斯商人》中写道：

我的买卖的成败，并不全寄托在一艘船上，
更不是依赖着一处地方；
我的全部财产，也不会受一年盈亏的影响，
所以我的货物并不能使我忧愁。
（第一场　第一幕　安东尼奥）

Markowitz(1952)首次给出了分散化投资的理论模型。他认为，如果个体是风险回避的、不饱和的，则给定资产的期望回报率，个体总是选择较低的方差，给定方差，个体总是追求较高的期望回报率。Markowitz 的理论建立在个体偏好可以用均值-方差效用函数来刻画的假定之上。下面的例子表明，这种假定是存在问题的。

例 2.1.1：假定经济中存在两个投资组合p_1和p_2，它们的随机回报率分别为：

$$\tilde{r}_1=\begin{cases}1/2 & 1/2\ 概率\\ -1/2 & 1/2\ 概率\end{cases},\qquad \tilde{r}_2=\begin{cases}1/3 & 2/3\ 概率\\ -2/3 & 1/3\ 概率\end{cases}。$$

通过简单计算可得：$E[\tilde{r}_1]=E[\tilde{r}_2]=0$，$var(\tilde{r}_1)=\frac{1}{4}>\frac{2}{9}=var(\tilde{r}_2)$，即这两个投资组合具有相同的均值，但$p_1$的方差要大于$p_2$。

假定个体初始财富量为 1，其效用函数取对数形式：$u(W)=ln(W)$，则个体在这两个投资组合进行投资后所能达到的期望效用值分别为：

$$E[ln(1+\tilde{r}_1)]=\frac{1}{2}ln(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}ln(\frac{1}{2})\approx-0.1438;$$

$$E[ln(1+\tilde{r}_2)]=\frac{2}{3}ln(\frac{4}{3})+\frac{1}{3}ln(\frac{1}{3})\approx-0.1744。$$

因此个体投资在p_1上可以有更高的期望效用，尽管其方差比p_2的高。

事实上将个体的效用函数写成仅依赖于均值、方差的函数是有条件的，

[1]本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002)、Leroy, 和 Werner (2003)、王江(2006)等教材及相关论文。

这一点可以从下面的分析看出。

$$E[u(\tilde{W})] = E[[u(E[\tilde{W}]) + u'(E[\tilde{W}])(\tilde{W} - E[\tilde{W}]) + \frac{1}{2}u''(E[\tilde{W}])(\tilde{W} - E[\tilde{W}])^2 + R_3]$$

$$= u(E[\tilde{W}]) + \frac{1}{2}u''(E[\tilde{W}])\sigma^2(\tilde{W}) + E[R_3]。 \quad (2.1.1)$$

其中

$$E[R_3] = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{W}])m^n(\tilde{W}) \quad (2.1.2)$$

是所有三阶矩以上的项，$m^n(\tilde{W})$是 n 阶中心矩。(2.1.1)蕴涵，对于一个不饱和的、风险回避的个体，其期望效用不仅依赖于财富的均值和方差，还依赖于三阶以上的中心矩。只有当效用函数取特殊形式（例如二次多项式），或资产的随机回报率满足特殊的分布（例如多变量正态分布）时，期望效用函数才能表示为随机财富均值、方差的函数。

当个体效用函数取二次多项式$u(\tilde{W}) = \tilde{W} - \frac{b}{2}\tilde{W}^2$，个体期望效用值可以简化为：

$$E[u(\tilde{W})] = E[\tilde{W}] - \frac{b}{2}E[\tilde{W}^2]$$

$$= E[\tilde{W}] - \frac{b}{2}((E[\tilde{W}])^2 + \sigma^2(\tilde{W}))。$$

因此个体偏好可以用均值、方差的函数来刻画。但二次多项式效用函数蕴涵当财富量增加到一定程度，个体效用将减少；同时二次多项式效用函数中个体展示增的绝对风险回避，这蕴涵对个体而言风险资产是一种次品，因此假定个体效用函数是二次多项式形式并不十分合理。

当资产的随机回报率为正态分布时，$\tilde{W}$也服从正态分布。对于正态分布，其高阶中心矩可以表示为一阶、二阶矩的函数：

$$E[(\tilde{W} - E[\tilde{W}])^j] = \begin{cases} \frac{j!}{(\frac{j}{2})!}\frac{\sigma^j(\tilde{W})}{2^{j/2}} & j为偶数 \\ 0 & j为奇数 \end{cases},$$

因此个体期望效用函数可以表示为均值方差的函数。但资产回报率服从正态分布的假定太强了，计量检验表明，大多数资产并不服从这样的假定。

基于以上的分析，均值-方差模型并不是一个普适的资产选择模型，但由于该模型在分析上及所得出的结论都相对简单，同时在真实经济中使用效果也比较令人满意，因此得到了广泛认同。

§2.2 完全风险资产下的投资组合前沿

2.2.1 模型的建立

考虑一个无摩擦经济，假定所有资产都是风险资产，风险资产可以无限卖空。假定经济中自然状态的全体可以刻画为：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{|\Omega|}\},$$

其中$|\Omega|$代表Ω中元素个数，即自然状态的总个数。给定任意一个风险资产或投资组合，该资产或投资组合的随机回报率向量$\tilde{r}$可以表示为一个$|\Omega|$维的向量$(r(\omega_1), r(\omega_2), \ldots, r(\omega_{|\Omega|}))$。假定该经济中存在$N \geq 2$种可以进行交易的风险资产，其随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产和投资组合都是这 N 种风险资产的线性组合，即随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、⋯、$\tilde{r}_N$构成一个极大无关线性向量组。因此我们在分析最优投资组合时，只需考虑在这 N 种资产上的投资组合权重。

记e为由 N 种风险资产的期望回报率构成的$N \times 1$的向量，记为：

$$e = (E[\tilde{r}_1], E[\tilde{r}_2], \cdots E[\tilde{r}_N])^T; \qquad (2.2.1)$$

其中上标“T”表示转置，$\vec{1}$为由 1 构成的$N \times 1$的向量，记为：

$$\vec{1} \equiv (1,1,\cdots,1)^T;$$

V为 N 种风险资产随机回报率的方差-协方差矩阵，可以表示为：

$$V = \begin{pmatrix} var(\tilde{r}_1) & cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) & \cdots & cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_N) \\ cov(\tilde{r}_2, \tilde{r}_1) & var(\tilde{r}_2) & \cdots & cov(\tilde{r}_2, \tilde{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(\tilde{r}_N, \tilde{r}_1) & cov(\tilde{r}_N, \tilde{r}_2) & \cdots & var(\tilde{r}_N) \end{pmatrix}。 \qquad (2.2.2)$$

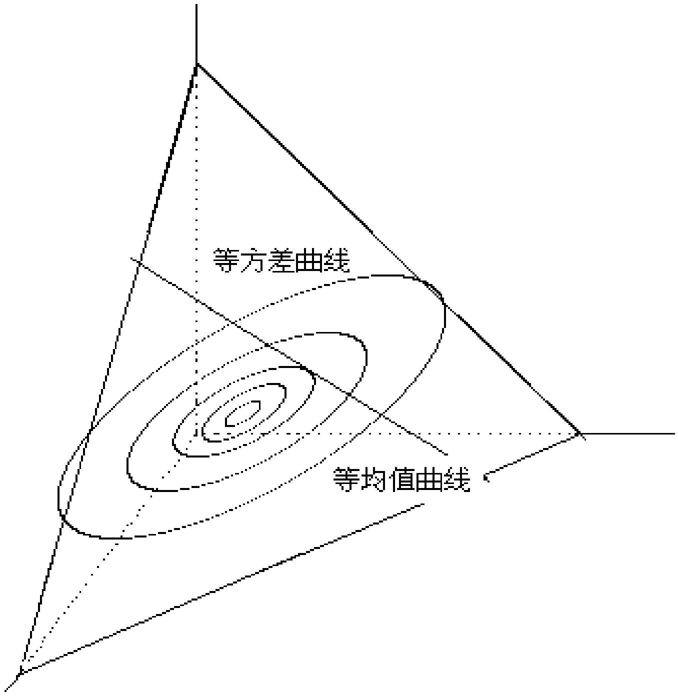
因为任意给定一个权重向量为$w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^T$的投资组合，有：

$$w^T V w = var(w_1\tilde{r}_1 + w_2\tilde{r}_2 + \ldots + w_N\tilde{r}_N) > 0,$$

所以V是一个对称、正定矩阵。

由于经济中存在着 N 种回报率线性无关的资产，所以所有投资组合的权重向量构成一个 N 维线性空间。给定期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，所有期望回报率等于$E[\tilde{r}_p]$的投资组合的权重向量w全体服从：$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T\vec{1} = 1$，即这些权重向量同时位于两个 N-1 维超平面$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T\vec{1} = 1$上。等方差曲面$w^T V w = \sigma^2$是 N-1 维的椭球面，与$w^T\vec{1} = 1$相交成一个 N-2 维的椭球面，$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T\vec{1} = 1$相交成一个 N-2 维超平面。

当 N=3 时，在 3 维空间中$w^T V w = \sigma^2$是一个 2 维椭球面，$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T\vec{1} = 1$是 2 维平面，$w^T V w = \sigma^2$与平面$w^T\vec{1} = 1$相交成一个椭圆，等均值平面$w^T e = E[\tilde{r}_p]$与平面$w^T\vec{1} = 1$相交成一条直线，如图 2.2.1 所示。在期望回报率$E[\tilde{r}_p]$给定下求解极小方差投资组合，相当于在平面$w^T\vec{1} = 1$中寻找与等均值线$w^T e = E[\tilde{r}_p]$相切的等方差曲线及切点。可以看出，与不同均值$E[\tilde{r}_p]$相对应的等均值线彼此平行，等方差曲线具有相同的中心，仅相差一个仿射变换，因此所有切点位于同一根直线上，构成一个一维子空间。我们称该直线为组合前沿，称该组合前沿上的任意投资组合为前沿组合。在组合前沿上任给两个前沿组合，其他前沿组合可以表示为这两个前沿组合的线性组合。



（图 2.2.1）：三资产极小方差投资组合

当 N>3 时，给定投资组合的期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，极小方差投资组合的求解相当于在 N-1 维超平面$w^T\vec{1}=1$中求出 N-2 维的椭球面与 N-2 维超平面相切的切点组合。可以证明，所有切点都位于同一条直线上，构成一个一维子空间，即组合前沿，该组合前沿可以由任意两个前沿组合线性张成。

例 2.2.1：假定经济中存在四个等概率发生的自然状态ω_1、ω_2、ω_3和ω_4，假定经济中存在三种风险资产，其随机回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3$的取值由表 2.2.1 给出。
这三种资产的期望回报率分别为：

$$E[\tilde{r}_1]=\frac{1}{4}(2+0+0+2)=1;$$

$$E[\tilde{r}_2]=\frac{1}{4}(1+1+2+2)=1\frac{1}{2};$$

$$E[\tilde{r}_3]=\frac{1}{4}(0+2+0+2)=1。$$

自然状态 / 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4

$\tilde{r}_1(\omega)$	2	0	0	2
$\tilde{r}_2(\omega)$	1	1	2	2
$\tilde{r}_3(\omega)$	0	2	0	2

（表 2.2.1）：三种资产的随机回报率取值

因此期望回报率向量可以刻画为：

$$e = (E[\tilde{r}_1], E[\tilde{r}_2], E[\tilde{r}_3])^T = (1,1.5,1)^T\text{。}$$

在各自然状态下，资产的随机回报率对期望值的偏离可以刻画为：

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega) - E[\tilde{r}_1]$	1	-1	-1	1
$\tilde{r}_2(\omega) - E[\tilde{r}_2]$	-1/2	-1/2	1/2	1/2
$\tilde{r}_3(\omega) - E[\tilde{r}_3]$	-1	1	-1	1

（表 2.2.1）：三种资产的随机回报率对期望值的偏离

因此我们有：

$$var(\tilde{r}_1) = 1，var(\tilde{r}_2) = 1/4，var(\tilde{r}_3) = 1，$$
$$cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = cov(\tilde{r}_2, \tilde{r}_1) = 0，$$
$$cov(\tilde{r}_1, \tilde{r}_3) = cov(\tilde{r}_3, \tilde{r}_1) = 0，$$
$$cov(\tilde{r}_2, \tilde{r}_3) = cov(\tilde{r}_3, \tilde{r}_2) = 0，$$

因此方差-协方差矩阵 V 可以刻画为：

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\text{。}$$

显然，方差-协方差矩阵 V 定正、对称。

在该例中，3 维空间中 2 维椭球面$w^T V w = \sigma^2$可以刻画为：

$$w_1^2 + \frac{1}{4} w_2^2 + w_3^2 = \sigma^2，$$

两个 2 维平面$w^T e = E[\tilde{r}_p]$和$w^T \vec{1} = 1$分别可以刻画为：

$$w_1 + \frac{3}{2} w_2 + w_3 = E[\tilde{r}_p]，$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1\text{。}$$

给定$E[\tilde{r}_p]$，平面$w_1 + w_2 + w_3 = 1$与平面$w_1 + \frac{3}{2} w_2 + w_3 = E[\tilde{r}_p]$相交成一条直线；同时平面$w_1 + w_2 + w_3 = 1$与椭球面$w_1^2 + \frac{1}{4} w_2^2 + w_3^2 = \sigma^2$相交成一个

椭圆，σ^2的取值决定了椭圆的大小，这些椭圆有些与直线相交，有些无交点，其中有一个与直线相切，切点即为前沿组合。通过解析几何的方法可计算得，该切点可以刻画为：

$$(w_1,w_2,w_3)=(\frac{13}{9}-E[\tilde{r}_p],E[\tilde{r}_p]-\frac{5}{9},\frac{1}{9})。$$

随着$E[\tilde{r}_p]$的变化，切点组合也在变化，这个组合前沿是一条直线。 ●

2.2.2 模型的求解

记w_p为前沿组合在各资产上的投资组合权重向量，给定期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，则w_p是如下最大化问题的解：

$$\min_{w}\frac{1}{2}w^TVw。 \tag{2.2.3}$$

Subject to:

$$w^Te=E[\tilde{r}_p],$$
$$w^T\vec{1}=1。$$

上述最小化问题的拉格朗日函数可以刻画为：

$$L=\frac{1}{2}w^TVw+\lambda(E[\tilde{r}_p]-w^Te)+\mu(1-w^T\vec{1})。$$

其中λ和μ分别为相应于两个约束方程的拉格朗日乘子。求解上述最大化问题，得一阶条件为：

$$Vw-\lambda e-\mu\vec{1}=0, \tag{2.2.4}$$

因此最优投资组合可以表示为：

$$w_p=\lambda V^{-1}e+\mu V^{-1}\vec{1}。 \tag{2.2.5}$$

将(2.2.5)代入两个约束方程中，整理得：

$$E[\tilde{r}_p]=\lambda e^TV^{-1}e+\mu\vec{1}^TV^{-1}e,$$
$$1=\lambda e^TV^{-1}\vec{1}+\mu\vec{1}^TV^{-1}\vec{1}。$$

求解上述方程组，得：

$$\lambda=\frac{CE[\tilde{r}_p]-A}{D}, \qquad \mu=\frac{B-AE[\tilde{r}_p]}{D}。 \tag{2.2.6}$$

其中$A=\vec{1}^TV^{-1}e=e^TV^{-1}\vec{1}$，$B=e^TV^{-1}e$，$C=\vec{1}^TV^{-1}\vec{1}$，$D=BC-A^2$。

因此前沿组合权重向量w_p可以表示为：

$$w_p=\frac{CE[\tilde{r}_p]-A}{D}V^{-1}e+\frac{B-AE[\tilde{r}_p]}{D}V^{-1}\vec{1}$$
$$=g+hE[\tilde{r}_p], \tag{2.2.7}$$

其中$g=\frac{BV^{-1}\vec{1}-AV^{-1}e}{D}$，$h=\frac{CV^{-1}e-AV^{-1}\vec{1}}{D}$。由此我们有如下命题：

定理 2.2.1： 完全风险资产下任意前沿组合都可以表示为(2.2.7)的形式，

反之亦然。

此处g和$g+h$是相应于均值为零和 1 的两个前沿组合。对任意前沿投资组合w_p，我们有：

$$w_p = g + hE[\tilde{r}_p] = (1 - E[\tilde{r}_p])g + E[\tilde{r}_p](g + h),$$

所以任意前沿组合都可以表示为这两个前沿组合的线性组合。

续例 2.2.1：在例 2.2.1 的假设条件下，最优化问题(2.2.3)可以简化为：

$$\min_{\{w_1,w_2,w_3\}} \frac{1}{2}w_1^2 + \frac{1}{8}w_2^2 + \frac{1}{2}w_3^2$$

Subject to:

$$w_1 + \frac{3}{2}w_2 + w_3 = E[\tilde{r}_p],$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1。$$

通过简单计算可得：

$$A = 8，B = 11，C = 6，D = 2，$$

$$w_p = \frac{CE[\tilde{r}_p] - A}{D}V^{-1}e + \frac{B - AE[\tilde{r}_p]}{D}V^{-1}\vec{1}$$

$$= \begin{pmatrix}1.5\\-2\\1.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}E[\tilde{r}_p]。$$

●

推论：整个投资组合前沿可以由任意两个不同的前沿组合线性生成。

证明：任意给定两个不同的前沿组合p_1、p_2，$E[\tilde{r}_{p_1}] \neq E[\tilde{r}_{p_2}]$。在组合前沿上任意前沿组合$q$，存在$\alpha$，使得$E[\tilde{r}_q] = \alpha E[\tilde{r}_{p_1}] + (1-\alpha)E[\tilde{r}_{p_2}]$成立。因此我们有：

$$\begin{aligned}\alpha w_{p_1} + (1-\alpha)w_{p_2} &= \alpha(g + hE[\tilde{r}_{p_1}]) + (1-\alpha)(g + hE[\tilde{r}_{p_2}])\\ &= g + h(\alpha E[\tilde{r}_{p_1}] + (1-\alpha)E[\tilde{r}_{p_2}])\\ &= g + hE[\tilde{r}_q]\\ &= w_q\end{aligned}$$

证明完毕。 ■

推论：前沿组合的任意线性组合是一个前沿组合。

证明：给定 m 个前沿组合，记$\{w_i, i = 1,2,\cdots,m\}$分别是其权重向量，记这 m 个前沿组合的期望回报率分别为$E[\tilde{r}_i], i = 1,2,\cdots,m$; 假定$w_i, i = 1,2,\cdots,m$是关于这 m 个前沿组合的线性组合的组合系数，满足$\sum_i \alpha_i = 1$，则该线性组合满足：

$$\sum_i \alpha_i w_i = \sum_i \alpha_i (g + hE[\tilde{r}_i]) = g + h(\sum_i \alpha_i E[\tilde{r}_i]),$$

所以前沿组合的任意线性组合仍然是一个前沿组合

证明完毕。 ■

2.2.3 风险资产组合前沿的一些性质

性质 2.2.1：任意两个前沿组合p和q的回报率之间的协方差可以表示为：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C})(E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{C}) + \frac{1}{C}。 \qquad (2.2.8)$$

证明：$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = w_p^T V w_q = (g + hE[\tilde{r}_p])^T V (g + hE[\tilde{r}_q])$

$$= E[\tilde{r}_p]E[\tilde{r}_q]h^T V h + E[\tilde{r}_p]h^T V g + E[\tilde{r}_q]g^T V h + g^T V g$$

其中$g^T V g = \frac{B\vec{1}^T V^{-1} - Ae^T V^{-1}}{D} V \frac{BV^{-1}\vec{1} - AV^{-1}e}{D}$

$$= \frac{1}{D^2}[B^2 \vec{1}^T V^{-1} \vec{1} + A^2 e^T V^{-1} e - 2AB 1^T V^{-1} e]$$

$$= \frac{B}{D},$$

类似地，我们有$h^T V g = g^T V h = -\frac{A}{D}$，$h^T V h = \frac{C}{D}$。代入上式，得：

$$cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = \frac{C}{D}E[\tilde{r}_p]E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{D}E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{D}E[\tilde{r}_q] + \frac{B}{D}$$

$$= \frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p] - \frac{A}{C})(E[\tilde{r}_q] - \frac{A}{C}) + \frac{1}{C}。$$

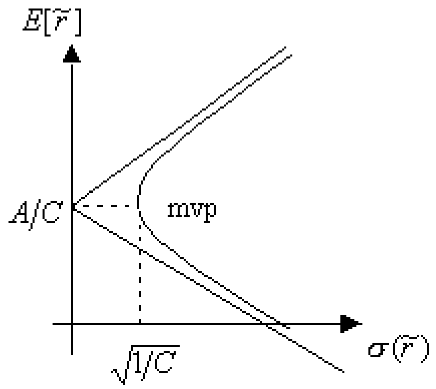
证明完毕。 ■

当p与q取同一个前沿组合时，我们有下面的性质 2.2.2：

性质 2.2.2：任意前沿组合回报率的方差可以表示为：

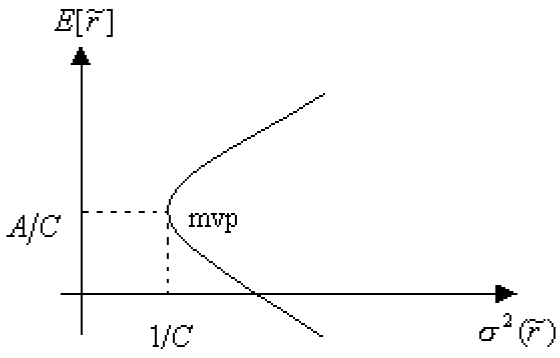
$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C} - \frac{(E[\tilde{r}_p] - A/C)^2}{D/C^2} = 1, \qquad (2.2.9a)$$

或 $\sigma^2(\tilde{r}_p) = \frac{1}{D}(C(E[\tilde{r}_p])^2 - 2AE[\tilde{r}_p] + B)$。 (2.2.9b)



（图 2.2.2）：$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中的投资组合前沿

性质 2.2.2 蕴涵，在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，投资组合前沿是一条双曲线，如图 2.2.2 所示；在$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，投资组合前沿是一条抛物线，如图 2.2.3 所示。在图 2.2.2 和图 2.2.3 中，所有位于投资组合前沿左边的组合都是不可行投资组合，位于组合前沿右边（包括组合前沿）的投资组合是可行投资组合。



(图 2.2.3)：$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中的投资组合前沿

由(2.2.8a)或图(2.2.2)和图(2.2.3)知，存在一个极小方差投资组合mvp (minimum variance portfolio)，其期望回报率为A/C，方差为$1/C$。将$E[\tilde{r}_{mvp}]=A/C$代入(2.2.7)，得：

$$w_{mvp}=g+h\frac{A}{C}=\frac{1}{D}[B(V^{-1}\vec{1})-A(V^{-1}e)]+\frac{1}{D}[C(V^{-1}e)-A(V^{-1}\vec{1})]\frac{A}{C}$$

整理得：

$$w_{mvp}=\frac{1}{C}(V^{-1}\vec{1})。\tag{2.2.10}$$

性质 2.2.3：极小方差投资组合mvp的回报率与其它任意投资组合回报率的协方差等于$1/C$，即极小方差投资组合mvp自身回报率的方差。

证明：任给一个可行投资组合p，有：

$$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{mvp})=w_p^T V w_{mvp}=w_p^T V V^{-1}\vec{1}\frac{1}{C}=\frac{1}{C}。\tag{2.2.11}$$

证明完毕。 ■

定义：所有期望回报率严格超过mvp期望回报率的前沿组合称为有效组合(efficient portfolio)；所有期望回报率严格低于mvp期望回报率的前沿组合称为无效组合(inefficient portfolio)。

从图(2.2.1)中可以看出，任意一个无效投资组合，都存在唯一的有效投资组合与它具有相同的方差和不同的均值。

性质 2.2.4：所有有效组合的全体是一个凸集。

证明：假定$w_i,i=1,2,\cdots,m$是 m 个有效组合的权重向量，记这 m 个有效组合的期望回报率为$E[\tilde{r}_i],i=1,2,\cdots,m$，则有$E[\tilde{r}_i]>A/C$，$i=1,2,\cdots,m$。

任意给定一个这 m 个有效组合的凸组合，假定组合系数为$w_i,i=1,2,\cdots,m$，显然$\sum_i\alpha_i=1$，$\alpha_i\ge 0$，$i=1,2,\cdots,m$。由前面的讨论知道，这 m 个有效组合的凸组合是一个前沿组合，另外$E[\sum_i\alpha_i\tilde{r}_i]=\sum_i\alpha_i E[\tilde{r}_i]>A/C$，因此该凸组合是一个有效组合。

证明完毕。 ■

性质 2.2.5：任意一个不等于mvp的前沿组合p，都存在唯一的一个与p的协方差为零的前沿组合$zc(p)$。

证明：由$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{zc(p)})=\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C})(E[\tilde{r}_{zc(p)}]-\frac{A}{C})+\frac{1}{C}=0$，得：

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\frac{A}{C}-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}。\tag{2.2.12}$$

由等式(2.2.9)或图(2.2.2)知，满足条件的前沿组合$zc(p)$存在唯一。

证明完毕。 ■

我们称前沿组合$zc(p)$是前沿组合p的零-协方差组合。由(2.2.12)知，当前沿组合p是一个有效组合时，它的零-协方差组合$zc(p)$是一个无效组合；当p是无效组合时，$zc(p)$是一个有效组合。

性质 2.2.6：（ⅰ）在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上，过任意前沿组合$p$关于组合前沿的切线与期望回报率轴相交，截距为$E[\tilde{r}_{zc(p)}]$，如图 2.2.4 所示。

(ⅱ) 在$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上，过任意前沿组合$p$与$mvp$的连线与期望回报率轴相交，截距为$E[\tilde{r}_{zc(p)}]$，如图 2.2.4 所示。

证明：（ⅰ）对(2.2.6a)全微分，整理后得过前沿组合p关于组合前沿的切线的斜率为：

$$k=\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)}=\frac{\sigma(\tilde{r}_p)D}{CE[\tilde{r}_p]-A};$$

因此该切线的表达式为：

$$E[\tilde{r}]-E[\tilde{r}_p]=[\sigma(\tilde{r})-\sigma(\tilde{r}_p)]\frac{D\sigma(\tilde{r}_p)}{CE[\tilde{r}_p]-A}。$$

在上式中令$\sigma(\tilde{r})=0$，则得该切线与期望回报率轴相交的截距为：

$$\begin{aligned}E[\tilde{r}]&=E[\tilde{r}_p]-\frac{D\sigma^2(\tilde{r}_p)}{CE[\tilde{r}_p]-A}\\&=E[\tilde{r}_p]-\frac{C(E[\tilde{r}_p]-A/C)^2+D/C}{CE[\tilde{r}_p]-A}\\&=A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}\\&=E[\tilde{r}_{zc(p)}]。\end{aligned}$$

（ⅱ）利用两点式，前沿组合p与mvp的连线方程为：

$$\frac{E[\tilde{r}]-E[\tilde{r}_p]}{A/C-E[\tilde{r}_p]}=\frac{\sigma^2(\tilde{r})-\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_p)},$$

在上式中令$\sigma^2(\tilde{r})=0$，则得该直线与期望回报率轴相交的截距为：

$$\begin{aligned}E[\tilde{r}]&=E[\tilde{r}_p]-\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)(A/C-E[\tilde{r}_p])}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_p)}\\&=E[\tilde{r}_p]-\frac{[\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C})^2+\frac{1}{C}](\frac{A}{C}-E[\tilde{r}_p])}{-\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C})^2}\\&=A/C-\frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}\\&=E[\tilde{r}_{zc(p)}]。\end{aligned}$$

证明完毕。 ■

性质 2.2.7：设p是一个前沿组合，$p\neq mvp$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]。\tag{2.2.13}$$

此处$\beta_{qp}=cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/var(\tilde{r}_p)$是贝塔系数。

证明：$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=w_p^TVw_q=[\lambda(e^TV^{-1})+\gamma(1^TV^{-1})]Vw_q$

$$=\lambda e^Tw_q+\gamma=\lambda E[\tilde{r}_q]+\gamma。$$

考虑到$\lambda E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\gamma=cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{zc(p)})=0$，求解出$\gamma$，代回到上式，得：

$$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=\lambda(E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])， \tag{2.2.14a}$$

类似地，我们有：

$$var(\tilde{r}_p)=\lambda(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])。 \tag{2.2.14b}$$

将(2.2.14a)与(2.2.14b)相除，整理得：

$$E[\tilde{r}_q]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]=\beta_{qp}(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])。 \tag{2.2.15}$$

因此有：$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]$。

证明完毕。 ■

考虑到$zc(zc(p))=p$，由(2.2.13)，我们：

$$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qzc(p)})E[\tilde{r}_p]+\beta_{qzc(p)}E[\tilde{r}_{zc(p)}]。 \tag{2.2.16}$$

其中$\beta_{qp}=1-\beta_{qzc(p)}$。

性质 2.2.8：设p是一个前沿组合，$p\neq mvp$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_q。 \tag{2.2.17}$$

其中$cov(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_q)=cov(\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_q)=E[\tilde{\varepsilon}_q]$，其中$\tilde{\varepsilon}_q$不依赖于前沿组合$p$的选取。

证明：（ⅰ）将随机变量$\tilde{r}_q$关于$\tilde{r}_p$、$\tilde{r}_{zc(p)}$作投影，得：

$$\tilde{r}_q=\beta_0+\beta_1\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_2\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp}, \tag{2.2.18}$$

其中$cov(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_{qp})=cov(\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_{qp})=E[\tilde{\varepsilon}_{qp}]=0$。

利用(2.2.13)，得：

$$\beta_1=1-\beta_{qp}，\ \beta_2=\beta_{qp}，\ \beta_0=0。$$

代回到(2.2.18)，得：

$$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_{qp}。$$

（ⅱ）记$\tilde{Q}_{qp}=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p$，则$\tilde{Q}_{qp}$是一个前沿组合。由(2.1.13)得，$E[\tilde{Q}_{qp}]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]=E[\tilde{r}_q]$，考虑到给定期望回报率下的前沿组合的唯一性，可得$\tilde{Q}_{qp}$的选取独立于前沿组合$p$的选取。

证明完毕。 ■

性质 2.2.8 蕴涵，任意一个可行投资组合可以正交投影为一个前沿组合$\tilde{Q}_q$和一个期望回报率为零的噪声项$\tilde{\varepsilon}_q$。

因为$E[\tilde{r}_q]=E[\tilde{Q}_q]$，$var(\tilde{r}_q)=var(\tilde{Q}_q+\tilde{\varepsilon}_q)=var(\tilde{Q}_q)+var(\tilde{\varepsilon}_q)$。因此如果个体偏爱较高的期望回报率和较低的方差，则在给定期望回报率下，该个体可以通过选择前沿组合$\tilde{Q}_q$来回避掉由$\tilde{\varepsilon}_q$带来的风险。

续例 2.2.1：在例 2.2.1 中，前沿组合的期望回报率与方差之间的关系可以简化为：

$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/6} - \frac{(E[\tilde{r}_p]-4/3)^2}{1/18} = 1$，

任意一个可行组合都可以分解为一个前沿组合和一个非系统风险。例如，给定一个投资组合$w_q^T = (1,2,-2)$，其随机回报率向量和期望回报率可以分别刻画为：

$$\tilde{r}_q = (4,-2,4,2), \quad E[\tilde{r}_q] = 2。$$

取前沿组合p，其投资组合权重向量为$w_p^T = (1/2,0,1/2)$，其随机回报率向量为$\tilde{r}_p = (1,1,0,2)$，期望回报率为$E[\tilde{r}_p] = 1$，该前沿组合的零协方差组合的期望回报率满足：

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p]-A/C}$$

$$= \frac{8}{6} - \frac{2/36}{1-8/6} = 1.5$$

注意到此处 A/C=4/3，所以p是一个无效组合，$zc(p)$是一个有效组合。$zc(p)$可以刻画为：

$$w_{zc(p)} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其随机回报率向量为$\tilde{r}_{zc(p)} = (1,1,2,2)$。

由此我们有：

$$\beta_{qp} = \frac{cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)}{var(\tilde{r}_p)} = -1，$$

$$\beta_{qzc(p)} = \frac{cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_{zc(p)})}{var(\tilde{r}_{zc(p)})} = 2，$$

所以我们可以将$\tilde{r}_q$分解为：

$$\tilde{r}_q = -\tilde{r}_p + 2\tilde{r}_{zc(p)} + \tilde{\varepsilon}_q，$$

其中$\tilde{\varepsilon}_q = (3,-3,0,0)$满足$cov(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_p) = cov(\tilde{r}_{zc(p)}, \tilde{\varepsilon}_p) = E[\tilde{\varepsilon}_p] = 0$。

考虑到$E[\tilde{r}_q] = 2$，存在一个期望回报率等于 2 的前沿组合Q_q，满足：

$$w_{Q_q} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} E[\tilde{r}_q] = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

其随机回报率$\tilde{Q}_q = (1,1,4,2) = -\tilde{r}_p + 2\tilde{r}_{zc(p)}$独立于前沿组合$p$的选取。

§2.3 引入无风险资产后的投资组合前沿

2.3.1 组合前沿的求解

假定经济中除了 N 种风险资产外，还存在一种无风险资产。记 N 种风险资产的期望回报率向量为e，无风险资产上的期望回报率为r_f，V为 N 种

风险资产回报率的方差-协方差矩阵，$\vec{1}$为由 1 构成的 N 向量；记w为投资组合在 N 风险资产上的权重，$1-w^T\vec{1}$为该投资组合在无风险资产上的权重。假定经济中个体可以无限制地卖空风险资产，无限制地以r_f借钱投资，市场是无摩擦的。

令p是一个由 N+1 种资产构成的前沿组合，给定期望回报率$E[\tilde{r}_p]$，则w_p是下述最小化问题的解：

$$\min_{w}\frac{1}{2}w^TVw$$

Subject to:

$$w^Te+(1-w^T\vec{1})r_f=E[\tilde{r}_p] \ , \tag{2.3.1}$$

拉格朗日函数可以表示为：

$$L=\frac{1}{2}w^TVw+\lambda\{E[\tilde{r}_p]-w^Te-(1-w^T\vec{1})r_f\}$$

其中λ为相应于约束方程(2.3.1)的拉格朗日乘子。

求解上述最优化问题，得一阶条件为：

$$Vw_p=\lambda(e-\vec{1}r_f)。 \tag{2.3.2}$$

因此前沿组合可以表示为；

$$w_p=\lambda V^{-1}(e-\vec{1}r_f)。 \tag{2.3.3}$$

将上式代回(2.3.1)式，整理得：

$$\lambda=\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H}, \tag{2.3.4}$$

其中$H=(e-\vec{1}r_f)^TV^{-1}(e-\vec{1}r_f)=B+Cr_f^2-2Ar_f>0$。

2.3.2 组合前沿的性质

性质 2.3.1：任意前沿组合的方差可以表示为：

$$\sigma^2(\tilde{r}_p)=(E[\tilde{r}_p]-r_f)^2/H。 \tag{2.3.5}$$

因此在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上可以表示为过点$(0,r_f)$、斜率为$\sqrt{H}$和$-\sqrt{H}$的射线。

证明：对于任意一个前沿组合p，我们有：

$$\sigma^2(\tilde{r}_p)=w_p^TVw_p=(\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H})^2(e-\vec{1}r_f)^TV^{-1}(e-\vec{1}r_f)$$

$$=\frac{(E[\tilde{r}_p]-r_f)^2}{H},$$

因此在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上表现为两条过点$(0,r_f)$、斜率为$\sqrt{H}$和$-\sqrt{H}$的射线：

$$\sigma(\tilde{r}_p)=\begin{cases}\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sqrt{H}} & 如果E[\tilde{r}_p]\geq r_f\\ -\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sqrt{H}} & 如果E[\tilde{r}_p]<r_f\end{cases}。 \tag{2.3.6}$$

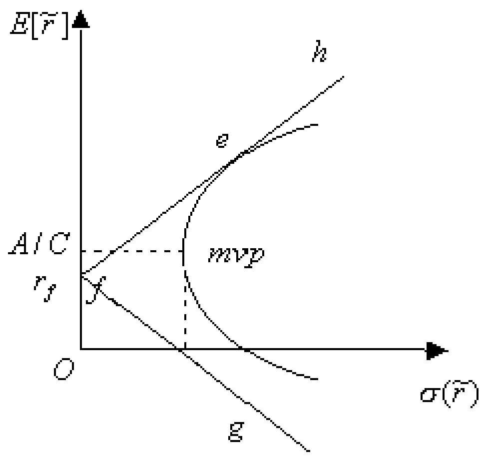
证明完毕。 ■

在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，刻画前沿组合的两条射线按三种情况分别由图(2.3.1-3)给出：

（1）、$r_f<A/C$。

当$r_f<A/C$时，过点$f(0,r_f)$向风险资产组合前沿（双曲线）作切线，切点为e，则$E[\tilde{r}_{zc(e)}]=r_f$。根据 2.2 节的讨论，$E[\tilde{r}_e]=A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}$。因此该切线的斜率为：

$$k=\frac{E[\tilde{r}_e]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)}。$$



(图 2.3.1)：当$r_f<A/C$时的前沿组合。

考虑到切点e在风险资产组合前沿上，因此有：

$$\sigma^2(\tilde{r}_e)=\frac{C}{D}(E[\tilde{r}_e]-\frac{A}{C})^2+\frac{1}{C}$$

$$=\frac{C}{D}(\frac{D/C^2}{r_f-A/C})^2+\frac{1}{C}$$

$$=\frac{H}{(Cr_f-A)^2}$$

因此该切线的斜率可以表示为：

$$k=\frac{E[\tilde{r}_e]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)}=(A/C-\frac{D/C^2}{r_f-A/C}-r_f)\frac{C(r_f-A/C)}{\sqrt{H}}$$

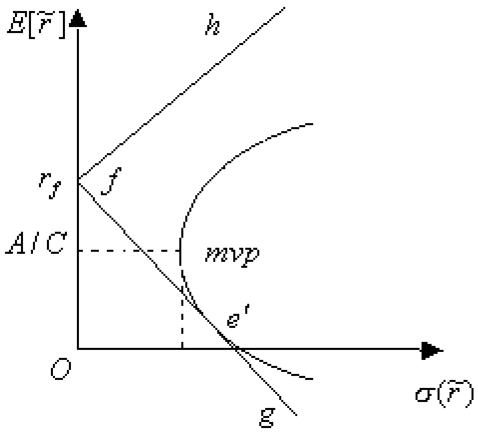
$$=\frac{H}{Cr_f-A}\frac{Cr_f-A}{\sqrt{H}}=\sqrt{H}。$$

由此可见，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合e线性生成，即$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中的射线$feh$和$fg$（见图 2.3.1）。其中位于线段

$\overline{fe}$上的前沿组合可以通过部分投资于切点组合e、部分投资于无风险资产而达到；位于射线$\overrightarrow{eh}$上的前沿组合可以通过卖空无风险资产、投资于切点组合e而达到；位于射线$\overrightarrow{fg}$上的前沿组合可以通过卖空切点组合e、投资于无风险资产而达到。

（2）、$r_f > A/C$

当$r_f > A/C$时，类似地我们可以证明，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合e'线性生成，即图 2.3.2 中的射线$\overrightarrow{fh}$和$\overrightarrow{fg}$。其中射线$\overrightarrow{fh}$上的前沿组合可以通过卖空切点组合e'、投资无风险资产实现；线段$\overline{fe'}$上的前沿组合可以通过部分投资无风险资产、部分投资切点组合e'来实现；射线$\overrightarrow{e'g}$可以通过卖空无风险资产、投资切点组合来实现。



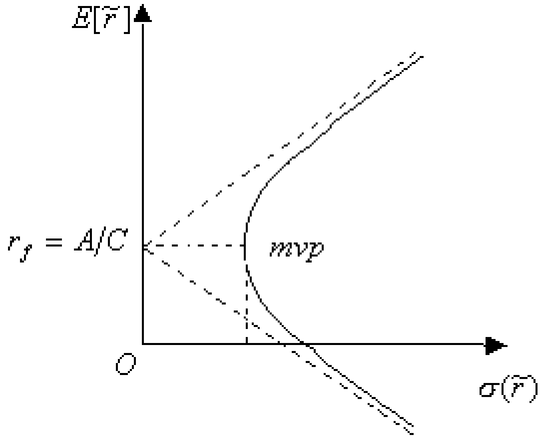
（图 2.3.2）：$r_f > A/C$时的前沿组合

（3）、$r_f = A/C$

当$r_f = A/C$时，$H = B + Cr_f^2 - 2Ar_f = D/C$。因此前沿组合可以表示为：

$$E[\tilde{r}_p] = r_f \pm \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p) = A/C \pm \sqrt{D/C}\sigma(\tilde{r}_p)。$$

因此引入无风险资产后的前沿组合是风险资产前沿组合（双曲线）的两条渐近线（见图 2.3.3）。



（图 2.3.3）：$r_f = A/C$时的投资组合前沿。

此时， 有$\vec{1}^T w_p = \vec{1}^T V^{-1}(e - A/C\,\vec{1})\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H} = 0$，前沿组合可以通过将所有财富投资在无风险资产上、并持有一个风险资产的套利组合（投资组合的总权重为零）来达到。

性质 2.3.2：设p是一个前沿组合，$E[\tilde{r}_p] \neq r_f$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qp}(E[\tilde{r}_p] - r_f)。\qquad (2.3.7)$$

证明：$cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p) = w_q^T V w_p = W_q^T V V^{-1}(e - \vec{1} r_f)\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H}$

$$= \frac{(E[\tilde{r}_q]-r_f)(E[\tilde{r}_p]-r_f)}{H}; \qquad (2.3.8a)$$

类似地，我们有：

$$var(\tilde{r}_p) = \frac{(E[\tilde{r}_p]-r_f)^2}{H}。\qquad (2.3.8b)$$

将(2.3.8a)和(2.3.8b)相除，整理得：

$$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qp}(E[\tilde{r}_p] - r_f)。$$

证明完毕。 ■

性质 2.3.3：设p是一个前沿组合，$E[\tilde{r}_p] \neq r_f$，则对任意可行投资组合q，我们有：

$$\tilde{r}_q = (1 - \beta_{qp})r_f + \beta_{qp}\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp}$$

且$\tilde{\varepsilon}_q$不依赖于p的选取。

证明：将随机变量$\tilde{r}_q$关于$\tilde{r}_p$作投影，得：

$$\tilde{r}_q = a + b\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp},$$

其中$E[\tilde{\varepsilon}_{qp}]=0$。由(2.3.7)得：

$$a=(1-\beta_{qp})r_f,\qquad b=\beta_{qp}。$$

因此上述分解将可行组合q分解成一个前沿组合和一个噪声项，显然这种分解不依赖于p的选取，因此$\tilde{\varepsilon}_q$也不依赖于p的选取。■

性质 2.3.3 蕴涵，个体在进行投资决策时，个体应该采取分散化投资的策略，选取有效组合以降低风险。

续例 2.2.1：在例 2.2.1 中，假定经济中还存在一种无风险资产 f，其回报率为r_f，则前沿组合可以通过如下最优化问题求解：

$$\min_{\{w_1,w_2,w_3\}}\frac{1}{2}w_1^2+\frac{1}{8}w_2^2+\frac{1}{2}w_3^2$$

Subject to:

$$w_1+\tfrac{3}{2}w_2+w_3+(1-w_1-w_2-w_3)r_f=E[\tilde{r}_p],$$

求解上述最优化问题，我们有：

$$w_p=\lambda V^{-1}(e-\vec{1}r_f)$$

$$=\tfrac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{11+6r_f^2-16r_f}\begin{pmatrix}1-r_f\\6-4r_f\\1-r_f\end{pmatrix},$$

（1）假定$r_f=1<4/3$，则$w_p=(E[\tilde{r}_p]-1)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$1-w_p^T\vec{1}=3-2E[\tilde{r}_p]$，

前沿组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_p=(1,1,2E[\tilde{r}_p]-1,2E[\tilde{r}_p]-1)。$$

切点组合e的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_e]=A/C-\tfrac{D/C^2}{r_f-A/C}=1.5$$

因此切点组合为：

$$w_e=(0,1,0)^T,\qquad \tilde{r}_e=(1,1,2,2)。$$

任意一个期望回报率为$E[\tilde{r}_p]$的前沿组合，由$3-2E[\tilde{r}_p]$份无风险资产和$2E[\tilde{r}_p]-2$切点组合构成。

任意一个可行投资组合q，可以分解为一个前沿组合和一个非系统性风险。例如，取可行投资组合q，假定投资组合权重为$w_q=(1/2,1,1/2)$，随机回报率向量为$\tilde{r}_q=(1,1,2,3)$；任取一个前沿组合p，其随机回报率向量为$\tilde{r}_p=(1,1,3,3)$。我们有：

$$\beta_{qp}=cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/var(\tilde{r}_p)=3/4,$$

所以我们有：

$$\tilde{r}_q = \frac{3}{4}\tilde{r}_p + \frac{1}{4}r_f + \tilde{\varepsilon}_q,$$

其中$\tilde{\varepsilon}_q = (0,0,-1/2,1/2)$，满足$cov(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_p) = E[\tilde{\varepsilon}_p] = 0$。

（2）假定$r_f = 4/3$，则前沿组合$w_p = (E[\tilde{r}_p] - 4/3)(-1,2,-1)^T$，$1 - w_p^T\vec{1} = 1$，即个体将所有财富投资在无风险资产上，同时在风险资产上持有一个套利组合。

（3）假定$r_f = \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$，则$w_p = (E[\tilde{r}_p] - \frac{3}{2})\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$1 - w_p^T\vec{1} = 2E[\tilde{r}_p] - 2$，

前沿组合的随机回报率可以表示为：

$$\tilde{r}_p = (E[\tilde{r}_p], E[\tilde{r}_p], 3E[\tilde{r}_p] - 3, -E[\tilde{r}_p] + 3)。$$

切点组合e'的期望回报率服从：

$$E[\tilde{r}_{e'}] = A/C - \frac{D/C^2}{r_f - A/C} = 1$$

因此切点组合为：

$$w_{e'} = (1/2,0,1/2)^T, \qquad \tilde{r}_{e'} = (1,1,0,2)。$$

任意前沿组合都可以表示为切点组合e'和无风险资产的线性组合。

习题

1、假定经济中有四个等概率发生的自然状态ω_1、ω_2、ω_3和ω_4，假定经济中存在种资产p_A和p_B，其随机回报率如下：

状态 资产	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_B$	1	0	－1	0
$\tilde{r}_B$	0.8	0.9	-0.8	-0.9

假定个体初始财富量为 1，个体效用函数为$E[ln(\widetilde{W})]$，试证明：

（1） 这两种投资组合具有相同的均值，但p_A的方差要小于p_B的方差；

（2）　个体投资在p_B上可以有更高的期望效用，尽管其方差比p_A的高。

2、假定经济中存在四个等概率发生的自然状态ω_1、ω_2、ω_3和ω_4，假定经济中存在三种风险资产，其随机回报率$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$和$\tilde{r}_3$的取值由下表给出：

自然状态 / 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_1(\omega)$	1	0	0	1
$\tilde{r}_2(\omega)$	1	1	2	2
$\tilde{r}_3(\omega)$	0	2	0	2

三种资产的随机回报率取值

（1）　求该经济中的期望回报率向量$e=(E[\tilde{r}_1],E[\tilde{r}_2],E[\tilde{r}_3])^T$和方差-协方差矩阵$V$；
（2）　（2）试计算该经济中的组合前沿；
（3）　按照(2)的结果求出$E[\tilde{r}_p]=1$时的最优组合；
（4）　是否存在比(3)中求出的最优组合更好的投资策略，如果是的话给出该策略，不是的话说明原因。

3、考虑两个回报率分别为$\tilde{r}_j$和$\tilde{r}_l$的风险资产，假定这两个资产有相同的期望回报率和方差，相关系数为ρ，试证明权重相同的投资组合达到最小方差，且独立于ρ。

4、假定经济中存在两种风险资产和一种无风险资产，同时经济中存在4个等概率的自然状态，假定风险资产不可以卖空。假定无风险资产回报率为r_f，两种风险资产的随机回报率服从：

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\tilde{r}_A$	3	1	3	1
$\tilde{r}_B$	3	5	5	3

（1）　试求$E[\tilde{r}_A]$、$E[\tilde{r}_B]$和方差-协方差矩阵。
（2）　试计算由风险资产构成的组合前沿。
（3）　如果$r_f=1.5$，试计算引入无风险资产后的组合前沿，并将资产A的随机回报率分解为前沿组合和非系统性风险。
（4）如果$r_f=1$，试计算引入无风险资产后的组合前沿。

5、令 p 是一个前沿组合，q 为与 p 具有相同期望回报率的可行投资组合。试证明：（1）$cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=var(\tilde{r}_p)$，（2）$\tilde{r}_p$和$\tilde{r}_q$的相关系数属于(0,1)。

6、假定投资组合$f_j, j=1,2,\ldots,n$都是有效组合，投资组合p满足$E[\tilde{r}_p]=\sum_{j=1}^{n}w_jE[\tilde{r}_j]$，其中$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。试证明：$E[\tilde{r}_{zc(p)}]\neq\sum_{j=1}^{n}w_jE[\tilde{r}_{zc(j)}]$，等式成立的条件是所有$f_j$完全相同。

7、假定经济中存在 2K 种风险资产，其随机回报率相互独立，方差相等，期望回报率满足：

$E[\tilde{r}_1]=E[\tilde{r}_2]=\ldots=E[\tilde{r}_k]=A, E[\tilde{r}_{k+1}]=E[\tilde{r}_{k+2}]=\ldots=E[\tilde{r}_{2k}]=B$，不妨假定 A>B。

（1）试求经济中的极小方差投资组合 mvp，

（2）不考虑市场摩擦，不考虑风险资产的卖空限制，试计算组合前沿，该组合前沿有何特点？

8、证明由两个具有不同的期望回报率的资产或可行组合构成的组合前沿通过这两个资产或可行组合。

9、在例 2.2.1 中，假定前沿组合p的随机回报率为$\tilde{r}_p=(1,1,0,2)$，

（1） 任取一个可行组合q，其随机回报率满足$\tilde{r}_q=(3,-1,2,2)$，试计算β_{qp}和$\beta_{qzc(p)}$，验证$\beta_{qp}+\beta_{qzc(p)}=1$是否成立，并将$\tilde{r}_q$分解为一个前沿组合的随机回报率和一个非系统性风险。

（2） 任取一个组合l，其随机回报率满足$\tilde{r}_q=(3,1,2,2)$，试计算β_{lp}和$\beta_{lzc(p)}$，验证$\beta_{lp}+\beta_{lzc(p)}=1$是否成立，说明原因。