§2.4　多元线性回归模型的统计检验
Statistical Test of Multiple Linear Regression Model

一、拟合优度检验

二、方程显著性检验

三、变量显著性检验

说　明

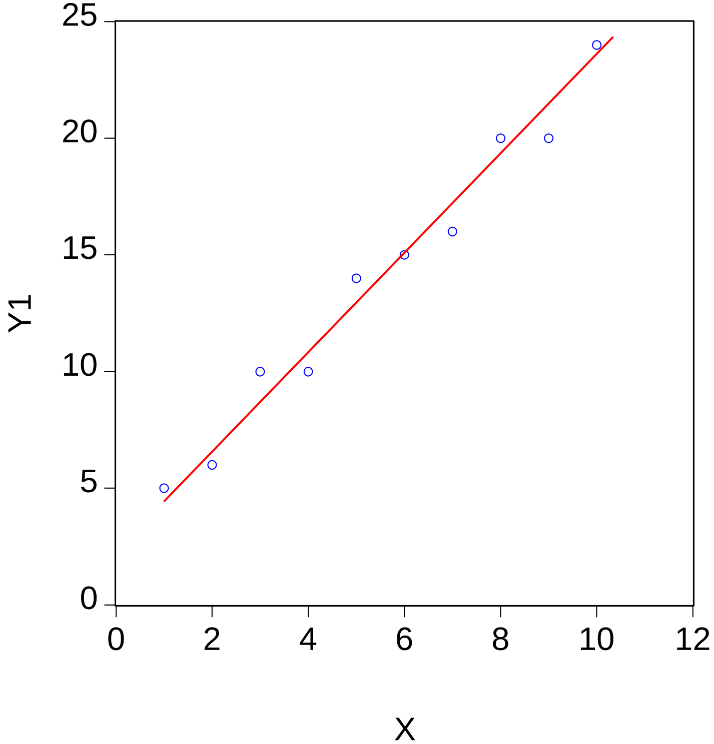
- 由计量经济模型的数理统计理论要求的
- 以多元线性模型为例
- 将参数估计量和预测值的区间检验单独列为一节，在一些教科书中也将它们放在统计检验中
- 包含拟合优度检验、总体显著性检验、变量显著性检验、偏回归系数约束检验、模型对时间或截面个体的稳定性检验等

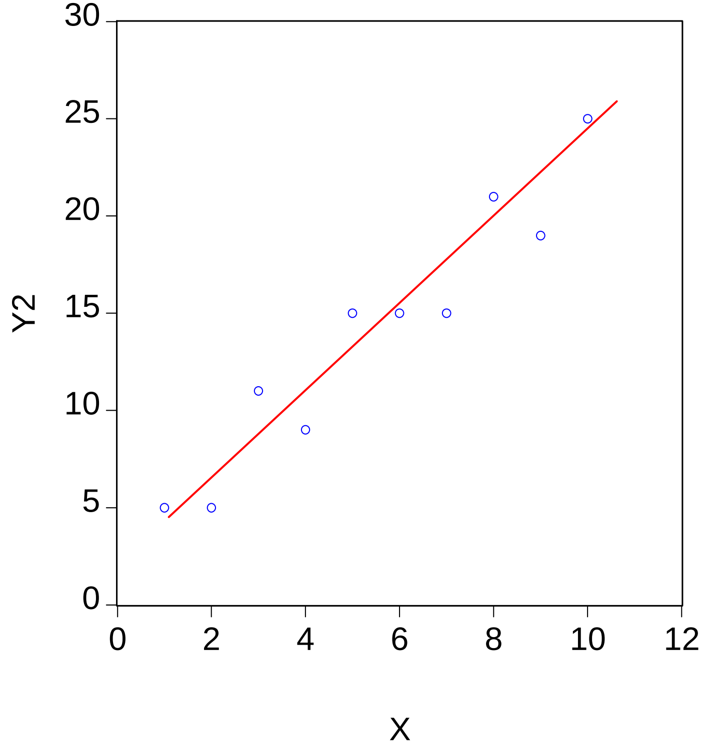
一、拟合优度检验

Testing the Simulation Level

1、概念

- 检验模型对样本观测值的拟合程度。
- 通过构造一个可以表征拟合程度的统计量来实现。
- 问题：采用普通最小二乘估计方法，已经保证了模型最好地拟合了样本观测值，为什么还要检验拟合程度？
- 答案：选择合适的估计方法所保证的最好拟合，是同一个问题内部的比较；拟合优度检验结果所表示的优劣是不同问题之间的比较。


Y1
X


Y2
X

Dependent Variable: Y1
Method: Least Squares
Date: 03/04/03 Time: 02:30
Sample: 1 10
Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.733333	0.674799	4.050590	0.0037
X	2.048485	0.108754	18.83600	0.0000

R-squared	0.977949	Mean dependent var	14.00000
Adjusted R-squared	0.975193	S.D. dependent var	6.271629
S.E. of regression	0.987804	Akaike info criterion	2.990192
Sum squared resid	7.806061	Schwarz criterion	3.050709
Log likelihood	-12.95096	F-statistic	354.7950
Durbin-Watson stat	3.449139	Prob(F-statistic)	0.000000

Dependent Variable: Y2

Method: Least Squares

Date: 03/04/03   Time: 02:36

Sample: 1 10

Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.466667	1.349598	1.827705	0.1050
X	2.096970	0.217507	9.640913	0.0000

R-squared	0.920751	Mean dependent var	14.00000
Adjusted R-squared	0.910844	S.D. dependent var	6.616478
S.E. of regression	1.975609	Akaike info criterion	4.376487
Sum squared resid	31.22424	Schwarz criterion	4.437004
Log likelihood	-19.88243	F-statistic	92.94720
Durbin-Watson stat	3.449139	Prob(F-statistic)	0.000011

2、总体平方和、残差平方和和回归平方和

- 定义

$$TSS = \Sigma(y_i - \bar{y})^2$$

$$ESS = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$RSS = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$$

- TSS为总体平方和（Total Sum of Squares），反映样本观测值总体离差的大小；ESS为回归平方和（Explained Sum of Squares），反映由模型中解释变量所解释的那部分离差的大小；RSS为残差平方和（Residual Sum of Squares），反映样本观测值与估计值偏离的大小，也是模型中解释变量未解释的那部分离差的大小。

- 既然ESS反映样本观测值与估计值偏离的大小，可否直接用它作为拟合优度检验的统计量?

  不行

  统计量必须是相对量

- **TSS、ESS、RSS**之间的关系

  TSS=RSS+ESS

3、一个有趣的现象

$$(y_i-\bar{y})=(y_i-\hat{y}_i)+(\hat{y}_i-\bar{y}_i)$$

$$(y_i-\bar{y})^2\neq(y_i-\hat{y}_i)^2+(\hat{y}_i-\bar{y}_i)^2$$

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2=\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2+\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

- 矛盾吗？可能吗？

- 关键是在**TSS=RSS+ESS**的推导过程中应用了一组矩条件

$$\Sigma x_{ji}(y_i - \hat{y}_i) = 0 \qquad j = 0,1,2,\cdots,k$$

- 矩条件在大样本下成立，只有**1**个样本时肯定不成立，在样本足够大时近似成立

- 理解教材中关于TSS=RSS+ESS的推导过程

4、拟合优度检验统计量：可决系数r^2和调整后的可决系数R^2

- 可决系数r^2

$$r^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

模型与样本观测值完全拟合时，$r^2=1$。

该统计量越接近于**1**，模型的拟合优度越高。

- 问题：

要使得模型拟合得好，就必须增加解释变量；

增加解释变量必定使得自由度减少。

- 调整的可决系数R^2

$$R^2 = 1 - \frac{S_r}{S_t}$$

$$S_r = \frac{1}{n-k-1} RSS$$

$$S_t = \frac{1}{n-1} TSS$$

- 为什么以R^2作为检验统计量避免片面增加解释变量的倾向？

- R^2多大才算通过拟合优度检验？

- 在应用软件中，可决系数r^2和调整后的可决系数R^2的计算是自动完成的

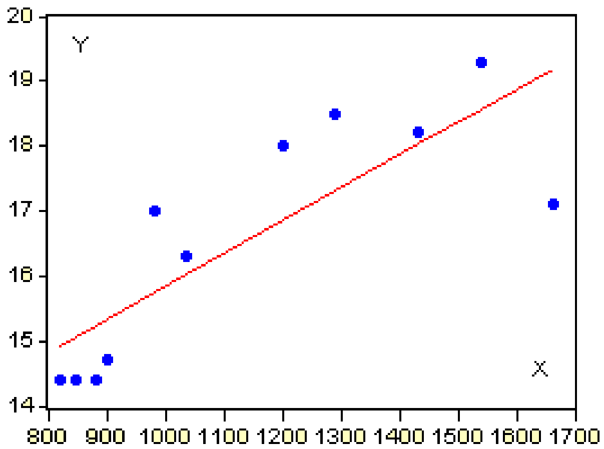
- 在消费模型中

$$r^2=0.999773$$

$$R^2=0.999739$$

例题 人均鲜蛋需求量Y与人均可支配收入X关系

(file: li-2-1)



Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/12/07 Time: 08:46
Sample: 1988 1998
Included observations: 11

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	10.76616	1.396736	7.708087	0.0000
X	0.005069	0.001183	4.283328	0.0020

R-squared	0.670895	Mean dependent var	16.57273
Adjusted R-squared	0.634328	S.D. dependent var	1.845042
S.E. of regression	1.115713	Akaike info criterion	3.219829
Sum squared resid	11.20333	Schwarz criterion	3.292174
Log likelihood	-15.70906	F-statistic	18.34690
Durbin-Watson stat	1.320391	Prob(F-statistic)	0.002040

可决系数:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{S.D.^2 \times (11-1) - SSE}{S.D.^2 \times (11-1)} = \frac{1.8450^2 \times 10 - 11.2033}{1.8450^2 \times 10} = 0.6709$$

二、方程显著性检验
Testing the Overall Significance

1、关于假设检验

- 假设检验是统计推断的一个主要内容，它的基本任务是根据样本所提供的信息，对未知总体分布的某些方面的假设作出合理的判断。
- 假设检验的程序是，先根据实际问题的要求提出一个论断，称为统计假设；然后根据样本的有关信息，对的真伪进行判断，作出拒绝或接受的决策。
- 假设检验的基本思想是概率性质的反证法。
- 概率性质的反证法的根据是小概率事件原理，该原理认为“小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的”。

2、方程的显著性检验

- 对模型中被解释变量与解释变量之间的线性关系在总体上是否显著成立作出推断。
- 用以进行方程的显著性检验的方法主要有三种：F检验、t检验、r检验。它们的区别在于构造的统计量不同，即设计的“事件”不同。
- 应用最为普遍的F检验。

3、方程显著性的F检验

- 方程显著性的F检验

F 检验是要检验模型中**被解释变量与解释变量之间的线性关系在总体上是否显著成立**，即检验方程

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \mu_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

中参数是否显著不为 0。

按照假设检验的原理与程序，提出原假设与备择假设

$$H_0: \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \cdots, \beta_k = 0$$

H_1：β_i 不全为零

F检验的思想来自于总离差平方和的分解式：

TSS=ESS+RSS

由于回归平方和ESS是解释变量X联合体对被解释变量Y的线性作用的结果，所以，如果ESS/RSS的比值较大，则X的联合体对Y的解释程度高，可认为总体存在线性关系，反之总体上可能不存在线性关系。

因此，可通过该比值的大小对总体线性关系进行推断。

由于Y_i服从正态分布，根据数理统计学中的定义，Y_i的一组样本的平方和服从χ^2分布。所以有：

$$ESS = \Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \sim \chi^2(k)$$

$$RSS = \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \sim \chi^2(n-k-1)$$

即回归平方和、残差平方和分别服从自由度为k和$(n-k-1)$的χ^2分布。

进一步根据数理统计学中的定义，如果构造一个统计量

$$F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)}$$

则该统计量服从自由度为（n-k-1）的F分布。

给定一个显著性水平α，可得到一个临界值$F_\alpha(k,n-k-1)$，根据样本在求出F统计量的数值后，可通过

$$F > F_\alpha(k,n-k-1) \qquad 或 \qquad F \le F_\alpha(k,n-k-1)$$

来拒绝或接受原假设H_0。

在消费模型中，k=2, n=16, 给定α=0.01, 查得$F_{0.01}(2,13)$=3.80，而F=28682.51>3.80, 所以该线性模型在0.99的水平下显著成立。

- 关于拟合优度检验与方程显著性检验关系的讨论

$$R^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}$$

$$F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)}$$

$$R^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1+kF}$$

可见，F与R^2同向变化：当R^2 ＝ 0 时，F＝ 0 ；当R^2=时，F为无穷大；R^2越大，F值也越大。

因此，F 检验是所估计回归的总显著性的一个度量，也是 r^2 或 R^2 的一个显著性检验。亦即：

检验原假设 $H_0: \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \cdots, \beta_k = 0$，等价于检验 $r^2 = 0$ 这一虚拟假设。

- 回答前面的问题： **R^2多大才算通过拟合优度检验？**

在消费模型中， R^2>0.28→F>3.80→该线性模型在0.99的水平下显著成立。

有许多著名的模型， R^2小于 0.5，支持了重要的结论，例如收入差距的倒U型规律。

不要片面追求拟合优度。

三、变量显著性检验
Testing the Individual Significance

1、变量显著性检验

- 对于多元线性回归模型，方程的总体线性关系是显著的，并不能说明每个解释变量对被解释变量的影响都是显著的。
- 因此，必须对每个解释变量进行显著性检验，以决定是否作为解释变量被保留在模型中。
- 变量显著性检验的数理统计学基础相同于方程显著性检验，检验的思路与程序也与方程显著性检验相似。
- 用以进行变量显著性检验的方法主要有三种：**F**检验、**t**检验、**z**检验。它们的区别在于构造的统计量不同。应用最为普遍的**t**检验。

2、变量显著性的F检验

易知$\hat{\beta}_i$服从下列正态分布：

$$\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma^2 c_{ii})$$

其中：c_{ii}表示矩阵 $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$主对角线上的第 i 个元素，$\sigma^2$为随机误差项的方差。

已经知道 $\mathbf{e}'\mathbf{e} \sim \chi^2(n-k-1)$

如果构造一个统计量

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{c_{ii} \dfrac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k-1}}} \qquad t \sim t(n-k-1)$$

提出原假设与备择假设：

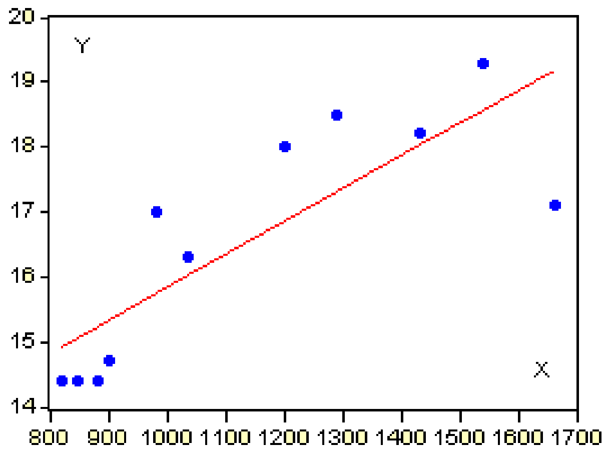
H_0： $\beta_i=0$, H_1: $\beta i \neq 0$

给定一个显著性水平 α，得到一个临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k-1)$,于是可根据

$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k-1)$ 或 $|t| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-k-1)$

来拒绝或接受原假设 H_0。

例 人均鲜蛋需求量Y与人均可支配收入X关系



Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/12/07 Time: 08:46
Sample: 1988 1998
Included observations: 11

Prob=P {| *t* | > | t-Statistic | }

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	10.76616	1.396736	7.708087	0.0000
X	0.005069	0.001183	4.283328	0.0020

R-squared	0.670895	Mean dependent var	16.57273
Adjusted R-squared	0.634328	S.D. dependent var	1.845042
S.E. of regression	1.115713	Akaike info criterion	3.219829
Sum squared resid	11.20333	Schwarz criterion	3.292174
Log likelihood	-15.70906	F-statistic	18.34690
Durbin-Watson stat	1.320391	Prob(F-statistic)	0.002040

回归参数的显著性检验:

H_0: $\beta_1 = 0$; H_1: $\beta_1 \neq 0$。在H_0成立条件下,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s_{(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1}{s_{(\hat{\beta}_1)}} = \frac{0.0051}{0.0012} = 4.25$$

H_0: $\beta_0 = 0$; H_1: $\beta_0 \neq 0$。在H_0成立条件下,

$$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{s_{(\hat{\beta}_0)}} = \frac{\hat{\beta}_0}{s_{(\hat{\beta}_0)}} = \frac{10.7661}{1.3967} = 7.7082$$

检验结果:
回归参数显著不为零。

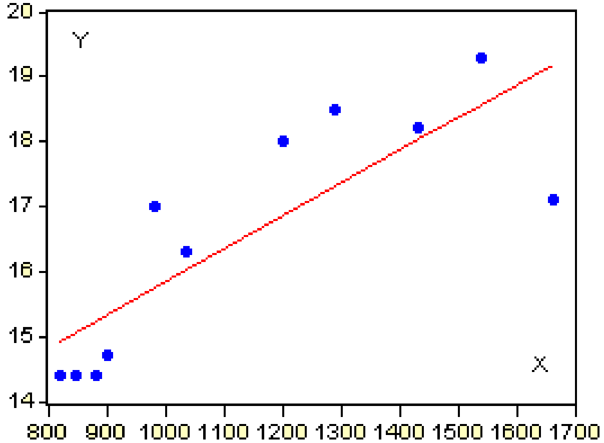
- 在消费模型中，

t_c=6.412, t_{gdp}=22.00, $t_{cons(-1)}$=4.188

给定α=0.01,查得t0.005(13)=3.012，所以所有变量都在0.99的水平下显著。

例 人均鲜蛋需求量Y与人均可支配收入X关系

(file: li-2-1)



Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/12/07 Time: 08:46
Sample: 1988 1998
Included observations: 11

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	10.76616	1.396736	7.708087	0.0000
X	0.005069	0.001183	4.283328	0.0020

R-squared	0.670895	Mean dependent var	16.57273
Adjusted R-squared	0.634328	S.D. dependent var	1.845042
S.E. of regression	1.115713	Akaike info criterion	3.219829
Sum squared resid	11.20335	Schwarz criterion	3.292174
Log likelihood	-15.70906	F-statistic	18.34690
Durbin-Watson stat	1.320391	Prob(F-statistic)	0.002040

OLS估计表达式:

$$\hat{Y}_i = 10.7662 + 0.0051 X_i$$

（7.7）　（4.3）

R^2 = 0.67，DW=1.32，T=11，（1988~1998）

3、在一元线性回归（k=1）中，t检验与F检验是一致的。

一方面，t 检验与 F 检验都是对相同的原假设 H_0： $\beta_1 = 0$ 进行检验；

另一方面，两个统计量之间有如下关系：

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum e_i^2 \big/ (n-2)} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2 \big/ (n-2)} = \frac{\hat{\beta}_1^2}{\sum e_i^2 \big/ (n-2) \sum x_i^2} = \left(\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\sum e_i^2 \big/ (n-2) \sum x_i^2}} \right)^2$$

$$= \left(\hat{\beta}_1 \Bigg/ \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2} \cdot \frac{1}{\sum x_i^2}} \right)^2 = t^2$$

4、关于检验标准的判断

- 科学性
- 灵活性
- 关键是讲清楚在什么置信水平下显著
- 直观判断