# 第一章 基本概念[1]

## § 1.1 偏好的期望效用表示

在金融经济学中，我们需要研究人们在不确定条件下的消费-投资决策和市场上资产价格的决定，这涉及到面对不确定的选择对象时人们的判别标准。

在十七世纪现代概率理论的发展中，帕斯卡(Blaise Pascal)和费尔玛(Pierre de Fermat)等大数学家假定，在一个随机回报为$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$、相对应的概率为$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$的赌博中，人们关心的是它的期望回报$E[\tilde{x}] = \sum x_i p_i$。但该假定在 1728 年被 N. 伯努利(Nicholas Bernoulli)所给出的一个例子所否定，该例子现在被称为著名的圣.彼得堡悖论(St. Petersburg Paradox)：

假定一位个体面对一个抛硬币的赌博游戏，第一次抛出正面时该个体得到 1 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第二次硬币。第二次抛出正面得到 2 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第三次硬币。第三次抛出正面得到 4 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第四次硬币。第四次抛出正面得到 8 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第五次硬币，…。问该个体愿意支付多少财富来参与该赌博游戏？

按照帕斯卡和费尔玛等人的思路，个体愿意支付的财富等于该赌博游戏的期望回报。在该赌博游戏中，期望回报满足：

$$E[\tilde{x}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \ldots = +\infty,$$

即个体愿意支付正无穷的财富，来参与该赌博游戏。这个结论显然是不合理的，因此被看作是一个悖论，叫做圣.彼得堡悖论。

该悖论的解决由 N. 伯努利的堂兄弟 D. 伯努利(Daniel Bernoulli，1738/1954)给出。D. 伯努利认为，对个体而言，200 元的收益并不等于 100 元收益的两倍，他假定个体决策时会使用一个现在被称为 von Neumann 和 Morgenstern 期望效用函数的概念 u(.)，从而个体决策时不是直接计算游戏收益的期望值$E[\tilde{x}] = \sum x_i p_i$，而是计算游戏收益的期望效用值$E[u(\tilde{x})] = \sum u(x_i) p_i$。因此与上述游戏相当的财富值$\xi$应该满足：

$$u(w + \xi) = \frac{1}{2}u(w+1) + \frac{1}{4}u(w+2) + \frac{1}{8}u(w+4) + \ldots。$$

[1] 本章的编写，主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、Campbell 和 Viceira(2002).、杨云红（2000）、王江（2006）等教材及相关论文。

此处$w$是个体当前的财富值。如果效用函数取对数效用形式$u(w) = ln w$，当前财富值取$w = 50000$元，则$\xi \approx 9$。因此，即使该游戏的期望收益趋于无穷，但对个体而言，该游戏的价值仅仅 9 元。

上述分析表明，由于不确定性的存在，我们需要引入期望效用函数的概念。通常，偏好的期望效用表示有两种推导方式：第一种推导方式由 von Neumann 和 Morgenstern(1953)给出，他们的推导建立在个体对彩票选择的假定之上，其中彩票的收益和概率是预先指定的，因此他们的期望效用理论是一种客观期望效用理论；另一种推导方式由 Savage(1972)给出，在他的处理中，概率是在特定公理体系下推导出来的，而不是预先给定的，因此 Savage 的理论是一种主观期望效用理论。下面我们介绍的是 von Neumann 和 Morgenstern(1953)的期望效用表示理论。

### 1.1.1 不确定条件下的选择问题

#### 一、消费计划与偏好关系

考虑一个一期经济，假定个体在时间 0 时做出投资决策，时间 1 时将所有财富用于消费。为简化讨论，假定时间 1 时只有一种消费品。由于经济中存在着不确定性，比如世界油价的飙升、局部战争的发生、恐怖事件的出现等等，个体所持有的金融资产在时间 1 时的回报依赖于不确定的经济环境。这些影响时间 1 回报的因素，例如整个经济和股票发行企业所在行业的景气程度、石油价格水平、公司利润和人们的信息指数等，在时间 0 时都是不知道的。

通常我们可以用一个概率空间$(\Omega, F, P)$来刻画这种不确定的经济环境。其中$\Omega$中的元素$\omega \in \Omega$称作**自然状态**，是对从时间 0 到时间 1 的不确定环境的一个刻画，$\Omega$为这些自然状态的全体，$P$刻画了各个自然状态发生的概率，在 von Neumann 和 Morgenstern(1953)的讨论中，该概率是预先给定的，是客观概率。个体在时间 0 作投资决策时，可供选择对象的全体记为$X$，$X$由所有可行消费计划构成。

**定义 1.1.1：一个消费计划**是不同自然状态下消费数量的一个完备刻画。

每个消费计划都可以用一个可测函数$x:\Omega \rightarrow Z(Z \subseteq R)$来刻画，当自然状态$\omega$发生时，$x(\omega)$表示该状态下的可行消费数量。消费计划 $x$ 是一个随机变量，在数学上常用$\tilde{x}$来表示，它可以是股票、债券等各种金融资产及其组合。如果对任意自然状态$\omega \in \Omega$，我们有$x(\omega)$等于常数，则$x$是一个确定性的消费计划。

**例 1.1.1**：假定经济中有五个自然状态$\omega_1$、$\omega_2$、…、$\omega_5$，每个自然状态都以相同的概率出现，表 1.1.1 给出了三个消费计划$x$、$y$和$z$在不同自然状态下的消费量。其中$x$是一个确定性的消费计划，$y$和$z$是两个或有消费计划，其时间 1 回报依赖于自然状态的实现。 ●

| | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x(\omega)$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| $y(\omega)$ | 1 | 5 | 3 | 4 | 3 |
| $z(\omega)$ | 5 | 3 | 4 | 1 | 3 |

（表 1.1.1）：消费计划

给定可供选择消费计划的全体 X，我们可以在 X 上定义一个二项关系“$\succeq$”，其中$x \succeq y$代表“x 至少要比 y 好”，$x \succ y$代表“x 严格地好于 y”，$x \sim y$ 代表“x 和 y 是无差异的”。

**定义 1.1.2**：称一个二项关系是一个**偏好关系**，如果该二项关系服从：

（1）完备性：任意$x, y \in X$，有$x \succeq y$或$y \succeq x$；

（2）反身性：任意$x \in X$，有 $x \sim x$ ；

（3）传递性：任意$x, y, z \in X$，如果$x \succeq y$，$y \succeq z$，则有$x \succeq z$。

在一定条件下，例如偏好关系满足连续性，我们可以给出偏好关系的效用函数表示（见 Mas-Colell、Whinston 和 Green(1995)或 Varian(1992)）。

**定义 1.1.3**：一个函数$H: X \to R$称为是偏好关系“$\succeq$”的效用函数表示，如果对任意$x, y \in X$，有$x \succeq y \Leftrightarrow H(x) \geq H(y)$。

## 二、彩票与期望效用函数

事实上，个体在做决策时最为关注的并非是未来哪个事件会发生，而是未来能得到多少消费品，概率有多大。以上面的例 1.1.1 为例，或有消费计划$y$和$z$都是以 0.2 的概率得到 1 单位消费品，0.2 的概率得到 4 单位的消费品，0.2 的概率得到 5 单位的消费品，0.4 的概率得到 3 单位的消费品。由于个体决策时自然状态还未显示出来，虽然时间 1 时在自然状态显示后从这两个消费计划中可以得到的消费品数量并不相等，但在时间 0 时这两个消费计划对个体而言是完全等价的。因此这两个消费计划对时间 0 的个体来说是无差异的。

记经济中所有可能实现的消费量的全体为：

$$Z \equiv \{x(\omega) | \forall x \in X, \omega \in \Omega\}。 \quad (1.1.1)$$

则任意一个消费计划$x \in X$，存在一个定义在$Z$上的概率密度函数$p_x$与之对应，满足：

$$p_x(z) = Prob\{\omega | x(\omega) = z, \omega \in \Omega\}。 \quad (1.1.2)$$

相应地，累计概率分布为$F_x(z) = Prob\{\omega | x(\omega) \leq z, \omega \in \Omega\}$。

**例 1.1.1（续）**：在例 1.1.1 中，经济中可实现消费量的全体 Z={1、3、4、5}；消费计划 x 对应的概率分布$p_x$可以表示为：

$$p_x(1) = p_x(4) = p_x(5) = 0，p_x(3) = 1；$$

消费计划 y 对应的概率分布$p_y$可以表示为：

$$p_y(1) = p_y(4) = p_y(5) = 0.2，p_y(3) = 0.4；$$

消费计划 z 对应的概率分布$p_z$可以表示为：

$$p_z(1) = p_z(4) = p_z(5) = 0.2，p_z(3) = 0.4。$$

●

这样我们在或有消费计划与定义在 Z 上的概率分布之间建立了一个对应关系：

$$(\Omega, P) \xrightarrow{x} (Z, Px^{-1})；$$

每一个$x \in X$，对应着 Z 上的一个概率分布$Px^{-1}$；反过来，Z 上的一个概率

分布$Px^{-1}$可以有多个消费计划与之相对应，这些消费计划有相同的分布，它们是无差异的。我们将 Z 上概率分布的全体记为：

$$\Psi = \{Z上的概率分布\}。$$

这样一来，定义在 X 上的偏好关系可以简化为定义在$\Psi$上的偏好关系。$\Psi$中每一个概率分布都可以被看作是一个彩票。

对任意的$z \in Z$，记$P_z$为在点 z 处退化的概率分布，满足：

$$P_z(z') = \begin{cases} 1 & 如果 z' = z \\ 0 & 如果 z' \neq z \end{cases}, \tag{1.1.3}$$

则$P_z$是一个确定性的消费计划，其持有者在任意状态都可以得到 z 单位的消费品。

如果 Z 是一个有限集合，记$z^0 = max\{z|z \in Z\}$，$z_0 = min\{z|z \in Z\}$，则在$\Psi$中可以定义两个确定性的彩票$P_{z^0}$和$P_{z_0}$，满足对任意的$p \in \Psi$，有$P_{z^0} \succeq p \succeq P_{z_0}$。

**例 1.1.1（续）：** 在例 1.1.1 中，可以有四个确定性消费计划$P_1$、$P_3$、$P_4$和$P_5$，这四个消费计划分别以 100%的概率得到 1 单位、3 单位、4 单位和 5 单位消费品。考虑到

$z^0 = max(1,3,4,5) = 5$，$z_0 = min(1,3,4,5) = 1$，

因此经济中存在一个最好的消费计划$P_{z^0}$和一个最坏的消费计划$P_{z_0}$，满足：

$$P_{z^0}(z') = \begin{cases} 1 & 如果 z' = z^0 = 5 \\ 0 & 如果 z' \neq z^0 = 5 \end{cases};$$

$$P_{z_0}(z') = \begin{cases} 1 & 如果 z' = z_0 = 1 \\ 0 & 如果 z' \neq z_0 = 1 \end{cases}。$$

●

von Neumann 和 Morgenstern(1953)在个体投资决策建立在对彩票选择的假定下，给出了定义在$\Psi$上的期望效用表示理论。对于定义在$\Psi$上的偏好关系“$\succeq$”，存在一个期望效用函数$E[u(.)]$，满足：

对任意$x, y \in X$，$x \succeq y \iff p_x \succeq p_y$

$$\iff E[u(\tilde{x})] \geq E[u(\tilde{y})] \ ，$$

其中$E[u(x)] = \int_{\Omega} u(x)dP = \int_{Z} u(z)dF_x(z)$。

特别地，当 Z 是一个可数集合时，期望效用函数可以简化为：

$$E[u(x)] = \sum_{z\in Z} u(z)p(z)。$$

**例 1.1.2:**旅游时购买意外伤害险的回报依赖于是否发生意外伤害事件，而后者具有不确定性。假定旅客的期望效用函数为$E[ln(.)]$，假定买保险的成本为$\rho$，$w$为不发生危险的财富价值，$w-h$为发生危险的财富价值，假定发生危险的概率为$p$，则不发生危险的概率为$1-p$，假定买保险后发生危险时的补偿为$\hat{h}$，则个体是否买保险可以通过比较买保险后的期望效用值$(1-p)\,ln(w-\rho)+p\,ln(w-\rho-h+\hat{h})$与不买保险时的期望效用值$(1-p)\,ln\,w+p\,ln(w-h)$来实现：

当$(1-p)\,ln(1-\frac{\rho}{w})+p\,ln(1+\frac{\hat{h}-\rho}{w-h})>0$时，购买保险是划算的，否则不购买保险是划算的。●

### 1.1.2 期望效用函数的存在性

### 一、复合彩票

**定义：**称彩票$ap+(1-a)r$是一个由彩票$p$和$r$构成的复合彩票，如果该彩票以$a$的概率得到彩票$p$，以$1-a$的概率得到彩票$r$。

复合彩票也可以看作是一个普通彩票，如果彩票$p$和$r$定义在集合 Z 上，则复合彩票$ap+(1-a)r$也定义在 Z 上，且对任意的$z\in Z$，其概率密度为$ap(z)+(1-a)r(z)$，因此复合彩票也可以看作是一个简单彩票。

**例 1.1.3**：假定$p_x$和$p_y$为定义在 Z={1、3、4、5}上的彩票，如例 1.1.1（续）刻画，彩票$p_x$的概率分布可以表示为：

$$p_x(1)=p_x(4)=p_x(5)=0，p_x(3)=1；$$

彩票$p_y$的概率分布可以表示为：

$$p_y(1)=p_y(4)=p_y(5)=0.2，p_y(3)=0.4；$$

则复合彩票$\frac{1}{2}p_x+\frac{1}{2}p_y$代表 1/2 概率得到彩票$p_x$，1/2 概率得到彩票$p_y$，该复合彩票可以改写为一个简单彩票$p_w$，其概率分布可以表示为：

$p_y(1) = p_y(4) = p_y(5) = 0.1$，$p_y(3) = 0.2$。 ●

反过来，一个简单彩票可以也可以写成几个简单彩票构成的复合彩票，在例 1.1.3 中的简单彩票$p_w$就可以改写为$\frac{1}{2}p_x + \frac{1}{2}p_y$。特别地，一个简单彩票可以改写为由一些确定性彩票的复合而成。例如，例 1.1.3 中的彩票$p_y$可以改写为：

$$p_y = \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{5}P_4 + \frac{1}{5}P_5 + \frac{2}{5}P_3,$$

即以 1/5 的概率分别得到确定性彩票$P_1$、$P_4$和$P_5$，以 2/5 的概率得到确定性彩票$P_3$。这可以进一步推广到更一般的情形，即得如下引力：

**引理 1.1.1**：任意一个彩票都可以改写为一些确定性彩票的混合彩票，即如果$p$是定义在 Z 上的一个彩票，则彩票$p$可以改写为：

$$p = \sum_{z\in Z} p(z)P_z,$$

其中$p(z)$为该彩票得到$z$的概率，而$P_z$是与$z$相对应的确定性消费计划。

**证明**：要证明该引理，只需证明对任意的$z' \in Z$，有$p(z') = \sum_{z\in Z} p(z)P_z(z')$。

注意到$P_z(z') = \begin{cases} 1 & z' = z \\ 0 & z' \neq z \end{cases}$。因此$\sum_{z\in Z} p(z)P_z(z') = p(z')$，证毕。■

**公理 1:（独立性公理）**对任意$p, q, r \in \Psi$，$a \in (0,1]$，如果$p \succ q$，则有$ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r$。

独立性公理蕴涵，个体对这两个复合彩票的偏好程度不依赖于新引入的彩票 r，即消费者对特定事件中消费的满意程度不会随其它事件的发生而变化。

**公理 2:（Archimedean 公理）**对任意$p, q, r \in \Psi$，如果$p \succ q \succ r$，则存在$a, b \in (0,1]$，使得$ap + (1-a)r \succ q \succ bp + (1-b)r$。

公理 2 来自于数学中的 Archimedean 公理，该公理认为，对任意两个大于零的数 $z$ 和$z'$，不管$z'$有多大，总存在一个正整数 $k$，满足$kz > z'$。此处公

理 2 蕴涵，任意满足$p \succ q \succ r$的消费计划 $p$、q 和 r，不管 $p$ 有多好，总存在一个概率 b，$q$ 要比复合彩票$bp+(1-b)r$来得好；同样地，也不管 r 有多坏，总存在一个概率 a，$q$ 要比复合彩票$ap+(1-a)r$来得坏。

在公理 1 和公理 2 下，定义在$\Psi$上的偏好关系具有以下性质：

1、 如果$p \succ q$，$0 \le a < b \le 1$，则$bp+(1-b)q \succ ap+(1-a)q$；

2、 如果$p \succeq q \succeq r$，$p \succ r$，则存在唯一的$a^* \in [0,1]$，满足

$$q \sim a^* p+(1-a^*)r;$$

3、 如果$p \succ q$，$r \succ s$，$a \in [0,1]$，则$ap+(1-a)r \succ aq+(1-a)s$；

4、 如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则$p \sim ap+(1-a)q$；

5、 如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则对任意的$r \in \Psi$，有 ：

$$ap+(1-a)r \sim aq+(1-a)r。$$

## 二、期望效用函数的存在性

von Neumann 和 Morgenstern(1953)的期望效用表示定理建立在独立性公理和 Archimedean 公理之上。

**定理 1.1.1**：定义在$\Psi$上的偏好关系 “$\succeq$” 存在期望效用表示，当且仅当该偏好关系满足公理 1 和公理 2；该效用表示精确到一个仿射变换，即如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数，则对于任意的$c > 0$和$d$，$\hat{u} = cu + d$也是一个 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数。

**证明**：（充分性）此处我们在$Z$是个有限集的假定下进行讨论，当$Z$是无限集合时，有兴趣的读者可阅 Fishburn(1970)。当$Z$是个有限集合时，$\Psi$中存在两个最好的和最坏的彩票$P_{z^0}$和$P_{z_0}$，任意的$p \in \Psi$，有$P_{z^0} \succeq p \succeq P_{z_0}$。下面我们分两种情形来讨论：

1、$P_{z^0} \sim P_{z_0}$：在这种情形中，任意的$p,q \in \Psi$，有$p \sim q \sim P_{z^0} \sim P_{z_0}$。定义$u(z)=k$，$k$是任意的常数，则$u(z)$是一个满足要求的 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

2、$P_{z^0} \succ P_{z_0}$：对任意$p \in \Psi$，我们可以定义$H(p)=a$，其中$a \in [0,1]$，满足$aP_{z^0}+(1-a)P_{z_0} \sim p$。$H(p)$是使得复合彩票$aP_{z^0}+(1-a)P_{z_0}$与$p$无差异的权重。根据性质 2，这样的 $a$ 是唯一的，所以对任意的$p \in \Psi$，$H(p)$是

定义好了的，满足：

$$p \succeq q \quad \Leftrightarrow \quad H(p)P_{z^0} + (1 - H(p))P_{z_0} \succeq H(q)P_{z^0} + (1 - H(q))P_{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(p) \geq H(q)。 \qquad (1.1.4)$$

所以$H(p)$是偏好关系“$\succeq$”的一个效用表示。下面我们来证明$H(p)$可以改写成一个期望效用函数$\sum_z u(z)p(z)$。

对任意$p, q \in \Psi$，$a \in [0,1]$，由性质 5 得：

$$\begin{aligned} ap + (1-a)q \sim\ & a[H(p)P_{z^0} + (1 - H(p))P_{z_0}] \\ & +(1-a)[H(q)P_{z^0} + (1 - H(q))P_{z_0}] \\ \sim\ & (aH(p) + (1-a)H(q))P_{z^0} \\ & +(1 - aH(p) - (1-a)H(q))P_{z_0}。 \qquad (1.1.5) \end{aligned}$$

因为$H(.)$是定义好了的，由(1.1.5)得：

$$H(ap + (1-a)q) = aH(p) + (1-a)H(q)， \qquad (1.1.6)$$

所以 $H$ 是线性的。

根据引理 1.1.1，考虑到任意彩票$p \in \Psi$，$p$可以表示为$\sum_{z \in Z} p(z)P_z$，所以我们有：

$$H(p) = H(\textstyle\sum_{z \in Z} p(z)P_z) = \sum_{z \in Z} p(z)H(P_z)。 \qquad (1.1.7)$$

在 $Z$ 上定义函数$u(.)$，满足：

$$u(z) \equiv H(P_z)，\ \forall z \in Z。 \qquad (1.1.8)$$

则根据(1.1.7)，我们有：

$$H(p) = \textstyle\sum_{z \in Z} p(z)u(z) = E[u(z)]。 \qquad (1.1.9)$$

此处$u(.)$即为 von Neumann- Morgenstern 效用函数，$E[u(.)]$即为偏好的期望效用表示。

（必要性）如果偏好关系“$\succeq$”存在一个期望效用表示

$$E[u(z)] = \textstyle\sum_{z \in Z} p(z)u(z)，$$

则对任意$p, q, r \in \Psi$，如果$p \succ q$，则有$\sum_{z \in Z} p(z)u(z) > \sum_{z \in Z} q(z)u(z)$，如果$a \in (0,1]$，则有：

$$\sum_{z \in Z} [ap(z) + (1-a)r(z)]u(z) > \sum_{z \in Z} [aq(z) + (1-a)r(z)]u(z)$$

因此我们有$ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r$，独立性公理成立。

对任意$p, q, r \in \Psi$， $p \succ q \succ r$，在上述期望效用表示下，我们有：

$$\sum_{z\in Z} p(z)u(z) > \sum_{z\in Z} q(z)u(z) > \sum_{z\in Z} r(z)u(z)。$$

存在 $a \in (0,1]$，满足：$a\sum_{z\in Z} p(z)u(z) + (1-a)\sum_{z\in Z} r(z)u(z) > \sum_{z\in Z} q(z)u(z)$，所以我们有：

$$\sum_{z\in Z}[ap(z) + (1-a)r(z)]u(z) > \sum_{z\in Z} q(z)u(z),$$

即$ap + (1-a)r \succ q$。类似地可证明存在$b \in (0,1]$，满足$q \succ bp + (1-b)r$。

从上面的证明可以看出，如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数，则$\hat{u} = cu + d$也是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

证明完毕。■

## 二、多期经济中的期望效用函数

考虑一个多期禀赋经济，整个消费过程横跨$T+1$期，$t = 0,1,2,\cdots T$，记$z = (z_0, z_1, \ldots, z_T)$为个体可行的消费向量，其中$z_t$为 t 期消费量，记$Z$为$z$的全体。假定$Z$有限， $p(.)$为定义在$Z$上的概率，$p(.)$的全体记为$\Psi$。类似地，我们可以证明如下定理：

**定理 1.1.2**：定义在$\Psi$上的一个偏好关系"$\succeq$"满足独立性公理和公理 Archimedean，当且仅当存在一个存在期望效用表示，当且仅当存在一个 von Neumann- Morgenstern 效用函数$u(.)$，满足：

$$\sum_{z\in Z} u(z_0, \ldots, z_T)p(z = z_0, \ldots, z_T) \geq \sum_{z\in Z} u(z_0, \cdots, z_T)q(z = z_0, \ldots, z_T)$$

$\Leftrightarrow\ p \succeq q$， 任意$p, q \in \Psi$，

其中$p(z = z_0, \ldots, z_T)$指从时间 0 到 T 的消费等于$(z_0, \ldots, z_T)$的概率。

证明：略。

如果 von Neumann- Morgenstern 效用函数是时间可加的(time-additive)，则存在一列函数$\{u_t(.)\}_{t=0}^{T}$，满足：

$$u(z_0, \ldots, z_T) = \sum_{t=0}^{T} u_t(z_t)。\tag{1.1.10}$$

在许多时候，上述效用函数可以进一步简化为一个几何贴现效用函数：

$$u(z_0, \ldots, z_T) = \sum_{z=0}^{T} \beta^t u(z_t), \quad 0 < \beta < 1。\tag{1.1.11}$$

其中$\beta$为贴现因子。上述贴现形式称为几何贴现，由 Samuelson(1937)引入，通过将未来效用一期一期地贴现到现期，得到一个终生贴现效用函数，从而

为跨时决策问题的解决提供了理论基础。在几何贴现下，任一时间点上将下一期效用贴现到该时间点的贴现因子是个常数，这蕴涵人们在今天对明天和处于明天对后天的耐心程度是一致的。在贴现因子是个常数的假定下，个体贴现呈现出几何级数的形式，所以这种贴现方法通常被称为几何贴现，因其简单易用，且近似地刻画了个体决策心理而为经济学家们广泛使用。

### 1.1.3 对理性选择的偏离：四个悖论

个体选择行为的完全理性和期望效用函数的存在性（两个公理）是现代金融理论的基础，本书一到七章的讨论都建立在该基础之上。但越来越多的研究表明，当存在不确定性行为时，个体决策并不是完全理性的，或者与期望效用理论并不一致（见 Machina(1987)、Tversky 和 Kahneman(1981)、Slovic 和 Lichtenstein(1983)等。下面我们介绍几个相关的悖论。

#### 一、悖论 1（概率匹配）

把 20 个红球和 10 个黑球一起放入一个袋子，随机地从袋子中取出一个球再放回去，猜测所取出的球是红色的，还是黑色的，猜中的话可以得到 10 元 RMB 的奖励。

在重复猜奖中，实验发现绝大多数个体趋向于 2/3 的时间选择猜红球，1/3 的时间猜黑球。很显然这不是最优的，最优选择应该是总是猜红球。

#### 二、悖论 2（偏好反转）

考虑两个选择问题：（1）设想你可以得到 2 万人民币的财富和一个选择权，你可以选择(a)额外再得到 5 千人民币，(b)25%的概率额外再得到 2 万人民币，75%的概率没有额外收入。（2）设想你可以得到 4 万人民币的财富和一个选择权，你可以选择(a)放弃 1 万 5 千人民币，(b)75%的概率放弃 2 万人民币，25%的概率没有额外损失。

在试验中发现，大多数个体在面对问题（1）时会选择(a)，在面对问题（2）时会选择(b)。但事实上这两个选择问题所产生的回报是相同的，是 100%的概率得到 2 万 5 千人民币，还是 25%的概率得到 4 万人民币，75%的概率得到 2 万人民币。

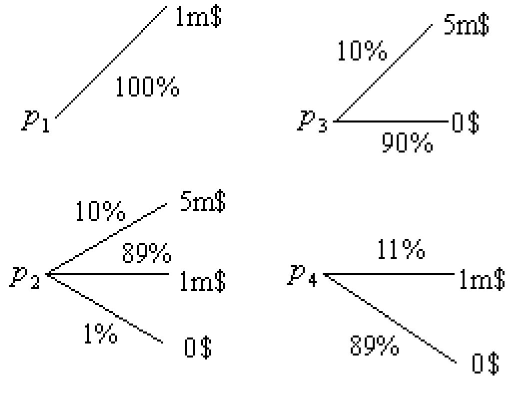
## 三、悖论 3（Ellsberg(1961)悖论）

在密闭的缸 I 中有 50 个红球和 50 个黑球，在缸 II 中有 100 个不知道比例的红球与黑球。考虑两个摸球游戏：（I）个体从缸中摸到一个红球时可以赢得 100RMB，个体可以选择从缸 I 中摸（$R_I$）还是从缸 II 中摸（$R_{II}$）；（II）个体从缸中摸到一个黑球时可以赢得 100RMB，个体可以选择从缸 I 中摸（$B_I$），还是从缸 II 中摸（$B_{II}$）。

实验发现，绝大多数个体会选择$R_I$和$B_I$，但这与偏好的理性选择行为是不一致的。从逻辑上讲，个体在$R_I$和$R_{II}$中更偏爱$R_I$，等价于在$B_I$和$B_{II}$中更偏爱$B_{II}$，因此如果绝大多数个体选择$R_I$的话，应该只有很少的个体会选择$B_I$才对，这说明真实经济中个体决策中存在非理性的成分。

## 四、悖论 4（Allais 悖论）

Allais 悖论由 Allais（1953）给出。考虑如图 1.1 所示的两对彩票：在第一对彩票中，持有彩票$p_1$，个体可以以 100%的概率得到 1000000 美元；持有彩票$p_2$，个体可以以 10%的概率得到 5000000 美元，以 89%的概率得到 1000000 美元，1%的概率得到 0 美元。第二对彩票中，持有彩票$p_3$，个体可以以 10%的概率得到 5000000 美元，90%的概率得到 0 美元；持有彩票$p_4$，个体可以以 11%的概率得到 1000000 美元，89%的概率得到 0 美元。




(图 1.1.1)：Allais 悖论。

在第一对彩票中，大多数人会选择$p_1$；在第二对彩票中，大多数人会选择彩票$p_3$。这种现象与独立性公理矛盾，这一点可以从下面的分析中看出：

$$p_1 \sim 0.11(\$1\text{m}) + 0.89(\$1\text{m}), \tag{1.1.12}$$

$$p_2 \sim 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$1m), \tag{1.1.13}$$

因此$p_1 \succ p_2$等价于

$$0.11(\$1m) + 0.89(\$1m) \succ 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$1m)\text{。} \tag{1.1.14}$$

根据独立性公理，这蕴涵：

$$p_1 \succ \frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\text{。} \tag{1.1.15}$$

根据独立性公理，(1.1.15)等价于：

$$0.11(\$1m) + 0.89(\$0m) \succ 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$0m),$$

即$p_4 \succ p_3$。

从以上四个悖论可以看出，本节所介绍的选择行为的完全理性和期望效用函数的存在性法则是存在疑问的，如何对经典理论进行修正和拓展，属于行为金融学的范畴，我们把它留到第八章中作进一步的讨论。

## §1.2 风险回避及其度量

在金融理论中，我们经常涉及风险回避（Risk Aversion）的概念。风险回避概念的提出，最早可以追溯到 1738 年瑞士著名数学家 Bernoulli 以拉丁文所撰写的题为“*Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*”（即“Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk”）的论文；现代风险理论的给出，应该归功于 Arrow(1963、1965 和 1971)、Pratt(1964)等的研究。下面我们来介绍 Arrow 和 Pratt 等人的工作。

### 1.2.1 风险回避

在金融理论中，我们经常涉及风险回避的概念（Risk Aversion），即个体厌恶风险的存在。个体为什么是风险回避的?下面我们用一个简单例子来加以剖析。

**例 1.2.1** 考虑一个个体决策问题，假定一个已经饿了两天的个体面临一个选择，他可以选择（1）马上得到一个热包子，（2）50%的概率得到两个热包子，50%的概率继续挨饿。一般说来，绝大多数个体都会选择（1）。

尽管两种选择的期望收益相等，但个体获得的期望效用并不相等。假定存在期望效用函数$u(.)$，则期望效用之差可以刻画为：

$$\Delta u = u(1) - \frac{1}{2}[u(0) + u(2)]$$

$$= \frac{1}{2}\{[u(1) - u(0)] - [u(2) - u(1)]\}$$
$$= \frac{1}{2}(u'(\xi_1) - u'(\xi_2))。$$

其中$\xi_1 \in (0,1)$，$\xi_2 \in (1,2)$。如果个体边际效用是递减的，则有：

$$\Delta u = \frac{1}{2}(u'(\xi_1) - u'(\xi_2)) > 0$$

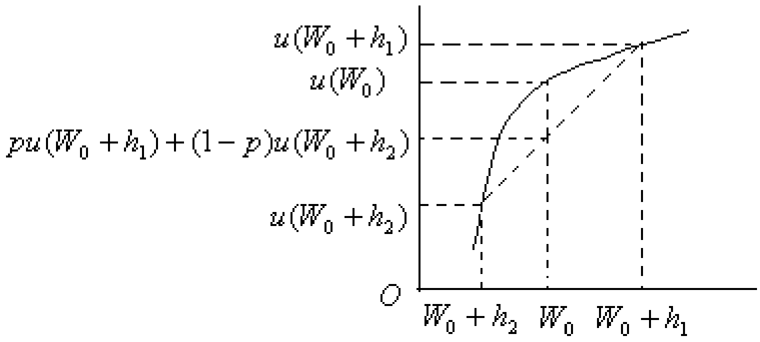
所以如果个体是完全理性的，边际效用是递减的，且存在期望效用函数，则个体放弃消费一个热包子的边际效用损失要远大于消费第二个包子带来的边际效用增加，从而个体会选择（1）。 ●

**定义：**一位个体称为是**风险回避的**，如果在任何财富水平$W_0$下，该个体不愿意接受任意期望回报为零的彩票，或认为接不接受是无所谓的：即$\forall W_0$，$\forall \tilde{z}$满足$E\tilde{z} = 0$，有$Eu(W_0 + \tilde{z}) \le u(W_0)$。一位个体称为是**严格风险回避的**，如果在任何财富水平$w$下，该个体都不愿意接受任意期望回报为零的彩票：即$\forall W_0$，$\forall \tilde{z}$满足$E\tilde{z} = 0$，有$Eu(W_0 + \tilde{z}) < u(W_0)$。

如果取彩票$\tilde{z}$为以概率 p 得到一个正的回报$h_1$，以概率 1-p 得到一个负的回报$h_2$，且满足$ph_1 + (1-p)h_2 = 0$，则（严格）风险回避等价于：

$$u(W_0) = u[p(W_0 + h_1) + (1-p)(W_0 + h_2)$$
$$\ge (>) pu(W_0 + h_1) + (1-p)u(W_0 + h_2); \qquad (1.2.1)$$

因此当个体是（严格）风险回避的，则其效用函数是（严格）凹的；反过来也成立，如图 1.2.1 所示。




（图 1.2.1）：风险回避与凹的效用函数。

当 von Neumann-Morgenstern 效用函数$u(.)$二次可微时，由 Taylor 法则，(1.2.1)蕴涵：

$$u(W_0) \geq (p+1-p)u(W_0)+u'(W_0)(ph_1+(1-p)h_2)$$
$$+u''(W_0)(ph_1^2+(1-p)h_2^2)+o(h_1^2,h_2^2)。$$

整理得：

$$u''(W_0)(ph_1^2+(1-p)h_2^2) \leq 0。\qquad (1.2.2)$$

所以个体的风险回避蕴涵效用函数的凹性，如果存在二阶导数，则二阶导数小于零，即边际效用递减。

### 1.2.2 风险回避的度量

一个风险回避的个体不喜欢均值为零的风险，并不蕴涵他不进行风险资产投资，只要风险资产的期望回报率足够高。同样地，如果购买保险的成本太高，风险回避的个体可能会放弃购买保险而选择承受风险。不同个体在期望收益和可以承受的风险之间的替代关系是不同的，同样一份风险，同样的保险费，有些个体愿意通过保险购买来回避风险，有些个体却宁愿承受风险，为此我们需要对个体的风险回避程度进行刻画。

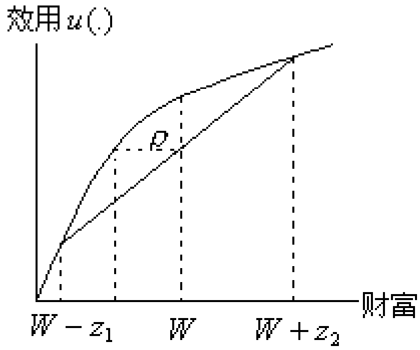
### 一、风险溢金

给定一个均值为零的风险$\tilde{z}$，我们来估计个体愿意支付多少风险溢金，以避免该风险。如果个体的初始财富为$W$，效用函数为$u$，则风险溢金必须

满足：

$$E[u(w+\tilde{z})] = u(w-\rho), \tag{1.2.3}$$

如图 1.2.2 所示。




(图 1.2.2)：给定风险下的风险溢金

当$\tilde{z}$充分小时，对(1.2.3)作二阶 Taylor 近似，忽略$o(E[\tilde{z}^2])$和$o(\rho)$，有：

$$u(W) + u'(W)E[\tilde{z}] + \frac{1}{2}u''(W)\sigma_z^2 \approx u(W) + u'(W)\rho, \tag{1.2.4}$$

如果$E[\tilde{z}] = 0$，则上式整理得：

$$\rho \cong -\frac{1}{2}\frac{u''(W)}{u'(W)}\sigma_z^2。 \tag{1.2.5}$$

上式由 Arrow(1963)和 Pratt(1964)分别独立给出，称为 Arrow-Pratt 近似。

类似地，当个体额外承受这样一个风险时，他需要得到的补偿费可以表示为：

$$E[u(w+v+\tilde{z})] = u(w); \tag{1.2.6}$$

对上式进行二阶 Taylor 展开，则得：

$$u(W) + u'(W)(v + E[\tilde{z}]) + \frac{1}{2}u''(W)E[(v+\tilde{z})^2] + o(E[\tilde{z}^2], v^2) = u(W),$$

当$\tilde{z}$比较小、均值为零时，忽略$o(E[\tilde{z}^2])$和$o(\rho)$，上式可以简化为：

$$v \cong -\frac{1}{2}\frac{u''(W)}{u'(W)}\sigma_z^2。 \tag{1.2.7}$$

由此我们可以得到如下定理：

**定理 1.2.1**：对于均值为零的小风险$\tilde{z}$，个体为避免该风险所愿意支付的风险溢金可以表示为：

$$\rho \cong -\frac{1}{2}\frac{u''(W)}{u'(W)}\sigma_z^2$$

该风险溢金等于个体额外承受该风险时所需要的补偿。

## 二、绝对风险回避系数

根据上一小节的讨论，给定一个均值为零的风险，个体为避免该风险愿意支付的风险溢金由该风险的方差$\sigma_z^2$和$-u''(W)/u'(W)$决定。当风险尺度比较小时，该风险的方差$\sigma_z^2$越大，个体愿意支付的风险溢金越高；$-u''(W)/u'(W)$越大，个体愿意支付的风险溢金越高，$-u''(W)/u'(W)$刻画了个体对风险的厌恶程度被称为 Arrow-Pratt 绝对风险回避系数。

**定义：**$R_A(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$被称为 Arrow-Pratt 意义下的绝对风险回避系数。

由定理 1.1.1，个体偏好的期望效用表示精确到一个仿射变换，因此给定个体偏好，个体的绝对风险回避系数是唯一的，不随效用函数的选取而变化。事实上，绝对风险回避系数刻画了效用函数的弯曲程度，在仿射变换下保持不变。

**定义**：称效用函数展示减的绝对风险回避，如果$R_A(.)$是个严格减的函数；类似地称效用函数展示增的绝对风险回避，如果$R_A(.)$是个严格增的函数；称效用函数是常数绝对风险回避的，如果$R_A(.)$是个常数。

**定理 1.2.2**：给定一个均值为零、充分小的风险$\tilde{z}$，个体为避免该风险愿意支付的风险溢金$\rho(W)$依赖于初始财富$W$，满足：

如果$\frac{d\rho(W)}{dW} < 0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW} < 0$，$\forall W$；

如果$\frac{d\rho(W)}{dW} > 0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW} > 0$，$\forall W$；

如果$\frac{d\rho(W)}{dW} = 0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW} = 0$，$\forall W$；

证明：由(1.2.20)式，当风险$\tilde{z}$充分小，均值为零时，有：

$$\rho(W) = \frac{1}{2}R_A(W)\sigma_z^2,$$

对上式两边关于$W$求导数，我们有：

$$\frac{d\rho(W)}{dW} = \frac{1}{2}\frac{dR_A(W)}{dW}\sigma_z^2,$$

因此对于$\forall W$，我们有：

如果$\frac{d\rho(W)}{dW}<0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW}<0$；如果$\frac{d\rho(W)}{dW}>0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW}>0$；如果$\frac{d\rho(W)}{dW}=0$，则$\frac{dR_A(W)}{dW}=0$。

证毕。■

**推论 1.2.1**：减的绝对风险回避蕴涵$u'''(W)>0$。

证明：$\frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{-u'''(W)u'(W)+(u''(W))^2W}{(u'(W))^2}<0$

所以$u'''(W)>[(u''(W))^2W]/u'(W)>0$。 ■

**定义**：考虑两位个体$i$和$k$，称个体$i$比个体$k$更加风险回避，如果$R_A^i(W)>R_A^k(W)$，对任意 W 成立。

**定理 1.2.3**：给定两位风险回避、不饱和（边际效用大于零）的个体$i$和$k$，下属三个条件是相互等价的：

a) 在相同初始财富下，为避免任意给定的一个充分小，均值为零的风险，个体$i$愿意支付比个体$k$更高的风险溢金；

b) $R_A^i(W)>R_A^k(W)$，对任意 W 成立；

c) 存在一个严格增、凹的函数$G(.)$，满足：$u_i(W)=G(u_k(W))$，$\forall W$。

证明：由 Arrow-Pratt 近似，(a)和(b)的等价性是显然的。

（b）和（c）的等价性：因为个体$i$和$k$的效用函数严格增、严格凹，所以$u_k(z)$存在逆函数$u_k^{-1}(z)$，定义：

$$G(y)=u_i(u_k^{-1}(y)), \tag{1.2.8}$$

则有$u_i(W)=G(u_k(W))$。

对$u_i(W)=G(u_k(W))$两边关于$y$求导，得：

$$u_i{}'(W)=G'(u_k(W))u_k{}'(W)。 \tag{1.2.9}$$

由$u_i(W)$和$u_k(W)$严格单调增，(1.2.9)蕴涵$G'(.)>0$。

对(1.2.9)两边再次关于$y$求导，得：

$$u_i{}''(W)=G''(u_k(W))(u_k{}'(W))^2+G'(u_k(W))u_k{}''(W), \tag{1.2.10}$$

将(1.2.10)除以(1.2.9)，整理得：

$$R_A^i(W)=-\frac{G''(u_k(W))}{G'(u_k(W))}u_k{}'(W)+R_A^k(W)。\qquad(1.2.11)$$

$b\Rightarrow c$：如果对任意 $W$ 有$R_A^i(W)>R_A^k(W)$，根据(1.2.11)我们有：

$$\frac{G''(u_k(W))}{G'(u_k(W))}u_k{}'(W)<0。\qquad(1.2.12)$$

因为$G'(.)>0$，$u_k{}'(.)>0$，所以$G''(.)<0$，即$G(.)$是个严格凹、严格增的函数。

$c\Rightarrow b$：如果对任意 $W$，$G''(W)<0$，考虑到$G'(.)>0$，$u_k{}'(.)>0$，由(1.2.11)得：

$$R_A^i(W)=-\frac{G''(u_k(W))}{G'(u_k(W))}u_k'(W)+R_A^k(W)>R_A^k(W)。$$

证明完毕。■

## 三、相对风险回避系数

绝对风险回避系数可以改写为：

$$R_A(W)=-\frac{du'(W)}{dW}\frac{1}{u'(w)},$$

它可以看作是边际效用的衰减率，即单位财富量的上升所导致的边际效用的下降。通过量纲计算可以看出，绝对风险回避系数的单位与财富单位相同，如果财富以 RMB 为单位，则绝对风险回避系数以 RMB 的倒数为单位，如果财富以美元为单位，则绝对风险回避系数也应该以美元的倒数为单位，不同的财富单位将导致不同的绝对风险回避系数。

在测度灵敏性时，经济学家通常偏爱无单位的量。为此，我们将相对风险回避系数与边际效用对财富的弹性联系在一起。

**定义：** $R_R(W)\equiv-\frac{du'(W)/u'(W)}{dW/W}$称为 Arrow-Pratt 意义下的相对风险回避系数。

相对风险回避系数$R_R(.)$可以表示为：

$$R_R(W)\equiv-\frac{du'(W)/u'(W)}{dW/W}=\frac{-Wu''(W)}{u'(W)}=WR_A(W),\qquad(1.2.13)$$

因此相对风险回避系数是绝对风险回避系数和初始财富量的乘积。

**定义**：称效用函数展示减的相对风险回避，如果$R_R(.)$是个严格减的函数；类似地称效用函数展示增的相对风险回避，如果$R_R(.)$是个严格增的函数；称效用函数是常数相对风险回避的，如果$R_R(.)$是个常数。

绝对风险回避系数与风险溢金（的绝对量）是通过 Arrow-Pratt 近似联系在一起的，下面我们给出一个类似的近似关系，通过该关系将相对风险回避系数和风险溢金（的相对值）联系在一起。

假定个体的初始财富量为$W$，给定一个均值为零的风险$\tilde{z}$，下面来估计个体愿意支付初始财富量的百分之几，以避免该风险，我们将该百分比看作风险溢金的相对值，它必须满足：

$$E[u(w(1+\tilde{z}))] = u(w(1-\hat{\rho}), \tag{1.2.14}$$

当$\tilde{z}$比较小时，通过二次 Taylor 近似整理得：

$$\hat{\rho} \cong \frac{1}{2} R_R(W)\sigma_z^2。 \tag{1.2.15}$$

因此，为避免给定的均值为零的、尺度比较小的风险，个体愿意损失的财富份额正比于风险的方差和个体的相对风险回避系数。类似于定理 1.2.2，由(1.2.15)，我们有如下推论。

**推论**：$\tilde{\rho}$依赖于初始财富$W$；当该风险的尺度充分小时，对$\forall W$，我们有：

$\frac{d\tilde{\rho}(W)}{dW} < 0 \Leftrightarrow \frac{dR_R(W)}{dW} < 0$；

$\frac{d\tilde{\rho}(W)}{dW} > 0 \Leftrightarrow \frac{dR_R(W)}{dW} > 0$；

$\frac{d\tilde{\rho}(W)}{dW} = 0 \Leftrightarrow \frac{dR_R(W)}{dW} = 0$。

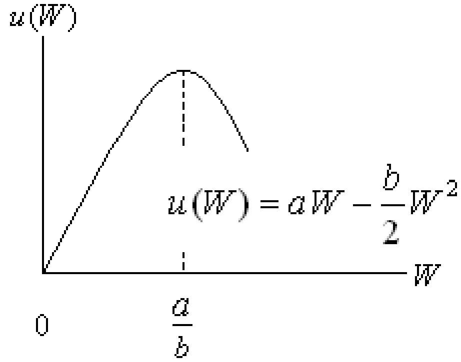
### 1.2.3 几种常见的效用函数

下面介绍金融经济学中几种常用的凹效用函数，这些效用函数结构相对简单，使得经济模型可以解析求解。

### 一、 凹的二次效用函数

二次效用函数可以表示为：

$$u(W) = aW - \frac{b}{2}W^2，\ a > 0b > 0; \qquad (1.2.16)$$




（图 1.2.3）：二次效用函数

其一阶导数、二阶导数分别为：

$$u'(W) = a - bW;$$

$$u''(W) = -b。$$

考虑到消费品或财富的边际效用通常是非负的（即消费品或财富是不饱和的），$W$的取值范围为[0,a/b]，其函数图形见 1.2.3。

因为$R_A(W) = \frac{b}{a-bW}$，$\frac{dR_A(W)}{dW} = \frac{b^2}{(a-bW)^2} > 0$，所以二次效用函数展示增的绝对风险回避。$R_R(W) = \frac{bW}{1-bW}$是个增函数，所以展示增的相对风险回避系数。

二次效用函数

## 二、负指数效用函数

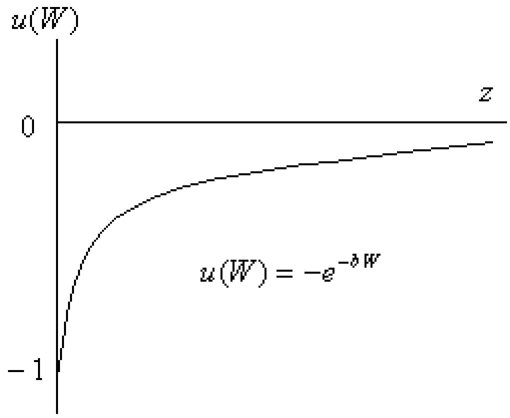
负指数效用函数可以表示为：

$$u(W) = -e^{-bW}, \quad b \geq 0 \ ; \qquad (1.2.17)$$

其图形如 1.2.4 所示，其一阶导数和二阶导数可以分别表示为：

$$u'(W) = be^{-bW} > 0;$$

$$u''(W) = -b^2e^{-bW} < 0。$$



（图 1.2.4）：负指数效用函数

因为$\lim\limits_{W\to+\infty} u(W) = 0$，所以负指数效用函数有上界。其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以表示为：

$R_A(W) = b$，　$dR_A(W)/dW = 0$；

$R_R(W) = bW$，　$dR_R(W)/dW = b > 0$。

所以负指数效用函数展示出常数绝对风险回避、增的相对风险回避。

## 三、幂效用函数

**狭义幂效用函数**可以表示为：

$$u(W) = \frac{W^{1-\theta}-1}{1-\theta},\ \theta > 0。\qquad (1.2.18)$$

当$\theta$趋向于 1 时，利用 l'Hopital 法则，上式可以简化为：

$$u(W) = ln\, W。\qquad (1.2.18')$$

狭义幂效用函数的一阶和二阶导数分别为：

$u'(W) = W^{-\theta}$，　$u''(W) = -\theta W^{-\theta-1}$。

所以其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以分别表示为：

$R_A(W) = \theta/W$，　$dR_A(W)/dW = -\theta/W^2 < 0$；

$R_R(W) = \theta$，　$dR_R(W)/dW = 0$。

因此狭义幂效用函数展示出减绝对风险回避和常数相对风险回避，狭义幂效用函数又被称为常数相对风险回避的效用函数，或 CRRA（constant relative risk aversion）效用函数。

**广义幂效用函数**可以表示为：

$$u(W)=\frac{(A+BW)^{1-1/B}}{B-1}，B>0，A\neq 0， \quad (1.2.18")$$

其中$W>max[-A/B,0]$。其一阶导数和二阶导数分别为：

$$u'(W)=(A+BW)^{-1/B}，$$

$$u''(W)=-(A+BW)^{-\frac{1}{B}-1}。$$

所以其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以分别表示为：

$$R_A(W)=\frac{1}{A+BW}， \quad \frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{-B}{(A+BW)^2}<0；$$

$$R_R(W)=\frac{W}{A+BW}，\frac{dR_A(W)}{dW}=\frac{A}{(A+BW)^2}=sign(A)。$$

广义幂效用函数展示出减的绝对风险回避，当$A>0$时，展示出增的相对风险回避，当$A<0$时展示出减的相对风险回避，当$A=0$时，广义幂效用函数退化为具有常数相对风险回避的狭义幂效用函数。

### 1.2.4 静态最优投资决策与比较静态分析

#### 一、 静态最优组合问题及求解

考虑一个两期的静态投资组合选择问题，假定个体效用函数严格增、严格凹，t=0 时个体可以在 J 种风险资产和一种无风险资产上进行投资。记第$j$种风险资产上的随机回报率为$\tilde{r}_j$，$j=1,2,\ldots,J$，无风险资产上的回报率为$r_f$。假定个体初始财富量为$W_0$，$a_j$为个体投资在第$j$种风险资产上的财富量，则个体在 t=1 时的随机财富量为：

$$\widetilde{W}=(W_0-\sum_j a_j)(1+r_f)+\sum_j a_j(1+\tilde{r}_j)=W_0(1+r_f)+\sum_j a_j(\tilde{r}_j-r_f)，$$

个体的最优投资组合决策问题可以表示为：

$$\max_{\{a_j\}}E[u(W_0(1+r_f)+\sum_j a_j(\tilde{r}_j-r_f))]， \quad (1.2.19)$$

求解得一阶条件为：

$$E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j-r_f)]=0，j=1,2,\ldots,J。 \quad (1.2.20)$$

当个体是风险货币的（效用函数严格凹）时，上述一阶条件是一个充分必要条件。

**推论**：当个体是风险回避的、不饱和的，个体愿意投资风险资产，则存在$j$，满足：$Pr\,o\,b\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} \in (0,1]$。

证明：如果上述条件不成立，则我们有：

$$Pr\,o\,b\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} = 0。$$

如果$Pr\,o\,b\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} = 0$，则有：

$$\begin{aligned} E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)] &= E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)|\tilde{r}_j - r_f > 0] \times prob\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} \\ &\quad + E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)|\tilde{r}_j - r_f \le 0] \times prob\{\tilde{r}_j - r_f \le 0\} \\ &= E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)|\tilde{r}_j - r_f \le 0] \\ &< 0。\end{aligned}$$

与(1.2.20)式矛盾，所以推论成立。

**定理 1.2.3**：一个风险回避的、不饱和的投资者愿意从事风险投资，当且仅当至少有一种风险资产的期望回报率超过无风险利率。

证明：（充分性）假定存在风险资产$j$，其期望回报率严格大于无风险利率，即$E[\tilde{r}_j - r_f] > 0$，因此我们有：

$$E[u'(W_0(1 + r_f))(\tilde{r}_j - r_f)] > 0，$$

这蕴涵当个体的风险资产投资为零时，增加第$j$种风险资产上的投资可以提高个体效用，因此风险回避的、不饱和的投资者愿意从事风险投资。

（必要性）我们通过证明上述命题的否命题来证明逆命题。如果所有风险资产的期望回报率都低于无风险利率，则有：

$$E[u'(W_0(1 + r_f))(\tilde{r}_j - r_f)] < 0，\ j = 1,2,\dots,J$$

这蕴涵如果个体还没有投资风险资产，则该个体投资风险资产会降低效用，因此风险回避的、不饱和的投资者不会从事风险投资。证毕。 ■

需要说明的是，在上述充分性的证明中，风险资产$j$的期望回报率严格大于无风险利率，蕴涵个体会进行风险资产投资，但并不表明最优时第$j$种风险资产上的投资一定严格大于 0，因为可能有其他风险资产更加吸引人。

**例 1.2.2**：假定经济中有 3 种资产，两种风险资产$a_1$、$a_2$和一种无风险资产 b，假定无风险资产回报率满足$r_f = 0.05$，风险资产$a_1$、$a_2$的随机回报率可以刻画为：

$$\tilde{r}_1 = \begin{cases} 0.10 & \omega_1 \\ 0.03 & \omega_2 \end{cases}, \qquad \tilde{r}_2 = \begin{cases} 0.11 & \omega_1 \\ 0.04 & \omega_2 \end{cases}$$

其中$\omega_1$和$\omega_2$是两个等概率的自然状态。很显然，$E[\tilde{r}_1] = 0.065 > r_f$，但资产$a_2$的回报率要严格地高于资产$a_1$，因此个体在资产$a_1$上的投资量不可能大于 0。

## 二、一种风险资产和一种无风险资产的情形

当经济中只有一种风险资产和一种无风险资产时，一阶条件(1.2.20)可以简化为：

$$E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)] = 0, \tag{1.2.21}$$

其中$\widetilde{W}$可以表示为$\widetilde{W} = W_0(1 + r_f) + a(\tilde{r} - r_f)$，$a$和$\tilde{r}$分别为投资在风险资产上的财富量和风险资产的随机回报率。

下面我们来给出几个重要的定理，不同于 1.2.2 中的讨论，此处定理的推导不需要风险尺度的充分小，因此定理在全局意义上成立。

**定理 1.2.4 (Arrow (1970))**：假定个体是风险回避的、不饱和，且风险资产的期望回报率超过无风险利率。如果在整个定义域内如果效用函数展示减的绝对风险回避，则风险资产是一种正常品(normal good)；如果效用函数展示增的绝对风险回避，则风险资产是一种次品(inferior good)；效用函数是常数绝对风险回避的，则个体对风险资产的需求不依赖于个体初始财富。即：

$$\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} < 0,\ \forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dW_0} > 0,\ \forall W_0;$$

$$\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} > 0,\ \forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dW_0} < 0,\ \forall W_0;$$

$\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} = 0$，$\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dW_0} = 0$，$\forall W_0$。

证明：决策最优时我们有一阶条件：

$$E[u'(W_0(1+r_f) + a(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0。$$

两边对$W_0$求导，得：

$$E[u''(\widetilde{W})(1 + r_f + \frac{da}{dW_0}(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)] = 0，$$

整理得：

$$\frac{da}{dW_0} = -\frac{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)](1 + r_f)}{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)^2]},$$

所以我们有：

$$sign(\frac{da}{dW_0}) = sign(E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)])。$$

如果个体效用函数展示减的绝对风险回避，即$\frac{dR_A(z)}{dz} < 0$，则有：

$$\begin{cases} R_A(\widetilde{W}) \leq R_A(W_0(1+r_f)) & \text{如果} \tilde{r} \geq r_f \\ R_A(\widetilde{W}) > R_A(W_0(1+r_f)) & \text{如果} \tilde{r} < r_f \end{cases}。$$

当$\tilde{r} \geq r_f$时，$-\frac{u''(\widetilde{W})}{u'(\widetilde{W})} \leq R_A(W_0(1+r_f))$，因此有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f) \geq -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f);$$

类似地，当$\tilde{r} < r_f$时，我们有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f) \geq -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)。$$

所以我们有：

$$E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)] \geq -R_A(W_0(1+r_f))E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r} - r_f)] = 0。$$

由此得：$\frac{da}{dW_0} > 0$。

其它两种情形可类似得到。 ■

**定理 1.2.5**：假定个体是风险回避的、不饱和，且至少有一种风险资产的期望回报率超过无风险利率。在整个定义域内如果效用函数展示减的相对风险回避，则个体对风险资产需求的财富弹性严格大于 1；如果效用函数展示增的绝对风险回避，则个体对风险资产需求的财富弹性严格小于 1；如果效用函数是常数绝对风险回避的，则个体对风险资产需求的财富弹性等于 1。即：

$$\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} < 0，\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a} > 1，\forall W_0；$$

$$\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} > 0，\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a} < 1，\forall W_0；$$

$$\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} = 0，\forall W_0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a} = 1，\forall W_0；$$

证明：将表达式$\frac{da}{dW_0} = -\frac{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)](1+r_f)}{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}$代入$\eta = \frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a}$中，整理得：

$$\eta = 1 + \frac{W_0(1+r_f)E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)] + aE[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}{-aE[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}$$

$$= 1 + \frac{E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W}]}{-aE[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2]}$$

如果个体效用函数展示减的相对风险回避，即$dR_R(z)/dz < 0$，要证明$\eta > 1$，只需证明$E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W}] > 0$。

当$\tilde{r} \geq r_f$时，$-\frac{u''(\widetilde{W})\widetilde{W}}{u'(\widetilde{W})} \leq R_A(W_0(1+r_f))$，因此有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W} \geq -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f);$$

类似地，当$\tilde{r} < r_f$时，我们有：

$$u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W} > -R_A(W_0(1+r_f))u'(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)。$$

因此$E[u''(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)\widetilde{W}] > -R_A(W_0(1+r_f))E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}-r_f)] = 0$。

其它两种情形可类似证明。 ■

**定理 1.2.6(Pratt(1964))**：$R_A(.)$是一个全局意义上的风险回避系数，即如果存在两位风险回避的个体$i$和$k$，有$R_A^i(W) > R_A^k(W)$，对任意 W 成立，则在相同的初始财富下，为避免任意一个随机损失，个体$i$愿意支付比个体$k$更高的风险溢金。

证明：事实上我们只需证明，对任意的风险资产$\tilde{r}$，个体$k$将所有财富都投资在该资产上，而个体$i$不一定会这样做。

假定存在一种风险资产$\tilde{r}$，个体$k$将所有财富都投资在该资产上，则有：

$E[u_k{}'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)] = 0$。

因为$R_A^i(W) > R_A^k(W)$，对任意 W 成立，根据定理 1.2.3，存在一个严格增、严格凹的函数$G(.)$，满足$u_i(W) = G(u_k(W))$。

$$
\begin{aligned}
&E[u_i{}'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)] \\
&= E[G'(u_k(W_0(1+\tilde{r})))u_k{}'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)] \\
&= E[G'(u_k(W_0(1+\tilde{r})))u_k{}'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)|\tilde{r}-r_f \geq 0]prob\{\tilde{r} \\
&\geq r_f\} + E[G'(u_k(W_0(1+\tilde{r})))u_k{}'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)|\tilde{r}-r_f \\
&< 0]prob\{\tilde{r} < r_f\} \\
&< G'(u_k(W_0(1+r_f)))E[u_k{}'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)]
\end{aligned}
$$

$= 0$。 ■

## 三、多种风险资产和一种无风险资产的情形

当经济中风险资产的品种多于一种时，上述讨论并不一定成立。例如，即使个体效用函数展示减的相对风险回避，个体对特定风险资产需求的财富弹性可能会小于或等于 1，其原因是随着个体财富量的上升，个体的风险资产投资组合会发生变化。

Cass 和 Stiglitz(1970)研究了个体风险资产投资组合不随初始财富量变化的充分必要条件。在该条件下，个体初始财富量的变化仅导致了风险资产组合和无风险资产之间权重的变化，风险资产组合内部权重不变。Cass 和 Stiglitz(1970)将这种现象称之为二基金货币分离。

**定义**：个体展示二基金货币分离，如果他总是选择持有相同的风险资产投资组合；当初始财富量变化时，仅改变该组合和无风险资产之间的权重。

**定理 1.2.7(Cass 和 Stiglitz(1970))**：个体效用函数展示二基金货币分离，当且仅当该效用函数满足：

$$-\frac{u'(W)}{u''(W)} = a + bW。 \quad (1.2.22)$$

证明：此处仅证明充分性，必要性的证明比较复杂，有兴趣的读者可参考 Cass 和 Stiglitz（1970）。

我们可以将个体投资在第 j 种风险资产上的财富量表示为：

$$a_j = \alpha_j(W_0)(a + b(1 + r_f)W_0)，j = 1,2,\ldots J。\qquad (1.2.23)$$

因此 t=1 时的随机财富量可以表示为：

$$\widetilde{W} = W_0(1 + r_f) + \sum_j \alpha_j(W_0)(a + b(1 + r_f)W_0)(\tilde{r}_j - r_f)。$$

如果我们能证明$d\alpha_j(W_0)/dW_0 = 0$，$j = 1,2,\ldots J$，则$a_j/a_k = \alpha_j/\alpha_k$，对任意$j,k = 1,2,\ldots J$成立，即风险资产投资组合不依赖于初始财富量的变化。

由(1.2.22)，我们有：

$$u''(\widetilde{W}) = \frac{u'(\widetilde{W})}{a+b[(1+r_f)W_0+\sum_j(\tilde{r}_j-r_f)\alpha_j b}$$

$$= \frac{u'(\widetilde{W})}{(a+b(1+r_f)W_0)(1+\sum_j(\tilde{r}_j-r_f)\alpha_j b)}。\qquad (1.2.23)$$

对一阶条件$E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)] = 0$，$j = 1,2,\ldots J$关于$W_0$求导，整理得：

$$E\left\{\begin{bmatrix} (\tilde{r}_1 - r_f)^2 & \cdots & (\tilde{r}_1 - r_f)(\tilde{r}_J - r_f) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{r}_J - r_f)(\tilde{r}_1 - r_f) & \cdots & (\tilde{r}_J - r_f)^2 \end{bmatrix} u''(\widetilde{W})(a + b(1 + r_f)W_0)\right\}\begin{pmatrix} \frac{d\alpha_1}{dW_0} \\ \vdots \\ \frac{d\alpha_J}{dW_0} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} E\{u''(\widetilde{W})(\tilde{r}_1 - r_f)(1 + r_f)[1 + \sum_j(\tilde{r}_j - r_f)\alpha_j b]\} \\ \vdots \\ E\{u''(\widetilde{W})(\tilde{r}_J - r_f)(1 + r_f)[1 + \sum_j(\tilde{r}_j - r_f)\alpha_j b]\} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1+r_f}{a+b(1+r_f)W_0}\begin{pmatrix} E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_1 - r_f)] \\ \vdots \\ E[u'(\widetilde{W})(\tilde{r}_J - r_f)] \end{pmatrix}$$

$$= 0。$$

上式中第二个等号通过将(1.2.23)式代入得到，第三个等号可根据一阶条件得到。

考虑到矩阵$\begin{pmatrix} (\tilde{r}_1 - r_f)^2 & \cdots & (\tilde{r}_1 - r_f)(\tilde{r}_J - r_f) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{r}_J - r_f)(\tilde{r}_1 - r_f) & \cdots & (\tilde{r}_J - r_f)^2 \end{pmatrix}$在遍历意义下是

非奇异的，因此上述向量方程存在唯一的零解，即对任意$j = 1,2,\ldots,J$，有$d\alpha_j/dW_0 = 0$。 ■

根据上面的讨论，当$a \neq 0$时，风险资产之间的组合权重不随初始财富量的变化而变化，但风险资产组合与无风险资产之间的相对权重随着个体初始财富量的变化而变化，我们称之为部分分离(partially separated)；当$a = 0$时，所有资产之间的相对权重独立于个体的初始财富量，我们称之为完全分离(completely separated)。求解微分方程(1.2.22)，我们有：

$$(ln\,u'(W))' = \begin{cases} -\frac{1}{a} & \text{当} b = 0 \text{ 时} \\ (-\frac{1}{b} ln(a + bW))' & \text{当} b \neq 0 \text{ 时} \end{cases};$$

因此满足(1.2.22)的边际效用函数可以表示为：

$$u'(W) = \begin{cases} ce^{-\frac{W}{a}} & b = 0 \\ c(a + bW)^{-\frac{1}{b}} & b \neq 0 \end{cases}。 \tag{1.2.24}$$

上式可以简化为：

$$u'(W) = (A + BW)^C, \tag{1.2.25a}$$

或

$$u'(W) = A\,exp(BW), \tag{1.2.25b}$$

为了保证效用函数严格增、严格凹，在(1.2.25a)中参数必须满足$B > 0$、$C > 0$、$W \geq max(0, -A/B)$或$A > 0$、$B < 0$、$C > 0$、$W \in [0, -A/B)$，在(1.2.25b)中参数必须满足$A > 0$、$B < 0$、$W \geq 0$。

## § 1.3 资产的随机占优

上一节我们讨论了风险回避概念，并给出了个体风险回避程度的比较。这一节我们引入随机占优(Stochastic Dominance)的概念，来对资产的优劣进行比较。需要说明的是，并非所有风险资产都是可以进行比较的，而且这种比较依赖于个体偏好。

### 1.3.1 一阶随机占优

**定义**：称风险资产 A 一阶随机占优(First Degree Stochastic Dominance)于风险资产 B，如果对于所有具有单调增、连续效用函数的个体都觉得资产 A 要优于资产 B，或觉得两者是无差异的[2]。

为简化讨论，我们假定资产 A 和资产 B 的随机回报率在 0 和 1 之间。记资产 A 和资产 B 的随机回报率的累计分布函数为：

$F_A(z) = prob\{\omega | r_A(\omega) \leq z, \forall\omega \in \Omega\}$，

$F_B(z) = prob\{\omega | r_B(\omega) \leq z, \forall\omega \in \Omega\}$。

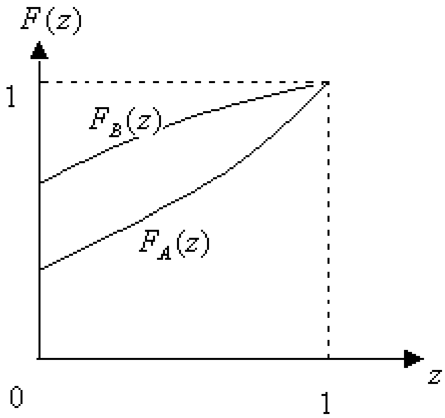
则$F_A(1) = F_B(1) = 1$，$F_A(0)$和$F_B(0)$不必为零。

**定理 1.3.1**：下列三种陈述等价：

（1）$A \underset{FSD}{\geq} B$；

（2）$F_A(z) \leq F_B(z)$，$\forall z \in [0,1]$； (1.3.1)

（3）$\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha} \geq 0$。 (1.3.2)




（图 1.3.1）：一阶随机占优下累计概率分布之间的关系

关系式(1.3.1)下$F_A(z)$和$F_B(z)$之间的关系如图 1.3.1 所示，该关系式蕴涵，对任意给定的$z$，资产 A 回报大于$z$的概率要大于资产 B，但这并不蕴涵

[2]注意此处个体偏好满足不饱和性和连续性，但并不要求是凹的。

$r_A(\omega) \geq r_B(\omega)$，$\forall \omega \in \Omega$。关系式(1.3.2)中的“$\overset{d}{=}$”代表依分布相等，关系式“$\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha} \geq 0$”等价于关系式“$\forall z \in [0,1]$，

$prob\{\omega | r_A(\omega) = z, \omega \in \Omega\} = prob\{\omega | r_B(\omega) + \alpha(\omega, \omega \in \Omega) = z\}$”。

由下面的例 1.3.1，我们可以更清楚地理解上述定理。

**例 1.3.1**：假定经济中有三个自然状态$\omega_1$、$\omega_2$和$\omega_3$，这三个自然状态发生的概率都等于 1/3。假定资产 A 和资产 B 的随机回报率如表 1.3.1 所示。

| 自然状态 / 资产 | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ |
|---|---|---|---|
| $\tilde{r}_A$ | 1 | 1/2 | 0 |
| $\tilde{r}_B$ | 0 | 0 | 1 |

（表 1.3.1）：资产 A 和资产 B 的随机回报率

任意给定一个严格增、连续的效用函数$u(.)$，在资产 A 和资产 B 下个体的期望效用值分别为：

$$E[u(W_0(1+\tilde{r}_A))] = \frac{1}{3}u(2W_0) + \frac{1}{3}u(1.5W_0) + \frac{1}{3}u(W_0)$$

$$> \frac{1}{3}u(2W_0) + \frac{2}{3}u(W_0)$$

$$= E[u(W_0(1+\tilde{r}_B))]。$$

因此资产 A 一阶随机占优于资产 B。

资产 A 和资产 B 的随机回报率的累计概率分布满足：

$$F_A(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} & z < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ 1 & z = 1 \end{cases}；\quad F_B(z) = \begin{cases} \frac{2}{3} & z < 1 \\ 1 & z = 1 \end{cases}。$$

因此$F_A(z) \leq F_B(z)$对任意$z \in [0,1]$成立。

另外，存在一个随机变量$\tilde{\alpha} \geq 0$，满足：

$r_A(\omega_1) = r_B(\omega_3) + \alpha(\omega_3) = 1$，$\alpha(\omega_3) = 0$；

$r_A(\omega_2) = r_B(\omega_2) + \alpha(\omega_2) = 0.5$，$\alpha(\omega_2) = 0.5$；

$r_A(\omega_3) = r_B(\omega_1) + \alpha(\omega_1) = 0$，$\alpha(\omega_1) = 0$。

因此对$\forall z \in [0,1]$，有$prob\{\omega | r_A(\omega) = z\} = prob\{\omega | r_B(\omega) + \alpha(\omega) = z\}$，即$\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$。 ●

**证明**：1、((1)⇔ (2))：不妨假定个体初始财富量$W_0 = 1$，

$$A \underset{FSD}{\geq} B \Leftrightarrow E[u(1+\tilde{r}_A)] \geq E[u(1+\tilde{r}_B)]$$

$$\Leftrightarrow \int_{[0,1]} u(1+z)dF_A(z) \geq \int_{[0,1]} u(1+z)dF_B(z)。$$

注意到此处$\int_{[0,1]} u(1+z)dF_A(z) \equiv u(1)F_A(0) + \int_0^1 u(1+z)dF_A(z)$。

$$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z) - F_B(z)]$$

$= u(1)(F_A(0) - F_B(0)) + \int_0^1 u(1+z)d(F_A(z) - F_B(z)) = u(1)(F_A(0) - F_B(0)) + u(1+z)(F_A(z) - F_B(z))|_0^1 - \int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz$因此我们有：

$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z) - F_B(z)] = -\int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz$。(1.3.3)

所以我们有：

$$A \underset{FSD}{\geq} B \Leftrightarrow \int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz \leq 0。$$

① 如果$A \underset{FSD}{\geq} B$，则有$\int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz \leq 0$。假定存在$z_0 \in [0,1]$，有$F_A(z_0) - F_B(z_0) > 0$，根据$F_A(.)$和$F_B(.)$的右半连续性,存在一个闭区间$[x,c]$，$x \leq z_0 < c$，在该区间中有$F_A(z) - F_B(z) > 0$。取一个单调增、连续的效用函数$u(.)$，满足：

$$u'(1+z) = \begin{cases} 1 & z \in [x,c] \\ 0 & z \notin [x,c] \end{cases},$$

即$u(1+z) = \int_0^z \chi_{[1+x,1+c]}(1+t)dt$，$\forall z \in [0,1]$。此处$\chi(.)$是一个示性函数，满足：

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}。$$

将该效用函数代入积分式，有：

$$\int_0^1 (F_A(z) - F_B(z))u'(1+z)dz = \int_x^c (F_A(z) - F_B(z))dz > 0,$$

根据(1.3.3)，有$E[u(1+\tilde{r}_A)] - E[u(1+\tilde{r}_B)] < 0$，与假设矛盾。因此(2)成立。

② 假定(2)成立，即$F_A(z) \leq F_B(z)$，$\forall z \in [0,1]$。根据(1.3.3)式，我们有：

$E[u(1+\tilde{r}_A)]-E[u(1+\tilde{r}_B)]=-\int_0^1(F_A(z)-F_B(z))u'(1+z)dz\geq 0$，即$A \underset{FSD}{\geq} B$。

2、((3)⇔ (1))：如果存在$\tilde{\alpha}$，满足$\tilde{r}_A \stackrel{d}{=} \tilde{r}_B+\tilde{\alpha}$，$\tilde{\alpha}\geq 0$，则有：

$$E[u(1+\tilde{r}_A)]=E[u(1+\tilde{r}_B+\tilde{\alpha})]\geq E[u(1+\tilde{r}_B)]。$$

反过来的证明比较复杂，略。 ■

### 1.3.2 二阶随机占优

在一阶随机占优中，我们仅假定个体是不饱和的，其效用函数单调增；这一节要介绍的二阶随机占优则仅假定了个体是风险回避的。

**定义**：称风险资产 A 二阶随机占(Second Degree Stochastic Dominance)优于风险资产 B，记为$A \underset{SSD}{\geq} B$，如果所有满足效用函数的一阶导数在[1,2]上除了零测集外连续的风险回避的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

**定理 1.3.2** 以下三种陈述等价：

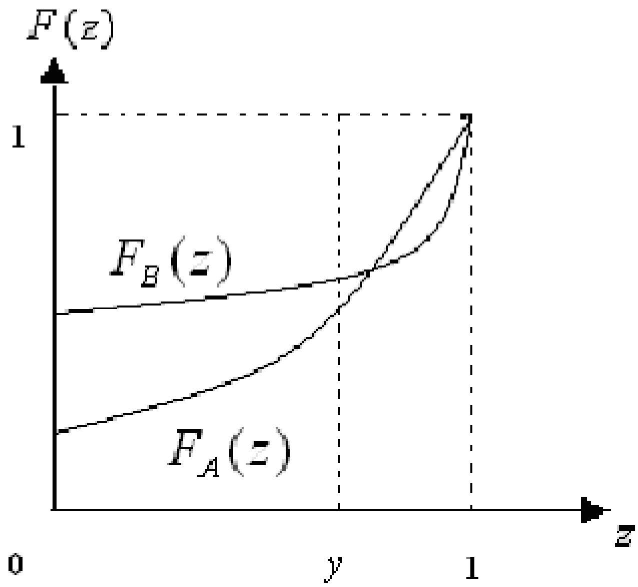
（1）$A \underset{SSD}{\geq} B$；

（2）$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$， (1.3.4)

且$S(z)=\int_0^z(F_A(s)-F_B(s))ds\leq 0$，$\forall z\in[0,1]$； (1.3.5)

（3）$\tilde{r}_B \stackrel{d}{=} \tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$，且$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A]=0$。 (1.3.6)

关系式(1.3.5)下$F_A(z)$和$F_B(z)$之间的关系如图 1.3.2 所示，该关系式蕴涵，对任意给定的$y$，由$F_A(z)$与$z=y$、$z=0$所围成的面积要小于由$F_B(z)$与$z=y$、$z=0$所围成的面积。




（图 1.3.2）：二阶随机占优下累计概率分布之间的关系

证明：（（1）⇒（2））：假定$A \underset{SSD}{\geq} B$，根据(1.3.3)式，有：

$$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z)-F_B(z)] = -\int_0^1 (F_A(z)-F_B(z))u'(1+z)dz$$

$$= -u'(1+z)S(z)|_0^1 + \int_0^1 S(z)u''(1+z)dz$$

$$\geq 0。$$

考虑到二阶随机占优蕴涵上式对所有的线性函数也应该成立，取$u'(1+z) = \pm 1$代入上式，整理得$S(1) = 0$。考虑到：

$$S(z) = \int_0^1 (F_A(z)-F_B(z))dz$$

$$= z(F_A(z)-F_B(z))|_0^1 - \int_0^1 zd(F_A(z)-F_B(z))$$

$$= -(E[\tilde{r}_A]-E[\tilde{r}_B])， \qquad (1.3.7)$$

因此$E[\tilde{r}_A] = E[\tilde{r}_B]$成立。

将$S(1) = 0$代入上述不等式，整理得：

$$\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz \geq 0。 \qquad (1.3.8)$$

如果存在$z_0 \in [0,1]$，$S(z_0) > 0$，由$S(.)$的连续性，存在一个闭区间$[a,b] \subset [0,1]$，$a < z_0 < b$，当$z \in [a,b]$时，有$S(z) > 0$。选取一个严格凹的效用函数

$u(.)$，满足：

$$u''(1+z)=\begin{cases}0 & [0,a) \\ -1 & [a,b] \\ 0 & (b,1]\end{cases},$$

代入(1.3.8)的左边，有：

$$\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz=-\int_a^b S(z)\,dz<0。$$

与(1.3.8)矛盾，因此(1.3.5)成立。

（(2）⇒（1)）：由(1.3.3)式、(1.3.7)式和前面的讨论，有：

$$E[u(1+\tilde{r}_A)]-E[u(1+\tilde{r}_B)]=\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz。$$

因为对任意$z\in[0,1]$，有$u''(1+z)\le 0$，$S(z)\le 0$，所以$A\underset{SSD}{\geq}B$成立。

（(3）⇒（1)）：因为$u(.)$是个凹函数，且(1.3.6)成立，因此有：

$$\begin{aligned}E[u(1+\tilde{r}_B)]&=E[u(1+\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon})]\\&=E[E[u(1+\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon})|\tilde{r}_A]]\\&\le E[u(1+\tilde{r}_A)]。\end{aligned}$$

上述不等号源于 Jensen 不等式。

从（(1）⇒（3)）等证明比较复杂，有兴趣的读者可参考 Rothschild 和 Stiglitz(1970)。 ■

直接从定义来判别资产的二阶随机占优通常是非常困难的，定理 1.3.2 给出了判别二阶随机占优的两种简单方法。一种方法是通过研究两种资产的累计概率分布和均值，计算$S(z)=\int_0^z(F_A(s)-F_B(s))ds$，看均值是否相等，$S(z)$是否恒小于等于零。另一种方法是看能否将一种资产的随机回报率写成另一种资产的随机回报率和一个噪声项。下面我们用一个简单例子来加以说明。

**例 1.3.2** ：假定经济中有五个等概率发生的自然状态，个体的初始财富为 1，个体有两种资产可供其挑选，假定这两种资产的随机回报率如表 1.3.2 所示。

| 自然状态 / 资产 | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $\tilde{r}_A$ | 0.4 | 0.4 | 0.8 | 0.8 | 0.8 |
| $\tilde{r}_B$ | 0.9 | 1.0 | 0.3 | 0.5 | 0.5 |

（表 1.3.2）：资产 A 和资产 B 的随机回报率

在这个例子中，可以利用定义直接判定资产 A 二阶随机占优于资产 B：

$$\begin{aligned} E[u(1+\tilde{r}_A)] &= \frac{2}{5}u(1.4)+\frac{3}{5}u(1.8) \\ &\geq \frac{1}{5}[u(1.3)+u(1.5)]+\frac{1}{5}[u(1.9)+u(2.0)+u(1.5)] \\ &= E[u(1+\tilde{r}_B)]。\end{aligned}$$

因此按照定义，资产 A 二阶随机占优于资产 B。

此处也可以利用累计概率分布来进行判别，根据表 1.3.2，我们有：

$$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]=0.64；$$

$$F_A(z)=\begin{cases} 0 & z<0.4 \\ 0.4 & 0.4\leq z<0.8 \\ 1 & z\geq 0.8 \end{cases}，\quad F_B(z)=\begin{cases} 0 & z<0.3 \\ 0.2 & 0.3\leq z<0.5 \\ 0.6 & 0.5\leq z<0.9 \\ 0.8 & 0.9\leq z<1.0 \\ 1 & z=1.0 \end{cases}；$$

$$S(z)=\begin{cases} 0 & z<0.3 \\ -0.2(z-0.3) & 0.3\leq z<0.4 \\ -0.02+0.2(z-0.4) & 0.4\leq z<0.5 \\ -0.2(z-0.5) & 0.5\leq z<0.8 \\ -0.06+0.4(z-0.8) & 0.8\leq z<0.9 \\ -0.02+0.2(z-0.9) & 0.9\leq z\leq 1 \end{cases}。$$

因此对任意$z\in[0,1]$，有$S(z)\leq 0$。根据定理 1.3.2，有$A \underset{SSD}{\geq} B$。

最后通过构造$\tilde{\varepsilon}$来判别资产之间的二阶随机占优。记$\varepsilon(\omega_1)=-0.1$，$\varepsilon(\omega_2)=0.1$，$\varepsilon(\omega_3)=0.1$，$\varepsilon(\omega_4)=0.2$，$\varepsilon(\omega_5)=-0.3$，则有：

$r_B(\omega_3)=r_A(\omega_1)+\varepsilon(\omega_1)$， $r_B(\omega_4)=r_A(\omega_2)+\varepsilon(\omega_2)$

$r_B(\omega_1)=r_A(\omega_3)+\varepsilon(\omega_3)$，$r_B(\omega_2)=r_A(\omega_4)+\varepsilon(\omega_4)$

$r_B(\omega_5)=r_A(\omega_5)+\varepsilon(\omega_5)$，即$\tilde{r}_B\overset{d}{=}\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$;

且有：

$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A=0.4]=\frac{1}{2}(\varepsilon(\omega_1)+\varepsilon(\omega_2))=0$，

$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A=0.8]=\frac{1}{3}(\varepsilon(\omega_3)+\varepsilon(\omega_4)+\varepsilon(\omega_5))=0$，

即$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A]=0$。根据定理 1.3.2，有$A \underset{SSD}{\geq} B$。

由定理 1.3.2 的（3），可以得到如下推论：

**推论**：$A \underset{SSD}{\geq} B \Rightarrow E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$，$var(\tilde{r}_A) \leq var(\tilde{r}_B)$。

证明：如果$A \underset{SSD}{\geq} B$，由定理 1.3.2 的(2)，有$E[\tilde{r}_A] \geq E[\tilde{r}_B]$；由定理 1.3.2 的(3)，有：

$$var(\tilde{r}_B)=var(\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon})=var(\tilde{r}_A)+var(\tilde{\varepsilon})+2\,cov(\tilde{r}_A,\tilde{\varepsilon})。$$

考虑到$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A]=0$，有$cov(\tilde{r}_A,\tilde{\varepsilon})=0$，因此有：

$$var(\tilde{r}_B)=var(\tilde{r}_A)+var(\tilde{\varepsilon}) \geq var(\tilde{r}_A)。$$

证明完毕。 ■

### 1.3.3 二阶随机单调占优和三阶随机占优

**定义**：称风险资产 A 二阶随机单调占优(Second Degree Stochastic Monotonic Dominance)于风险资产 B，记为$A \overset{SSD}{\underset{M}{\geq}} B$，如果所有风险回避的、不饱和的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

显然，二阶随机单调占优要弱于二阶随机占优，它只需风险回避个体中的一部分偏爱资产 A。类似地，我们有如下定理：

**定理 1.3.3**：以下三种陈述是等价的：

（1）$A \overset{SSD}{\underset{M}{\geq}} B$；

（2）$E[\tilde{r}_A] \geq E[\tilde{r}_B]$， 且$S(z)=\int_0^z (F_A(s)-F_B(s))ds \leq 0$，$\forall z \in [0,1]$；

（3）$\tilde{r}_B \overset{d}{=} \tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$，且$E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{r}_A] \leq 0$。

证明：类似于定理 1.3.2 的证明，留作习题。

**定义**：称资产 A 三阶随机占优(Third Degree Stochastic Dominance)于资产 B，记为$A \underset{TSD}{\geq} B$，如果所有展示减的绝对风险回避的个体都偏爱资产 A，

或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

三阶随机占优的概念仅是二阶随机占优概念的一个推广，它要弱于二阶随机占优，下面我们给出三阶随机占优的一个充分条件。

**定理 1.3.4**：如果$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$，$\int_0^z S(y)dy \le 0$对$\forall z \in [0,1]$成立，则资产 A 三阶随机占优于资产 B，即$A \underset{TSD}{\ge} B$。

证明：由定理 1.3.2 的证明，有：

$$\int_{[0,1]} u(1+z)d[F_A(z)-F_B(z)]$$

$$=-u'(1+z)S(z)|_0^1+\int_0^1 S(z)u''(1+z)dz$$

$$=u'(2)(E[\tilde{r}_A]-E[\tilde{r}_B])+u''(2)\int_0^1 S(y)dy-\int_0^1\int_0^z S(y)dyu'''(1+z)dz。$$

当$E[\tilde{r}_A]=E[\tilde{r}_B]$时，上式第一项为零；因为个体展示减的绝对风险回避，所以有$u''(z)\le 0$、$u'''(z)>0$，当$\int_0^z S(y)dy \le 0$对$\forall z \in [0,1]$成立时，上式中第二、第三项非负。因此$E[u(1+\tilde{r}_A)] \ge E[u(1+\tilde{r}_B)]$，即$A \underset{TSD}{\ge} B$。■

### 1.3.4 最优投资决策和比较静态分析

**一、Arrow-Pratt 意义下更加风险回避概念的不足（一个简单例子）**

当经济中存在一种风险资产和一种无风险资产时，由定理 1.2.6 及其证明，个体的风险回避程度越高，个体投资在风险资产上的财富量越低；一个直观的想法是，当经济中存在两种风险资产时，个体的风险回避程度越高，个体将增加低风险资产上的投资量以回避风险。Ross(1981)给出了一个简单例子，证明了这种想法的错误性，下面来介绍该例子。

**例 1.3.3**：假定经济中有两种风险资产 A 和 B，其随机回报率满足：

$$\tilde{r}_A=\tilde{r}_B+\tilde{z}，E[\tilde{z}|\tilde{r}_B]\ge 0，$$

这蕴涵资产 A 比资产 B 有更高的期望回报率和更高的风险，这类似于一种无风险资产和一种风险资产的情形。假定$\tilde{z}$和$\tilde{r}_B$相互独立，其随机回报率满足：

$$\tilde{r}_B = \begin{cases} 1 & 1/2\ 概率 \\ 0 & 1/2\ 概率 \end{cases}, \qquad \tilde{z} = \begin{cases} 2 & 1/2\ 概率 \\ -1 & 1/2\ 概率 \end{cases}。$$

考虑两个不饱和的、风险回避的个体$i$和$k$，假定他们的初始财富都是 1 单位。假定个体$k$具有一个严格凹、严格增的效用函数$u_k(.)$，满足：

$$u_k'(\tfrac{5}{2}) = 0，u_k'(\tfrac{7}{4}) = 2，u_k'(\tfrac{3}{2}) = 3，u_k'(\tfrac{3}{4}) = 4。$$

由此得：

$$E[u_k'(1 + \tilde{r}_B + \frac{1}{4}(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B))(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B)]$$

$$= \frac{1}{2}E[u_k'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}|\tilde{r}_B = 1] + \frac{1}{2}E[u_k'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}|\tilde{r}_B = 0]$$

$$= \frac{1}{4}[u_k'(\frac{5}{2}) \times 2 + u_k'(\frac{7}{4}) \times (-1) + u_k'(\frac{3}{2}) \times 2 + u_k'(\frac{3}{4}) \times (-1)]$$

$$= 0，$$

因此对个体$k$而言，投资 1/4 单位财富在资产 A 上是最优决策。

假定个体$i$比个体$k$更加风险回避，则存在一个严格增的凹函数$G(.)$，$u_i(.) = G(u_K(.))$，显然$G'(u_k(.))$是个减函数。假定$G(.)$满足：

$$G'(u_k(\tfrac{5}{2})) = 0，G'(u_k(\tfrac{7}{4})) = 0，G'(u_k(\tfrac{3}{2})) = 10，G'(u_k(\tfrac{3}{4})) = 10。$$

由此得：

$$E[u_i'(1 + \tilde{r}_A + \frac{1}{4}(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B))(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[G'(u_k(\tfrac{5}{2}))u_k'(\tfrac{5}{2}) \times 2 + G'(u_k(\tfrac{7}{4}))u_k'(\tfrac{7}{4}) \times (-1) \quad + G'(u_k(\tfrac{3}{2}))u_k'(\tfrac{3}{2}) \times 2 + G'(u_k(\tfrac{3}{4}))u_k'(\tfrac{3}{4}) \times (-1)]$$

$$= 2.5 > 0，$$

因此在个体$i$的最优投资决策中，投资在资产 A 上的财富量应该超过 1/4 单位。

## 二、强更加风险回避

Ross 上面这个例子说明，给定两种风险资产，Arrow-Pratt 意义下的更加风险回避并不能保证个体风险回避程度越高，在较高风险性的资产上的投资额越少。为此，Ross(1981)引入了强更加风险回避的概念。

**定义**：(Ross(1981)) 称个体$i$比个体$k$强更加风险回避(strongly more risk averse)，如果$\inf_W \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup_W \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$。

很明显，强更加风险回避蕴涵 Arrow-Pratt 意义下更加风险回避，但前者要严格地强于后者，这一点可以从下面的一个例子看出。

**例 1.3.4**：假定个体$i$和$k$的效用函数可以分别表示为：

$$u_i(W) = -e^{-aW}, \quad u_k(W) = -e^{-bW}, \quad a > b。$$

则$R_A^i(W) = a > b = R_A^k(W)$，即个体$i$要比个体$k$更加风险回避。

$$\frac{u_i'(W_1)}{u_k'(W_1)} = \frac{a}{b} e^{-(a-b)W_1}, \quad \frac{u_i''(W_2)}{u_k''(W_2)} = (\frac{a}{b})^2 e^{-(a-b)W_2}。$$

当$W_2 - W_1$充分大时，有$\frac{u_i''(W_2)}{u_k''(W_2)} < \frac{u_i'(W_1)}{u_k'(W_1)}$, 因此$\inf_W \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} < \sup_W \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$, 即个体$i$并非比个体$k$强更加风险回避的。

**定理 1.3.5**：个体$i$比个体$k$强更加风险回避的充分必要条件是，存在一个减的凹函数$G(.)$和一个严格正的常数$\lambda$,满足:$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)$，$\forall W$。

证明：（充分性）如果存在减的凹函数$G(.)$和正常数$\lambda$，满足：$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)$，$\forall W$，则有：

$$u_i'(W) = \lambda u_k'(W) + G'(W),$$

$$u_i''(W) = \lambda u_k''(W) + G''(W)。$$

两式相除，整理得：

$$\frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} = \lambda + \frac{G''(W)}{u_k''(W)} \geq \lambda \geq \lambda + \frac{G'(W)}{u_k'(W)} = \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)},$$

因此$\inf_W \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup_W \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$成立。

（必要性）如果$\inf\limits_{W}\frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup\limits_{W}\frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$成立，则存在一个正常数$\lambda$，满足：

$$\inf_{W}\frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \lambda \geq \sup_{W}\frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}。$$

记$G(W) = u_i(W) - \lambda u_k(W)$，两边关于$W$求一阶、二阶导数，有：

$$G'(W) = u_i'(W) - \lambda u_k'(W) \leq 0;$$

$$G''(W) = u_i''(W) - \lambda u_k''(W) \leq 0。$$

因此存在减的凹函数$G(.)$和正常数$\lambda$，满足：$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)$。 ■

在强更加风险回避概念下，存在正确的比较静态分析。下面我们用一个定理来刻画。

**定理 1.3.6**：假定经济中存在着两种风险资产，其中一种资产要比另一种资产有更高的期望回报和更高的风险。如果个体$i$比个体$k$强更加风险回避，则个体$i$在风险性更高的资产上的投资额要低于个体$k$。

证明：假定资产 A 和 B 的随机回报率满足：

$$\tilde{r}_A = \tilde{r}_B + \tilde{z}，E[\tilde{z}|\tilde{r}_B] \geq 0。$$

假定个体$i$和$k$的初始财富量为 1，如果$a$是个体$k$投资在资产 A 上的最优投资量，则有：

$$E[u_k'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] = 0。$$

假定个体$i$比个体$k$强更加风险回避，则存在减的凹函数$G(.)$和正常数$\lambda$，满足：

$$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W)。$$

因此在投资量$a$上，个体$i$有：

$$\begin{aligned} E[u_i'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] &= E[\lambda u_k'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z} + G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] \\ &= E[G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})\tilde{z}] \\ &= E[cov(G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z}), \tilde{z}|\tilde{r}_B) + E[G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z})|\tilde{r}_B]E[\tilde{z}|\tilde{r}_B]] \\ &\leq E[cov(G'(1 + \tilde{r}_B + a\tilde{z}), \tilde{z}|\tilde{r}_B)] \\ &\leq 0。 \end{aligned}$$

因此对个体$i$而言，选择少投资一点在高风险资产上可以提高效用。■

## 习题

1、在圣.彼得堡悖论中，如果个体效用函数取$u(W)=-e^{-W}$，（1）试证明个体为参与该赌博游戏愿意支付的财富量与个体初始财富无关；（2）试给出一个上界。

2、在公理 1 和公理 2 下，试证明如下性质：

(1)如果$p \succ q$，$0 \le a < b \le 1$，则$bp+(1-b)q \succ ap+(1-a)q$；

(2)如果$p \succeq q \succeq r$，$p \succ r$，则存在唯一的$a^* \in [0,1]$，满足

$$q \sim a^* p+(1-a^*)r;$$

(3)如果$p \succ q$，$r \succ s$，$a \in [0,1]$，则$ap+(1-a)r \succ aq+(1-a)s$；

(4)如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则$p \sim ap+(1-a)q$；

(5)如果$p \sim q$，$a \in [0,1]$，则对任意的$r \in \Psi$，有 ：

$$ap+(1-a)r \sim aq+(1-a)r。$$

3、假定个体偏好可以用一个 CRRA 效用函数来刻画：$u(W)=W^{1-\theta}/(1-\theta)$。假定个体面对一个财富扰动风险$\tilde{W}=W_0(1+\tilde{z})$，其中$\tilde{z}=\begin{cases}-\varepsilon & 1/2\ \textit{概率} \\ \varepsilon & 1/2\ \textit{概率}\end{cases}$，$\varepsilon$充分小。试问该个体愿意支付其财富的多少份额以避免这样一个财富扰动风险。

4、假定个体偏好可以用一个 CRRA 效用函数来刻画：$u(W)=-1/W$。假定个体面对两个财富扰动风险：第一个随机财富扰动风险可以刻画为，1/3 概率财富上升 2/3，2/3 概率财富下降 1/3；第二个随机财富扰动风险可以刻画为，1/2 概率财富上升一倍，1/2 概率财富下降一半。

（1）试问该个体更偏爱哪一个随机扰动风险？

（2）试分别计算该个体愿意支付其财富的多少份额，以避免这样两个财富扰动风险。

（3）当个体面对自己较不喜欢的随机扰动风险时，个体愿意拿出其财富的多少份额来换取自己所更偏爱的财富扰动风险。

5、假定经济中有一位拥有 2 亿元 RMB 财富的富翁和一位仅拥有 2 万元 RMB 财富的打工者，他们的期望效用函数都取$u(W)=-e^{-W}$的形式，且同时面对一个 1/2 概率财富增加 1 万元，1/2 概率财富减少 1 万元的风险，试分别计算为避免这样一个风险，这两位个体愿意支付多少财富？你对该结果有何看法？

6、假定经济中存在 N 种风险资产，它们的随机收益率是独立、同分布的，试证明个体最优决策中各资产上的权重相等。

7、假定经济中有两种风险资产 A 和 B，资产 A 的随机回报率$\tilde{r}_A$服从[0,1]上的均匀分布，资产 B 的随机回报率服从两点分布：

$$\tilde{r}_B=\begin{cases}0 & 1/2\ 概率\\ 1 & 1/2\ 概率\end{cases},$$

试讨论风险回避的投资者会选择两种资产中的哪一种资产？

8、假定经济中有两种风险资产 A 和 B，其随机回报率分别为$\tilde{r}_A$和$\tilde{r}_B$，假定$\tilde{r}_A$和$\tilde{r}_B$相互独立、均值相等，且$\tilde{r}_B\overset{d}{=}\tilde{r}_A+\tilde{\varepsilon}$，其中$\tilde{r}_A$和$\tilde{\varepsilon}$相互独立。这是否蕴涵资产 B 二阶随机占优于资产 A？试证明根据期望效用最大化，在只有这两种资产的情形下，风险回避的个体将会投资于资产 A 多于投资于资产 B。