

§ 2.2 一元线性回归模型及其参数估计

Simple Linear Regression Model and Its Estimation

- 一、线性回归模型及其普遍性
- 二、线性回归模型的基本假设
- 三、一元线性回归模型的参数估计
- 四、最小二乘估计量的统计性质
- 五、参数估计量的概率分布与随机项方差的估计

一、线性回归模型及其普遍性

1、线性回归模型的特征

- 一个例子

凯恩斯绝对收入假设消费理论：消费（C）是由收入（Y）唯一决定的，是收入的线性函数：

$$C = \alpha + \beta Y \quad (2.2.1)$$

但实际上上述等式不能准确实现。

- 原因

- (1)消费除受收入影响外，还受其他因素的影响；
- (2)线性关系只是一个近似描述；
- (3)收入变量观测值的近似性：收入数据本身并不绝对准确地反映收入水平。

- 因此，一个更符合实际的数学描述为：

$$C = \alpha + \beta Y + \mu \quad (2.2.2)$$

其中： μ 是一个随机误差项，是其他影响因素的“综合体”。

- 线性回归模型的特征：

- (1) 通过引入随机误差项，将变量之间的关系用一个线性随机方程来描述，并用随机数学的方法来估计方程中的参数；
- (2) 在线性回归模型中，被解释变量的特征由解释变量与随机误差项共同决定。

2、线性回归模型的普遍性

线性回归模型是计量经济学模型的主要形式，许多实际经济活动中经济变量间的复杂关系都可以通过一些简单的数学处理，使之化为数学上的线性关系。

将非线性关系化为线性关系的常用的数学处理方法

(1)变量置换

例如，描述税收与税率关系的拉弗曲线：抛物线

$$s = a + b r + c r^2 \quad c < 0$$

s: 税收; r: 税率

设 $X_1 = r$, $X_2 = r^2$, 则原方程变换为

$$s = a + b X_1 + c X_2 \quad c < 0$$

- 变量置换仅用于变量非线性的情况。

(2) 函数变换

例如, Cobb-Dauglas生产函数: 幂函数

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Q: 产出量, K: 投入的资本; L: 投入的劳动

方程两边取对数:

$$\ln Q = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

(3) 级数展开

例如，不变替代弹性CES生产函数：

$$Q = A(\delta_1 K^{-\rho} + \delta_2 L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$$

方程两边取对数后，得到：

$$\ln Q = \ln A - \frac{1}{\rho} \ln(\delta_1 K^{-\rho} + \delta_2 L^{-\rho})$$

对 $\ln(\delta_1 K^{-\rho} + \delta_2 L^{-\rho})$

在 $\rho = 0$ 处展开台劳级数，取关于 ρ 的线性项，即得到一个线性近似式。

$$\ln Y = \ln A + \delta_1 m \ln K + \delta_2 m \ln L - \frac{1}{2} \rho m \delta_1 \delta_2 \left(\ln \left(\frac{K}{L} \right) \right)^2 + \varepsilon$$

变量置换得到

$$Z = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \varepsilon$$

结论:

- 实际经济活动中的许多问题，都可以最终化为线性问题，所以，线性回归模型有其普遍意义。
- 即使对于无法采取任何变换方法使之变成线性的非线性模型，目前使用得较多的参数估计方法——非线性最小二乘法，其原理仍然是以线性估计方法为基础。
- 线性模型理论方法在计量经济学模型理论方法的基础。

二、线性回归模型的基本假设

1、技术线路

- 由于回归分析的主要目的是要通过样本回归函数（模型）SRF尽可能准确地估计总体回归函数（模型）PRF。即通过

$$\text{估计} \quad Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\mu}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + e_i$$

$$Y_i = E(Y|X_i) + \mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i$$

- 采用普通最小二乘或者普通最大似然方法估计。
- 需要对解释变量和随机项作出假设。

2、线性回归模型在上述意义上的基本假设

(1) 解释变量X是确定性变量，不是随机变量；解释变量之间互不相关。

(2) 随机误差项具有 0 均值和同方差：

$$E(\mu_i)=0 \quad i=1,2, \dots, n$$

$$\text{Var}(\mu_i)=\sigma_{\mu}^2 \quad i=1,2, \dots, n$$

(3) 随机误差项在不同样本点之间是独立的，不存在序列相关：

$$\text{Cov}(\mu_i, \mu_j)=0 \quad i \neq j \quad i, j= 1,2, \dots, n$$

(4) 随机误差项与解释变量之间不相关:

$$\text{Cov}(X_i, \mu_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

(5) 随机误差项服从 0 均值、同方差的正态分布:

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_\mu^2) \quad i=1, 2, \dots, n$$

注意:

- 如果第(1)条假设满足, 则第(4)条也满足;
- 模型对变量和函数形式的设定是正确的, 即不存在设定误差。

重要提示

- 几乎没有哪个实际问题能够同时满足所有基本假设；
- 通过模型理论方法的发展，可以克服违背基本假设带来的问题；
- 违背基本假设问题的处理构成了单方程线性计量经济学理论方法的主要内容：

异方差问题（违背同方差假设）

序列相关问题（违背序列不相关假设）

共线性问题（违背解释变量不相关假设）

随机解释变量（违背解释变量确定性假设）

- 0均值、正态性假设是由模型的数理统计理论决定的。

三、一元线性回归模型的参数估计

1、普通最小二乘法 (Ordinary Least Square, OLS)

给定一组样本观测值 X_i, Y_i ($i=1,2,\dots,n$)，要求样本回归函数尽可能好地拟合这组值，即样本回归线上的点与真实观测点的“总体误差”尽可能地小。

最小二乘法给出的判断的标准是：二者之差的平方和

$$Q = \sum_1^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_1^n (Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i))^2 \quad (2.2.3)$$

最小。

根据微分运算，可推得用于估计 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 的下列方程组：

$$\begin{cases} \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - Y_i) = 0 \\ \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i - Y_i) X_i = 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

或

$$\begin{cases} \sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i \\ \sum Y_i X_i = \hat{\beta}_0 \sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

解得：

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum Y_i X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{n \sum Y_i X_i - \sum Y_i \sum X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

方程组（2.2.5）称为**正则方程组**（**normal equations**）。

2、最大或然法（ Maximum Likelihood, ML ）

- **最大或然法**，也称**最大似然法**，是不同于最小二乘法的另一种参数估计方法，是从最大或然原理出发发展起来的其它估计方法的基础。

- **基本原理：**

对于最大或然法，当从模型总体随机抽取 n 组样本观测值后，最合理的参数估计量应该使得从模型中抽取该 n 组样本观测值的联合概率最大。

对于一元线性回归模型：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i \quad i=1,2,\cdots n$$

随机抽取 n 组样本观测值 Y_i, X_i ($i=1,2,\cdots n$)，假如模型的参数估计量已经求得到，为 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ ，那么 Y_i 服从如下的正态分布：

$$Y_i \sim N(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i, \sigma_\mu^2)$$

于是， Y_i 的概率函数为

$$P(Y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2} \quad i=1,2,\cdots, n$$

因为 Y_i 是相互独立的, 所以 Y 的所有样本观测值的联合概率, 也即或然函数(**likelihood function**)为:

$$\begin{aligned} L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \sigma_\mu^2) &= P(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_\mu^n} e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2} \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2} \end{aligned}$$

将该或然函数极大化, 即可求得到模型参数的极大或然估计量。

由于或然函数的极大化与或然函数的对数的极大化是等价的，所以，取对数或然函数如下：

$$\begin{aligned} L^* &= \ln(L) \\ &= -n \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_\mu) - \frac{1}{2\sigma_\mu^2} \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 \end{aligned}$$

对 L^* 求极大值，等价于对 $\Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$ 求极小值：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 0 \end{cases}$$

解得模型的参数估计量为：

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum Y_i X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{n \sum Y_i X_i - \sum Y_i \sum X_i}{n \sum Y_i^2 - (\sum X_i)^2} \end{cases}$$

可见，在满足一系列基本假设的情况下，模型结构参数的最大或然估计量与普通最小二乘估计量是相同的。

但是，随机误差项的方差的估计量是不同的。

解或然方程

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{\mu}^2} L^* = -\frac{n}{2\sigma_{\mu}^2} + \frac{1}{2\sigma_{\mu}^4} \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = 0$$

即可得到 σ_{μ}^2 的最大或然估计量为：

$$\hat{\sigma}_{\mu}^2 = \frac{1}{n} \Sigma(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 = \frac{\sum e_i^2}{n}$$

3、参数估计的离差形式(deviation form)

$$\begin{aligned} \text{记} \quad \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum X_i, & \bar{Y} &= \frac{1}{n} \sum Y_i \\ x_i &= X_i - \bar{X}, & y_i &= Y_i - \bar{Y} \end{aligned}$$

(2.2.6)的参数估计量可以写成：

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

注：在计量经济学中，往往以小写字母表示对均值的离差 (**deviation**)。

由于 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 的估计结果是从最小二乘原理得到的，故称为**最小二乘估计量(least-squares estimators)**。

4、样本回归线的数值性质(numerical properties)

(1) 残差和等于零, $\sum \hat{u}_t = 0$ 。

由正规方程 $2\sum (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t) (-1) = 0$

得 $\sum (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t) = \sum (y_t - \hat{y}_t) = \sum (\hat{u}_t) = 0$

(2) 估计的回归直线 $\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_t$ 过 (\bar{x}, \bar{y}) 点。

正规方程 $\sum (y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t) = 0$ 两侧同除样本容量 T ,

得 $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$ 。得证。

(3) y_t 的拟合值的平均数等于其样本观测值的平均数, $\bar{\hat{y}}_t = \bar{y}$ 。

$\bar{\hat{y}}_t = \frac{1}{T} \sum \hat{y}_t = \frac{1}{T} \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}$ 。得证。

四、最小二乘估计量的统计性质

高斯-马尔可夫定理

当模型参数估计完成，需考虑参数估计值的精度，即是否能代表总体参数的真值，或者说需考察参数估计量的统计性质。

一个用于考察总体的统计量，可从三个方面考察其优劣性：

(1) 线性性(linear): 即是否是另一随机变量的线性函数；

(2) 无偏性(unbiased): 即它的均值或期望值是否等于总体的真实值；

(3) 有效性(efficient): 即它是否在所有线性无偏估计量中具有最小方差。

高斯—马尔可夫定理 (Gauss-Markov theorem)

在给定经典线性回归的假定下，最小二乘估计量是具有最小方差的线性无偏估计量。

1、线性性：参数估计量是Y的线性函数

$$\text{证: } \hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} + \frac{\bar{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\text{令 } k_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}, \text{ 因 } \sum x_i = \sum (X_i - \bar{X}) = 0, \text{ 故有}$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} Y_i = \sum k_i Y_i$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \frac{1}{n} \sum Y_i - \sum k_i Y_i \bar{X} = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} k_i \right) Y_i = \sum w_i Y_i$$

2、无偏性：参数估计量的均值等于总体回归参数真值

证： $\hat{\beta}_1 = \sum k_i Y_i = \sum k_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i) = \beta_0 \sum k_i + \beta_1 \sum k_i X_i + \sum k_i \mu_i$

由于 $\sum k_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$,

$$\sum k_i X_i = \frac{\sum x_i X_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (X_i - \bar{X} + \bar{X})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (x_i + \bar{X})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} + \bar{X} \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} = 1$$

故： $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_i \mu_i$

$$E(\hat{\beta}_1) = E(\beta_1 + \sum k_i \mu_i) = \beta_1 + \sum k_i E(\mu_i) = \beta_1$$

$$\hat{\beta}_0 = \sum w_i Y_i = \sum w_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i) = \beta_0 \sum w_i + \beta_1 \sum w_i X_i + \sum w_i \mu_i$$

由于: $\sum w_i = \sum (1/n - \bar{X}k_i) = 1 - \bar{X} \sum k_i = 1$

$$\sum w_i X_i = \sum (1/n - \bar{X}k_i) X_i = 1/n \sum X_i - \bar{X} \sum k_i X_i = \bar{X} - \bar{X} = 0$$

故: $\hat{\beta}_0 = \beta_0 + \sum w_i \mu_i$

$$E(\hat{\beta}_0) = E(\beta_0 + \sum w_i \mu_i) = E(\beta_0) + \sum w_i E(\mu_i) = \beta_0$$

3、有效性：在所有线性无偏估计量中，最小二乘估计量具有最小方差。

(1) 先求 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 的方差

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \text{var}(\sum k_i Y_i) = \sum k_i^2 \text{var}(\beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i) = \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

(2.2.10)

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_0) &= \text{var}(\sum w_i Y_i) = \sum w_i^2 \text{var}(\beta_0 + \beta_1 X_i + \mu_i) = \sum (1/n - \bar{X}k_i)^2 \sigma^2 \\ &= \sum \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 - 2 \frac{1}{n} \bar{X}k_i + \bar{X}^2 k_i^2 \right] \sigma^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} \bar{X} \sum k_i + \bar{X}^2 \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 \right) \sigma^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right) \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 + n\bar{X}^2}{n \sum x_i^2} \sigma^2 = \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \sigma^2 \end{aligned}$$

(2.2.11)

(2) 证明最小方差性

假设 $\hat{\beta}_1^*$ 是其他方法得到的关于 β_1 的线性无偏估计量：

$$\hat{\beta}_1^* = \sum c_i Y_i$$

其中， $c_i = k_i + d_i$ ， d_i 为不全为零的常数。

$$E(\hat{\beta}_1^*) = E(\sum c_i Y_i) = \sum c_i E(Y_i) = \sum c_i (\beta_0 + \beta_1 X_i) = \beta_0 \sum c_i + \beta_1 \sum c_i X_i$$

由 $\hat{\beta}_1^*$ 的无偏性，即 $E(\hat{\beta}_1^*) = \beta_1$ 可知：

$$\beta_0 \sum c_i + \beta_1 \sum c_i X_i = \beta_1$$

从而有： $\sum c_i = 0$ ， $\sum c_i X_i = 1$

$\hat{\beta}_1^*$ 的方差

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\beta}_1^*) &= \text{var}\left(\sum c_i Y_i\right) = \sum c_i^2 \text{var}(Y_i) = \sum c_i^2 \text{var}(\mu_i) = \sum c_i^2 \sigma^2 \\ &= \sum (k_i + d_i)^2 \sigma^2 = \sum k_i^2 \sigma^2 + \sum d_i^2 \sigma^2 + 2\sigma^2 \sum k_i d_i\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\sum k_i d_i &= \sum k_i (c_i - k_i) = \sum k_i c_i - \sum k_i^2 \\ &= \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} c_i - \sum k_i^2 = \frac{\sum X_i c_i - \bar{X} \sum c_i}{\sum x_i^2} - \sum k_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} - \frac{1}{\sum x_i^2} = 0\end{aligned}$$

故

$$\text{var}(\hat{\beta}_1^*) = \sum k_i^2 \sigma^2 + \sum d_i^2 \sigma^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} \sigma^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 = \text{var}(\hat{\beta}_1) + \sigma^2 \sum d_i^2$$

因为

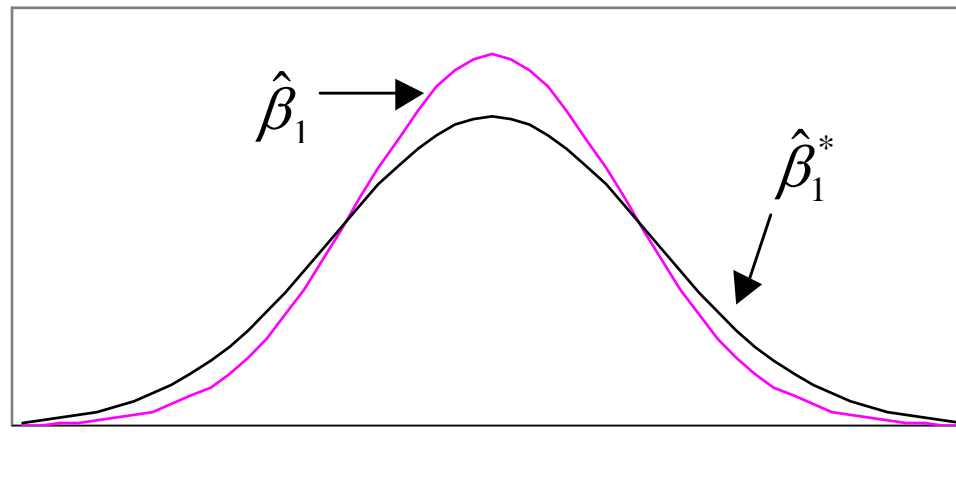
$$\sum d_i^2 \geq 0$$

所以

$$\text{var}(\hat{\beta}_1^*) \geq \text{var}(\hat{\beta}_1)$$

当 $d_i = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 等号成立, 此时:

$c_i = k_i$, $\hat{\beta}_1^*$ 就是 OLS 估计量 $\hat{\beta}_1$ 。



$$E(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1^*) = \beta_1$$

Sampling distribution of OLS estimator $\hat{\beta}_1$ and alternative estimator $\hat{\beta}_1^*$

同理可证明

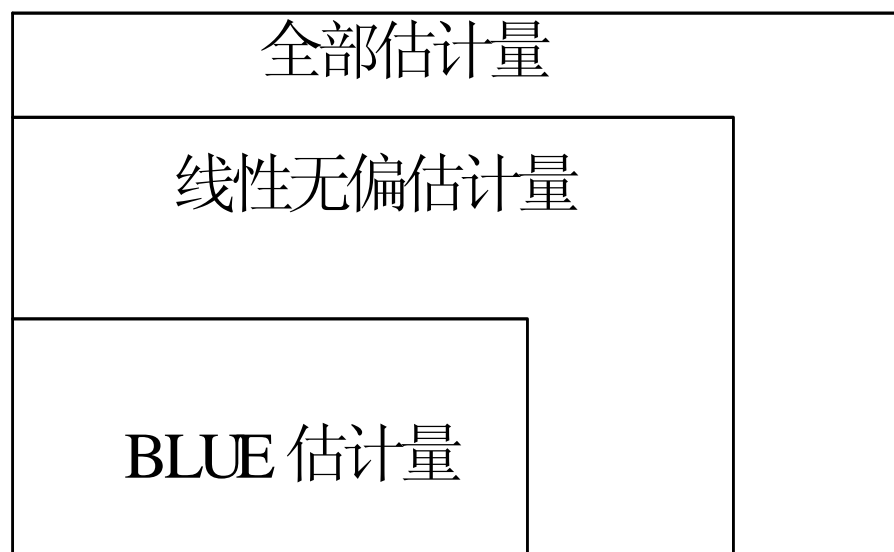
$$\text{var}(\hat{\beta}_0^*) \geq \text{var}(\hat{\beta}_0)$$

4、结论

普通最小二乘估计量具有线性性、无偏性、最小方差性等优良性质。

具有这些优良性质的估计量又称为**最佳线性无偏估计量**，即**BLUE估计量**（**the Best Linear Unbiased Estimators**）。

显然这些优良的性质依赖于对模型的基本假设。



五、参数估计量的概率分布与随机项方差的估计

1、 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的概率分布

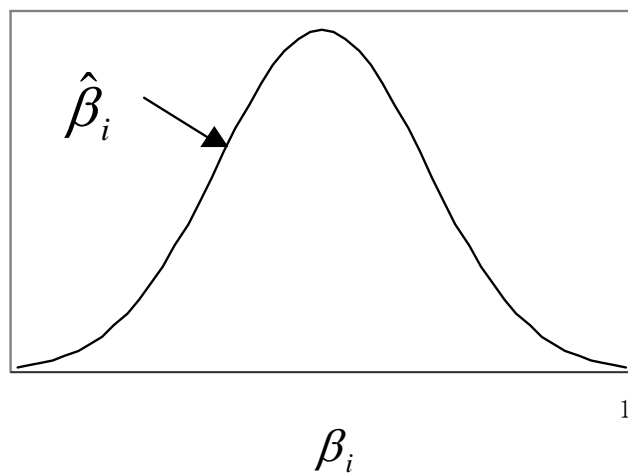
首先，由于解释变量 x_i 是确定性变量，随机误差项 μ_i 是随机性变量，因此被解释变量 y_i 是随机变量，且其分布（特征）与 μ_i 相同。

其次， $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 分别是 y_i 的线性组合，因此 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$ 的概率分布取决于 \mathbf{Y} 。

在 μ 是正态分布的假设下， \mathbf{Y} 是正态分布，因此 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 也服从正态分布，其分布特征（密度函数）由其均值和方差唯一决定。

因此:

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right), \quad \hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \sigma^2\right)$$



$\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的标准差分别为:

$$S(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\sigma^2 / \sum x_i^2} \quad (2.2.12)$$

$$S(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}} \quad (2.2.13)$$

2、随机误差项 μ 的方差 σ^2 的估计

在估计的参数 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的方差和标准差的表达式中，都含有随机扰动项方差 $\sigma^2 = \text{var}(\mu_i)$ 。 σ^2 又称为**总体方差**。

由于 σ^2 实际上是未知的，因此 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的方差与标准差实际上无法计算。

由于随机项 μ_i 不可观测，只能从 μ_i 的估计——残差 e_i 出发，对总体方差 σ^2 进行估计。

可以证明：总体方差 σ^2 的**无偏估计量**为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \quad (2.2.14)$$

在总体方差 σ^2 的无偏估计量 $\hat{\sigma}^2$ 求出后, 估计的参数 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的方差和标准差的估计量分别是:

$$\hat{\beta}_1 \text{ 的样本方差: } \quad \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 / \sum x_i^2 \quad (2.2.15)$$

$$\hat{\beta}_1 \text{ 的样本标准差: } \quad S(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma} / \sqrt{\sum x_i^2} \quad (2.2.16)$$

$$\hat{\beta}_0 \text{ 的样本方差: } \quad \text{Var}(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \sum X_i^2 / n \sum x_i^2 \quad (2.2.17)$$

$$\hat{\beta}_0 \text{ 的样本标准差: } \quad S(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma} \sqrt{\sum X_i^2 / n \sum x_i^2} \quad (2.2.18)$$

例2.3： 在收入-消费支出例中，参数估计及其标准差的计算如下：

	收入X (元)	支出Y (元)	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})^2$	X^2	\hat{Y}	$(Y - \hat{Y})^2$
1	800	700	-900	-410	369000	810000	640000	652	2321
2	1000	650	-700	-460	322000	490000	1000000	754	10740
3	1200	900	-500	-210	105000	250000	1440000	855	1984
4	1400	950	-300	-160	48000	90000	1960000	957	53
5	1600	1100	-100	-10	1000	10000	2560000	1059	1674
6	1800	1150	100	40	4000	10000	3240000	1161	119
7	2000	1200	300	90	27000	90000	4000000	1263	3935
8	2200	1400	500	290	145000	250000	4840000	1365	1257
9	2400	1550	700	440	308000	490000	5760000	1466	6995
10	2600	1500	900	390	351000	810000	6760000	1568	4649
平均 求和	1700	1110			1680000	3300000	32200000	11100	33727

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2} = \frac{1680000}{3300000} = 0.5091$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 1110 - 0.5091 \times 1700 = 244.5$$

$$\begin{aligned} S(\hat{\beta}_1) &= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-2)\sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{33727}{(10-2) \times 3300000}} \\ &= \sqrt{0.001278} = 0.0357 \end{aligned}$$

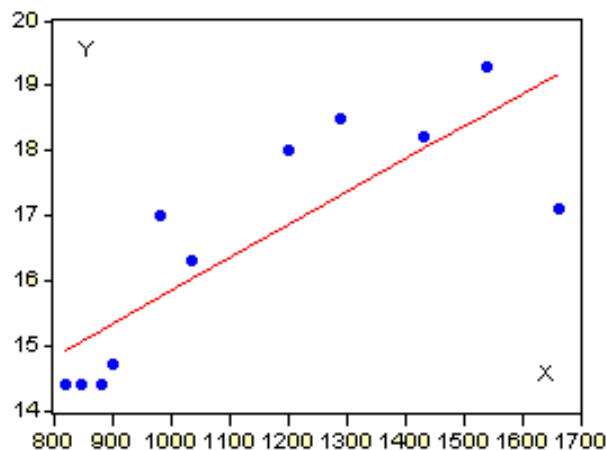
$$\begin{aligned} S(\hat{\beta}_0) &= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2 \sum X_i^2}{(n-2)n \sum x_i^2}} = \sqrt{\frac{33727 \times 32200000}{(10-2) \times 10 \times 3300000}} \\ &= \sqrt{4113.705} = 64.1382 \end{aligned}$$

居民家庭收入与消费支出的回归方程为：

$$\hat{Y}_i = 244.5 + 0.5091X_i$$

例题 人均鲜蛋需求量Y与人均可支配收入X关系

(file: li-2-1)



Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/12/07 Time: 08:46
Sample: 1988 1998
Included observations: 11

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	10.76616	1.396736	7.708087	0.0000
X	0.005069	0.001183	4.283328	0.0020
R-squared	0.670895	Mean dependent var	16.57273	
Adjusted R-squared	0.634328	S.D. dependent var	1.845042	
S.E. of regression	1.115713	Akaike info criterion	3.219829	
Sum squared resid	11.20333	Schwarz criterion	3.292174	
Log likelihood	-15.70906	F-statistic	18.34690	
Durbin-Watson stat	1.320391	Prob(F-statistic)	0.002040	

估计结果:

$$\hat{\sigma} = 1.1157, \hat{\sigma}^2 = 1.1157^2 = 1.2448$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_0) = 1.3967^2 = 1.9508$$

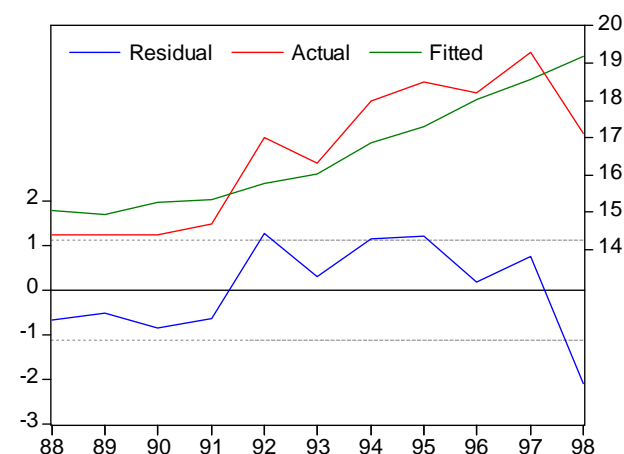
$$\hat{Var}(\hat{\beta}_1) = 0.0012^2 = 0.00000144$$

分析残差

例 人均鲜蛋需求量Y与人均可支配收入X关系

(file: li-2-1)

obs	Actual	Fitted	Residual	Residual Plot
1988	14.4000	15.0605	-0.66054	
1989	14.4000	14.9274	-0.52739	
1990	14.4000	15.2478	-0.84783	
1991	14.7000	15.3464	-0.64641	
1992	17.0000	15.7541	1.24593	
1993	16.3000	16.0134	0.28657	
1994	18.0000	16.8530	1.14701	
1995	18.5000	17.3034	1.19657	
1996	18.2000	18.0290	0.17096	
1997	19.3000	18.5665	0.73349	
1998	17.1000	19.1984	-2.09836	



真实值

拟合值

残差

-S.E.

S.E.

分析残差的正态分布性