



金融经济学 第一章

上海财经大学金融学院



金融经济学 第一章

❖ §1.1 偏好的期望效用表示

- ❖ 在金融经济学中，我们需要研究人们在不确定条件下的消费 - 投资决策和市场上资产价格的决定，这涉及到面对不确定的选择对象时人们的判别标准。
- ❖ 在十七世纪现代概率理论的发展中，帕斯卡 (Blaise Pascal) 和费尔玛 (Pierre de Fermat) 等大数学家假定，在一个随机回报为 (x_1, x_2, \dots, x_n) 、相对应的概率为 (p_1, p_2, \dots, p_n) 的赌博中，人们关心的是它的期望回报：

$$E[\tilde{x}] = \sum x_i p_i$$

- ❖ 但该假定在 1728 年被 N. 伯努利 (Nicholas Bernoulli) 所给出的一个例子所否定，该例子现在被称为著名的圣·彼得堡悖论 (St. Petersburg Paradox).

金融经济学 第一章

❖ 圣.彼得堡悖论 (St. Petersburg Paradox) :

❖ 假定一位个体面对一个抛硬币的赌博游戏，第一次抛出正面时该个体得到 1 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第二次硬币。第二次抛出正面得到 2 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第三次硬币。第三次抛出正面得到 4 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第四次硬币。第四次抛出正面得到 8 元 RMB，游戏结束；否则继续抛第五次硬币；...。问该个体愿意支付多少财富来参与该赌博游戏？

❖ 按照帕斯卡和费尔玛等人的思路，个体愿意支付的财富等于该赌博游戏的期望回报。在该赌博游戏中，期望回报满足：

$$E[\tilde{x}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \dots = +\infty$$

❖ 即个体愿意支付正无穷的财富，来参与该赌博游戏。这个结论显然是不合理的，因此被看作是一个悖论。

金融经济学 第一章

- ❖ 该悖论的解决由 N. 伯努利的堂兄弟 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli, 1738) 给出。D. 伯努利认为, 对个体而言, 200 元的收益并不等于 100 元收益的两倍, 他假定个体决策时会使用一个现在被称为 von Neumann-Morgenstern 期望效用函数的概念 $u(\cdot)$, 从而个体决策时不是直接计算游戏收益的期望值, 而是计算期望效用值 $Eu(x) = \sum u(x_i) p_i$ 。因此与上述游戏相当的财富值应该满足:
- ❖
$$u(w + \xi) = \frac{1}{2}u(w + 1) + \frac{1}{4}u(w + 2) + \frac{1}{8}u(w + 4) + \dots$$
- ❖ 此处 w 是个体当前的财富值。如果效用函数取对数效用形式, 当前财富值取 $w = 50000$ 元, 则 $\xi \approx 9$ 。因此, 即使该游戏的期望收益趋于无穷, 但对个体而言, 该游戏的价值仅仅 9 元。

金融经济学 第一章

- ❖ 上述分析表明，由于不确定性的存在，我们需要引入期望效用函数的概念。
- ❖ 偏好的期望效用表示有两种引入方式：第一种推导由 **von Neumann** 和 **Morgenstern(1944)** 给出，他们的推导建立在个体对彩票选择的假定之上，其中彩票的收益和概率是预先指定的，他们的期望效用理论是一种客观期望效用理论。偏好期望效用表示的另一种推导由 **Savage(1954)** 给出，不同于 **von Neumann** 和 **Morgenstern (1944)** 理论，在 **Savage** 的处理中，概率是在特定公理体系下推导出来的，而不是预先给定的，因此 **Savage** 的理论是一种主观期望效用理论。下面我们来介绍 **von Neumann** 和 **Morgenstern(1944)** 的期望效用表示理论。

金融经济学 第一章

1.1 不确定条件下的选择问题

一、消费计划与偏好关系

考虑一个两期经济， $t=0、1$ 。个体在时间 0 时做出投资决策，时间 1 时将所有财富用于消费。为简化讨论，假定时间 1 时只有一种消费品。由于经济中存在着不确定性，个体所持有的金融资产在时间 1 时的回报依赖于不确定的经济环境。

自然状态：

不确定的经济环境可以用一个概率空间 (Ω, F, P) 来刻画，其中的元素 $\omega \in \Omega$

称作自然状态，是对从时间 0 到时间 1 的不确定环境的一个刻画， P 为这些自然状态的全体， P 刻画了各个自然状态发生的概率，该概率是预先给定的，是客观概率。

金融经济学 第一章

消费计划：

❖ 定义：一个消费计划是不同自然状态下消费数量的一个完备刻画。

每个消费计划都可以用一个可测函数

$$x: \Omega \rightarrow Z (Z \subseteq R)$$

来刻画，当自然状态 ω 发生时， $x(\omega)$ 表示该状态下的可行消费数量。
消费计划的全体记为 X ，即可供选择对象的全体。

偏好关系：

给定可供选择消费计划的全体 X ，我们可以在 X 上定义一个二项关系 \succsim ，
 $x \succsim y$ $x \succ y$

其中 代表“ x 至少要比 y 好”， 代表“ x 严格地好于 y ”， $x \sim y$ 代表“ x 和 y 是无差异的”。如果该二项关系服从：

- ❖ (1) 完备性：任意 $x, y \in X$ ，有 $x \succsim y$ 或 $y \succsim x$ ；
 - ❖ (2) 反身性：任意 $x, y, z \in X$ 有 $x \sim x$ $x \succsim y$ $y \succsim z$ $x \succsim z$
 - ❖ (3) 传递性：任意 $x, y, z \in X$ ，如果 $x \succ y$ 且 $y \succ z$ ，则有 $x \succ z$ 。
- 则称该二项关系是一个偏好关系。

金融经济学 第一章

❖ 例子 1.1 :

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$x(\omega)$	3	3	3	3	3
$y(\omega)$	1	5	3	4	3
$z(\omega)$	5	3	4	1	3

金融经济学 第一章

- ❖ 定义：一个函数 $H : X \rightarrow R$ 称为是偏好关系 “ \succsim ” 的效用函数表示，如果对任意 $x, y \in X$ ，有 $x \succsim y \iff H(x) \geq H(y)$ 。
- ❖ 二、彩票(Lottery)与期望效用函数
- ❖ 个体在做决策时并不知道未来哪个事件会发生，他关心的是未来能得到多少消费品，概率有多大。
- ❖ 在例1.1中，决策时消费计划是 y 和 z 相当的，尽管在具体自然状态展示出来后回报并不相同。
- ❖ 记经济中所有可能实现的消费量的全体为：
$$Z \equiv \{x(\omega) \mid \forall x \in X, \omega \in \Omega\} \quad (1.1.1)$$
- ❖ 任意一个消费计划，存在一个定义在 Z 上的概率密度函数与之对应，满足：
$$p_x(z) = \text{Prob}\{\omega \mid x(\omega) = z, \omega \in \Omega\} \circ \quad (1.1.2)$$

金融经济学 第一章

- 相应地，累计概率分布为 $F_x(z) = \text{Prob}\{\omega \mid x(\omega) \leq z, \omega \in \Omega\}$ 。在或有消费计划与定义在 Z 上的概率分布之间建立了一个对应关系：

- $(\Omega, P) \xrightarrow{x} (Z, P_x^{-1})$,

- 每一个 $x \in X$ ，对应着 Z 上的一个概率分布 P ；反过来， Z 上的一个概率分布 P 可以有多个消费计划与之相对应，这些消费计划有相同的分布，他们应该是无差异的。

- 我们将所有 Z 上的概率分布记为：

$$\Psi = \{Z \text{ 上的概率分布} \}$$

- 定义在 X 上的偏好关系可以简化为定义在 Z 上的偏好关系。 Ψ 中每一个概率分布都可以被看作是一个彩票。

- 对任意的 $z \in Z$ ，记 P_z 为在点 z 处退化的概率分布，满足：

$$P_z(z') = \begin{cases} 1 & \text{当 } z' = z \\ 0 & \text{当 } z' \neq z \end{cases} \quad (1.1.3)$$

金融经济学 第一章

❖ 如果 Z 是一个有限集合，记 $z^0 = \max\{z \mid z \in Z\}$ ， $z_0 = \min\{z \mid z \in Z\}$ ，则在 Z 中可以定义两个确定性的彩票 P_{z^0} 和 P_{z_0} ，满足对任意的 $p \in \Psi$ ，有 $P_{z^0} \succeq p \succeq P_{z_0}$ 。

❖ von Neumann和Morgenstern(1944)给出了定义在 Ψ 上的期望效用表示理论。对于定义在 Ψ 上的偏好关系“ \succeq ”，存在一个期望效用函数 $E[u(\cdot)]$ ，满足：

❖ 对任意 $x, y \in X$ ，有：

$$❖ \quad x \succeq y \Leftrightarrow P_x \succeq P_y \Leftrightarrow E[u(\tilde{x})] \geq E[u(\tilde{y})]$$

$$❖ \quad \text{其中 } E[u(x)] = \int_{\Omega} u(x) dP = \int_Z u(z) dF_x(x)。$$

❖ 当 Z 是一个可数集合时，期望效用函数可以简化为：

$$❖ \quad E[u(x)] = \sum_{z \in Z} u(z) p(z)$$

金融经济学 第一章

❖ 1.2 期望效用函数的存在性

❖ 一、复合彩票

- ❖ 定义：称彩票 $ap + (1 - a)r$ 是一个由彩票 p 和 r 构成的复合彩票，如果该彩票以 a 的概率得到彩票 p ，以 $1 - a$ 的概率得到彩票 r 。
- ❖ 复合彩票 $ap + (1 - a)r$ 也可以看作是一个普通彩票，如果彩票 p 和 r 定义在集合 Z 上，则复合彩票 $ap + (1 - a)r$ 也定义在 Z 上，且对任意的 $z \in Z$ ，其概率密度为 $ap(z) + (1 - a)r(z)$ 。

金融经济学 第一章

❖ 二、期望效用函数的存在性

- ❖ von Neumann 和 Morgenstern(1944) 的期望效用表示定理建立在如下两个公理之上。
- ❖ 公理 1 (独立性公理) : 对任意 $p, q, r \in \Psi$ $a \in (0,1]$, 如果 $p \succ q$, 则有 $ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r$ 。
- ❖ 公理 2 : (Archimedean 公理) 对任意 $p, q, r \in \Psi$, 如果 $p \succ q \succ r$, 则存在 $a, b \in (0,1]$, 使得 $(1-a)r \succ q \succ bp + (1-b)r$ 。
- ❖ 定理 1.1.1 : 定义在 Ψ 上的偏好关系 “ \succ ” 存在期望效用表示, 当且仅当该偏好关系满足公理 1 和公理 2 ; 该效用表示精确到一个仿射变换, 即如果 u 是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数, 则对于任意的
- ❖ $c > 0$ 和 $\hat{u} = cu + d$ 也是一个 von Neumann-Morgenstern 效用函数。

金融经济学 第一章

❖ 二、多期经济中的期望效用函数

- ❖ 考虑一个多期禀赋经济，整个消费过程横跨 $T+1$ 期， $t=0,1,\dots,T$ ，记 $z=(z_0,z_1,\dots,z_T)$ 为个体可行的消费向量，其中 z_t 为 t 期消费量，记 Z 为 z 的全体。假定 Z 有限， $p(\cdot)$ 为定义在 Z 上的概率， $p(\cdot)$ 的全体记为 Ψ 。
- ❖ 定理1.1.2: 定义在 Ψ 上的一个偏好关系“ \succeq ”满足独立性公理和Archimedean公理，当且仅当存在一个von Neumann-Morgenstern效用函数 $u(\cdot)$ ，满足：
$$\sum_{z \in Z} u(z_0, \dots, z_T) p(z = z_0, \dots, z_T) \geq \sum_{z \in Z} u(z_0, \dots, z_T) q(z = z_0, \dots, z_T)$$
$$\Leftrightarrow p \succeq q \quad \text{任意 } p, q \in \Psi$$
- ❖ 其中 $p(z = z_0, \dots, z_T)$ 指从时间0到 T 的消费等于 (z_0, \dots, z_T) 的概率。

金融经济学 第一章

❖ 如果von Neumann- Morgenstern效用函数是时间可加的(time-additive), 则存在一系列函数 $\{u_t(.)\}_{t=0}^T$, 满足:

❖
$$u(z_0, \dots, z_T) = \sum_{t=0}^T u_t(z_t), \quad (1.1.10)$$

❖ 在许多时候, 上述效用函数可以进一步简化为一个几何贴现效用函数:

❖
$$u(z_0, \dots, z_T) = \sum_{t=0}^T \beta^t u(z_t), \quad 0 < \beta < 1. \quad (1.1.11)$$

❖

金融经济学 第一章

❖ 1.1.3 对理性选择的偏离：四个悖论

- ❖ 个体选择行为的完全理性和期望效用函数的存在性（两个公理）是现代金经济学的基础。但越来越多的研究表明，当存在不确定性行为时，个体决策并不是完全理性的，或者与期望效用理论并不一致（见 Machina(1987)、Tversky 和 Kahneman(1981)、Slovic 和 Lichtenstein (1983) 等。下面我们来介绍几个相关的悖论。
- ❖ 一、悖论 1（概率匹配）
- ❖ 把 20 个红球和 10 个黑球一起放入一个袋子，随机地从袋子中取出一个球再放回去，猜测所取出的球是红色的，还是黑色的，猜中的话可以得到 10 元 RMB 的奖励。
- ❖ 在重复猜奖中，实验发现绝大多数个体趋向于 $2/3$ 的时间选择猜红球， $1/3$ 的时间猜黑球。很显然这不是最优的，最优选择应该是总是猜红球。

金融经济学 第一章

- ❖ 二、悖论 2（偏好反转）
- ❖ 考虑两个选择问题：
- ❖ （1）设想你可以得到 2 万人民币的财富和一个选择权，你可以选择：
- ❖ (a) 额外再得到 5 千人民币，
- ❖ (b) 25% 的概率额外再得到 2 万人民币，75% 的概率没有额外收入。
- ❖ （2）设想你可以得到 4 万人民币的财富和一个选择权，你可以选择：
- ❖ (a) 放弃 1 万 5 千人民币，
- ❖ (b) 75% 的概率放弃 2 万人民币，25% 的概率没有额外损失。
- ❖ 在试验中发现，大多数个体在面对问题（1）时会选择 (a)；在面对问题（2）时会选择 (b)。但事实上这两个选择问题所产生的回报是相同的，是 100% 的概率得到 2 万 5 千人民币，还是 25% 的概率得到 4 万人民币，75% 的概率得到 2 万人民币。

金融经济学 第一章

❖ 三、悖论 3 (Ellsberg 悖论)

❖ 在密闭的缸 I 中有 50 个红球和 50 个黑球，在缸 II 中有 100 个不知道比例的红球与黑球。考虑两个摸球游戏：(I) 个体从缸 I 中摸到一个红球时可以赢得 100RMB，个体可以选择从缸 I 中摸 () 还是从缸 II 中摸 ()；(II) 个体从缸 I 中摸到一个黑球时可以赢得 100RMB，个体可以选择从缸 I 中摸 ()，还是从缸 II 中摸 ()。

❖ 实验发现，绝大多数个体会选择 R_I 和 B_I ，但这与偏好的理性选择行为是不一致的。从逻辑上讲，个体在 R_I 和 R_{II} 中更偏爱 R_I ，等价于在 B_{II} 和 B_I 中更偏爱 B_I ，因此如果绝大多数个体选择 R_I 的话，应该只有很少的个体会选择 B_I 才对，这说明真实经济中个体决策中存在非理性的成分。

金融经济学 第一章

❖ 四、悖论 4 (Allais 悖论)

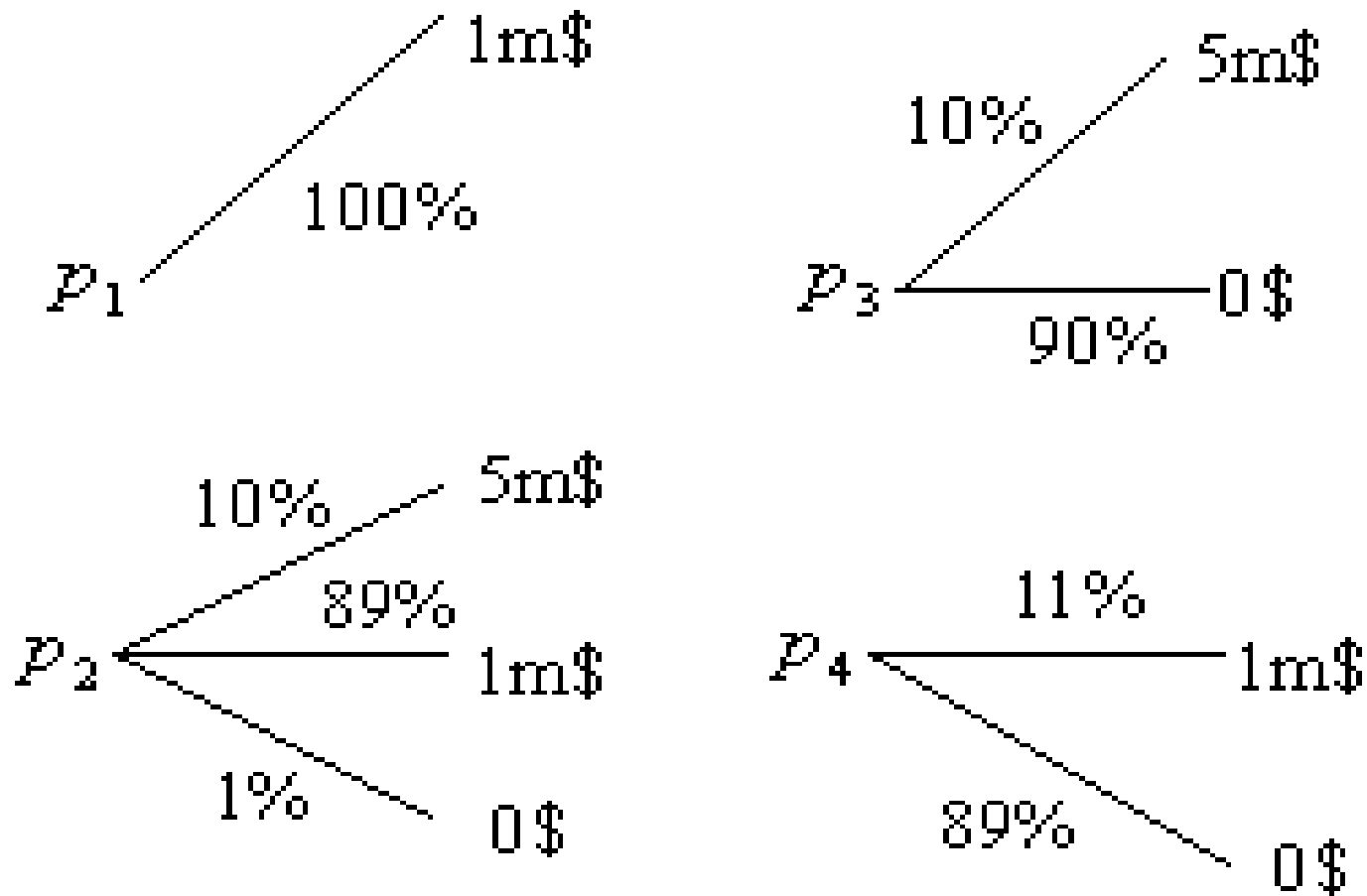
❖ Allais 悖论由 Allais (1953) 给出。考虑如图 1.1 所示的两对彩票：在第一对彩票中，持有彩票 p_1 ，个体可以以 100% 的概率得到 1000 万美元；持有彩票 p_2 ，个体可以以 10% 的概率得到 5000 万美元，以 89% 的概率得到 1000 万美元，1% 的概率得到 0 美元。第二对彩票中，持有彩票 p_3 ，个体可以以 10% 的概率得到 5000 万美元，90% 的概率得到 0 美元；持有彩票 p_4 ，个体可以以 11% 的概率得到 1000 万美元，89% 的概率得到 0 美元。

❖ 在第一对彩票中，大多数人会选择 p_1 ；在第二对彩票中，大多数人会选择彩票 p_3 。这种现象与独立性公理矛盾，这一点可以从下面的分析中看出：

$$❖ \quad p_1 \sim 0.11(\$10m) + 0.89(\$10m) , \quad (1.1.12)$$

$$❖ \quad p_2 \sim 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$1m) , \quad (1.1.13)$$

金融经济学 第一章



论 (图 1.1.1) : Allais 悖论

金融经济学 第一章

- ❖ 因此 $p_1 \succ p_2$ 等价于
- ❖ $0.11(\$1m) + 0.89(\$1m) \succ 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$1m)$ 。 (1.1.14)
- ❖ 根据独立性公理，这蕴涵 $p_1 \succ \frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)$ (1.1.15)
- ❖ 根据独立性公理，(1.1.15) 等价于：
- ❖ $0.11(\$1m) + 0.89(\$0m) \succ 0.11\left(\frac{1}{11}(\$0m) + \frac{10}{11}(\$5m)\right) + 0.89(\$0m)$
- ❖ 即 $p_4 \succ p_3$ 。
- ❖ 从以上四个悖论可以看出，上面所介绍的选择行为的完全理性和期望效用函数的存在性法则是存在疑问的，如何对经典理论进行修正和拓展，属于行为金融学的范畴，我们将在后面作进一步的讨论。

金融经济学第一章

❖ §1.2 风险回避及其度量

- ❖ 风险回避概念的提出，最早可以追溯到 1738 年瑞士著名数学家 Bernoulli 以拉丁文所撰写的题为“ *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*”（即“ *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*”）的论文；现代风险理论的给出，应该归功于 Arrow(1963、1965 和 1971)、Pratt(1964) 等的研究。下面我们来介绍 Arrow 和 Pratt 等人的工作。

❖ 1.2.1 风险回避

- ❖ 在金融理论中，我们通常假定个体是风险回避的 (**Risk Aversion**)，即个体厌恶风险的存在。个体为什么是风险回避的，下面我们用一个简单例子来加以剖析。

金融经济学第一章

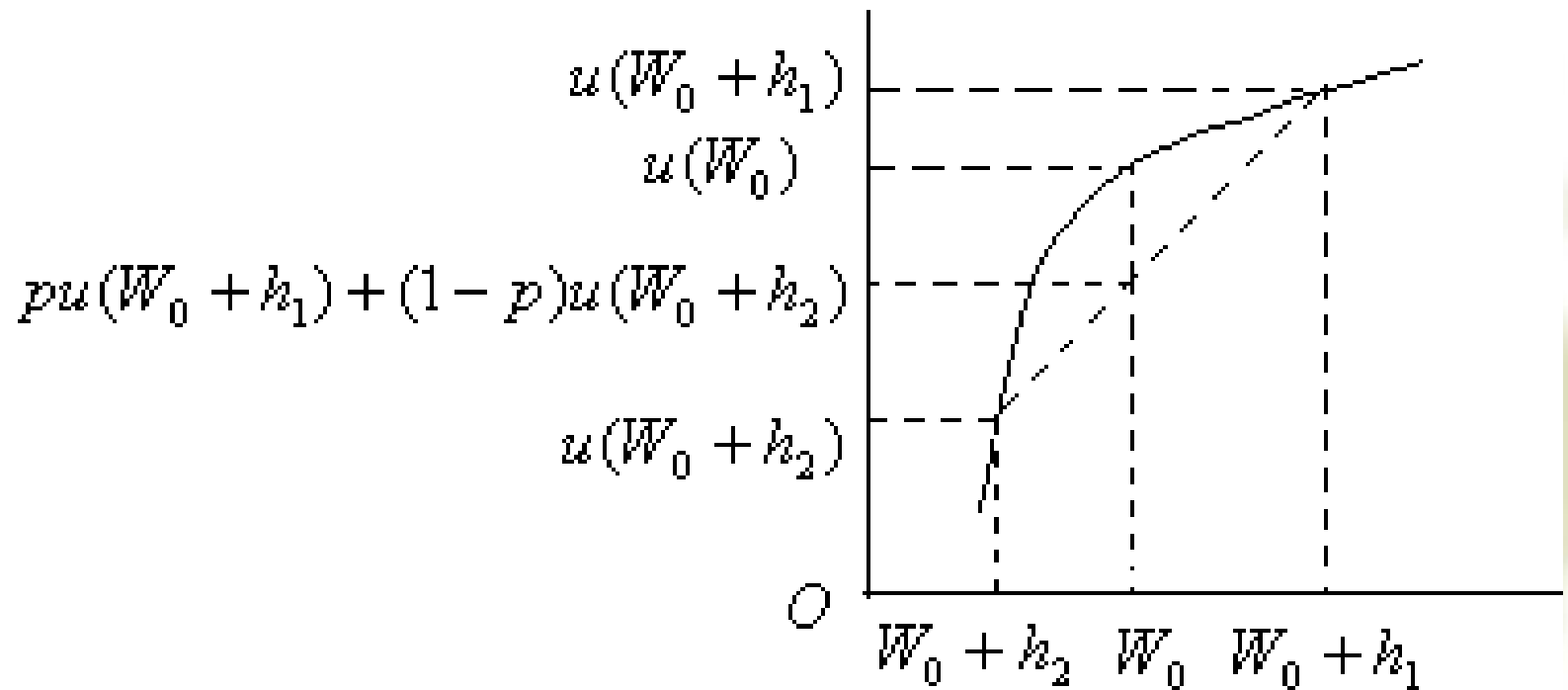
- ❖ 例1.2.1 考虑一个个体决策问题，假定一个已经饿了两天的个体面临一个选择，他可以选择（1）马上得到一碗稀饭，（2）50%的概率得到两碗稀饭，50%的概率继续挨饿。可以想象，绝大多数个体都会选择（1），尽管两种选择的期望收益相等，但个体获得的期望效用并不相等。原因是个体边际效用是递减的，个体放弃消费一个热包子的边际效用损失要远大于消费第二个包子带来的边际效用增加。
- ❖ 定义：一位个体被称为是风险回避的，如果在任何财富水平下，该个体都不愿意接受任意期望回报为零的彩票，或认为接不接受是无所谓的：即在 $\forall W_0$ 下， $\forall \tilde{z}$ 满足 $E[\tilde{z}] = 0$ ，有 $Eu(W_0 + \tilde{z}) \leq u(W_0)$
- ❖ 一位个体称为是严格风险回避的，如果在任何财富水平下，该个体都不愿意接受任意期望回报为零的彩票：即在 $\forall W_0$ 下， $\forall \tilde{z}$ 满足 $E[\tilde{z}] = 0$ 有： $Eu(W_0 + \tilde{z}) < u(W_0)$ 。

金融经济学第一章

- ❖ 考虑一个赌博：以概率 p 得到一个正的回报 h_1 ，以概率 $1-p$ 得到一个负的回报 h_2 ，且满足： $ph_1 + (1-p)h_2 = 0$ ，则该赌博被称为是一个公平的赌博。
- ❖ 一个（严格）风险回避的个体将不愿意接受这样一个公平赌博，这等价于：
$$u(W_0) = u[p(W_0 + h_1) + (1-p)(W_0 + h_2)]$$
$$\geq (>) pu(W_0 + h_1) + (1-p)u(W_0 + h_2) \quad (1.2.1)$$
- ❖ 因此当个体是（严格）风险回避的，则其效用函数是（严格）凹的；反过来也成立，如图1.2.1所示。
- ❖ 当von Neumann-Morgenstern效用函数二次可微时，由Taylor法则，(1.2.1)蕴涵：
$$u''(W_0)(ph_1^2 + (1-p)h_2^2) \leq 0 \quad (1.2.2)$$
- ❖ 所以个体的风险回避蕴涵效用函数的凹性，如果存在二阶导数，则二阶导数小于零。即边际效用递减。

金融经济学第一章

❖ (图 1.2.1) : 风险回避与凹的效用函数



金融经济学第一章

❖ 1.2.2 风险回避的度量

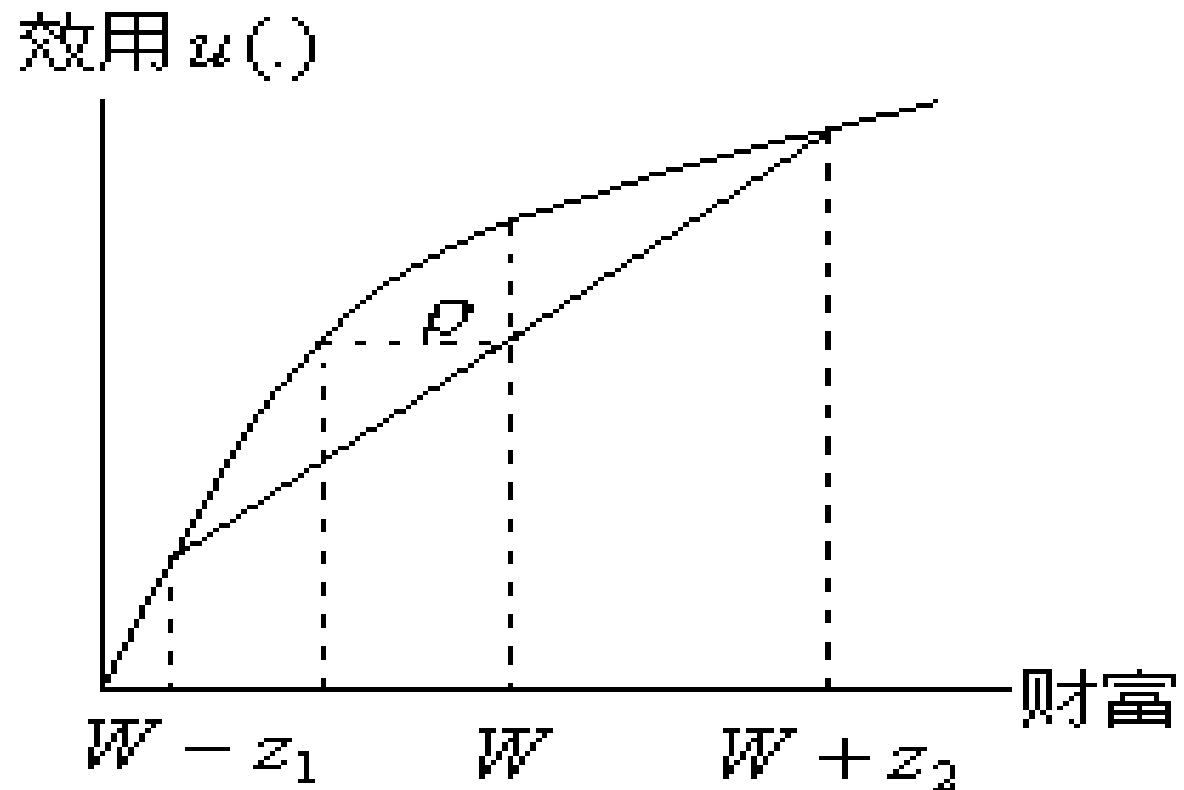
❖ 一个风险回避的个体不喜欢均值为零的风险，并不蕴涵他不进行风险资产投资，只要风险资产的期望回报率足够高。同样地，如果购买保险的成本太高，风险回避的个体可能会放弃购买保险而选择承受风险。不同个体在期望收益和可以承受的风险之间的替代关系是不同的，同样一份风险，同样的保险费，有些个体愿意通过保险购买来回避风险，有些个体却宁愿承受风险，为此我们需要对个体的风险回避程度进行刻画。

❖ 一、风险溢金

❖ 给定一个均值为零的风险 \tilde{z} ，我们来估计个体愿意支付多少风险溢金，以避免该风险。

金融经济学第一章

❖ (图 1.2.2) : 给定风险下的风险溢价



金融经济学第一章

- ❖ 假定个体的初始财富为 W ，效用函数为 $u(\cdot)$ ，则风险溢价必须满足：

$$E[u(W + \tilde{z})] = u(W - \rho) \quad (1.2.3)$$

- ❖ 如图 1.2.2 所示。当 \tilde{z} 充分小时，对 (1.2.3) 作二阶 Taylor 近似，忽略高阶项，整理得：
- $$\rho \cong -\frac{1}{2} \frac{u''(W)}{u'(W)} \sigma_z^2 \quad (1.2.4)$$

- ❖ 上式由 Arrow(1963) 和 Pratt(1964) 分别独立给出，称为 Arrow-Pratt 近似。

- ❖ 定理 1.2.1：对于均值为零的小风险，个体为避免该风险所愿意支付的风险溢价可以表示为：

$$\rho \cong -\frac{1}{2} \frac{u''(W)}{u'(W)} \sigma_z^2$$

- ❖ 该风险溢价等于个体额外承受该风险时所需要的补偿。

金融经济学第一章

❖ 二、绝对风险回避系数

- ❖ 根据上一小节的讨论，给定一个均值为零的风险，个体为避免该风险愿意支付的风险溢金由该风险的方差和 $-u''(W)/u'(W)$ 决定。当风险尺度比较小时，该风险的方差越大，个体愿意支付的风险溢金越高； $-u''(W)/u'(W)$
- ❖ 越大，个体愿意支付的风险溢金越高，因此 $-u''(W)/u'(W)$ 刻画了个体对风险的厌恶程度被称为**Arrow-Pratt**绝对风险回避系数。
- ❖ 定义： $R_A(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$ 被称为**Arrow-Pratt**意义下的绝对风险回避系数。
- ❖ 定义：称效用函数展示减的绝对风险回避，如果 $R_A(\cdot)$ 是个严格减的函数；类似地称效用函数展示增的绝对风险回避，如果 $R_A(\cdot)$ 是个严格增的函数；称效用函数是常数绝对风险回避的，如果 $R_A(\cdot)$ 是个常数。

金融经济学第一章

❖ 定理 1.2.2 : 给定一个均值为零、充分小的风险，个体为避免该风险愿意支付的风险溢价依赖于初始财富，满足：

❖ 如果 $\frac{dR_A(W)}{dW} < 0$ 则 $\frac{d\rho(W)}{dW} < 0 \quad \forall W$, ;

❖ 如果 $\frac{dR_A(W)}{dW} > 0$ 则 $\frac{d\rho(W)}{dW} > 0 \quad \forall W$, ;

❖ 如果 $\frac{dR_A(W)}{dW} = 0$ 则 $\frac{d\rho(W)}{dW} = 0 \quad \forall W$, ;

❖ 推论 1.2.1 : 减的绝对风险回避蕴涵 $u'''(W) > 0$ 。

[注：当个体效用函数的三阶导数大于零时，个体为应对未来不确定性会进行预防性储蓄。]

金融经济学第一章

- ❖ 定义：考虑两位个体 i 和 k ，称个体 i 比个体 k 更加风险回避，如果对任意的 W ，关系 $R_A^i(W) > R_A^k(W)$ 成立。
- ❖ 定理 1.2.3：给定两位风险回避、不饱和（边际效用大于零）的个体 i 和 k ，下列三个条件相互等价：
 - ❖ a) 在相同初始财富下，为避免任意给定的一个充分小，均值为零的风险，个体 i 愿意支付比个体 k 更高的风险溢金；
 - ❖ b) $R_A^i(W) > R_A^k(W)$ ，对任意 W 成立；
 - ❖ c) 存在一个严格增、凹的函数 $G(\cdot)$ ，满足： $u_i(W) = G(u_k(W)) \quad \forall W$ 。
- ❖ 三、相对风险回避系数
- ❖ 绝对风险回避系数可以改写为：
$$R_A(W) = - \frac{du'(W)}{dW} \frac{1}{u'(W)}$$
- ❖ 它可以看作是边际效用的衰减率，即单位财富量的上升所导致的边际效用的下降。

金融经济学第一章

- ❖ 在测度灵敏性时，经济学家通常偏爱无单位的量。为此，我们将相对风险回避系数与边际效用对财富的弹性联系在一起。
- ❖ 定义： $R_R(W) \equiv - \frac{du'(W)/u'(W)}{dW/W}$ 称为Arrow-Pratt意义下的相对风险回避系数。
- ❖ 定义：称效用函数展示减的相对风险回避，如果 $R_R(\cdot)$ 是个严格减的函数；类似地称效用函数展示增的相对风险回避，如果 $R_R(\cdot)$ 是个严格增的函数；称效用函数是常数相对风险回避的，如果 $R_R(\cdot)$ 是个常数。
- ❖ 相对风险回避系数的经济学含义：
 - ❖ 假定个体的初始财富量为 W ，给定一个均值为零的财富扰动风险 $w\tilde{z}$ ，下面来估计个体愿意支付初始财富量的百分之几，以避免该财富扰动风险，我们将该百分比看作风险溢金的相对值，它必须满足：
- ❖
$$E[u(w(1+\tilde{z}))] = u(w(1-\hat{\rho})) \quad , \quad (1.2.14)$$

金融经济学第一章

❖ 当 \tilde{z} 比较小时，通过二次 Taylor 近似整理得：

❖
$$\hat{\rho} \cong \frac{1}{2} R_R(W) \sigma_z^2, \quad (1.2.15)$$

❖ 因此，为避免给定的均值为零的、尺度比较小的财富扰动风险，个体愿意损失的财富份额正比于风险的方差和个体的相对风险回避系数。

❖ 推论： $\hat{\rho}$ 依赖于初始财富 W ；当该风险的尺度充分小时，对 W ，我们有：

❖
$$\frac{dR_R(W)}{dW} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\hat{\rho}(W)}{dW} < 0$$

❖
$$\frac{dR_R(W)}{dW} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\hat{\rho}(W)}{dW} > 0$$

❖
$$\frac{dR_R(W)}{dW} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\hat{\rho}(W)}{dW} = 0$$

金融经济学第一章

❖ 1.2.3 几种常见的效用函数

❖ 一、凹的二次效用函数

❖ 二次效用函数可以表示为：

$$❖ \quad u(W) = W - \frac{b}{2}W^2 \quad b > 0, \quad ; \quad (1.2.16)$$

❖ 其一阶导数、二阶导数分别为：

$$❖ \quad u'(W) = 1 - bW \quad ;$$

$$❖ \quad u''(W) = -b \quad .$$

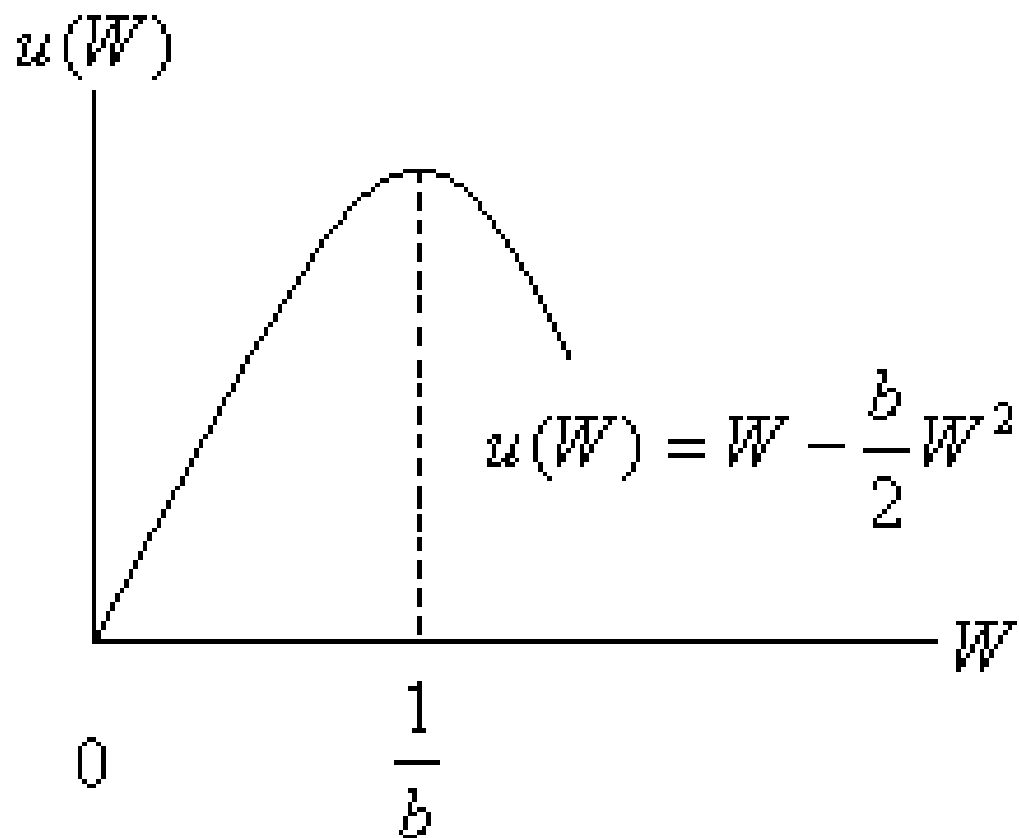
❖ 考虑到消费品或财富的边际效用通常是非负的（即消费品或财富是不饱和的）， W 的取值范围为 $[0, 1/b]$ ，其函数图形见 1.2.2。因为 $R_A(W) = \frac{b}{1 - bW}$

❖ $\frac{dR_A(W)}{dW} = \frac{b^2}{(1 - bW)^2} > 0$ ，所以二次效用函数展示增的绝对风险回避。

❖ $R_R(W) = \frac{bW}{1 - bW}$ 是个增函数，所以展示增的相对风险回避系数。

金融经济学第一章

❖ (图 1.2.3) : 二次效用函数



金融经济学第一章

❖ 二、负指数效用函数

❖ 负指数效用函数可以表示为：

❖
$$u(W) = -e^{-bW} \quad b \geq 0 \quad ; \quad (1.2.17)$$

❖ 其图形如 1.2.4 所示，其一阶导数和二阶导数可以分别表示为：

❖
$$u'(W) = be^{-bW} > 0 \quad ;$$

❖
$$u''(W) = -b^2e^{-bW} < 0 \quad 。$$

❖ 因为 $\lim_{W \rightarrow +\infty} u(W) = 0$ ，所以负指数效用函数有上界。其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以表示为：

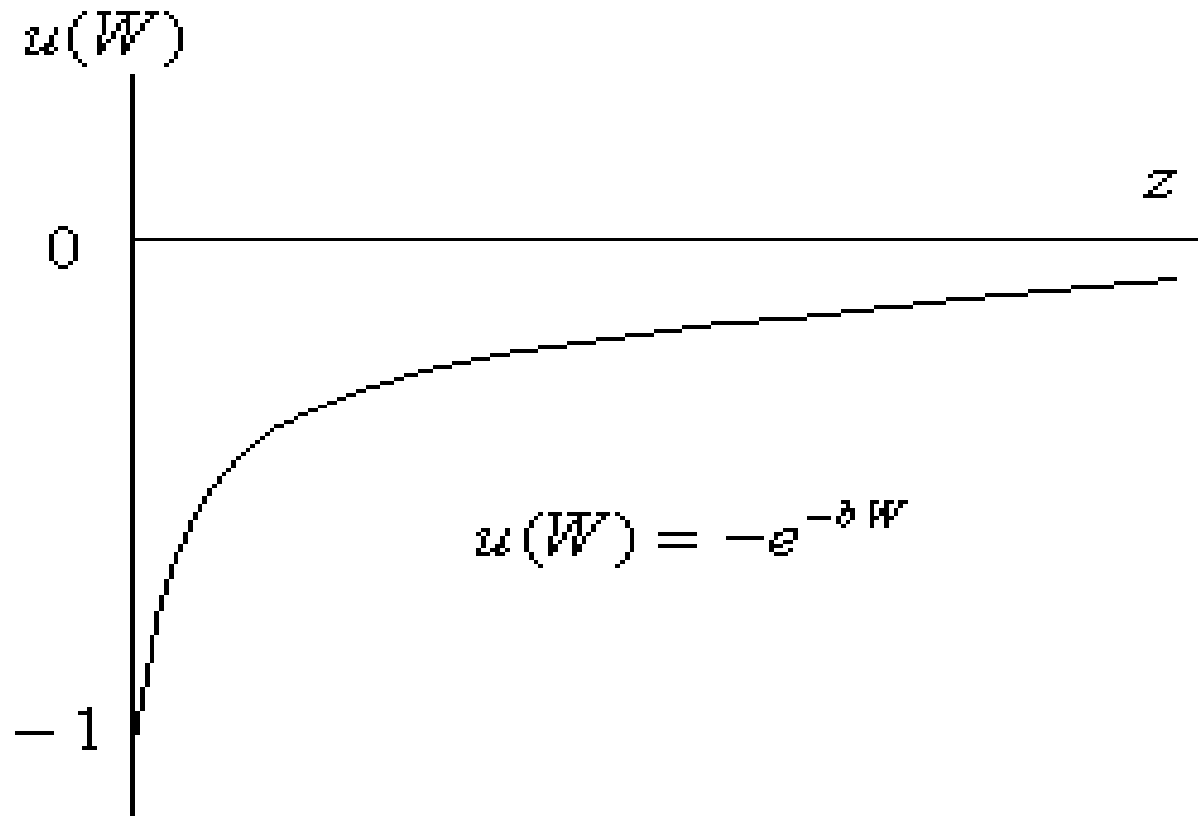
❖
$$R_A(W) = b \quad dR_A(W)/dW = 0 \quad ;$$

❖
$$R_R(W) = bW \quad dR_R(W)/dW = b > 0 \quad 。$$

❖ 所以负指数效用函数展示出常数绝对风险回避、增的相对风险回避。

金融经济学第一章

❖ （图 1.2.4）：负指数效用函数



金融经济学第一章

❖ 三、幂效用函数

❖ 狭义幂效用函数可以表示为：

$$u(W) = \frac{W^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta > 0 \quad (1.2.18)$$

❖ 当 θ 趋向于 1 时，利用 l'Hopital 法则，上式可以简化为：

$$u(W) = \ln W \quad (1.2.18')$$

❖ 狭义幂效用函数的一阶和二阶导数分别为：

❖ 所以其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以分别表示为：

$$R_A(W) = \theta/W, \quad dR_A(W)/dW = -\theta/W^2 < 0;$$

❖ 因此狭义幂效用函数显示出绝对风险回避和常数相对风险回避，狭义幂效用函数又被称为常数相对风险回避的效用函数，或 CRRA (constant relative risk aversion) 效用函数。

金融经济学第一章

❖ 广义幂效用函数可以表示为：

$$❖ \quad u(W) = \frac{(A + BW)^{1-1/B}}{B-1}, \quad B > 0, \quad A \neq 0, \quad (1.2.18)$$

❖ 其中 $W > \max[-A/B, 0]$ 。其一阶导数和二阶导数分别为：

$$❖ \quad u'(W) = (A + BW)^{-1/B},$$

$$❖ \quad u''(W) = - (A + BW)^{-\frac{1}{B}-1}。$$

❖ 所以其绝对风险回避系数和相对风险回避系数可以分别表示为：

$$❖ \quad R_A(W) = \frac{1}{A + BW} \quad \frac{dR_A(W)}{dW} = \frac{-B}{(A + BW)^2} < 0;$$

$$❖ \quad R_R(W) = \frac{W}{A + BW} \quad \frac{dR_R(W)}{dW} = \frac{A}{(A + BW)^2} = \text{sign}(A)。$$

❖ 广义幂效用函数展示出减的绝对风险回避，当 $A > 0$ 时，展示出增的相对风险回避，当 $A < 0$ 时展示出减的相对风险回避，当 $A = 0$ 时，广义幂效用函数退化为具有常数相对风险回避的狭义幂效用函数。

金融经济学第一章

❖ 1.2.4 静态最优投资决策与比较静态分析

❖ 一、静态最优组合问题及求解

- ❖ 考虑一个两期的静态投资组合选择问题，假定个体效用函数严格增、严格凹， $t=0$ 时个体可以在 J 种风险资产和一种无风险资产上进行投资。记第 j 种风险资产上的随机回报率为 \tilde{r}_j ， $j=1,2,3,\dots, J$ 。无风险资产上的回报率为 r_f 。假定个体初始财富量为 W_0 ， a_j 为个体投资在第 j 种风险资产上的财富量，则个体在 $t=1$ 时的随机财富量为：

$$\tilde{W} = (W_0 - \sum_j a_j)(1+r_f) + \sum_j a_j(1+\tilde{r}_j) = W_0(1+r_f) + \sum_j a_j(\tilde{r}_j - r_f)$$

- ❖ 个体的最优投资组合决策问题可以表示为：

$$\max_{\{a_j\}} E[u(W_0(1+r_f) + \sum_j a_j(\tilde{r}_j - r_f))] \quad , \quad (1.2.19)$$

金融经济学第一章

❖ 求解得一阶条件为：

❖
$$E[u'(\tilde{W})(\tilde{r}_j - r_f)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (1.2.20)$$

❖ 当个体是风险回避的（效用函数严格凹）时，上述一阶条件是一个充分必要条件。上式蕴涵 $\text{Prob}\{\tilde{r}_j - r_f > 0\} \in (0, 1)$ 。

❖ **定理1.2.3：**一个风险回避的、不饱和的投资者愿意从事风险投资，当且仅当至少有一种风险资产的期望回报率超过无风险利率。

❖ 二、一种风险资产和一种无风险资产的情形

❖ 当经济中只有一种风险资产和一种无风险资产时，一阶条件(1.2.20)可以简化为：

❖
$$E[u'(\tilde{W})(\tilde{r} - r_f)] = 0 \quad (1.2.21)$$

❖ 其中 \tilde{W} 可以表示为 $\tilde{W} = W_0(1 + r_f) + a(\tilde{r} - r_f)$ ， a 和 \tilde{r} 分别为投资在风险资产上的财富量和风险资产的随机回报率。

金融经济学第一章

- ❖ 定理 1.2.4 (Arrow (1970)) : 在整个定义域内如果效用函数展示减的绝对风险回避, 则风险资产是一种正常品 (normal good) ; 如果效用函数展示增的绝对风险回避, 则风险资产是一种次品 (inferior good) ; 效用函数是常数绝对风险回避的, 则个体对风险资产的需求不依赖于个体初始财富。即 :

- ❖ $\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} < 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow \frac{da}{dW_0} > 0 \quad \forall W_0, \quad ;$

- ❖ $\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} > 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow \frac{da}{dW_0} < 0 \quad \forall W_0, \quad ;$

- ❖ $\frac{dR_A(W_0)}{dW_0} = 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow \frac{da}{dW_0} = 0 \quad \forall W_0, \quad \circ$

金融经济学第一章

- ❖ 定理 1.2.5：在整个定义域内如果效用函数展示减的相对风险回避，则个体对风险资产需求的财富弹性严格大于 1；如果效用函数展示增的相对风险回避，则个体对风险资产需求的财富弹性严格小于 1；如果效用函数是常数相对风险回避的，则个体对风险资产需求的财富弹性等于 1。即：

- ❖ $\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} < 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow \eta = \frac{da}{dW_0} \frac{W_0}{a} > 1 \quad \forall W_0, \quad ;$

- ❖ $\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} > 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow \eta = \frac{da}{dW_0} \frac{W_0}{a} < 1 \quad \forall W_0, \quad ;$

- ❖ $\frac{dR_R(W_0)}{dW_0} = 0 \quad \forall W_0 \Rightarrow \eta = \frac{da}{dW_0} \frac{W_0}{a} = 1 \quad \forall W_0, \quad ;$

金融经济学第一章

- ❖ 定理 1.2.6(Pratt(1964)) $R_A(\cdot)$ 是一个全局意义上的风险回避系数，即如果存在两位风险回避的个体 i 和 k ，有 $R_i(W) > R_k(W)$ ，对任意 W 成立，则在相同的初始财富下，为避免任意一个随机损失，个体 i 愿意支付比个体 k 更高的风险溢金。
- ❖ 三、多种风险资产和一种无风险资产的情形
- ❖ 当经济中风险资产的品种多于一种时，上述讨论并不一定成立。例如，即使个体效用函数展示减的相对风险回避，个体对特定风险资产需求的财富弹性可能会小于或等于 1，其原因是随着个体财富量的上升，个体的风险资产投资组合会发生变化。
- ❖ Cass 和 Stiglitz(1970) 研究了个体风险资产投资组合不随初始财富量变化的充分必要条件。在该条件下，个体初始财富量的变化仅导致了风险资产组合和无风险资产之间权重的变化，风险资产组合内部权重不变。Cass 和 Stiglitz(1970) 将这种现象称之为二基金货币分离。

金融经济学第一章

- ❖ 定义：个体展示二基金货币分离，如果他总是选择持有相同的风险资产投资组合；当初始财富量变化时，仅改变该组合和无风险资产之间的权重。



- ❖ 定理 1.2.7(Cass 和 Stiglitz(1970))：个体效用函数展示二基金货币分离，当且仅当该效用函数满足：

- ❖
$$-\frac{u'(W)}{u''(W)} = a + bW \quad (1.2.22)$$



- ❖ 当 $a \neq 0$ 时，风险资产之间的组合权重不随初始财富量的变化而变化，但风险资产组合与无风险资产之间的相对权重随着个体初始财富量的变化而变化，我们称之为部分分离 (partially separated)；当 $a=0$ 时，所有资产之间的相对权重独立于个体的初始财富量，我们称之为完全分离 (completely separated)。

金融经济学第一章

❖ §1.3 资产的随机占优

- ❖ 引入随机占优概念，对资产的优劣进行比较。需要说明的是，并非所有风险资产都是可以进行比较的，而且这种比较依赖于个体偏好。

❖ 1.3.1 一阶随机占优

- ❖ 定义：称风险资产 A 一阶随机占优于风险资产 B，如果对于所有具有单调增、连续效用函数的个体都觉得资产 A 要优于资产 B，或认为两者是无差异的。

- ❖ 假定资产 A 和 B 的随机回报率在 0 和 1 之间。记资产 A 和 B 回报率的累计分布函数为：

- ❖
$$F_A(z) = \text{prob}\{\omega \mid r_A(\omega) \leq z, \forall \omega \in \Omega\}$$

- ❖
$$F_B(z) = \text{prob}\{\omega \mid r_B(\omega) \leq z, \forall \omega \in \Omega\}$$

- ❖ 则 $F_A(1) = F_B(1) = 1$ $F_A(0)$ 和 $F_B(0)$ 不必为零。

金融经济学第一章

❖ 定理1.3.1: 下列三种陈述等价:

❖ (1) $A \underset{FSD}{\geq} B$;

❖ (2) $F_A(z) \leq F_B(z)$, $\forall z \in [0,1]$; (1.3.1)

❖ (3) $\tilde{r}_A \stackrel{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \geq 0$ 。 (1.3.2)

❖ 其中 “ $\stackrel{d}{=}$ ” 代表依分布相等, $\tilde{r}_A \stackrel{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \geq 0$ 等价于:

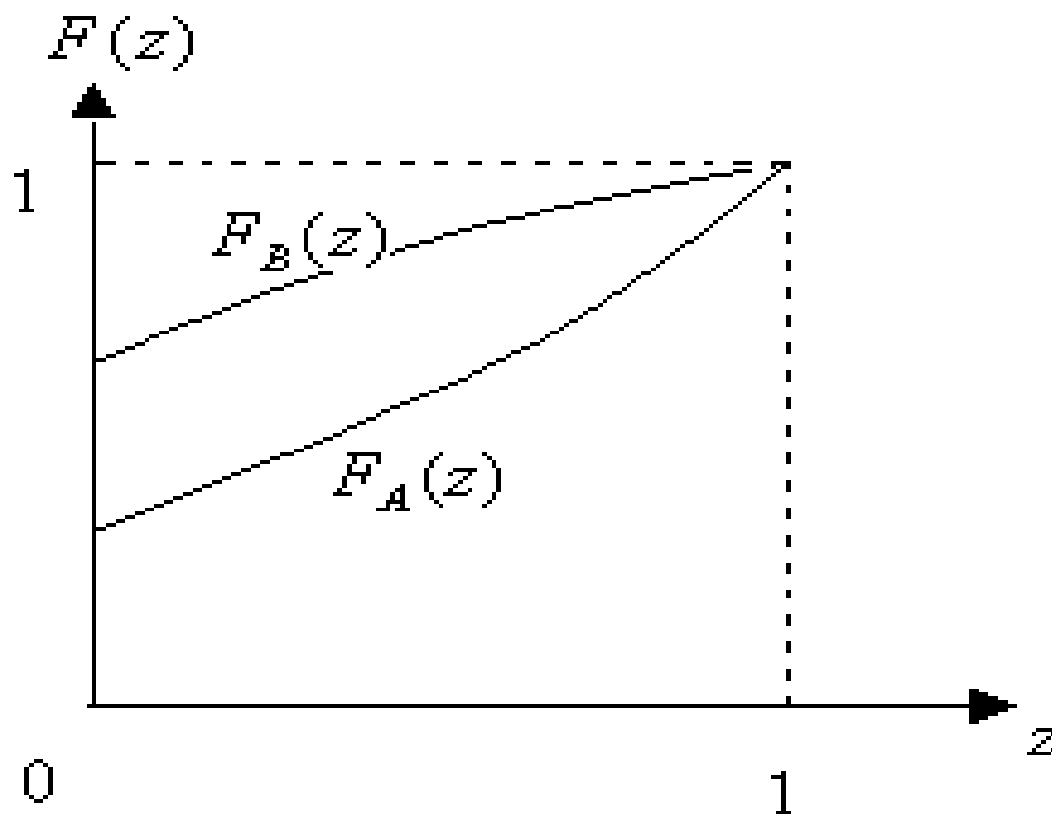
❖ $prob\{\omega \mid r_A(\omega) = z, \omega \in \Omega\} = prob\{\omega \mid r_B(\omega) + \alpha(\omega) = z, \omega \in \Omega\}$,

❖ $\forall z \in [0,1]$, $\alpha(\omega) \geq 0$ 。

❖ 关系式 $F_A(z) \leq F_B(z)$, $\forall z \in [0,1]$ 如图1.3.1所示

金融经济学第一章

(图 1.3.1) : 一阶随机占优



金融经济学第一章

- ❖ 例 1.3.1：假定经济中有三个自然状态 ω_1 、 ω_2 和 ω_3 ，这三个自然状态发生的概率都等于 $1/3$ 。假定资产 A 和资产 B 的随机回报率如下表所示。

自然状态 资产	ω_1	ω_2	ω_3
\tilde{r}_A	1	1/2	0
\tilde{r}_B	0	0	1

金融经济学第一章

❖ 1.3.2 二阶随机占优

❖ 一阶随机占优仅假定了个体是不饱和的，其效用函数严格增；这一节要介绍的二阶随机占优仅假定了个体是风险回避的。

❖ 定义：称风险资产 A 二阶随机占优于风险资产 B，记为 $A \succeq_{SSD} B$ ，如果所有满足效用函数的一阶导数除了零测集外在 $[1,2]$ 上连续的风险回避的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。

❖ 定理 1.3.2 以下三种陈述是等价的：

❖ (1) $A \succeq_{SSD} B$;

❖ (2) $E[\tilde{r}_A] = E[\tilde{r}_B]$, (1.3.4)

❖

❖ 且 $S(z) = \int_0^z (F_A(s) - F_B(s))ds \leq 0 \quad \forall z \in [0,1]$; (1.3.5)

❖ (3) $\tilde{r}_B \stackrel{d}{=} \tilde{r}_A + \tilde{\varepsilon}$, 且 $E[\tilde{\varepsilon} | \tilde{r}_A] = 0$ 。 (1.3.6)

金融经济学第一章

- ❖ 直接从定义判别资产的二阶随机占优通常是非常困难的，定理 1.3.2 给出了判别二阶随机占优的两种简单方法：一、通过研究两种资产的累计概率分布和均值，计算 $\int_0^1 (F_A(s) - F_B(s))ds$ ，看是否恒小于等于零；二、能否将一种资产的随机回报率写成另一种资产的随机回报率和一个噪声项。
- ❖ 例：假定经济中有五个等概率发生的自然状态，个体的初始财富为 1，个体有两种资产可供其挑选，假定这两种资产的随机回报率如表 1.3.2 所示。
$$A \underset{SSD}{\geq} B \Rightarrow E[\tilde{r}_A] = E[\tilde{r}_B] \quad \text{var}(\tilde{r}_A) \leq \text{var}(\tilde{r}_B)$$
- ❖ 推论：

金融经济学第一章

❖ (表 1.3.2) : 资产 A 和资产 B 的随机回报率

❖

自然 状态 资产 回报率	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
\tilde{r}_A	0.4	0.4	0.8	0.8	0.8
\tilde{r}_B	0.9	1.0	0.3	0.5	0.5

金融经济学第一章

❖ 1.3.3 二阶随机单调占优和三阶随机占优

- ❖ 定义：称风险资产 A 二阶随机单调占优于风险资产 B，如果所有风险回避的、不饱和的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的，记为：

$$A \overset{M}{\underset{SSD}{\geq}} B$$

- ❖ 显然，二阶随机单调占优要弱于二阶随机占优，它只需风险回避个体中的一部分偏爱资产 A。

- ❖ 定理 1.3.3：以下三种陈述是等价的：

- ❖ (1) $A \overset{M}{\underset{SSD}{\geq}} B$;
- ❖ (2) $E[\tilde{r}_A] \geq E[\tilde{r}_B]$ 且 $S(z) = \int_0^z (F_A(s) - F_B(s))ds \leq 0 \quad \forall z \in [0,1]$;
- ❖ (3) $\tilde{r}_B \overset{d}{=} \tilde{r}_A + \tilde{\varepsilon}$ 且 $E[\tilde{\varepsilon} | \tilde{r}_A] \leq 0$ 。

金融经济学第一章

- ❖ 定义：称资产 A 三阶随机占优于资产 B，记为 $A \succeq_{TSD} B$ ，如果所有展示减的绝对风险回避的个体都偏爱资产 A，或认为资产 A 和资产 B 是无差异的。
- ❖ 三阶随机占优的概念仅是二阶随机占优概念的一个推广，它要弱于二阶随机占优。
- ❖ 定理 1.3.4：如果 $E[\tilde{r}_A] = E[\tilde{r}_B]$ 且 $\int_0^z S(y)dy \leq 0 \quad \forall z \in [0,1]$ 成立，则资产 A 三阶随机占优于资产 B，即 $A \succeq_{TSD} B$ 。
- ❖ 1.3.4 最优投资决策和比较静态分析
- ❖ 一、Arrow-Pratt 更加风险回避概念的不足（一个简单例子）
- ❖ 当经济中存在一种风险资产和一种无风险资产时，由定理 1.2.6，个体的风险回避程度越高，其投资在风险资产上的财富量越低；直观地我们会想到，在两种都是风险资产时，个体风险回避程度越高，个体将增加低风险资产上的投资量以回避风险。Ross(1981) 给出了一个简单例子，证明了该想法的错误。

金融经济学第一章

假定经济中有两种风险资产A和B，其随机回报率满足：

$$\tilde{r}_A = \tilde{r}_B + \tilde{z}, \quad E[\tilde{z} | \tilde{r}_B] \geq 0,$$

这蕴涵资产A比资产B有更高的期望回报率和更高的风险，这类似于一种无风险资产和一种风险资产的情形。假定 \tilde{z} 和 \tilde{r}_B 相互独立，其随机回报率满足：

$$\tilde{r}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

考虑两个不饱和的、风险回避的个体i和k，假定他们的初始财富都是1单位。假定个体k具有一个严格凹、严格增的效用函数 $u_k(\cdot)$ ，满足：

$$u_k'(\frac{5}{2}) = 0 \quad u_k'(\frac{7}{4}) = 2 \quad u_k'(\frac{3}{2}) = 3 \quad u_k'(\frac{3}{4}) = 4$$

由此得： $E[u_k'(1 + \tilde{r}_B + \frac{1}{4}(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B))(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B)] = 0$

即对个体k而言，投资1/4单位财富在资产A上是最优决策

金融经济学第一章

- ❖ 假定个体 **i** 比个体 **k** 更加风险回避，则存在一个严格增的凹函数 **G(.)** $u_i(.) = G(u_k(.))$ $G'(u_k(.))$ 显然是个减函数。假定 **G(.)** 满足：

$$G'(u_k(\frac{5}{2})) = 0 \quad G'(u_k(\frac{7}{4})) = 0 \quad G'(u_k(\frac{3}{2})) = 10 \quad G'(u_k(\frac{3}{4})) = 10$$

- ❖ 由此得：

$$\begin{aligned} & E[u_i'(1 + \tilde{r}_A + \frac{1}{4}(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B))(\tilde{r}_A - \tilde{r}_B)] \\ &= \frac{1}{4} [G'(u_k(\frac{5}{2}))u_k'(\frac{5}{2}) \times 2 + G'(u_k(\frac{7}{4}))u_k'(\frac{7}{4}) \times (-1) \\ & \quad + G'(u_k(\frac{3}{2}))u_k'(\frac{3}{2}) \times 2 + G'(u_k(\frac{3}{4}))u_k'(\frac{3}{4}) \times (-1)] = 2.5 > 0 \end{aligned}$$

- ❖ 因此在个体 **i** 的最优投资决策中，投资在资产 **A** 上的财富量应该超过 1/4 单位。

金融经济学第一章

❖ 二、强更加风险回避

- ❖ Ross 证明了给定两种风险资产，Arrow-Pratt 意义下的更加风险回避并不能保证个体风险回避程度越高，在较高风险性的资产上的投资额越少。为此，Ross(1981) 引入了强更加风险回避的概念。
- ❖ 定义：(Ross(1981)) 称个体 i 比个体 k 强更加风险回避 (strongly more risk averse)，如果
$$\inf_w \frac{u_i''(W)}{u_k''(W)} \geq \sup_w \frac{u_i'(W)}{u_k'(W)}$$
。
- ❖ 很明显，强更加风险回避蕴涵 Arrow-Pratt 意义下更加风险回避，但前者要严格地强于后者。

金融经济学第一章

- ❖ 定理：个体 i 比个体 k 强更加风险回避的充分必要条件是，存在一个减的凹函数 $G(\cdot)$ 和一个严格正的常数 λ ，满足：

$$u_i(W) = \lambda u_k(W) + G(W) \quad \forall W, \quad \lambda > 0.$$

- ❖ 定理：假定经济中存在着两种风险资产，其中一种资产要比另一种资产有更高的期望回报和更高的风险。如果个体 i 比个体 k 强更加风险回避，则个体 i 在风险性更高的资产上的投资额要低于个体 k 。