金融经济学
第二讲

上海财经大学金融学院
陈利平

金融经济学第二讲

- 第二章 投资组合理论
- **§2.1 基本概念**
- **Markowitz(1952)** 的投资组合理论的中心思想是投资者应该采用分散化策略，即不要把鸡蛋放在一个篮子里。
- 分散化投资的思想可以追溯到十六世纪，莎士比亚在《威尼斯商人》中写道：
- 我的买卖的成败，并不全寄托在一艘船上，
- 更不是依赖着一处地方；
- 我的全部财产，也不会受一年盈亏的影响，
- 所以我的货物并不能使我忧愁。
- （第一场 第一幕 安东尼奥）

金融经济学第二讲

- Markowitz(1952) 的投资组合理论建立在均值方差模型基础之上。他认为，如果个体是风险回避的、不饱和的，则给定资产的期望回报率，个体总是选择较低的方差，给定方差，个体总是追求较高的期望回报率，即个体偏好可以用均值-方差效用函数来刻画：

$$E[u(\tilde{W})] = U(E[\tilde{W}], \sigma^2(\tilde{W}))$$

- 但这种假定是存在问题的。

金融经济学第二讲

- 例：假定经济中存在两个投资组合 p_1 和 p_2，它们的随机回报率分别为：
- $\tilde{r}_1 = \begin{cases} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{cases}$ $\tilde{r}_2 = \begin{cases} 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{cases}$ 。
- 通过简单计算可得：$E[\tilde{r}_1] = E[\tilde{r}_2] = 0$ ，
- $\mathrm{var}(\tilde{r}_1) = \frac{1}{4} > \frac{2}{9} = \mathrm{var}(\tilde{r}_2)$ ，
- 即这两个投资组合具有相同的均值，但 p_1 的方差要大于 p_2 。
- 假定个体初始财富量为 1 ，其效用函数取对数形式：$u(W) = \ln(W)$
- 则个体对这两个投资组合进行投资后所能达到的期望效用值分别为：

金融经济学第二讲

$$E[\ln(1+\tilde{r}_1)]=\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})\approx -0.1438$$

$$E[\ln(1+\tilde{r}_2)]=\frac{2}{3}\ln(\frac{4}{3})+\frac{1}{3}\ln(\frac{1}{3})\approx -0.1744$$

- 因此个体投资在 p_1 上可以有更高的期望效用，尽管其方差比 p_2 的高。
- 该例子表明，个体的效用函数写成仅依赖于均值、方差的函数是有条件的，这一点可以从下面的分析看出：

$$\begin{aligned}E[u(\tilde{W})]&=E[[u(E[\tilde{W}])+u'(E[\tilde{W}])(\tilde{W}-E[\tilde{W}])\\&\quad+\frac{1}{2}u''(E[\tilde{W}])(\tilde{W}-E[\tilde{W}])^2+R_3]\\&=u(E[\tilde{W}])+\frac{1}{2}u''(E[\tilde{W}])\sigma^2(\tilde{W})+E[R_3]\end{aligned}$$

- 其中 $E[R_3]=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{W}])m^n(\tilde{W})$ 是所有三阶矩以上的项。

金融经济学第二讲

- 上式蕴涵，对于一个不饱和的、风险回避的个体，其期望效用不仅依赖于财富的均值和方差，还依赖于三阶以上的中心矩。只有当效用函数取特殊形式（例如二次多项式），或资产的随机回报率满足特殊的分布（正态分布、均匀分布、等概率的两点分布）时，期望效用函数才能表示为随机财富均值、方差的函数。
- 1、当个体效用函数取二次多项式 $u(\tilde{W})=\tilde{W}-\frac{b}{2}\tilde{W}^2$ ，个体期望效用值可以简化为：

$$E[u(\tilde{W})]=E[\tilde{W}]-\frac{b}{2}E[\tilde{W}^2]$$

$$=E[\tilde{W}]-\frac{b}{2}((E[\tilde{W}])^2+\sigma^2(\tilde{W}))$$

- 。
- 因此个体偏好可以用均值、方差的函数来刻画。但二次多项式效用函数蕴涵当财富量增加到一定程度，个体效用将减少；同时二次多项式效用函数中个体展示增的绝对风险回避，这蕴涵对个体而言风险资产是一种次品，因此二次多项式效用函数无法应用到大多数觉得财富越多越好的个体。

金融经济学第二讲

- 2、当资产的随机回报率为正态分布时 $\tilde{W}$ 也服从正态分布。对于正态分布，其高阶中心矩可以表示为一阶、二阶矩的函数：

$$E[(\tilde{W}-E[\tilde{W}])^j]=\begin{cases}\dfrac{j!}{(\frac{j}{2})!}\dfrac{\sigma^j(\tilde{W})}{2^{j/2}} & j\text{为偶数}\\ 0 & j\text{为奇数}\end{cases}$$

- 因此个体期望效用函数可以表示为均值方差的函数。
- 但资产回报率服从正态分布的假定太强了，计量检验表明，大多数资产并不服从这样的假定。
- 基于以上的分析，均值-方差模型并不是一个普适的资产选择模型，但由于该模型在分析上及所得出的结论都相对简单，同时在真实经济中使用效果也比较令人满意，因此得到了广泛认同。

金融经济学第二讲

- §2.2 完全风险资产下的投资组合前沿
- 2.2.1 模型的建立
- 考虑一个无摩擦经济，假定所有资产都是风险资产，风险资产可以无限卖空。假定经济中自然状态的全体可以刻画为：
- $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_{|\Omega|}\}$ ，
- 其中$|\Omega|$代表 Ω中元素个数，即自然状态的总个数。
- 给定任意一个风险资产或投资组合，该资产或投资组合的随机回报率向量$\tilde{r}$ 可以表示为一个$|\Omega|$ 维的向量$(r(\omega_1),r(\omega_2),...,r(\omega_{|\Omega|}))$
- 假定该经济中存在 N 种可以进行交易的风险资产，其随机回报率向量$\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$、…、$\tilde{r}_N$ 线性无关，具有有限方差和不相等的期望，其它风险资产和投资组合都是这 N 种风险资产的线性组合。

金融经济学第二讲

- 记 e 为由 N 种风险资产的期望回报率构成的 $N\times 1$ 向量，记为：
- $$e=(E[\tilde r_1],E[\tilde r_2],\cdots E[\tilde r_N])^T$$
- 其中上标“T”表示转置。1 为由 1 构成的 $N\times 1$ 向量，记为：

$$1\equiv(1,1,\cdots,1)^T$$

- 记 V 为 N 种风险资产随机回报率的方差 - 协方差矩阵，可以表示为：

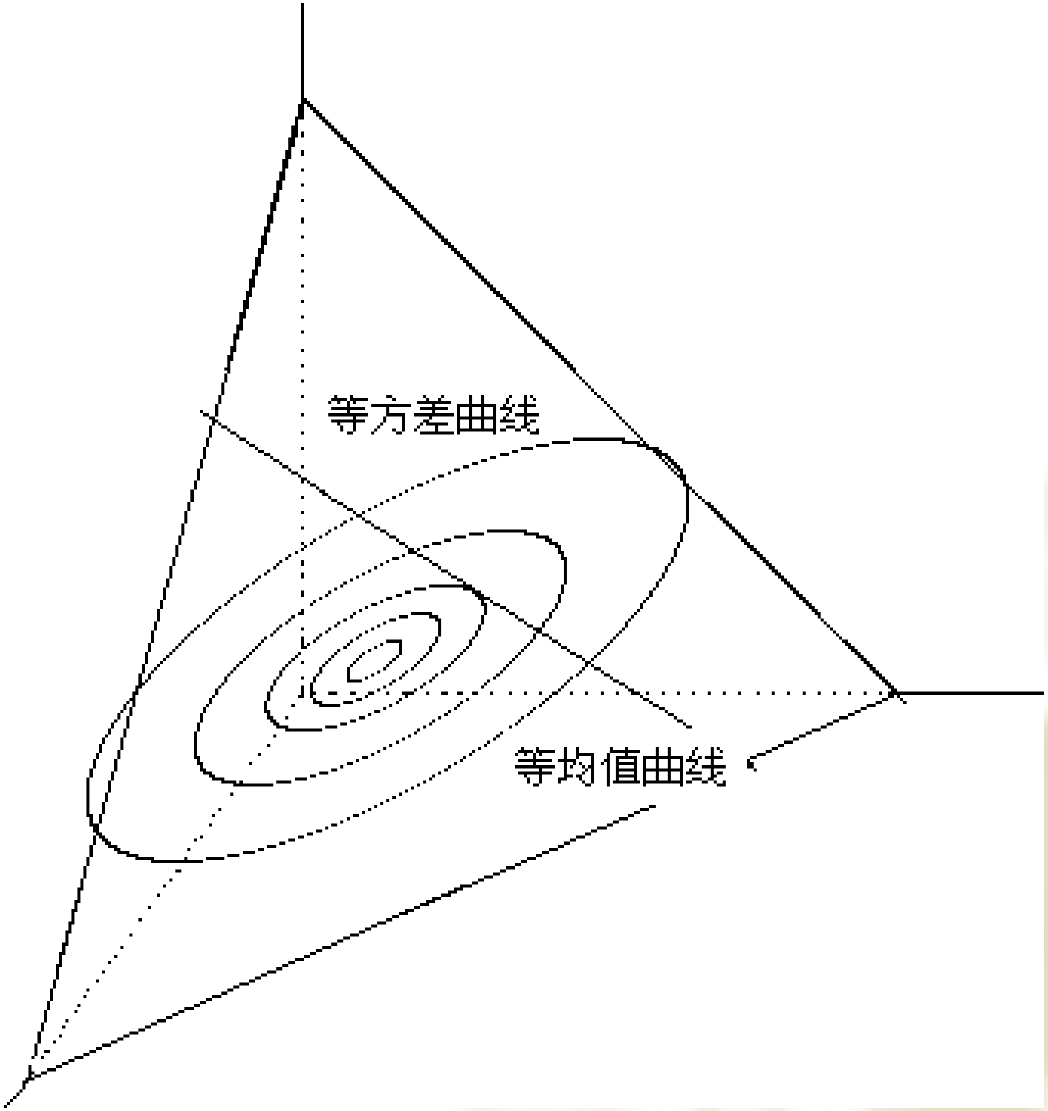
$$V=\begin{bmatrix} \mathrm{var}(\tilde r_1) & \mathrm{cov}(\tilde r_1,\tilde r_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde r_1,\tilde r_N) \\ \mathrm{cov}(\tilde r_2,\tilde r_1) & \mathrm{var}(\tilde r_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\tilde r_2,\tilde r_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\tilde r_N,\tilde r_1) & \mathrm{cov}(\tilde r_N,\tilde r_2) & \cdots & \mathrm{var}(\tilde r_N) \end{bmatrix}$$

- 任给一个权重为 w 的投资组合，其方差 $w^{\mathrm{T}}Vw>0$，因此 V 是一个对称、正定矩阵。

金融经济学第二讲

- 给定期望回报率，所有期望回报率等于 $E[\tilde{r}_p]$ 的投资组合的权重向量全体服从：$w^{\mathrm{T}} e = E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^{\mathrm{T}} 1 = 1$，等方差曲面 $w^{\mathrm{T}} V w = \sigma^2$ 是椭球面。
- 当 N=3 时，在 3 维空间中 $w^{\mathrm{T}} V w = \sigma^2$ 是一个 2 维椭球面，$w^{\mathrm{T}} e = E[\tilde{r}_p]$ 和 $w^{\mathrm{T}} 1 = 1$ 是 2 维平面，$w^{\mathrm{T}} V w = \sigma^2$ 与平面 $w^{\mathrm{T}} 1 = 1$ 相交成一个椭圆，等均值平面 $w^{\mathrm{T}} e = E[\tilde{r}_p]$ 与平面 $w^{\mathrm{T}} 1 = 1$ 相交成一条直线，如图 2.1 所示。
- 在期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$ 给定下求解极小方差投资组合，相当于在平面 $w^{\mathrm{T}} 1 = 1$ 中，寻找与等均值线相切的等方差曲线及切点。从图中可以看出，所有切点位于同一根直线上，构成一个一维子空间。我们称该直线为组合前沿，称该组合前沿上的任意投资组合为前沿组合。在组合前沿上任给两个前沿组合，其他前沿组合可以表示为这两个前沿组合的线性组合。

- （图 2.1 ）：三资产极小方差投资组合



金融经济学第二讲

- 当 **N>3** 时，给定投资组合的期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$，极小方差投资组合的求解相当于在 **N-1** 维超平面 $w^{\mathrm{T}}1=1$ 中求出 **N-2** 维的椭球面与 **N-2** 维超平面相切的切点组合。可以证明，所有切点都位于同一条直线上，构成一个一维子空间，即组合前沿，该组合前沿可以由任意两个前沿组合线性张成。

金融经济学第二讲

金融经济学第二讲

- **2.2.2 模型的求解**
- 如果记 w_p 为前沿组合在各资产上的投资组合权重向量，则 w_p 是如下最小化问题的解：
- $$\min_{w} \frac{1}{2} w^{\mathrm{T}} V w$$ 。
- **Subject to:** $$w^{\mathrm{T}} e = E[\tilde{r}_p]$$
- ，
- $$w^{\mathrm{T}} 1 = 1$$ 。
- 求解得前沿组合权重向量 w_p 可以表示为：

$$w_p = \frac{CE[\tilde{r}_p] - A}{D} V^{-1} e + \frac{B - AE[\tilde{r}_p]}{D} V^{-1} \vec{1}$$

$$= g + hE[\tilde{r}_p]$$

- 其中 $g = \dfrac{BV^{-1}1 - AV^{-1}e}{D}$ ， $h = \dfrac{CV^{-1}e - AV^{-1}1}{D}$ 。

金融经济学第二讲

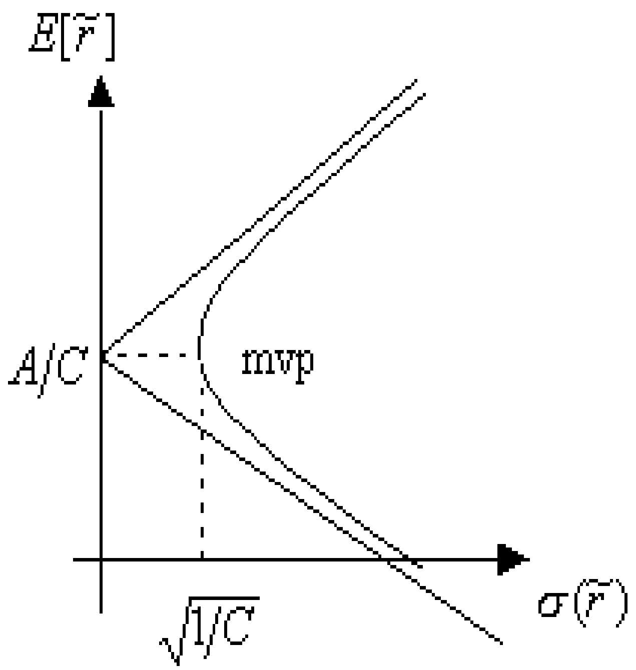
- 其中 $A = 1^{T}V^{-1}e = e^{T}V^{-1}1$ $B = e^{T}V^{-1}e$

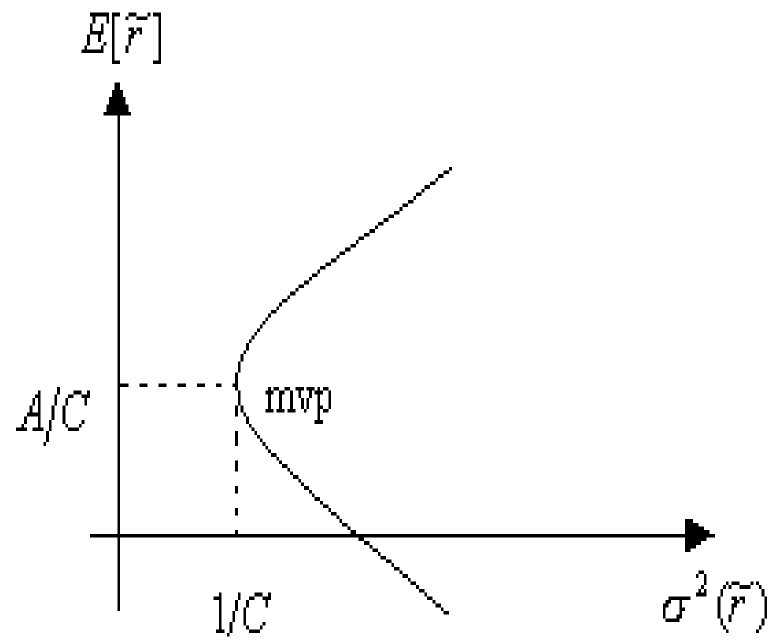
  $C = 1^{T}V^{-1}1$ $D = BC - A^{2}$
- 定理 **2.2.1** ：完全风险资产下任意前沿组合都可以表示为 $g + hE[\tilde{r}_p]$ 的形式，反之亦然。
- 推论：整个投资组合前沿可以由任意两个不同的前沿组合线性生成。
- 推论：前沿组合的任意线性组合是一个前沿组合。

金融经济学第二讲

- 2.2.3 风险资产组合前沿的一些性质
- 性质 2.2.1：任意两个前沿组合 p 和 q 的回报率之间的协方差可以表示为：
- $$\operatorname{cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=\frac{C}{D}\left(E[\tilde{r}_p]-\frac{A}{C}\right)\left(E[\tilde{r}_q]-\frac{A}{C}\right)+\frac{1}{C}$$ 。
- 性质 2.2.2：任意前沿组合回报率的方差可以表示为：
- $$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C}-\frac{(E[\tilde{r}_p]-A/C)^2}{D/C^2}=1$$
- 或 $$\sigma^2(\tilde{r}_p)=\frac{1}{D}\left(C(E[\tilde{r}_p])^2-2AE[\tilde{r}_p]+B\right)$$ 。
-
- 性质 2.2.2 蕴涵，在平面 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 中，投资组合前沿是一条双曲线，如图 2.2.2 所示；在平面 $\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 中，投资组合前沿是一条抛物线，如图 2.2.3 所示。在图 2.2.2 和图 2.2.3 中，所有位于投资组合前沿左边的组合都是不可行投资组合，位于组合前沿右边（包括组合前沿）的投资组合是可行投资组合。

- （图 2.2.2 ）$\sigma(\tilde{r})$ - $E[\tilde{r}]$ 平面中的 （图 2.2.3）$\sigma^2(\tilde{r})$ - $E[\tilde{r}]$ 平面中的
- 投资组合前沿 投资组合前沿





金融经济学第二讲

- 性质 **2.2.3** ：极小方差投资组合 **mvp** 的回报率与其它任意投资组合回报率的协方差等于 $1/C$ ，即极小方差投资组合自身回报率的方差。
- 定义：所有期望回报率严格超过 **mvp** 期望回报率的前沿组合称为有效组合 **(efficient portfolio)** ；所有期望回报率严格低于 **mvp** 期望回报率的前沿组合称为无效组合 **(inefficient portfolio)** 。
- 性质 **2.2.4** ：所有有效组合的全体是一个凸集。
- 性质 **2.2.5** ：任意一个不等于 **mvp** 的前沿组合 **p** ，都存在唯一的一个与 **p** 的协方差为零的前沿组合 **zc(p)** 。
-

$$E[\tilde{r}_{zc(p)}] = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{E[\tilde{r}_p] - A/C}$$

-
- 我们称前沿组合 **zc(p)** 是前沿组合 **p** 的零 **-** 协方差组合。由上式知，当前沿组合 **p** 是一个有效组合时，它的零 **-** 协方差组合 **zc(p)** 是一个无效组合；当是 **p** 无效组合时， **zc(p)** 是一个有效组合。

金融经济学第二讲

- 性质 2.2.6 ：（ i ）在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上，过任意前沿组合 p 关于组合前沿的切线与期望回报率轴相交，截距为 $E[\tilde{r}_{zc(p)}]$
- (ii) 在 $\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面上，过任意前沿组合 p 与 mvp 的连线与期望回报率轴相交，截距为 $E[\tilde{r}_{zc(p)}]$.
- 性质 2.2.7 ：设 p 是一个前沿组合，$p \neq mvp$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：
- $$E[\tilde{r}_q]=(1-\beta_{qp})E[\tilde{r}_{zc(p)}]+\beta_{qp}E[\tilde{r}_p]$$ 。
- 此处 $\beta_{qp}=\mathrm{cov}(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)/\mathrm{var}(\tilde{r}_p)$ 是贝塔系数。
- 性质 2.2.8 ：设 p 是一个前沿组合，$p \neq mvp$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：
- $$\tilde{r}_q=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p+\tilde{\varepsilon}_q$$
- 其中 $\mathrm{cov}(\tilde{r}_p,\tilde{\varepsilon}_q)=\mathrm{cov}(\tilde{r}_{zc(p)},\tilde{\varepsilon}_q)=E[\tilde{\varepsilon}_q]=0$ $\tilde{\varepsilon}_q$ 不依赖于前沿组合的选取。

金融经济学第二讲

- 记 $\tilde{Q}_{qp}=(1-\beta_{qp})\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_p$ ，性质 **2.2.8** 蕴涵，任意一个可行投资组合 **q** 可以正交投影为一个前沿组合 $\tilde{Q}_q$ 和一个期望回报率为零的噪声项 $\tilde{\varepsilon}_q$ 。$E[\tilde{r}_q]=E[\tilde{Q}_q]$
- 因为 $\mathrm{var}(\tilde{r}_q)=\mathrm{var}(\tilde{Q}_q+\tilde{\varepsilon}_q)=\mathrm{var}(\tilde{Q}_q)+\mathrm{var}(\tilde{\varepsilon}_q)$ ，
- 。
- 所以如果个体偏爱较高的期望回报率和较低的方差，则在给定期望回报率下，该个体可以通过选择前沿组合 $\tilde{Q}_q$ 来回避掉由带来 $\tilde{\varepsilon}_q$ 的风险。

金融经济学第二讲

- §2.3 引入无风险资产后的投资组合前沿

- ## 2.3.1　组合前沿的求解

- 假定经济中除了N种风险资产外，还存在一种无风险资产。记N种风险资产的期望回报率向量为e，无风险资产上的期望回报率为 r_f，V为N种风险资产回报率的方差-协方差矩阵，1 为由1构成的N向量；记w为投资组合在N风险资产上的权重，$1-w^{\mathrm{T}}1$ 为该投资组合在无风险资产上的权重。假定经济中个体可以无限制地卖空风险资产，无限制地以 r_f 借钱投资，市场是无摩擦的。

- 令p是一个由N+1种资产构成的前沿组合，给定期望回报率 $E[\tilde{r}_p]$，则 w_p 应该满足：

$$w^{\mathrm{T}}e+(1-w^{\mathrm{T}}1)r_f=E[\tilde{r}_p]$$

金融经济学第二讲

- 前沿组合可以通过下述最小化问题求得：
- $$\min_{w} \frac{1}{2} w^{\mathrm{T}} V w$$
- **Subject to:**
- $$w^{\mathrm{T}} e + (1 - w^{\mathrm{T}} 1) r_f = E[\tilde{r}_p]$$ ，
- 求解得前沿组合可以表示为；
- $$w_p = \lambda V^{-1}(e - 1 r_f)$$ 。
- 此处 $$\lambda = \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H}$$ ，
- 其中 $H = (e - 1 r_f)^{\mathrm{T}} V^{-1} (e - 1 r_f) = B + c r_f^2 - 2 A r_f > 0$

金融经济学第二讲

- **2.3.2 组合前沿的性质**
- 性质 2.3.1 ：任意前沿组合的方差可以表示为：

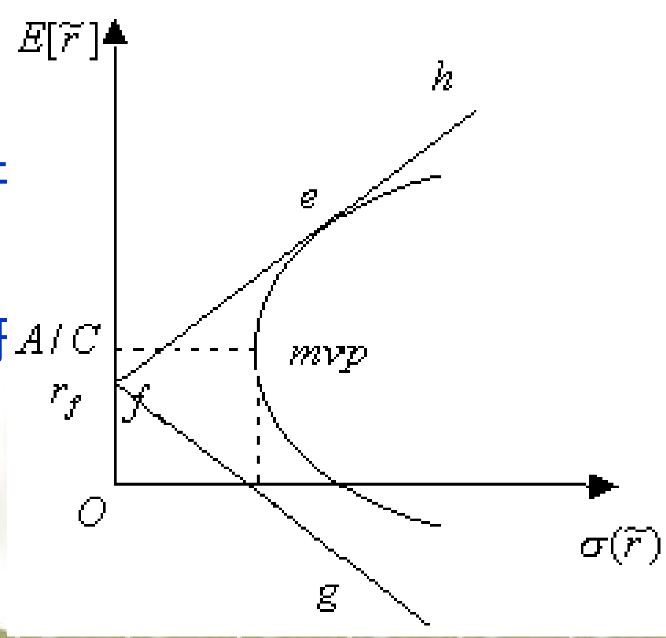
$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = (E[\tilde{r}_p] - r_f)^2 / H$$

- 。
- 因此在 $\sigma(\tilde{r}) - E[\tilde{r}]$ 平面上可以表示为过点 $(0, r_f)$ 、斜率为 $\sqrt{H}$ 和 $-\sqrt{H}$ 的射线。
- 这两条射线可以表示为：

$$\sigma(\tilde{r}_p) = \begin{cases} \dfrac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}} & \text{□□} \quad E[\tilde{r}_p] \geq r_f \\ -\dfrac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}} & \text{□□} \quad E[\tilde{r}_p] < r_f \end{cases}$$

金融经济学第二讲

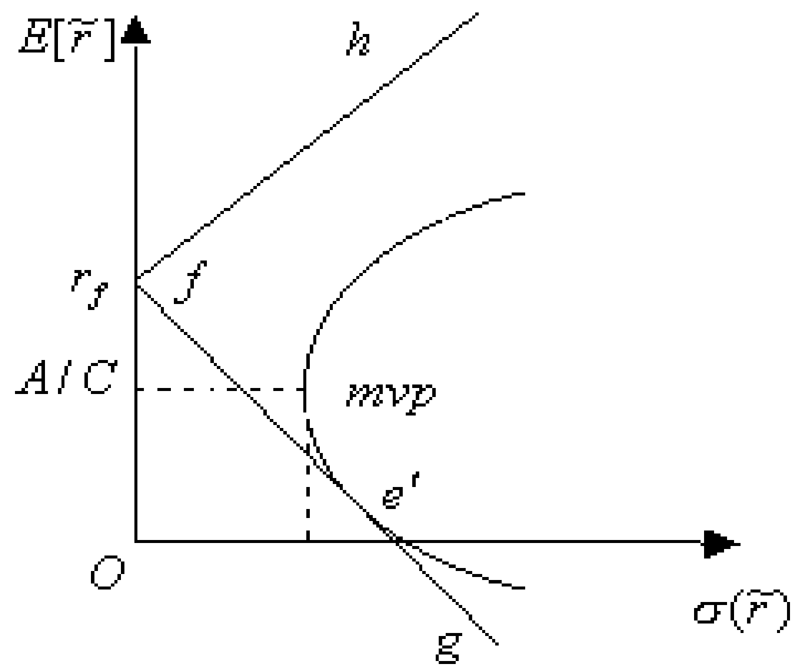
- 在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中，刻画前沿组合的两条射线按三种情况分别由图 (2.3.1-3) 给出：
- （1）$r_f < A/C$ 。
- 引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合 e 线性生成，即 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中的射线 $\overrightarrow{feh}$ 和 $\overrightarrow{fg}$
- （见图 2.3.1 ）。其中位于线段 $\overline{fe}$ 上的
- 前沿组合可以通过部分投资于切点组合
- e 、部分投资于无风险资产而达到；位于
- 射线 $\overrightarrow{eh}$ 上的前沿组合可以通过卖空无
- 风险资产、投资于切点组合而达到；位于
- 射线 $\overrightarrow{fg}$ 上的前沿组合可以通过卖空切
- 点组合 e 、投资于无风险资产而达到。
- (图 2.3.1) ：当 $r_f < A/C$ 时的前沿组合



金融经济学第二讲

- （2）$r_f > A/C$
- 当 $r_f > A/C$ 时，类似地我们可以证明，引入无风险资产后的前沿组合由无风险资产和切点组合 e'

线性生成，即图 2.3.2 中的射线 $\overrightarrow{fg}$ 和 $\overrightarrow{fh}$。其中射线 $\overrightarrow{fh}$ 上的前沿组合可以通过卖空切点组合 e`、投资无风险资产实现；线段 $\overline{fe'}$ 上的前沿组合可以通过部分投资无风险资产、部分投资切点组合 e` 来实现；射线 $\overrightarrow{e'g}$ 可以通过卖空无风险资产、投资切点组合 e` 来实现。

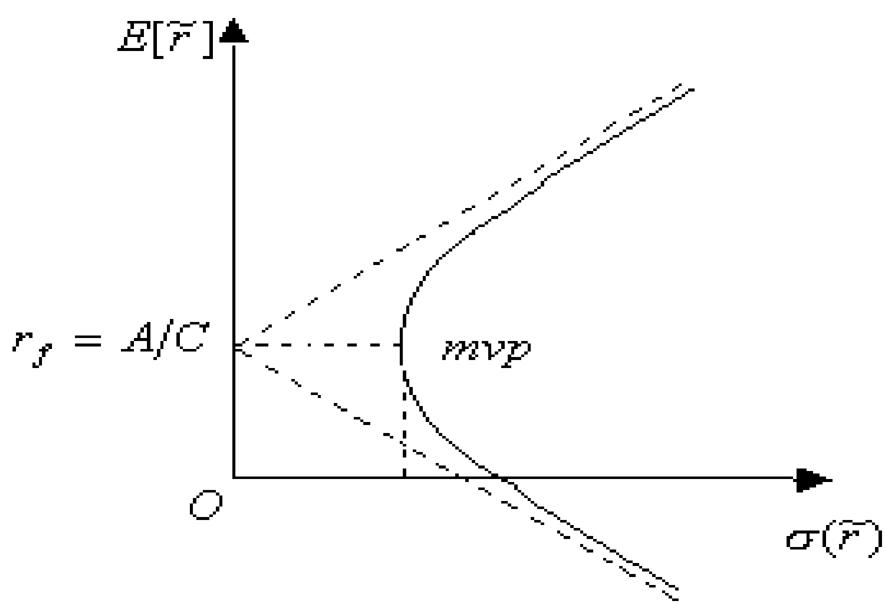


- （图 2.3.2）$r_f > A/C$ 时
- 的前沿组合

金融经济学第二讲

- （3）$r_f = A/C$
- 前沿组合可以表示为：
- $E[\tilde{r}_p] = r_f \pm \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p) = A/C \pm \sqrt{D/C}\sigma(\tilde{r}_p)$ 。
- 因此引入无风险资产后的前沿组合是风险资产前沿组合（双曲线）的两条渐近线（见图 **2.3.3** ）。 由

$$\vec{1}^T w_p = \vec{1}^T V^{-1}(e - A/C\,\vec{1})\frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} = 0$$



- 前沿组合可以通过将所有财富投
- 资在无风险资产上、并持有一个
- 风险资产的套利组合（投资组合
- 的总权重为零）来达到。$r_f = A/C$
- （图 2.3.3 ）：
- 的投资组合前沿。

金融经济学第二讲

- 性质 2.3.2 ：设 p 是一个前沿组合 $E[\tilde{r}_p] \neq r_f$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：
- $$E[\tilde{r}_q] - r_f = \beta_{qp}(E[\tilde{r}_p] - r_f)$$ 。
- 性质 2.3.3 ：设 p 是一个前沿组合 $E[\tilde{r}_p] \neq r_f$ ，则对任意可行投资组合 q ，我们有：
- $$\tilde{r}_q = (1 - \beta_{qp})r_f + \beta_{qp}\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp}$$
- 且 $\tilde{\varepsilon}_q$ 不依赖于的选取。