金融经济学
第六讲

上海财经大学金融学院

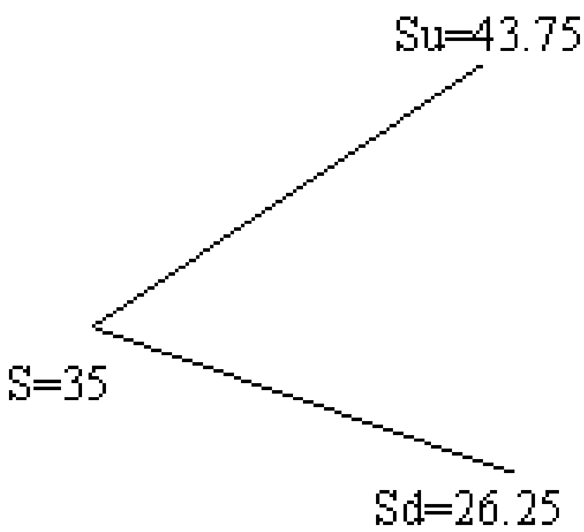
第六章 离散时间套利定价理论

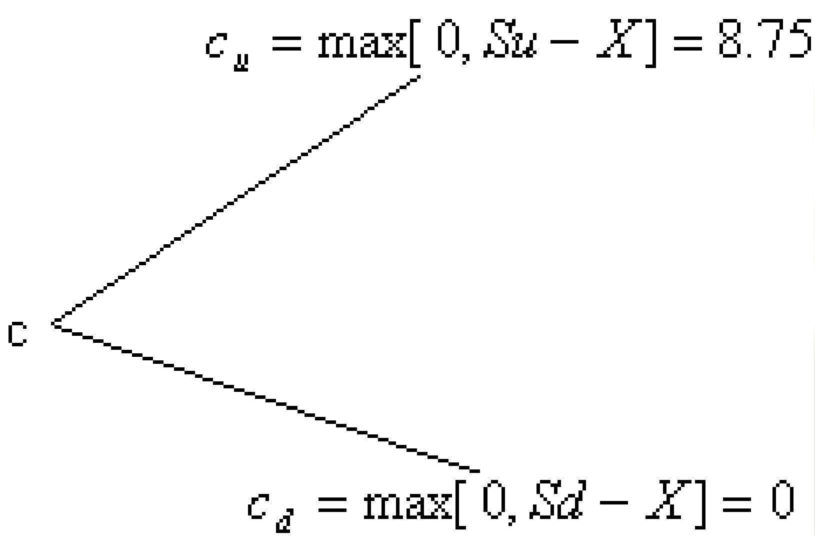
❖ §6.1 无套利机会与等价鞅（一个例子）

- **Harris&Kreps(1979)** 等发现，如果一个价格系统不存在套利机会，那么该系统存在一个等价鞅测度，利用鞅测度，我们可以非常方便地定价各种衍生产品的价格。
- 考虑两个简单例子，来说明等价鞅的存在及期权定价。
- 例 **1** ：考虑一个两期模型，假定第一期标的资产价格为 **S=35** ，期权的执行价格为 **X=35** ，连续复利无风险利率为 **9.531%** ，因此 $R=e^{r(T-t)}=1.1$ ，成熟期为一期。假定资产价格或者上升 **25%** ，或者下跌 **25%** ，即上升后价格为 **Su=43.75** ，下降后价格为 **Sd=26.25** ，其资产价格变化如下图 **6.1** 所示。由此一个看涨期权的回报如图 **6.2** 所示。

第六章 离散时间套利定价理论

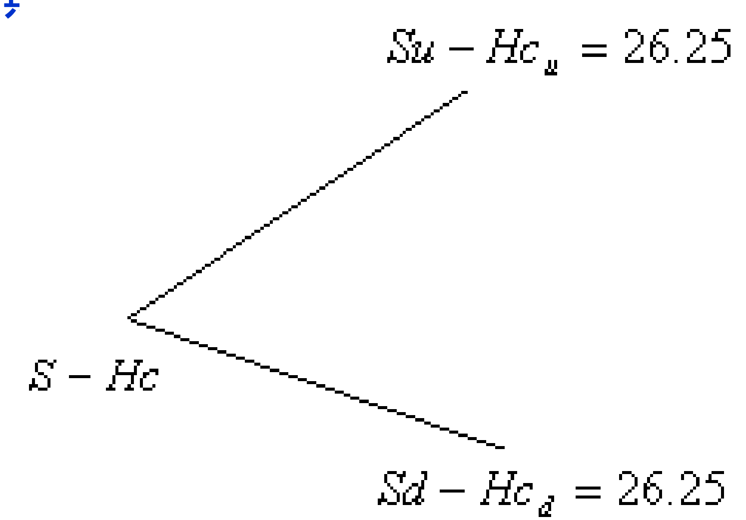
- （图 6.1 ）：一期资产价格树 （图 6.2 ）：一期看涨期权价格树





第六章 离散时间套利定价理论

- 构筑一个投资组合，利用期权来对该风险资产进行完全的套期保值，从而使得该组合成为一个无风险资产。假定我们出售 **H** 份标的在该资产上的看涨期权，使得该组合不存在风险，则其第一期成本为 **S-Hc**，完全套期保值后的回报都是 **26.25**，其回报过程可以用图 **6.3** 来刻画。
- （图 **6.3**）：一



第六章 离散时间套利定价理论

- 1、 出售的期权份额 H ：
- 因为完全套期保值后成熟时的回报相同，因此我们有：
- $$Su - Hc_u = Sd - Hc_d = 26.25$$
- 因此我们可以求解出 H ：
- $$H = \frac{Su - Sd}{c_u - c_d}$$ ；
- 将相关数值代入，得 H=2 。
- 2、 无套利机会时的期权价格：
- 因为无套利机会存在，无风险组合的回报率应该等于无风险资产上的回报率，因此我们有：$R(S - Hc) = Su - Hc_u$
- 整理得：
- $$c = \frac{S(R-u)+Hc_u}{HR} = [c_u \frac{R-d}{u-d} + c_d \frac{u-R}{u-d}]/R$$ ；
- 此即欧式看涨期权价格，欧式看跌期权的价格可以根据看涨 - 看跌平价关系得到。

第六章 离散时间套利定价理论

- **3**、 等价鞅测度：
- 事实上我们可以将上式改写为：
- $$c = \pi c_u R^{-1} + (1-\pi) c_d R^{-1}$$ ，
- 其中 $\pi = \dfrac{R-d}{u-d}$ 相当于一个概率，称为一个等价鞅测度。在该测度下，期权价格等于未来受益的期望贴现，与个体偏好等因素无关。
- 注：该测度仅是一个假想的测度，并不真正反映上升和下降出现的概率。

第六章 离散时间套利定价理论

- 例 2 ：考虑一个四期的期权定价例子。假定标的资产的价格 **S=35** ，期权的执行价格 **X=35** ，成熟期为一年。连续复利无风险利率为 **9.525%** ，因此 $R=e^{r(T-t)}=1.09993$；如果将一年分为四季，则有
- $R=e^{r(T-t)}=e^{0.09525\times 0.25}=1.024098$ 假定资产价格变化如下图 **6.4** 所示。则 **u=1.10517** ， **d=0.904837** ， **R=1.024098** ， $\pi=0.59512$ 因此我们可以求解各种欧式期权和美式期权的价格。
- **(1)** 在第 **0** 期开始时发行的、成熟期为 **4** 、执行价格为 **35** 的欧式看涨期权价格，则个体只能在第 **4** 期执行该期权，其价格可以表示为：

$$c=[\binom{4}{0}\pi^4(Su^4-X)+\binom{4}{1}\pi^3(1-\pi)(Su^3d-X)]/(1+r)^4=4.37$$

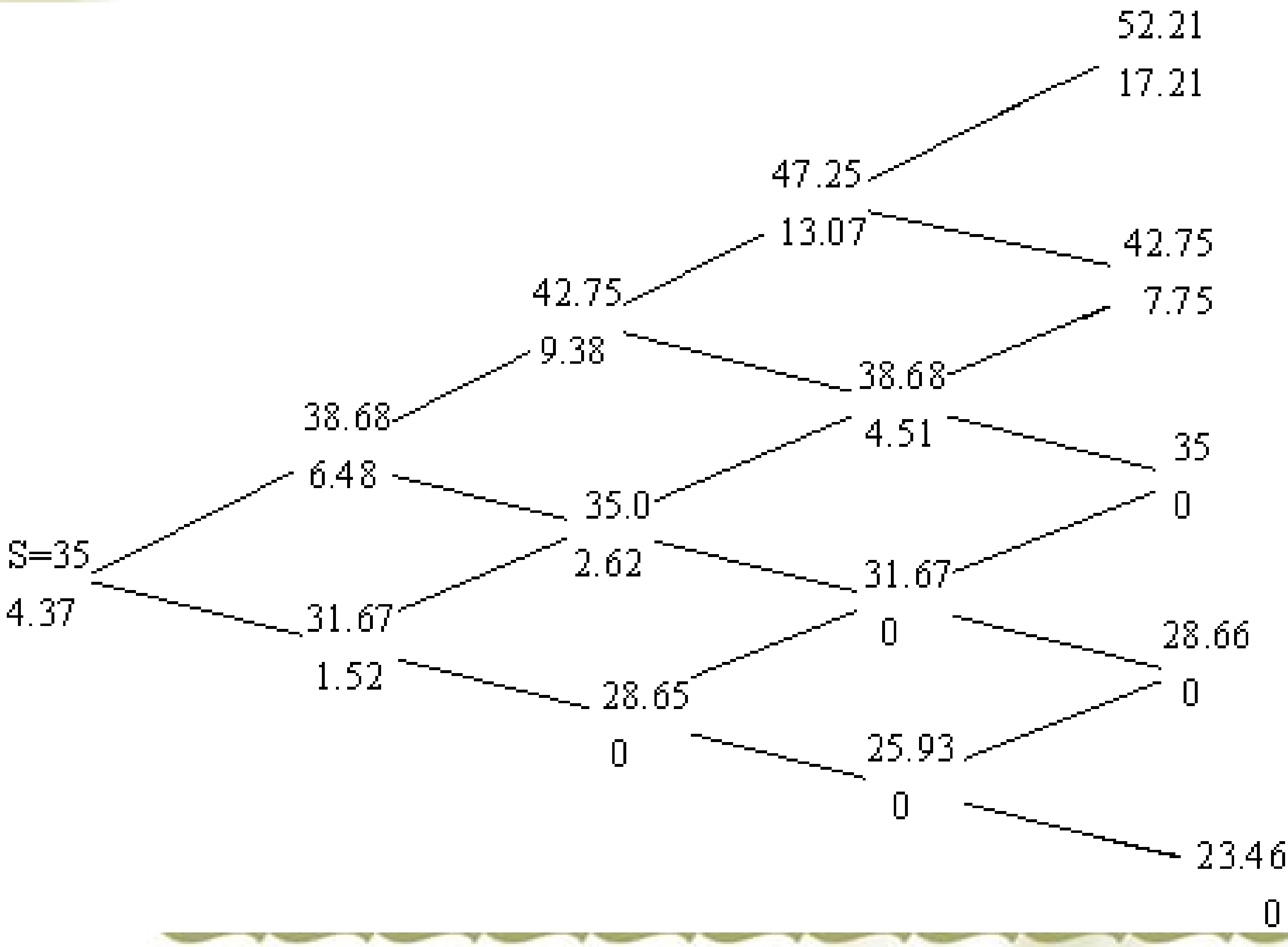
- **(2)** 计算在第一期当资产价格为 **38.68** 时发行的、第三期成熟的、操作价格为 **40** 的欧式看涨期权价格：
-

$$c=[\binom{2}{0}\pi^2(38.68\times u^2-X)]\Big/(1+r)^2$$

- 以此类推。

第六章 离散时间套利定价理论

❖ （图 6.4 ）：资产价格和期权收益树



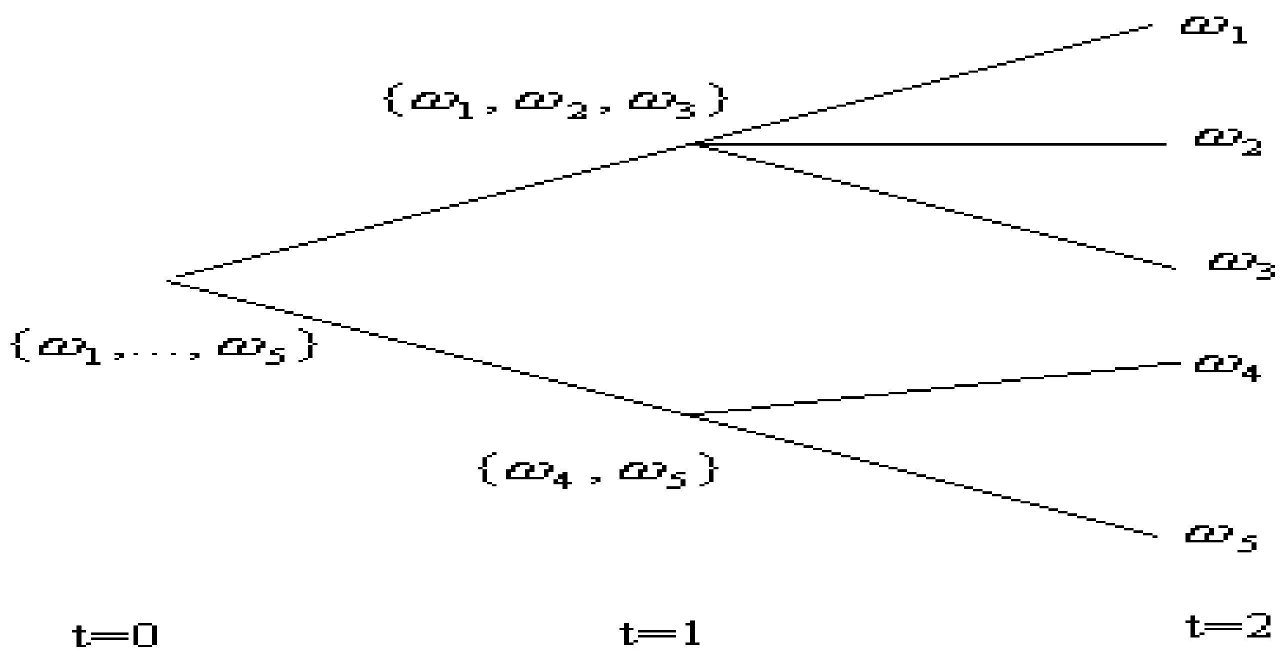
第六章 离散时间套利定价理论

§6.2 无套利机会与等价鞅测度

- 一、 模型的建立
- 考虑一个多期证券市场经济，t=0,1,…,T。假定在该经济中存在 I 位个体 $i=1,2,\ldots,I$。为简化讨论，假定经济中只有一种易腐烂的消费品，并将这种消费品作为计价单位，因此消费品的现货价格为 1。
- 信息结构：
- 假定经济中有有限个自然状态，它们构成一个状态空间。假定经济中的信息是逐渐展示出来的，到 T 期个体才能知道真正的自然状态是中的哪一个。我们可以用一个事件树来刻画信息结构。
- 定义：一个事件是 Ω 的一个子集。称两个事件不相交，如果这两个事件的交集是空集，即一个自然状态如果属于一个事件，它就不属于另一个事件。

第六章 离散时间套利定价理论

- 定义：Ω的一个分割是一组事件$\{A_1, A_2, \ldots, A_3\}$的集合，如果这些事件彼此不相交，且它们的并等于$\Omega$。称一个给定分割要比另一个分割更精细，如果后一个分割的任一事件都是前一分割中事件的并。



第六章 离散时间套利定价理论

- 我们可以用 $\mathbb{F}=\{F_t; t=0,1,\ldots,T\}$ 来记个体被赋予的公共信息结构，其中每一个 F_t 都是 Ω 的一个分割，满足：
- 如果 $t \geq s$，则 F_t 比 F_s 更精细； $F_0=\{\Omega\}$， $F_T=\{\omega \mid \omega\in\Omega\}$
- 定义：一个随机过程是一个由时间 **t** 标识的随机变量序列。
- 定义：称一个随机过程 $S=\{S(t) \mid t=0,1,\ldots\}$ 关于 $\mathbb{F}$ 适应（**adapted to** $\mathbb{F}$），如果对于任意的 **t**， $S(t)$ 关于 F_t 可测。
- 定义：称一个随机过程 $S=\{S(t) \mid t=0,1,\ldots\}$ 关于 $\mathbb{F}$ 可料的 **(predictable to** $\mathbb{F}$**)**，如果对于任意的 **t**， $S(t)$ 关于 F_{t-1} 可测。
- 资产结构：
- 定义：一个时间事件或有权益 **(time-event contingent claim)** 是一种证券，在交易日 $t\geq 1$、事件 $a_t\in F_t$ 发生时支付一单位消费品，在其它时间和情形下没有支付。

第六章 离散时间套利定价理论

- 定义：一个复杂证券是由时间 0 消费品和一族时间事件或有权益构成的证券，它可以被表示为 $x=\{x_0, x_{a_t} \mid a_t \in F_t, t=1,2,...,T\}$ 其中 x_0 和 x_{a_t}
- 分别为以消费品衡量的时间 0 和时间 t 、事件 a_t 下的红利。
- 定义：一个长生命证券 **(long-lived security)** 是一种在任意交易日都可以交易的复杂证券。
- 假定经济中存在 N+1 种长生命证券， j=0,1,…,N 。假定第 0 种资产是面值为 1 的 T 期贴现债券，其红利流可以表示为：
- $x_0=\{0,0,...,x_0(T)=1\}$ ， **(6.2.1)**
- 记第 0 种资产的除息价格过程为 $\{B(t) \mid t=0,1,2,...,T\}$ ，则有 $B(T)=0$ 。
- 假定其它 N 种资产是风险资产，第 j 种资产的随机红利流可以表示为：
- $x_j=\{x_j(t) \mid t=0,1,2,...,T\}$ 。 **(6.2.2)**
- 记第 j 种资产的除息价格过程为 $\{S_j(t) \mid t=0,1,2,...,T\}$ ，则有 $S_j(T)=0$ 。

第六章 离散时间套利定价理论

- 记 $S(t)=(S_1(t),\dots,S_N(t))^T$　$X(t)=(x_1(t),\dots,x_N(t))^T$。显然，、 和 $x_j(t)$ 关于 $B(t)$ 可测 $S_j(t)$，因此红利过程、价格过程都关于 F_t 适应。 $\mathcal{F}$
- 个体行为：
- 假定每一位个体的偏好都具有 **von Neuman-Morgenster** 期望效用表示，假定个体效用函数 $u_{it}(c^i(t))$ 单调增、严格凹、充分光滑，假定 $\lim_{z\to 0^+} u_{it}'(z)=+\infty$ 。
- 假定个体在各自然状态上被赋予的主观概率为：$\pi^i=\{\pi^i_\omega \mid \omega\in\Omega\}$
- 。 $a_t\in F_t$　$a_s\in F_s$　$s\ge t$
- 在该主观概率下，记在给定事件 $\pi^i_{a_s}(a_t)$ 下，事件 $\pi^i_{a_s}(a_t)$ （　）发生的条件概率为　，根据 **Bayes** 公式，可以表示为：
- $$\pi^i_{a_s}(a_t)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{\omega\in a_s}\pi^i_\omega}{\sum_{\omega\in a_t}\pi^i_\omega} & \text{如果 } a_s\subseteq a_t\\ 0 & a_s\not\subseteq a_t\end{cases}$$

第六章 离散时间套利定价理论

- 假定个体都是理性预期的，所有个体都相信当前资产价格是自然状态 ω 和时间 t 的函数，即可以表示为 $B(\omega,t)$ 和 $S_j(\omega,t)$。
- 记个体被赋予的长生命证券的数量为：
- $\{\overline{\alpha}^i(0),\overline{\theta}^i(0)=(\overline{\theta}_j(0))_{j=1}^N\}$ 。
- 个体的交易策略是一个 **N+1** 维的随机过程，可以简记为：
- $(\alpha,\theta)=\{\alpha(t),\theta(t)=(\theta_j(t))_{j=1}^N\}_{t=0}^T$
- 其中 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 代表个体在 **t-1** 期交易发生后，到 **t** 期交易发生前所持有的第 **0** 种资产和第 **j** 种资产的数量。由于 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 是在 **t-1** 期被决定的，它们关于 F_t 可测，因此交易策略关于 F 适应。个体的消费计划是一个随机过程，可以简记为：
- $c=\{c(t)\,|\,t=0,1,2,\ldots,T\}$ 。
- 其中 $c(t)$ 是 **t** 期消费量。

第六章 离散时间套利定价理论

- 定义：称一个交易策略 (α,θ) 是可接受的 **(admissible)**，如果存在一个消费计划 ***c***，满足：
- $\alpha(t+1)B(t)+\theta^T(t+1)S(t)=\alpha(t)B(t)+\theta^T(t)(S(t)+X(t))-c(t)$，**(6.2.3)**
- 对 $\forall t=0,1,\dots,T-1$ 成立，且有：
- $$\alpha(T)+\theta^T(T)X(T)=c(T)\text{。}\qquad \textbf{(6.2.4)}$$
- 相应地，我们也称该消费计划 ***c*** 是由交易策略 (α,θ) 融资的，也称为上市的 **(marketed)**。

第六章 离散时间套利定价理论

- 二、无套利条件和等价鞅测度
- 定义：一个套利机会是一个由可行交易策略融资的消费计划 *c*，满足：
- （1）*c* 非负，且至少存在某个时期 t 和事件 $a_t \in F_t$，有 $c(a_t,t)>0$；
- （2）其成本非负，即 $\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))\le 0$
- 定义：一个随机过程 $Y=\{Y(t)\,|\,t=0,1,2,\ldots,T\}$ 被称为是一个在概率 π 下对 F 适应的鞅，如果它满足：$E[Y(s)\,|\,F_t]=Y(t)$，$\forall s\ge t$。
- 其中 $E[.\,|\,F_t]$ 是关于概率 π、给定 F_t 下的条件概率。
- 定理：一个价格系统不允许存在任何套利机会，当且仅当经济中存在一个等价鞅。

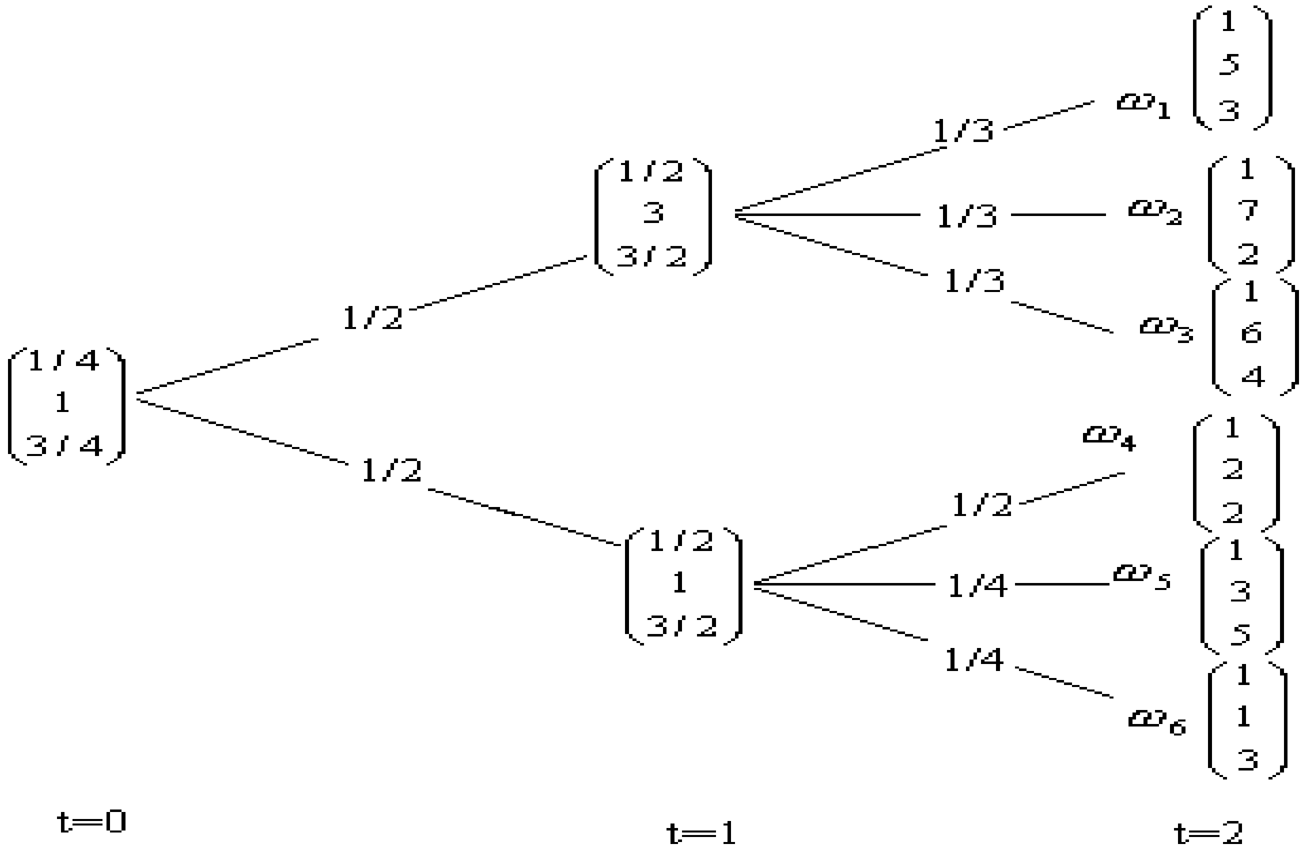
第六章 离散时间套利定价理论

- 例 6.2.1 ：假定经济中有三种长生命证券， $j=0,1,2$ ，它们只在 $t=2$ 时支付红利， $t=0$ 、 1 时的价格和 $t=2$ 时的红利支付如图 6.6 所示。在该经济中，第 0 种资产是一种无风险资产。下面我们通过构造一个等价鞅测度来说明该价格系统没有套利机会。此处无风险资产的价格在 $t=0$ 和 $t=1$ 时不为 1 ，因此我们可以首先对该价格系统进行贴现，如图 6.7 所示。
- 经计算可得，存在等价鞅测度：

$$\begin{bmatrix} \pi^*(\omega_1) \\ \pi^*(\omega_2) \\ \pi^*(\omega_3) \\ \pi^*(\omega_4) \\ \pi^*(\omega_5) \\ \pi^*(\omega_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

第六章 离散时间套利定价理论

- (图 6.6) ：证券市场价格系统



第六章 离散时间套利定价理论

- 三、消费计划的鞅性质
- 一个消费计划刻画了不同时间 - 事件下个体的消费量，而一个长生命证券由它在各时间 - 事件下的回报（消费品）刻画，因此一个长生命证券等价于一个消费计划。在无套利条件下，一个市场化了的消费计划或长生命证券的价格是唯一确定的，因为衍生产品是一种长生命证券，所以其价格也是唯一确定的，可以利用等价鞅测度来计算，衍生产品的这种定价方式称为套利定价。
- 定理：一个消费计划有定义好了的价格，如果该消费计划是上市的，且经济中不存在套利机会。
- 定理：如果价格系统 **(B,S)** 不存在套利机会，则上市的消费计划具有鞅性质。

第六章 离散时间套利定价理论

- 例 **6.2.2** ：考虑一个如图 **6.8** 的消费计划，假定价格系统由图 **6.6** 所示。试计算该消费计划的价格。
- 因为价格系统中不存在套利机会，所以该消费计划具有鞅性质，该消费计划的 **t** 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度 π^* 的预期。所以我们有：

$$S_c^*(0) = (\frac{1}{6})0 + (\frac{1}{6})1 + (\frac{1}{6})2 + (\frac{1}{4})2 + (\frac{1}{8})2 + (\frac{1}{8})2 = \frac{3}{2}$$

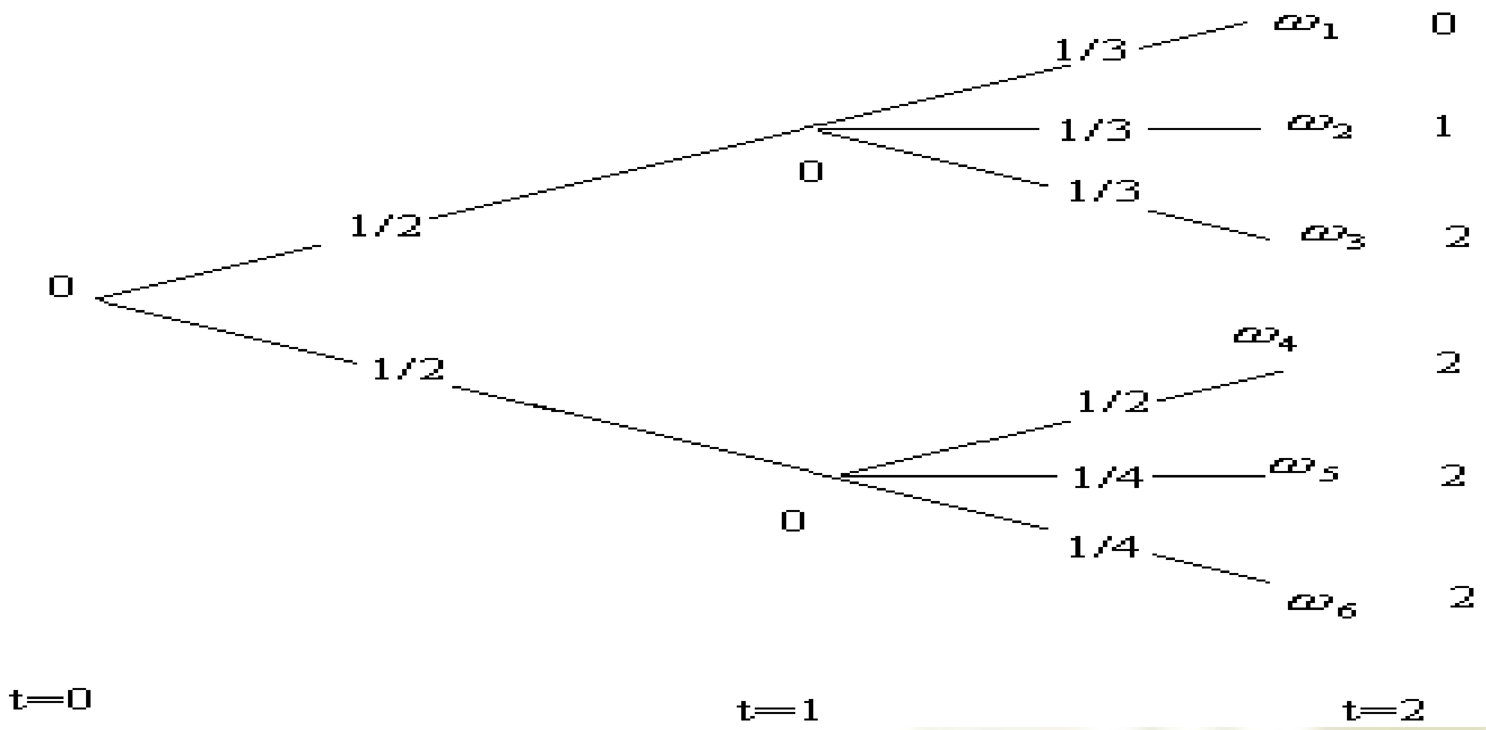
$$S_c^*((\omega_1,\omega_2,\omega_3),1) = (\frac{1}{3})0 + (\frac{1}{3})1 + (\frac{1}{3})2 = 1$$

$$S_c^*((\omega_4,\omega_5,\omega_6),1) = (\frac{1}{2})2 + (\frac{1}{4})2 + (\frac{1}{4})2 = 2$$

- 所以该消费计划在时间 **t=0** 和 **t=1** 时的价格为：
- $S_c(0) = 3/8$ 　 $S_c((\omega_1,\omega_2,\omega_3),1) = 1/2$ 　 $S_c((\omega_4,\omega_5,\omega_6),1) = 1$ 。

第六章 离散时间套利定价理论

❖ （图 6.8 ）：一个上市的消费计划。

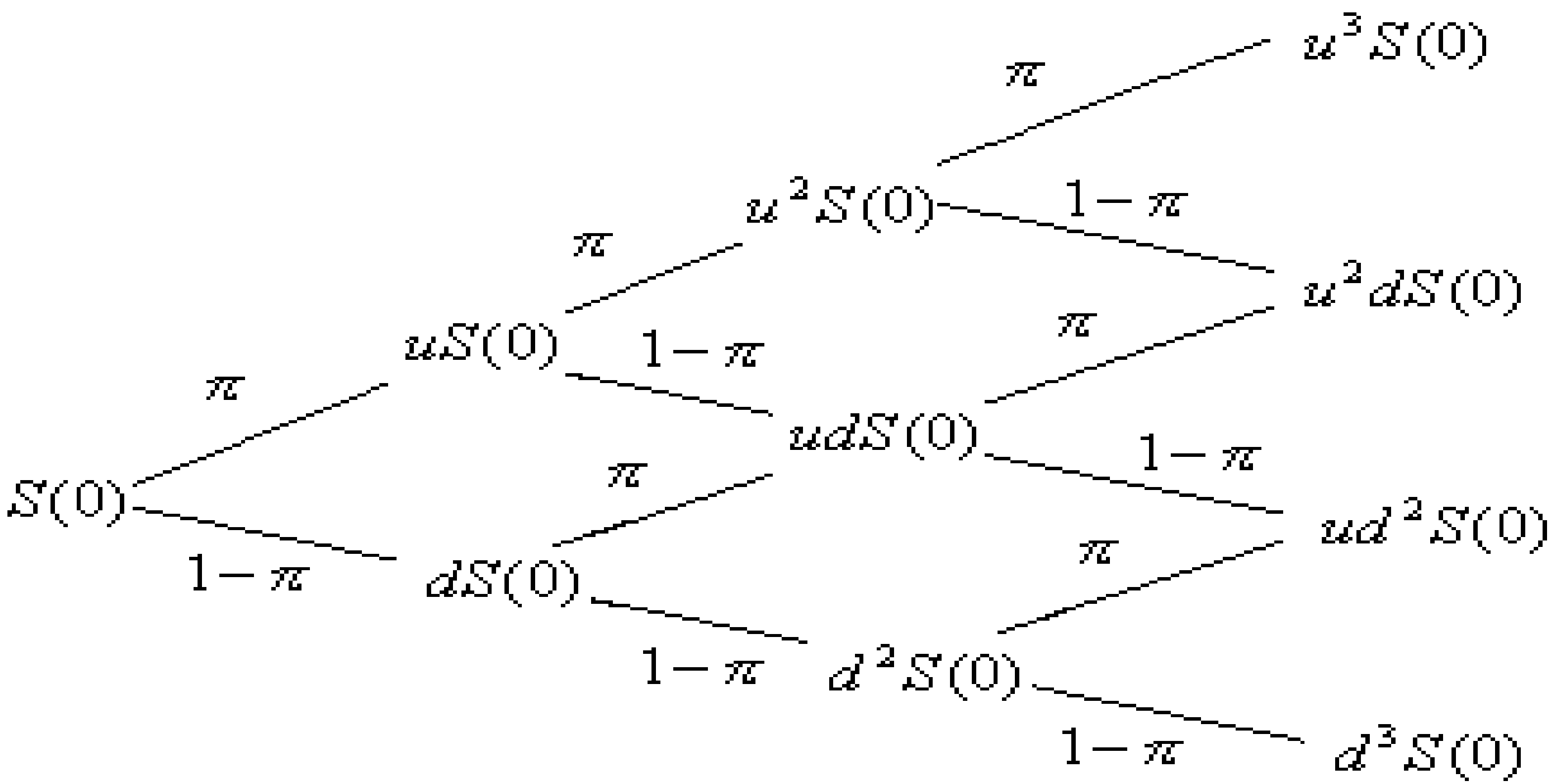


第六章 离散时间套利定价理论

- §6.3 Black-Scholes 公式的推导（二叉树方法）
- 一、 模型的建立：
- 考虑一个具有两个长生命证券的多周期证券市场经济，一个是普通股票，一个是无风险债券。假定该经济持续很长时间，我们仅考虑交易日 t=0、1、2、…、T。假定该经济满足如下假定：
- （1）不考虑标的资产的红利收益，假定资产的波动性相同且已知，资产价格满足一个二项随机游动，如图 6.9 所示。
- $S(0) > 0$； $S(1) = \begin{cases} uS(0) \\ dS(0) \end{cases}$； $u > d$
- （2）假定在期权生命中短期无风险利率 R 已知，个体可以以一个相同的无风险利率进行借贷，假定无风险资产不支付红利，t 期价格为 R^t。

第六章 离散时间套利定价理论

- (图 6.9) ：二项随机游动和等价鞅测度。



第六章 离散时间套利定价理论

- （3）不考虑交易成本和税收，允许证券卖空，在期权成熟前不考虑有价证券的转让等事件。
- （4）假定个体拥有的信息结构由股票价格生成。$F_0=\{\Omega\}$；F_1有两个事件；F_2有三个事件，…；任意 $a_t\in F_t$ 的有两个子集 $a_{t+1}\subseteq a_t$，$a_{t+1}\in F_{t+1}$。假定个体可能有不同的主观概率，但每一事件上的主观概率都大于零。

- 二、等价鞅测度的求解
- 如果经济中不存在套利机会，则价格加上红利和构成的随机过程是一个鞅。考虑到此处不考虑标的资产的红利收益，因此我们有：

$$\pi u R^{-1}+(1-\pi)dR^{-1}=1$$

- 由此可得：$\pi=\dfrac{R-d}{u-d}$
- 当时 $d<R<u$，$\pi\in(0,1)$，因此经济中确实存在一个等价鞅测度，相应地，该价格系统不存在套利机会。

第六章 离散时间套利定价理论

- 三、 **Black-Scholes** 公式的推导
- 下面我们利用风险资产的二叉树结构，来推导出一个标的在普通股票上、操作价格为 **K**、成熟期为 **T** 的欧式看涨期权的价格。
- 在图 **6.9** 的二叉树中，从第 **0** 期出发，**T** 期股票价格为 $S(0)u^n d^{T-n}$ 的概率为 $\binom{T}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n}$；
- 从 **t** 期出发，**T** 期股票价格达到 $S(t)u^n d^{T-n-t}$ 的条件概率为
- $\binom{T-t}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n-t}$。
- 考虑到该欧式看涨期权在 **T** 期的回报为 $\max[S(T)-K,0]$，因此 **t** 期该看涨期权的贴现价格为：
- $$p^*(t)=E^*[\max(S(T)-K,0)R^{-T}\mid F_t]$$

第六章 离散时间套利定价理论

- 所以 t 期该看涨期权的价格可以表示为：

$$p(S(t),t,K)=R^{t}E^{*}[\max(S(T)-K,0)R^{-T}\mid F_{t}]$$

$$=R^{-(T-t)}\sum_{n=0}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}\max[S(t)u^{n}d^{T-t-n}-K,0]$$

- 记 j 为满足 $S(t)u^{j}d^{T-t-j}\geq K$ 的正整数，则：

$$j\geq[\ln\frac{K}{S(t)d^{T-t}}]/[\ln u/d]$$

- 从而

$$p(S(t),t,K)=R^{-(T-t)}\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}(S(t)u^{n}d^{T-t-n}-K)$$

$$=S(t)\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}(\frac{\pi u}{R})^{n}(\frac{(1-\pi)d}{R})^{T-t-n}$$

$$-KR^{-(T-t)}\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}$$

第六章 离散时间套利定价理论

- 记 $\Phi(j;T-t,\pi)=\sum_{n=0}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}$，则有由 Cox 、 Ross 和
- Rubinstein(1979) 给出期权定价公式。

$$p(S(t),t,K)=S(t)\Phi(j;T-t,\pi u/R)-KR^{-(T-t)}\Phi(j;T-t,\pi)$$

- 当独立时间数趋向于无穷时，即在区间 T-t 中将时间间隔分得足够小，则二项分布趋向于正态分布，从而上式可以改写为标准的 Black-Scholes 公式：

$$p(S(t),t,K)=S(t)N(x_t)-Ke^{-r(T-t)}N(x_t-\sigma\sqrt{T-t})$$

- 其中 $x_t\equiv\frac{\ln(S(t)/Ke^{-r(T-t)})}{\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$，$r$ 和 σ 为无风险资产的连续复利
- 和风险资产的标准差。