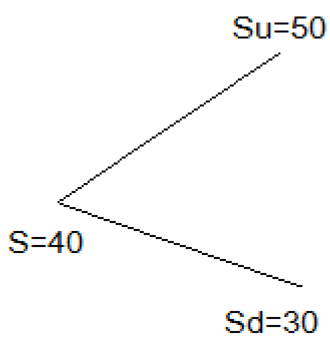
# 第六章 离散时间跨期套利定价理论[1]

## §6.1 介绍

上一章分析了无套利原理与 Ross(1976)的 APT 理论，这一章将套利定价理论推广到离散时间多期情形，给出离散时间多期衍生资产定价问题。由于衍生资产是由其它资产衍生出来的，其价格依赖于标的资产价格，因此定价时通常并不能采用第四章的均衡定价方法，而只能采用套利定价方法。

Harris 和 Kreps(1979)发现，如果一个价格系统不存在套利机会，那么该系统存在一个等价鞅测度，在该等价鞅测度下，资产价格等于未来收益的期望贴现和，从而我们可以非常方便地定价各种衍生资产的价格。下面我们通过两个简单例子，来说明等价鞅测度的存在及如何通过等价鞅测度对衍生资产定价。

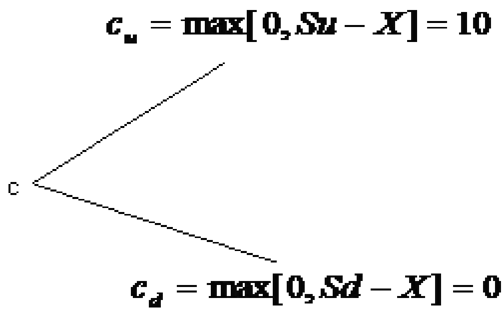
例 **6.1.1**：考虑一个两期模型，假定第一期标的资产价格为 S=40，期权的执行价格为 X=40，无风险利率为 $R=1.2$，成熟期为一期。假定资产价格或者上升 25%，或者下跌 25%，即上升后价格为 Su=50，下降后价格为 Sd=30，其资产价格变化如下图 6.1.1 所示。由此一个看涨期权的回报如图 6.1.2 所示。




（图 6.1.1）：一期资产价格树

[1]主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、王江（2006）等教材及相关论文

下面我们来构筑一个投资组合，利用期权来对该风险资产进行完全的套期保值，从而使得该组合成为一个无风险资产。假定我们出售 H 份标的在该资产上的看涨期权，使得该组合不存在风险，则其第一期成本为 $S - Hc$；由于资产价格下跌时回报为 $Sd - H \times 0 = 30$，在完全套期保值下资产的回报率都是 1.2，其回报过程可以用图 6.1.3 来刻画。




（图 6.1.2）：一期看涨期权树

**1、** 求解所出售的期权份额 **H**

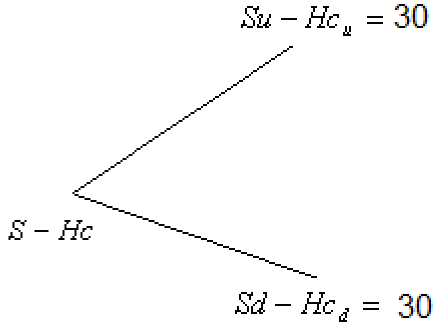
因为完全套期保值后成熟时的回报相同，因此我们有：

$$Su - Hc_u = Sd - Hc_d = 30\ ,$$

因此我们可以求解出 H：

$$H = \frac{Su - Sd}{c_u - c_d}\ ;$$

将相关数值代入，得 H=2。



（图 6.1.3）：一期的无风险投资组合树

**2**、 无套利机会时的期权价格求解

因为无套利机会存在，无风险组合的回报率应该等于无风险资产上的回报率，因此我们有：

$$R(S-Hc)=Su-Hc_u\ ,$$

整理得：

$$c=\frac{S(R-u)+Hc_u}{HR}=[c_u\frac{R-d}{u-d}+c_d\frac{u-R}{u-d}]/R\ ;$$

此即欧式看涨期权价格。将相关数值代入上式，我们有 $c=7.5$。欧式看跌期权的价格可以根据看涨-看跌平价关系得到。

**3**、 等价鞅测度的引入

事实上我们可以将上式改写为：

$$c=\pi c_u R^{-1}+(1-\pi)c_d R^{-1}\ ,$$

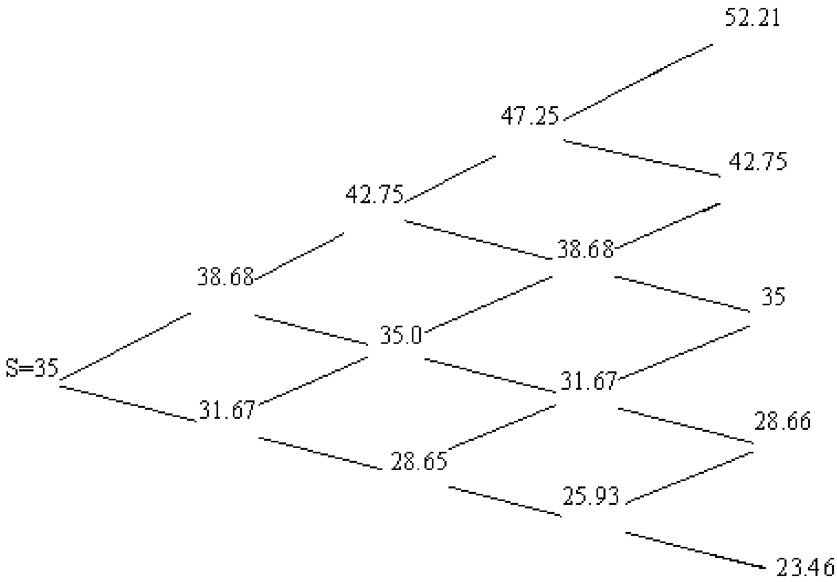
其中 $\pi=\frac{R-d}{u-d}$ 相当于一个概率，称为一个等价鞅测度。在该测度下，期权价格等于未来收益的期望贴现，与个体偏好等因素无关。

需要强调的是，该测度仅是一个假想的测度，并不真正反映股票价格上升和下降出现的概率。

例 **6.1.2**：考虑一个 5 期的衍生资产定价的例子。假定标的资产的价格 S=35，假定连续复利无风险利率为 9.525%，将一年分为四季，则 $R=e^{r(T-t)}=e^{0.09525\times0.25}=1.024098$。假定资产价格变化如下图 6.1.4 所示。则 u=1.1052，d=0.9048，R=1.024098，则 $\pi=0.595$。由此我们可以求解各种欧式期权和美式期权的价格。

(1) 在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 35 的欧式看涨期权价格，则个体只能在第 4 期执行该期权，其价格可以表示为：

$$c=[\binom{4}{0}\pi^4(Su^4-X)+\binom{4}{1}\pi^3(1-\pi)(Su^3d-X)]R^{-4}\approx4.37。$$




（图 6.1.4）：资产价格和期权收益树

(2) 计算在第一期当资产价格为 38.68 时发行的、第三期成熟的、操作价格为 40 的欧式看涨期权价格：

$$c = [\binom{2}{0}\pi^2(38.68 \times u^2 - X)] \Big/ (1+r)^2 \approx 2.79 \text{。}$$

(3) 计算在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的欧式看跌期权价格和看涨期权。由于个体只能在第 4 期行权，看跌期权价格可以表示为：

$$p = [\binom{4}{3}\pi(1-\pi)^3(X - Sud^3) + \binom{4}{4}(1-\pi)^4(X - Sd^4)]R^{-4} \approx 0.37 \text{；}$$

看涨期权价格可以表示为：

$$c = [\binom{4}{0}\pi^4(Su^4 - X) + \binom{4}{3}\pi^3(1-\pi)(Su^3d - X) + \binom{4}{2}\pi^2(1-\pi)^2(Su^2d^2 - X)]R^{-4}$$

$$\approx 8.07$$

将看跌、看涨期权的价格和股票价格及期权的执行价格代入看跌－看涨平价关系式的两边，我们有：

$S+p\approx 35.37$ ，

$c+K/R^4\approx 35.37$ ，

因此看跌 - 看涨平价关系式成立。

(4) 计算在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的美式看涨期权价格。

在第 3 期 $S_3=47.25$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$[(52.21-30)\times\pi+(42.75-30)(1-\pi)]R^{-1}=18.01$$ ，

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $47.25-30=17.25$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3=47.25$ 时不会提前执行；

在第 3 期 $S_3=38.68$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$[(42.75-30)\times\pi+(35-30)(1-\pi)]R^{-1}\approx 7.43$$ ，

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $38.68-30=8.68$ ，由于贴现期望值小于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3=47.25$ 时将提前执行，收益为 8.68；

在第 3 期 $S_3=31.67$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$(35-30)\times\pi R^{-1}\approx 2.91$$ ，

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $31.67-30=1.67$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3=31.67$ 时不会提前执行；

在第 3 期 $S_3=25.93$ 时，下一期看涨期权不会执行，也不会在当前期执行，收益为 0。

在第 2 期 $S_2=42.75$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[18.01\times\pi+8.68\times(1-\pi)]R^{-1}=13.93$$ ，

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $42.75-30=12.75$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 2 期 $S_2=42.75$ 时不会提前执行；

在第 2 期 $S_2=35.0$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[8.68\times\pi+2.91\times(1-\pi)]R^{-1}\approx 6.19$$ ，

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $35-30=5$ ，由于贴现期望值大于立即

执行的收益，因此该美式看涨期权在第 2 期 $S_2=35$ 时不会提前执行；

在第 2 期 $S_2=28.65$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$2.91\times\pi R^{-1}\approx 1.69\ ,$$

该期权在第 2 期 $S_2=28.65$ 下，由于标的资产价格小于执行价格，因此不会立即执行。

在第 1 期 $S_1=38.68$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[13.93\times\pi+6.19\times(1-\pi)]R^{-1}=10.54\ ,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $38.68-30=8.68$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 1 期 $S_1=38.68$ 时不会提前执行；

在第 1 期 $S_1=31.67$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[6.19\times\pi+1.69\times(1-\pi)]R^{-1}=4.27\ ,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $31.67-30=1.67$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 1 期 $S_1=31.67$ 时不会提前执行。

在第 0 期，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[10.54\times\pi+4.27\times(1-\pi)]R^{-1}\approx 8.00\ ,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $35-30=5$，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 0 期不会提前执行。

综上分析可以发现，该美式看涨期权只在第 3 期当股票价格等于 47.25 时才提前执行。该美式期权在第 0 期的价格是 8。

## §6.2 无套利机会与等价鞅测度

### 6.2.1 模型的建立

考虑一个 T+1 期证券市场经济，t=0,1,…,T。假定在该经济中存在 I 位个体，$i=1,2,\dots,I$。为简化讨论，假定经济中只有一种易腐烂的消费品，并将这种消费品作为计价单位，因此消费品的现货价格为 1。

一、信息结构：

假定经济中有有限个自然状态，它们构成一个状态空间 $\Omega$ 。假定经济中的信息是逐渐展示出来的，到 T 期个体才能知道真正的自然状态是 $\Omega$ 中的哪一个，我们用一个事件树来刻画信息结构。

我们用 $\mathbb{F} = \{F_t; t = 0,1,...,T\}$ 来记个体被赋予的公共信息结构，其中每一个 $F_t$ 都是 $\Omega$ 的一个分割，满足：如果 $t \geq s$ ，则 $F_t$ 比 $F_s$ 更精细；$F_0 = \{\Omega\}$ ，$F_T = \{\omega \mid \omega \in \Omega\}$。

二、资产结构：

定义：一个时间事件或有权益(time-event contingent claim)是一种证券，在交易日 $t \geq 1$、事件 $a_t \in F_t$ 发生时支付一单位消费品，在其它时间和情形下没有支付。

定义：一个复杂证券是由时间 0 消费品和一族时间事件或有权益构成的证券，它可以被表示为 $X = \{x_0, x_{a_t} \mid a_t \in F_t, t = 1,2,...,T\}$ ，其中 $x_0$ 和 $x_{a_t}$ 分别为以消费品衡量的时间 0 和时间 t、时间 $a_t$ 下的红利。

定义：一个长生命证券(long-lived security)是一种在任意交易日都可以交易的复杂证券。

假定经济中存在 N+1 种长生命证券，j=0,1,…,N。假定第 0 种资产是面值为 1 的 T 期贴现债券，其红利流可以表示为：

$$x_0 = \{0,0,...,x_0(T) = 1\} , \qquad (6.2.1)$$

记第 0 种资产的除息价格过程为 $\{B(t) \mid t = 0,1,2,...,T\}$ ，则有 $B(T) = 0$。

假定其它 N 种资产是风险资产，第 j 种资产的随机红利流可以表示为：

$$x_j = \{x_j(t) \mid t = 0,1,2,...,T\} 。 \qquad (6.2.2)$$

记第 j 种资产的除息价格过程为 $\{S_j(t) \mid t = 0,1,2,...,T\}$ ，则有 $S_j(T) = 0$ 。记 $S(t) = (S_1(t),...,S_N(t))^T$ ， $X(t) = (x_1(t),...,x_N(t))^T$ 。显然，

$x_j(t)$、$B(t)$ 和 $S_j(t)$ 关于 $F_t$ 可测，因此红利过程、价格过程都关于 $\mathbf{F}$ 适应。

三、个体行为：

假定每一位个体 $i$ 的偏好都具有 von Neuman-Morgenster 期望效用表示，假定个体效用函数 $u_{it}(c^i(t))$ 单调增、严格凹、充分光滑，假定 $\lim_{z\to 0^+} u_{it}'(z) = +\infty$。

假定个体 $i$ 在各自然状态上被赋予的主观概率为：

$$\pi^i = \{\pi^i_\omega \mid \omega \in \Omega\}。$$

在该主观概率下，记在给定事件 $a_t \in F_t$ 下，事件 $a_s \in F_s$（$s \geq t$）发生的条件概率为 $\pi^i_{a_s}(a_t)$，根据 Bayes 公式，$\pi^i_{a_s}(a_t)$ 可以表示为：

$$\pi^i_{a_s}(a_t) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\omega\in a_s}\pi^i_\omega}{\sum_{\omega\in a_t}\pi^i_\omega} & \text{如果 } a_s \subseteq a_t \\ 0 & \text{如果 } a_s \not\subseteq a_t \end{cases}。$$

假定个体都是理性预期的，所有个体都相信当前资产价格是自然状态 $\omega$ 和时间 t 的函数，即可以表示为 $B(\omega,t)$ 和 $S_j(\omega,t)$。

记个体被赋予的长生命证券的数量为：

$$\{\overline{\alpha}^i(0), \overline{\theta}^i(0) = (\overline{\theta}_j(0))_{j=1}^N\}。$$

个体的交易策略是一个 N+1 维的随机过程，可以简记为：

$$(\alpha,\theta) = \{\alpha(t), \theta(t) = (\theta_j(t))_{j=1}^N\}_{t=0}^T，$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 代表个体在 t-1 期交易发生后，到 t 期交易发生前所持有的第 0 种资产和第 j 种资产的数量。由于 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 是在 t-1 期被决定的，它们关于 $F_t$ 可测，因此交易策略关于 $\mathbf{F}$ 适应。个体的消费计划是一个随机过程，可以简记为：

$$c = \{c(t) \mid t = 0,1,2,\ldots,T\}。$$

其中 $c(t)$ 是 t 期消费量。

定义：称一个交易策略 $(\alpha,\theta)$ 是可接受的(admissible)，如果存在一个消费计划 $c$，满足：

$$\alpha(t+1)B(t)+\theta^T(t+1)S(t)=\alpha(t)B(t)+\theta^T(t)(S(t)+X(t))-c(t)\ ,\tag{6.2.3}$$

对 $\forall t=0,1,\ldots,T-1$ 成立，且有：

$$\alpha(T)+\theta^T(T)X(T)=c(T)\text{。}\tag{6.2.4}$$

相应地，我们也称该消费计划 $c$ 是由交易策略 $(\alpha,\theta)$ 融资的，也称为上市的(marketed)。

**6.2.2** 无套利条件和等价鞅测度

定义：一个套利机会是一个由可行交易策略融资的消费计划 $c$，满足：

（1）$c$ 非负，且至少存在某个时期 t 和事件 $a_t\in F_t$，有 $c(a_t,t)>0$；

（2）其成本非负，即

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))\le 0\text{ 。}$$

定义：一个随机过程 $Y=\{Y(t)\mid t=0,1,2,\ldots,T\}$ 被称为是一个在概率 $\pi$ 下对 $\mathbf{F}$ 适应的鞅，如果它满足：

$$E[Y(s)\mid F_t]=Y(t)\ ,\ \forall s\ge t\ ,$$

其中 $E[.\mid F_t]$ 是关于概率 $\pi$ 、给定 $F_t$ 下的条件概率。

定理 **6.2.1**：一个价格系统 $(B,S)$ 不允许存在任何套利机会，当且仅当经济中存在一个等价鞅。

证明：（必要性）：假定价格系统 $(B,S)$ 不允许存在任何套利机会。在价格系统下，个体 $i$ 的最大化问题可以表示为：

$$\max_{(\alpha,\theta)} E_i[\sum_{t=0}^{T}u_{it}(c(t))\ ,$$

Subject to:

消费计划 $c$ 由交易策略 $(\alpha,\theta)$ 融资，

$$(\alpha(0),\theta(0))=(\overline{\alpha}^i(0),\overline{\theta}^i(0))\text{。}$$

求解该最大化问题，Euler 方程为：

$$S_j(t) = E_i[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))}(S_j(t+1) + x_j(t+1)) \mid F_t]\text{，} \quad (6.2.5)$$

$$B(t) = \begin{cases} E_i[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))}B(t+1) \mid F_t] & \text{如果 } t \le T-2 \\ E_i[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))} \mid F_t] & \text{如果 } t = T-1 \end{cases}\text{。} \quad (6.2.6)$$

此处(6.2.5)式可以改写为：

$$u_{it}'(c^i(t))S_j(t) = E_i[u_{it+1}'(c^i(t+1))(S_j(t+1) + x_j(t+1)) \mid F_t]\text{；}$$

(6.2.7)

对(6.2.6)式进行前向迭代，可以改写为：

$$B(t) = \begin{cases} E_i[\frac{u_{is}'(c^i(s))}{u_{it}'(c^i(t))}B(s) \mid F_t] & t \le s \le T-1 \\ E_i[\frac{u_{is}'(c^i(s))}{u_{it}'(c^i(t))} \mid F_t] & s = T \end{cases}\text{。} \quad (6.2.8)$$

（1）如果经济中存在一个风险中性的个体 $i$ ，且该个体并不存在任何时间偏爱，则我们有：

$$u_{is}'(c^i(s)) = u_{it}'(c^i(t)) = \text{常数}\text{，} \ \forall s, t\text{。}$$

代入(6.2.7)和(6.2.8)式，整理得：

$$S_j(t) = E[S_j(t+1) + x_j(t+1) \mid F_t]\text{，}$$

$$B(t) = 1\text{。}$$

记 $D_j(t) = \sum_{s=0}^{t} x_j(s)$ ， $\forall t = 0, 1, \ldots, T$ ，则我们有：

$$\begin{aligned} S_j(t) + D_j(t) &= E_i[S_j(t+1) + D_j(t+1) \mid F_t] \\ &= E_i[S_j(s) + D_j(s) \mid F_t]\text{，} \quad \forall s > t\text{。} \end{aligned}$$

因此由资产的价格加上红利构成的随机过程是一个鞅，鞅测度是该风险中性个体的主观概率测度。

（2）如果经济中并不存在这样一个风险中性的个体，则我们可以构造

出一个鞅测度。首先对价格过程和红利过程进行归一化：

$$S_j^*(t)=\begin{cases}S_j(t)/B(t) & \text{如果}\ t\neq T\\ 0 & \text{如果}\ t=T\end{cases}，\quad B^*(t)=\begin{cases}1 & \text{如果}\ t\neq T\\ 0 & \text{如果}\ t=T\end{cases}；$$

$$x_j^*=\begin{cases}x_j(t)/B_j(t) & \text{如果}\ t\neq T\\ x_j(t) & \text{如果}\ t=T\end{cases}，\quad D_j^*(t)=\sum_{s=0}^{t}x_j^*(s)。$$

构造鞅测度$\pi^*$满足：

$$\pi_\omega^*\equiv\frac{u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{u_{i0}'(c^i(0))}\frac{\pi_\omega^i}{B(0)}，\quad \forall\omega\in\Omega。\qquad (6.2.9)$$

考虑到个体是不饱和的，边际效用大于零，所以有$\pi_\omega^*\geq 0$；对$\pi_\omega^*$关于所有的自然状态求和，有：

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi_\omega^*=\sum_{\omega\in\Omega}\frac{u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{u_{i0}(c^i(0))}\frac{\pi_\omega^i}{B(0)}=E[\frac{u_{iT}'(c^i(T))}{u_{i0}'(c^i(0))}]/B(0)=1$$

因此$\pi^*$确实是$\Omega$上的一个概率测度。

在该鞅测度$\pi^*$下，记在给定事件$a_t\in F_t$下，事件$a_s\in F_s$（$s\geq t$）发生的条件概率为$\pi_{a_s}^*(a_t)$，根据 Bayes 公式，$\pi_{a_s}^*(a_t)$可以表示为：

$$\pi_{a_s}^*(a_t)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{\omega\in a_s}\pi_\omega^*}{\sum_{\omega\in a_t}\pi_\omega^*} & \text{如果}\ a_s\subseteq a_t\\ 0 & \text{如果}\ a_s\nsubseteq a_t\end{cases}。\qquad (6.2.10)$$

当$a_s\subseteq a_t$时，将(6.2.9)代入(6.2.10)，有：

$$\pi_{a_s}^*(a_t)=\frac{\sum_{\omega\in a_s}\pi_\omega^*}{\sum_{\omega\in a_t}\pi_\omega^*}$$

$$=\frac{\sum_{\omega\in a_s}\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\sum_{\omega\in a_t}\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}$$

$$=\frac{\pi_{a_s}^i u_{is}'(c^i(a_s,s))\sum_{\omega\in a_s}\dfrac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\pi_{a_s}^i u_{is}'(c^i(a_s,s))}}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t,t))\sum_{\omega\in a_t}\dfrac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t,t))}}。$$

其中$c^i(a_t,t)$为个体$i$在 t 期、事件$a_t$发生时的最优消费量。注意到对任意$t \le T-1$，有$B(a_t,t)=\sum_{\omega\in a_t}\dfrac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega,T))}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t,t))}$成立，因此我们有：

$$\pi_{a_s}^*(a_t)=\begin{cases}\dfrac{B(a_s,s)}{B(a_t,t)}\dfrac{\pi_{a_s}^i(a_t)u_{is}'(c^i(a_s,s))}{u_{it}'(c^i(a_t,t))} & \text{如果}\quad t<T\\ \dfrac{1}{B(a_t,t)}\dfrac{\pi_{a_s}^i(a_t)u_{is}'(c^i(a_s,s))}{u_{it}'(c^i(a_t,t))} & \text{如果}\quad t=T\end{cases}\text{。} \qquad (6.2.11)$$

接下来我们来证明$S_j^*+D_j^*$在$\pi^*$下是一个鞅：

当 t<T 时，由(6.2.5) 和(6.2.11)，有：

$$S_j^*(t)=S_j(t)/B(t)$$

$$=E_i[\frac{B(t+1)u_{it+1}'(c^i(t+1))}{B(t)u_{it}'(c^i(t))}(S_j(t+1)/B(t+1)+x_j(t+1)/B(t+1))\,|\,F_t]$$

$$=E^*[S_j^*(t+1)+x_j^*(t+1)\,|\,F_t]\text{。}$$

类似于风险中性个体下的讨论，我们有：

$$S_j^*(t)+D_j^*(t)=E^*[S_j^*(s)+D_j^*(s)\,|\,F_t] \quad \forall T>s\ge t$$

$$=E^*[D_j^*(T)\,|\,F_t]\text{。} \qquad (6.1.12)$$

因此$S_j^*+D_j^*$在$\pi^*$下是一个鞅，必要性得证。

（充分性）：假定对于所有的 t<T，B(t)>0，并且存在一个等价鞅测度$\pi^*$，在该测度下$S_j^*+D_j^*$是一个鞅，要证明该经济中不存在套利机会。

采用反证法，假定经济中存在一个消费计划 c，为一个可接受的交易策略$(\alpha,\theta)$所融资，满足：

$$c\ge 0\quad，c\ne 0\text{，且}\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))\le 0\text{。}$$

由交易策略$(\alpha,\theta)$所融资的消费计划 c 是一个套利机会，个体不需要付出任何成本就有正的机会获得正的消费，即一种免费午餐(free lunch)。

如果消费计划 c 由交易策略$(\alpha,\theta)$所融资，则有：

$$c(T)=\alpha(T)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))$$

$$=\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))+\sum_{s=1}^{T}\alpha(s)(B(s)-B(s-1)+x_0(s))$$

$$+\sum_{s=1}^{T}\theta^T(s)(S(s)-S(s-1)+X(s))-\sum_{s=0}^{T-1}c(s)\text{。} \qquad (6.2.13)$$

即 T 期消费等于 T 期的财富量，后者等于初始财富加上各期买卖资产所导致的财富增加，再减去各期消费。类似地，我们有：

$$c^*(T)=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$+\sum_{s=1}^{T}\theta^T(s)(S^*(s)-S^*(s-1)+X^*(s))-\sum_{s=0}^{T-1}c^*(s)$$

其中 $c^*(t)=\begin{cases}c(t)/B(t) & t<T\\ c(t) & t=T\end{cases}$。

记 $D^*(t)=(D_1^*(t),\ldots,D_N^*(t))^T$，则有：$X^*(t)=D^*(t)-D^*(t-1)$。因此我们有：

$$\sum_{t=0}^{T}c^*(t)=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$+\sum_{t=1}^{T}\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))\text{。} \qquad (6.2.14)$$

因为在鞅测度 $\pi^*$ 下 $S_j^*+D_j^*$ 是一个鞅，所以我们有：

$$E^*[\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))\,|\,F_{t-1}]$$

$$=\theta^T(t)(E^*[S^*(t)+D^*(t)\,|\,F_{t-1}]-S^*(t-1)-D^*(t-1))$$

$$=0\text{。}$$

相应地，我们有：

$$E^*[\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))]$$

$$=E^*[E^*[\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1))\,|\,F_{t-1}]]$$

$$=0$$

所以我们有：

$$E^*[\sum_{t=0}^{T}c^*(t)]=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$+E^*[\sum_{t=1}^{T}\theta^T(t)(S^*(t)+D^*(t)-S^*(t-1)-D^*(t-1)]$$

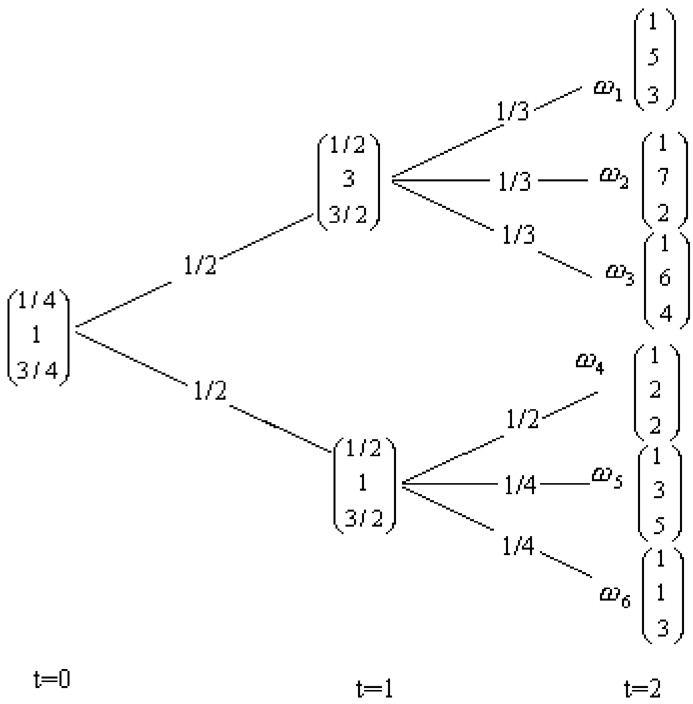
$=\alpha(0)+\theta^{T}(0)(S^{*}(0)+X^{*}(0))$。

因为 B(t)>0 对于所有的 t<T 成立，有 $c\geq 0$，$c\neq 0$，所以 $E^{*}[\sum_{t=0}^{T}c^{*}(t)]>0$，这蕴涵：

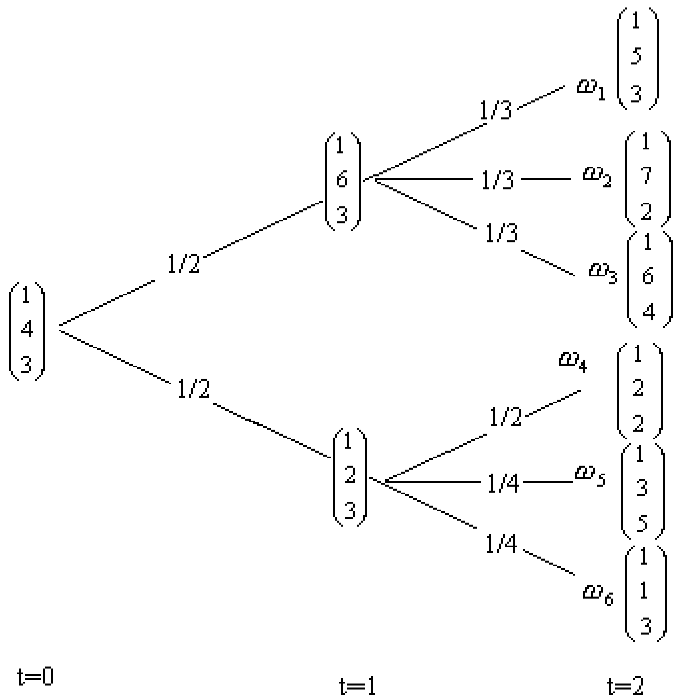
$$\alpha(0)+\theta^{T}(0)(S^{*}(0)+X^{*}(0))>0$$

考虑到 B(0)>0，所以有 $\alpha(0)B(0)+\theta^{T}(0)(S(0)+X(0))>0$，与假设矛盾。充分性得证。■

下面我们用一个证券市场实例，来说明无套利机会与等价鞅测度的关系，以及等价鞅测度的求解。




(图 6.2.1)：证券市场原始价格系统




(图 6.2.2)：证券市场贴现价格系统

例 **6.2.1**：假定经济中有三种长生命证券，j=0,1,2，它们只在 t=2 时支付红利，t=0、1 时的价格和 t=2 时的红利支付如图 6.2.1 所示。在该经济中，第 0 种资产是一种无风险资产。下面我们通过构造一个等价鞅测度来说明该价格系统没有套利机会。此处无风险资产的价格在 t=0 和 t=1 时不为 1，因此我们可以首先对该价格系统进行贴现，如图 6.2.2 所示。

如果经济中不存在套利机会，则存在一个鞅测度，$S_j^* + D_j^*$ 在该测度下是个鞅 。记从 t=1 上面一个节点出发，即事件$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$发生后自然状态$\omega_1,\omega_2,\omega_3$出现的条件概率为 $p_1$、 $p_2$ 和 $p_3$ ，则 $p_1$、 $p_2$ 和 $p_3$ 必须满足：

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 5p_1 + 7p_2 + 6p_3 = 6 \\ 3p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 3 \end{cases} , \qquad (6.2.15)$$

该方程组存在唯一的解：

$$(p_1, p_2, p_3) = (1/3, 1/3, 1/3)。 \qquad (6.2.16)$$

类似地，从 t=1、事件 $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 发生后自然状态 $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ 出现的条件概率为 $p_4$、 $p_5$ 和 $p_6$ 必须满足：

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 2p_1 + 3p_2 + p_3 = 2 \\ 2p_1 + 5p_2 + 3p_3 = 3 \end{cases}， \qquad (6.2.17)$$

该方程组存在唯一解：

$$(p_4, p_5, p_6) = (1/2, 1/4, 1/4)。 \qquad (6.2.18)$$

记事件 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 在 t=0 发生后，事件 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 和 $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 在 t=1 发生的条件概率为 $(q_1, q_2)$，则 $(q_1, q_2)$ 满足：

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ 6q_1 + 2q_2 = 4 \\ 3q_1 + 3q_2 = 3 \end{cases}， \qquad (6.2.19)$$

上式存在唯一解：

$$(q_1, q_2) = (1/2, 1/2)。 \qquad (6.2.20)$$

根据上述条件概率，我们可以直接计算出鞅测度 $\pi^*$：

$$\begin{bmatrix} \pi^*(\omega_1) \\ \pi^*(\omega_2) \\ \pi^*(\omega_3) \\ \pi^*(\omega_4) \\ \pi^*(\omega_5) \\ \pi^*(\omega_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}。 \qquad (6.2.21)$$

因为该经济中存在等价鞅测度，所以该价格系统不存在套利机会。

如果 t=0 时的资产价格发生变化，例如从(1/4,1,3/4)变为(1/4,1,1/2)，则方程(6.2.19)应变为：

$$\begin{cases} q_1+q_2=1 \\ 6q_1+2q_2=4 \\ 3q_1+3q_2=2 \end{cases},$$

显然该方程组无解，从而系统不存在等价鞅测度，这蕴涵该价格系统存在套利机会。该套利机会可以轻易地构造，在第 0 期卖空两份资产 0，购买一份资产 2，则该投资组合的成本为零，是一个套利组合；到第一期将资产变现，个体可以无风险地获得 1/2 单位消费品。因此经济中存在套利机会。

**6.2.3** 消费计划的鞅性质

一个消费计划刻画了不同时间-事件下个体的消费量，而一个长生命证券由它在各时间-事件下的回报（消费品）刻画，因此一个长生命证券等价于一个消费计划。在无套利条件下，一个市场化了的消费计划或长生命证券的价格是唯一确定的，因为衍生产品是一种长生命证券，所以其价格也是唯一确定的，可以利用等价鞅测度来计算，衍生产品的这种定价方式称为套利定价。

定理 **6.2.2**：一个消费计划有定义好了的价格，如果该消费计划是上市的，且经济中不存在套利机会。

证明：（1）如果消费计划 c 是由交易策略 $(\alpha,\theta)$ 融资的，则该消费计划的初始成本为：

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0)),\qquad(6.2.22)$$

此即 t=0 时该消费计划的连带红利的价格。其唯一性是显然的，如果存在一个交易策略 $(\hat\alpha,\hat\theta)$ 融资该消费计划，满足：

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))>\hat\alpha(0)B(0)+\hat\theta^T(0)(S(0)+X(0)),$$

则 $(\hat\alpha-\alpha,\hat\theta-\theta)$ 是一个可接受的消费计划，其初始成本小于零，未来消费恒为零，存在套利机会。如果上述不等式取小于符号，类似地可以证明存在套利机会。进一步可以得到，该消费计划的除息价格等于：

$$\alpha(0)B(0)+\theta^T(0)(S(0)+X(0))-c(0)$$

也是定义好的，唯一决定的。

（2）一个消费计划的 t 期除息价格，是指 t 期需要多少消费品的成本来启动一个动态交易策略，以获得该消费计划 t 期之后的所有消费。消费计划 c 是由交易策略 $(\alpha,\theta)$ 融资的，则 $\{c(s)\mid s=t+1,\ldots,T\}$ 的价格可以刻画为：

$$\alpha(t)B(t)+\theta^T(t)(S(t)+X(t))-c(t)=\alpha(t+1)B(t)+\theta^T(t+1)S(t)。$$

类似地，我们可以证明该价格是唯一的。证明完毕。■

记该消费计划 t 期价格为：

$$S_c(t)=\alpha(t+1)B(t)+\theta^T(t+1)S(t)。\qquad (6.2.23)$$

下面我们来证明消费计划具有鞅性质。

定理 **6.2.3**：如果价格系统(B,S)不存在套利机会，则上市的消费计划具有鞅性质。

证明：定义消费计划的贴现价格为：

$$S_c^*(t)=\begin{cases} S_c(t)/B(t) & t<T \\ 0 & t=T \end{cases}。\qquad (6.2.24)$$

所以我们有：

$$\begin{aligned} S_c^*(t)&=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t) \\ &=\alpha(t)+\theta^T(t)(S^*(t)+X^*(t))-c^*(t)。\qquad (6.2.25)\end{aligned}$$

当价格系统(B,S)不存在套利机会时，存在一个等价鞅测度 $\pi^*$，使得 $S_j^*+D_j^*$ 是一个鞅。下面我们来证明 $S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t}c^*(s)$ 也是一个鞅。

由 $\sum_{t=0}^{T}c^*(t)=\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$

$$+\sum_{s=1}^{T}\theta^T(s)(S^*(s)-S^*(s-1)+X^*(s))，$$

得：

$$S_c^*(t)=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t)\qquad =\alpha(0)+\theta^T(0)(S^*(0)+X^*(0))$$

$$+\sum_{s=1}^{t}\theta^T(s)(S^*(s)-S^*(s-1)+X^*(s))-\sum_{s=0}^{t}c^*(s)\text{。}$$

$$\sum_{s=t+1}^{T}c^*(s)=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$+\sum_{s=t+1}^{T}\theta^T(s)(S^*(s)+D^*(s)-S^*(s-1)+D^*(s-1))\text{。}$$

所以我们有：

$$E^*[\sum_{s=t+1}^{T}c^*(s)\,|\,F_t]=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$+E^*[\sum_{s=t+1}^{T}E^*[\theta^T(s)(S^*(s)+D^*(s)-S^*(s-1)+D^*(s-1))\,|\,F_{s-1}]\,|\,F_t]$$

$$=\alpha(t+1)+\theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$=S_c^*(t)\text{。}$$

上式蕴涵，一个消费计划的 t 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度 $\pi^*$ 的预期。由此我们可以进一步得到：

$$S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t}c^*(s)=E^*[\sum_{s=0}^{T}c^*(s)\,|\,F_t]\text{，}\quad\forall t\text{。}\qquad(6.2.26)$$

所以有：

$$E^*[S_c^*(s)+\sum_{v}^{s}c^*(v)\,|\,F_t]=E^*[E^*[\sum_{v=0}^{T}c^*(v)\,|\,F_s]\,|\,F_t]$$

$$=E^*[\sum_{v=0}^{T}c^*(v)\,|\,F_t]$$

$$=S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t}c^*(s)\text{。}$$

因此 $=S_c^*(t)+\sum_{s=0}^{t}c^*(s)$ 在 $\pi^*$ 下是一个鞅。定理证明完毕。■

利用消费计划的等价鞅性质，我们可以给消费计划定价。下面我们给出一个例子来加以说明。

例 **6.2.2**：考虑一个如图 6.2.3 的消费计划，假定价格系统由图 6.2.1 所

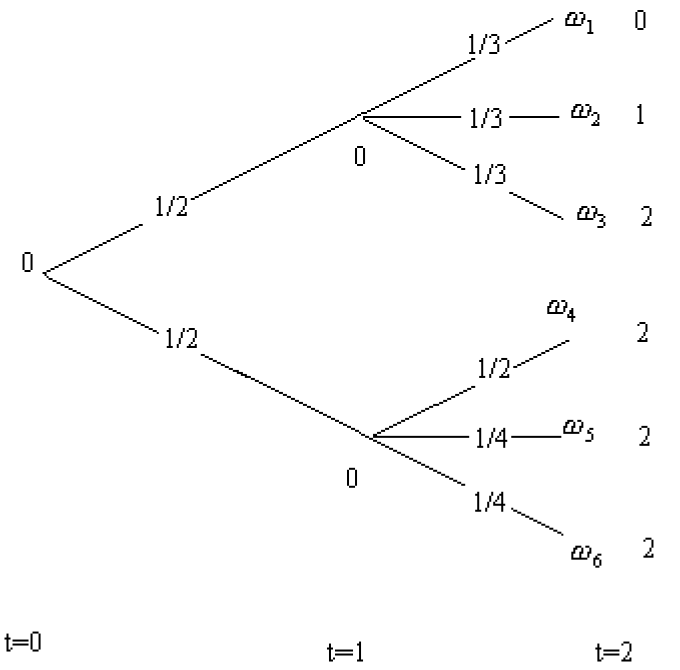
示。试计算该消费计划的价格。

因为价格系统中不存在套利机会，所以该消费计划具有鞅性质，该消费计划的 t 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度 $\pi^*$ 的预期。所以我们有：

$$S_c^*(0)=(\frac{1}{6})0+(\frac{1}{6})1+(\frac{1}{6})2+(\frac{1}{4})2+(\frac{1}{8})2+(\frac{1}{8})2=\frac{3}{2}，$$

$$S_c^*((\omega_1,\omega_2,\omega_3),1)=(\frac{1}{3})0+(\frac{1}{3})1+(\frac{1}{3})2=1，$$

$$S_c^*((\omega_4,\omega_5,\omega_6),1)=(\frac{1}{2})2+(\frac{1}{4})2+(\frac{1}{4})2=2。$$




（图 6.2.3）：一个上市的消费计划。

考虑到 B(0)=1/4，B(1)=1/2，所以该消费计划在时间 t=0 和 t=1 时的价格为：

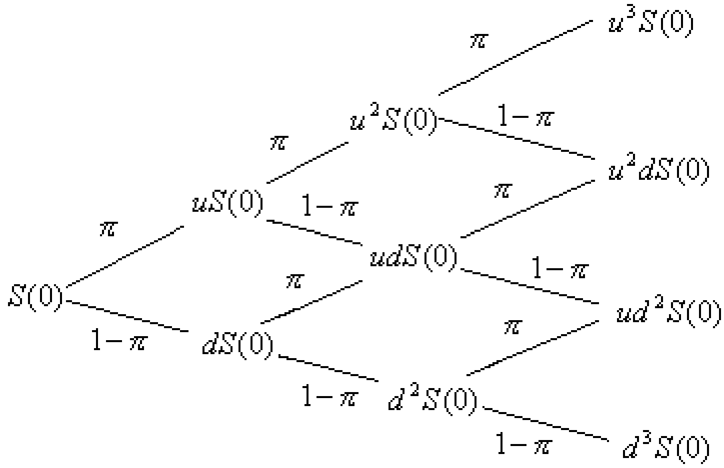
$S_c(0)=3/8$，$S_c((\omega_1,\omega_2,\omega_3),1)=1/2$，$S_c((\omega_4,\omega_5,\omega_6),1)=1$。

## §6.3 Black-Scholes 公式的推导（二叉树方法）

### 6.3.1 模型的建立

考虑一个具有两个长生命证券的多周期证券市场经济，一个是普通股票，一个是无风险债券。假定该经济持续很长时间，我们仅考虑交易日 t=0、1、2、…、T。假定该经济满足如下假定：

1、不考虑标的资产的红利收益，假定资产的波动性相同且已知，资产价格满足一个二项随机游动，如图 6.3.1 所示。$S(0)>0$；$S(1)=\begin{cases} uS(0) \\ dS(0) \end{cases}$，$u>d$；…。




(图 6.3.1)：二项随机游动和等价鞅测度。

2、假定在期权生命中短期无风险利率 R 已知，个体可以以一个相同的无风险利率进行借贷，假定无风险资产不支付红利，t 期价格为 $R^t$。

3、不考虑交易成本和税收，允许证券卖空，在期权成熟前不考虑有价证券的转让等事件。

4、假定个体拥有的信息结构由股票价格生成。$F_0=\{\Omega\}$；$F_1$ 有两个事件；$F_2$ 有三个事件，…；任意的 $a_t\in F_t$ 有两个子集 $a_{t+1}\subset a_t$，$a_{t+1}\in F_{t+1}$。假定个体可能有不同的主观概率，但每一事件上的主观概率都大于零。

**6.3.2** 等价鞅测度的求解

在图 6.3.1 所示的价格系统中，任意的 $a_t \in F_t$ 有两个子集 $a_{t+1} \subset a_t$ ，$a_{t+1} \in F_{t+1}$ ，根据前面的假定，我们在求解等价鞅测度时，只需在一个节点上求出即可。

因为 $B(t) = R^t$ ，所以我们首先对价格系统进行贴现调整：

$$S^*(t) = S(t)R^{-t}\ ,\quad B^*(t) = 1\ , \qquad (6.3.1)$$

如果经济中不存在套利机会，则价格加上红利和构成的随机过程是一个鞅。考虑到此处不考虑标的资产的红利收益，因此我们有：

$$E^*[S^*(t+1) \mid F_t] = S^*(t)\ ,\quad \forall t < T\ 。 \qquad (6.3.2)$$

将具体价格代入上式，假定等价鞅测度为 $(\pi, 1-\pi)$ ，则我们有：

$$\pi u R^{-1} + (1-\pi) d R^{-1} = 1\ ,$$

由此可得：

$$\pi = \frac{R-d}{u-d}\ 。 \qquad (6.3.3)$$

当 $d < R < u$ 时，$\pi \in (0,1)$ ，因此经济中确实存在一个等价鞅测度，相应地，该价格系统不存在套利机会。

**6.3.3 Black-Scholes** 公式的推导

下面我们利用风险资产的二叉树结构，来推导出一个标的在普通股票上、操作价格为 K、成熟期为 T 的欧式看涨期权的价格。在图 6.3.1 的二叉树中，从第 0 期出发，T 期股票价格为 $S(0)u^n d^{T-n}$ 的概率为 $\binom{T}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n}$ ；从 t 期出发，T 期股票价格达到 $S(t)u^n d^{T-n-t}$ 的条件概率为 $\binom{T-t}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n-t}$ 。

考虑到该欧式看涨期权在 T 期的回报为：$\max[S(T)-K, 0]$ ，因此 t 期该看涨期权的贴现价格为：

$$p^*(t) = E^*[\max(S(T)-K, 0)R^{-T} \mid F_t]\ ,$$

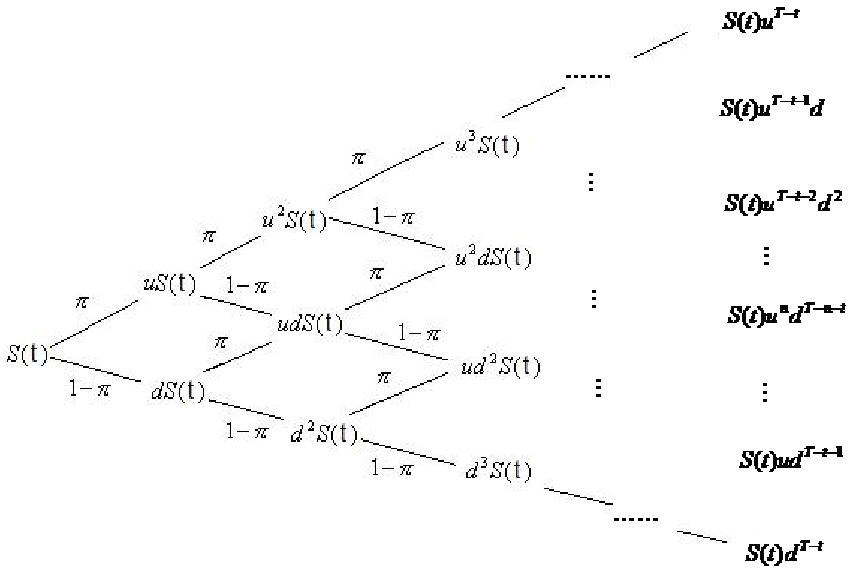
所以 t 期该看涨期权的价格可以表示为：

$$p(S(t),t,K)=R^{t}E^{*}[\max(S(T)-K,0)R^{-T}\mid F_{t}]$$ 。

由图 6.3.2，上式可以进一步改写为

$$p(S(t),t,K)$$
$$=R^{-(T-t)}\sum_{n=0}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}\max[S(t)u^{n}d^{T-t-n}-K,0]$$，

(6.3.4)




(图 6.3. 2 )：从 t 期开始的二项随机游动和等价鞅测度。

记 j 为满足 $S(t)u^{j}d^{T-t-j}\geq K$ 的正整数，则：

$$j\geq[\ln\frac{K}{S(t)d^{T-t}}]/[\ln u/d]$$。

从而

$$p(S(t),t,K)=R^{-(T-t)}\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}(S(t)u^{n}d^{T-t-n}-K)$$

$$=S(t)\sum_{n=j}^{T-t}\binom{T-t}{n}(\frac{\pi u}{R})^{n}(\frac{(1-\pi)d}{R})^{T-t-n}$$

$$- KR^{-(T-t)}\sum_{n=j}^{T-t}\begin{pmatrix}T-t\\n\end{pmatrix}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}$$

记$\Phi(j;T-t,\pi)=\sum_{n=0}^{T-t}\begin{pmatrix}T-t\\n\end{pmatrix}\pi^{n}(1-\pi)^{T-t-n}$，则

$p(S(t),t,K)=S(t)\Phi(j;T-t,\pi u/R)-KR^{-(T-t)}\Phi(j;T-t,\pi)$。

(6.3.5)

该公式由 Cox、Ross 和 Rubinstein(1979)给出。

当独立时间数趋向于无穷时，即在区间 T-t 中将时间间隔分得足够小，则二项分布趋向于正态分布，从而上式可以改写为标准的 Black-Scholes 公式：

$$p(S(t),t,K)=S(t)N(x_t)-Ke^{-r(T-t)}N(x_t-\sigma\sqrt{T-t}),$$

(6.3.6)

其中 $x_t\equiv\frac{\ln(S(t)/Ke^{-r(T-t)})}{\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$，r 和 $\sigma$ 为无风险资产的连续复利和风险资产的标准差。该公式由 Black 和 Scholes(1973)首先给出，他们的工作对市场参与者从事期权定价和对冲等行为提供了方便。

习题：

1、计算例 6.1.2 中在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的美式看跌期权价格，并检验看跌看涨平价关系对于美式期权是否成立。

2、在图 6.2.1 中，如果在时间 t=1、事件$(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$发生时，三种资产的价格改为$(\frac{1}{2},3,\frac{1}{2})$，试证明该价格系统不存在等价鞅测度，同时构造一个套利机会来验证 Harris-Creps 的理论。

3、假定某支股票当前价格是 50 元，一个月之后该股票价格以 60%的概率上升为 55 元，以 40%的概率下降为 45 元，无风险利率为每月 2%，试求解该系统的等价鞅测度，并比较与真实概率之间的关系。