

索洛增长模型



上海财经大学

内容提要

- 索洛增长模型的基本假设和结论。
- 稳态和黄金律稳态的含义。
- 收敛与条件收敛。
- 索洛模型对经济增长的解释。

人们一旦开始思考经济增长这个问题，就再也不会去想其他事情。

——罗伯特·卢卡斯

卡尔多事实 (Kaldor facts)

- 以下变量在长期中基本保持稳定：
 - SF1*: 人均产出 Y/L 的增长率
 - SF2: 人均资本 K/L 的增长率
 - SF3: 实际利率或资本回报率 r
 - SF4*: 资本产出比 K/Y
 - SF5*: 劳动收入份额 $\frac{wL}{Y}$ 和资本收入份额 $\frac{rK}{Y}$
- SF6*: 各国间生产率增速存在巨大差异。
- 全球经济增长事实：
 - 增长奇迹和增长灾难
 - 人均收入与人力资本之间存在较强的正相关关系。

罗伯特·索洛

- Robert Solow, 1924 年 8 月出生于纽约。
- 因对经济增长研究的贡献获得 1987 年诺贝尔经济学奖。
- 索洛模型是增长理论的一个主要模型：
 - 广泛应用于政策的制定
 - 与大多数新近的增长理论相比较的基准
 - 研究了长期中生活水平和经济增长的决定因素



模型假设 I

- 生产函数 $Y(t) = F(Z_K(t)K(t), Z_L(t)L(t))$, 如果要素收入的相对份额 $\frac{F_K K}{F_L L}$:
 - 给定资本—产出比 K/Y 时保持不变, 即 $Z_K(t) = 1$, 则称技术进步为劳动增强型, 或哈罗德中性。
 - 给定劳动—产出比 L/Y 时保持不变, 即 $Z_L(t) = 1$, 则称技术进步为资本增强型, 或索洛中性。
 - 给定资本—劳动比 K/L 时保持不变, 即 $Z_K(t) = Z_L(t)$, 则称技术进步为希克斯中性。

模型假设 II

- 关键假设:
 - 1. 生产函数为哈罗德中性。
 - ▶ Barro and Sala-i-Martin(2003) 证明, 如果技术进步率和人口增长率不变, 则 BGP 要求技术进步必须是哈罗德中性的。
 - ▶ 对于 C-D 生产函数而言, 三种中性是等价的, 可以互相转化。
 - 2. 规模报酬不变: $F(cK, cAL) = cF(K, AL)$
 - ▶ 专业化分工已经足够发达。
 - ▶ 忽略土地和自然资源等其他投入要素。

生产函数写为集约形式:

$$y(t) = f(k(t))$$

- 3. 假设 f 满足 $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, 以及稻田条件:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

4. 劳动和技术增长率固定：

$$g_L(t) = n$$

$$g_A(t) = g$$

► 增长率与变化率：

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$g_x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{d \ln x(t)}{dt}$$

5. 折旧率固定： δ

6. 储蓄率固定： s

7. 封闭经济，没有政府部门： $Y = C + I$

模型动态

总资本存量的变动方程

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

■ 有效工人平均资本存量 $k = \frac{K}{AL}$ 的变动方程（核心方程）

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2} [\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)] \\ &= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right] \\ &= sy(t) - (n + g + \delta)k(t)\end{aligned}$$

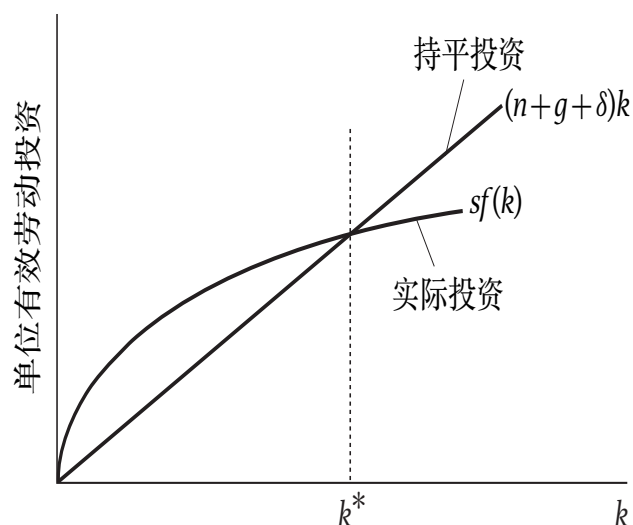
■ 平均资本存量的变化等于平均**实际投资**与平均**持平投资**之差。

实际投资与持平投资

- 稳态的定义： $\dot{k}(t) = 0$
 $sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*$
- 稳态资本产出比不变：
 $\frac{k^*}{y^*} = \frac{s}{n+g+\delta}$
- 稳态人均资本存量与储蓄率有关，假设 C-D 生产函数：

$$k^* = \left(\frac{n + g + \delta}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

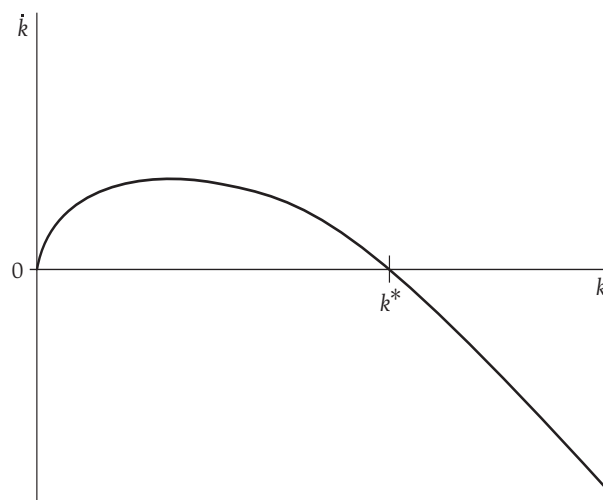
- 消费的稳态水平：
 $c^* = y^* - i^* = (1 - s)y^*$



相图

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t)$$

- 若 $k(t) < k^*$ ，则 $\dot{k}(t) > 0$ 。
- 若 $k(t) > k^*$ ，则 $\dot{k}(t) < 0$ 。
- 若 $k(t) = k^*$ ，则 $\dot{k}(t) = 0$ 。



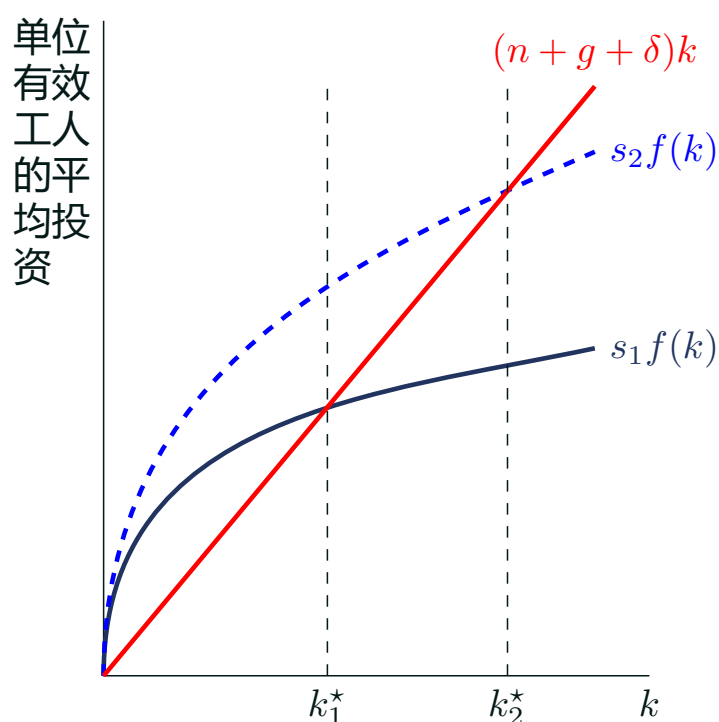
平衡增长路径

- 模型中每个变量的增长率都是常数。

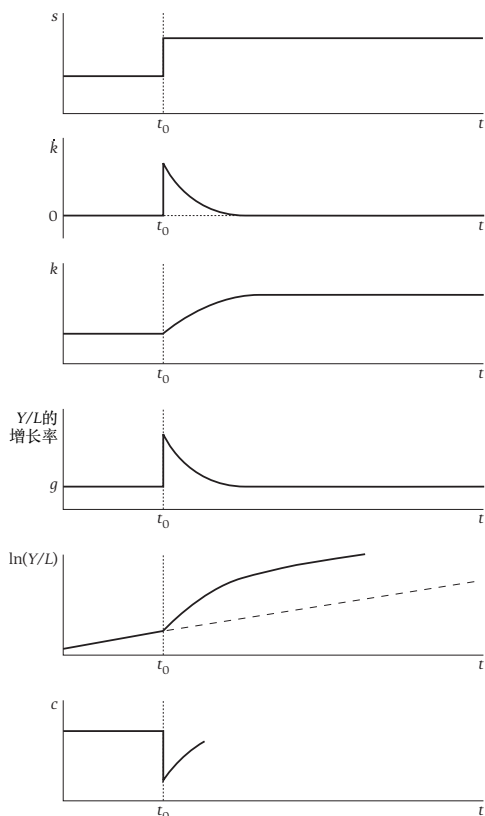
变量	含义	稳态增长率
k	有效工人平均资本	0
L	劳动	n
A	知识	g
AL	有效劳动	$n + g$
K	总资本	$n + g$
Y	产出	$n + g$
K/L	工人平均资本	g
Y/L	工人平均产出	g
w	工资	?
r	租金	?
c	消费	?

储蓄率变动的影响

- 储蓄率上升会增加投资，实际投资曲线向上移动，导致 k 向新的稳态移动。
- s 越高 $\Rightarrow k^*$ 越高 $\Rightarrow y^*$ 越高。
- 因此，索洛模型表明：储蓄率较高的国家具有较高的人均资本存量 and 人均收入水平。



- 储蓄率的变化具有水平效应，它改变了经济的平衡增长路径。
- 但不具有增长效应，不影响平衡路径上工人平均产出的增长率。



定量分析 I

- s 增加对产出的长期影响：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*) \frac{\partial k^*(s, n, g, \delta)}{\partial s}$$

- 平衡增长路径上： $sf(k^*(s, n, g, \delta)) = (n + g + \delta)k^*(s, n, g, \delta)$
- 两边对 s 求偏导数：

$$f(k^*) + sf'(k^*) \frac{\partial k^*}{\partial s} = (n + g + \delta) \frac{\partial k^*}{\partial s}$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n + g + \delta) - sf'(k^*)} \quad (1)$$

- 实际投资线在 k^* 处从上方和持平投资线相交，因此 $sf'(k^*) < n + g + \delta$ ，可见

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} > 0$$

- 根据方程 (1) 可得产出对于储蓄率的弹性为：

$$\begin{aligned}\frac{s}{y^*} \frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{s}{f(k^*)} \frac{f'(k^*) f(k^*)}{(n+g+\delta) - s f'(k^*)} \\ &= \frac{(n+g+\delta) k^* f'(k^*)}{f(k^*) \left[(n+g+\delta) - (n+g+\delta) k^* \frac{f'(k^*)}{f(k^*)} \right]} \\ &= \frac{k^* \frac{f'(k^*)}{f(k^*)}}{1 - k^* \frac{f'(k^*)}{f(k^*)}}\end{aligned}$$

- 令 $\alpha(k^*)$ 表示产出在 k^* 处关于资本的弹性，则：

$$\varepsilon_{ys} = \frac{s}{y^*} \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha(k^*)}{1 - \alpha(k^*)}$$

储蓄率对稳态产出的影响程度

- 假设市场是竞争性的，则资本按边际产出支付报酬， $\alpha(k^*)$ 为资本收入占产出的份额。
- $\alpha(k^*)$ 较小时，储蓄率对稳态产出的影响较小。
 - $\alpha(k^*) = 1/3$ 时， $\varepsilon_{ys} = 0.5$ 。
 - ▶ 发达国家如美国，储蓄率变化 10%，从 0.2 增加到 0.22，稳态产出增加 5%。
 - $\alpha(k^*) = 1/2$ 时， $\varepsilon_{ys} = 1$ 。
 - ▶ 发展中国家如中国，储蓄率变化 10%，从 0.3 增加到 0.33，稳态产出增加 10%。都是较小的变化。
- 原因：
 - $\alpha(k^*)$ 越小表明实际投资曲线越弯曲，储蓄变化使实际投资曲线移动时，它与持平投资线的交点移动幅度就会越小。
 - $\alpha(k^*)$ 小表明 k^* 的变化对 y^* 的影响较小。

储蓄率变动对消费的影响

- 在平衡增长路径 BGP 上，消费等于产出与实际投资之间的距离：

$$c^* = (1 - s) f(k^*) = f(k^*) - (n + g + \delta) k^*.$$

- 对 s 求偏导：

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*(s, n, g, \delta)) - (n + g + \delta)] \frac{\partial k^*(s, n, g, \delta)}{\partial s}.$$

- 稳态消费达到最大时， k^* 值称为**资本存量的黄金律水平**。此时，储蓄率为：

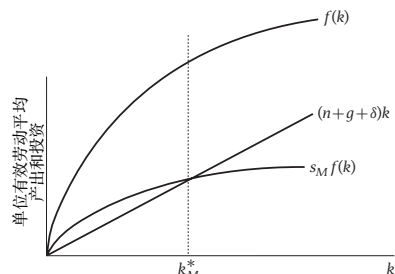
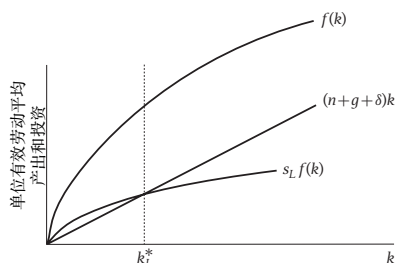
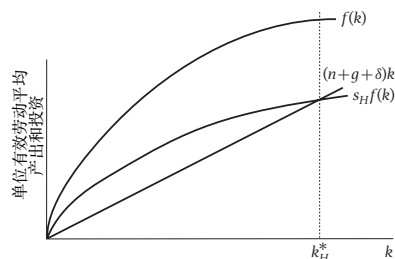
$$s_G = \arg \max_s f(k^*) - (n + g + \delta) k^*$$

$$f'(k_G^*) = (n + g + \delta)$$

- 黄金律稳态时： $s_G f(k_G^*) = (n + g + \delta) k_G^* = f'(k_G^*) k_G^*$ ，可见 $s_G = \frac{f'(k_G^*)}{f(k_G^*)} k_G^*$ 。假设 C-D 生产函数，则 $s_G = \alpha$ 。

资本存量的黄金律水平

- s 上升是否会在长期中提高消费取决于资本的边际净收益 $f'(k^*) - \delta$ 与 $n + g$ 的大小关系。
- 当 s 较高从而 k^* 较高时， $f'(k^*) - \delta < n + g$ ， $s \uparrow \Rightarrow c^* \downarrow$ 。
- 当 s 较低从而 k^* 较低时， $f'(k^*) - \delta > n + g$ ， $s \uparrow \Rightarrow c^* \uparrow$ 。
- 储蓄率为 s_G 时， $f'(k^*) - \delta = n + g$ ， s 的边际变动不影响 c^* ，经济达到**黄金律稳态**。



收敛速度

- 在 $k = k^*$ 附近对 $\dot{k}(k)$ 作一阶泰勒近似即得：

$$\dot{k} \simeq \left[\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right]_{k=k^*} (k - k^*) \equiv -\lambda (k - k^*).$$

- 当 k 略小于 k^* 时, \dot{k} 为正, 而当 k 略大于 k^* 时, \dot{k} 为负。
- 求解常微分方程可得：

$$k(t) \simeq k^* + e^{-\lambda t} [k(0) - k^*],$$

- 求解 λ 可得：

$$\begin{aligned} \lambda &= - \left. \frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} \\ &= - [sf'(k^*) - (n + g + \delta)] \\ &= (n + g + \delta) - (n + g + \delta) k^* \frac{f'(k^*)}{f(k^*)} \\ &= [1 - \alpha(k^*)] (n + g + \delta) \end{aligned}$$

收敛速度

- 假设中国： $n = 1\%$, $g = 1\%$, $\delta = 10\%$, $\alpha = 0.5$, 则 $\lambda = 6\%$, 即 k 和 y 每年向稳态值移动剩余距离的 6%。走完一半的距离需要 11 年。改革开放 40 年大约走完 94%，接近稳态。
- 假设美国： $n = 1\%$, $g = 1\%$, $\delta = 4\%$, $\alpha = 0.3$, 则 $\lambda = 4.2\%$, 即 k 和 y 每年向稳态值移动剩余距离的 4.2%。走完一半的距离需要 16.5 年。走完 94% 需要 66 年。
- 可见，储蓄率变化对产出的影响有限，产生作用的速度也不快。
- 思考：上述结果是在 BGP 附近根据泰勒展开推导得到的，如果变量变化较大，可能误差会较大。
- 证明： y 向 y^* 收敛的速度与 k 向 k^* 收敛的速度相等，即 $y(t) - y^* \simeq e^{-\lambda t} [y(0) - y^*]$ 。

收敛速度

- 证明：\$y\$ 向 \$y^*\$ 收敛的速度与 \$k\$ 向 \$k^*\$ 收敛的速度相等，即 \$y(t) - y^* \simeq e^{-\lambda t} [y(0) - y^*]\$。目标：找出 \$\lambda_y = - \left. \frac{\partial \dot{y}(y)}{\partial y} \right|_{y=y^*}\$。

$$\begin{aligned} y(t) = f(k(t)) &\Rightarrow \dot{y} = f'(k) \dot{k} = f'(k) \dot{k} \\ &= f'(k) [sf(k) - (n + g + \delta)k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial k} \right|_{y=y^*} &= f'(k^*) [sf'(k^*) - (n + g + \delta)] \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \right|_{y=y^*} &= \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial k} \right|_{y=y^*} \left. \frac{\partial k}{\partial y} \right|_{y=y^*} \\ &= f'(k^*) [sf'(k^*) - (n + g + \delta)] \frac{1}{f'(k^*)} \\ &= sf'(k^*) - (n + g + \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_y &= (n + g + \delta) - (n + g + \delta) k^* \frac{f'(k^*)}{f(k^*)} \\ &= [1 - \alpha(k^*)] (n + g + \delta) = \lambda_k \end{aligned}$$

索洛模型的离散形式

- 生产函数：\$Y_t = F(K_t, A_t L_t)\$ 满足规模报酬不变和稻田条件。
- 假设：\$\frac{\Delta A_t}{A_t} = g, \frac{\Delta L_t}{L_t} = n, \Delta K_t = I_t - \delta K_t\$。
- 推导核心方程：

$$k_{t+1} \equiv \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} = \frac{sY_t + (1 - \delta) K_t}{A_{t+1} L_{t+1}} = \frac{sy_t + (1 - \delta) k_t}{(1 + n)(1 + g)}$$

- 稳态：\$\Delta k_t = 0\$

$$k^* = \frac{sf(k^*) + (1 - \delta) k^*}{(1 + n)(1 + g)}$$

$$sf(k^*) = (n + g + \delta + ng) k^*$$

- 黄金律稳态：

$$f'(k_G^*) = n + g + \delta + ng$$

$$s_G = \frac{f'(k_G^*)}{f(k_G^*)} k_G^*$$

增长理论的核心问题

- 索洛模型发现了工人平均产出存在差异的两种可能的根源：
 - 工人平均资本 (K/L) 的差异
 - 劳动效率 (A) 的差异
- 索洛模型的关键结论：
 - 如果资本按边际产出获取报酬，那么资本积累差异并不能解释收入差距。为什么？解释收入差距所需的
 - ▶ 工人平均资本的差距过大。如果两国工人平均产出 $y_1 = X y_2$ ，则 $\ln y_1 - \ln y_2 = \alpha (\ln k_1 - \ln k_2) = \ln X$ ，即 $k_1 = X^{1/\alpha} k_2$ 。
 - ▶ 资本收益率差距过大。假设 C-D 生产函数， $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} = \alpha y^{1-1/\alpha}$ 。则 $f'(k_1) = X^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} f'(k_2)$ 。
 - 用劳动效率的差异来解释收入差距也不合理：
 - ▶ 劳动效率的增长率假设为外生，相当于用增长来解释增长。
 - ▶ 劳动效率的含义并不明确。如果理解为知识，则需要解释知识的积累过程和传播阻力。
- 索洛模型的特征（或缺陷？）：
 - 没有政府；
 - 忽略就业波动；
 - 生产过程由一个只有三种投入品的总产出函数刻画；
 - 储蓄率、折旧率、人口增长率以及技术进步率都是固定的。

实证分析：增长核算

- 增长核算方法由 Abramoviz(1956) 和 Solow(1957) 首创。操作过程：
 - 根据生产函数 $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ ：

$$\dot{Y}(t) = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} \dot{K}(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} \dot{L}(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)} \dot{A}(t),$$

- 上式两边同时除以 $Y(t)$ ，并改写右边的项可得：

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} &= \frac{K(t)}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \frac{L(t)}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{A(t)}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)} \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \\ &\equiv \alpha_k(t) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \alpha_L(t) \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + R(t). \end{aligned}$$

$$\text{即：} \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \alpha_k(t) \left[\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right] + R(t).$$

- 工人平均产出的增长率分解为工人平均资本增长率和一个余项，该余项称为**索洛剩余**。
 - 索洛剩余反映了资本积累之外的所有增长因素。

实证分析：收敛性

问题：穷国是否比富国增长更快？

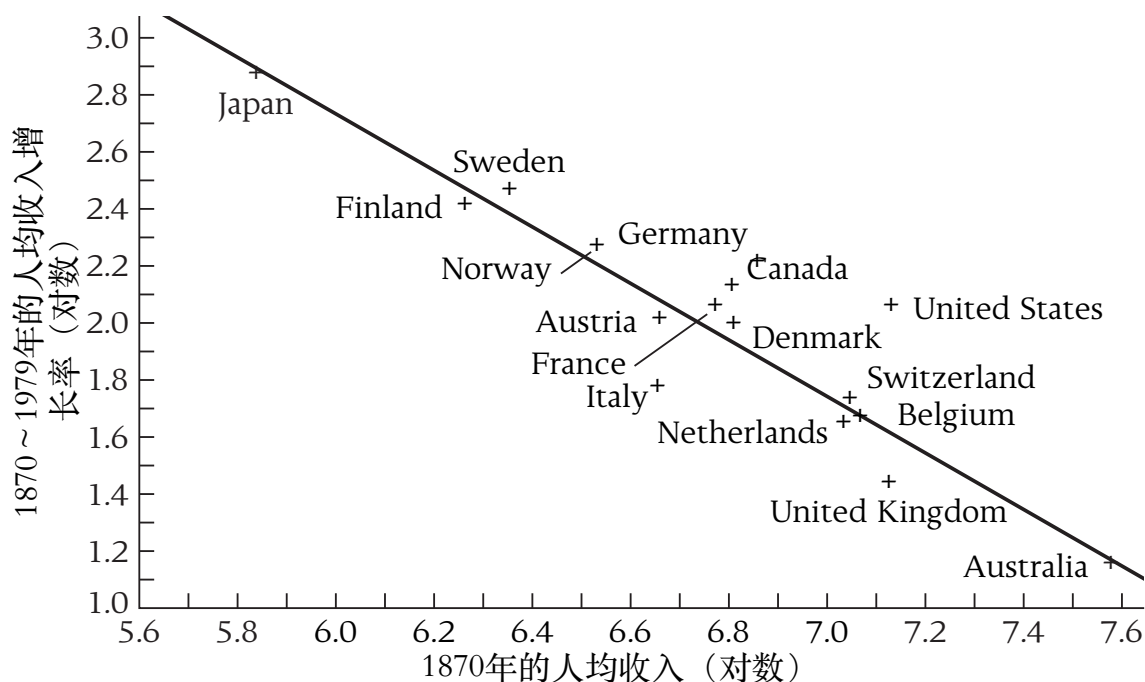
■ 收敛的三个理由：

- 索洛模型预测各国向其平衡增长路径收敛，而不同收入水平的国家相对于各自的平衡增长路径来说处于不同的状态，从这个角度看，人们预计穷国可以追赶上富国；
- 索洛模型意味着，在工人平均资本量较高的国家，资本收益率较低，因此资本有动力从富国流向穷国，这也会导致收敛；
- 如果知识传播存在滞后，那么收入差距可能是由于某些国家尚未取得最先进的技术，随着穷国逐渐掌握最新的科技，这些差距会逐渐缩小。

- Baumol(1986) 考察了 16 个工业国家 1870~1979 年的经济增长，发现了几乎完美的收敛性。

Baumol(1986) 的研究结果

$$\ln \left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1979} - \ln \left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1870} = 8.457 - \frac{0.995}{(0.094)} \ln \left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1870}, \quad R^2 = 0.87.$$



Baumol(1986) 研究结果的问题

- 样本选择问题。
 - 历史数据是在追溯的基础上构造的，因此数据序列较长的国家通常是如今工业化最彻底的国家。
- 测量误差。
 - 若 1870 年的收入被高估，则 1870 ~ 1979 年的增长会被相应地低估，反之亦然。
- Delong(1988) 提出的模型：

$$\ln \left[\left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1979} \right] - \ln \left[\left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1870} \right]^* = a + b \ln \left[\left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1870} \right]^* + \varepsilon_i,$$
$$\ln \left[\left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1870} \right] = \ln \left[\left(\frac{Y}{N} \right)_{i,1870} \right]^* + u_i.$$

- $\sigma_u = 0.15$ 时， b 的估计值接近 0； $\sigma_u = 0.2$ 时， b 的估计值接近 1。
- 可见，在合理的测量误差范围内，Baumol 估计的收敛性很可能是无效的。

环境与经济增长

- 环境要素包括
 - 产权明晰的要素：如石油、矿藏和土地
 - 产权不明晰的要素：如空气和水。
- 产权明晰的意义：
 - 市场可以对环境要素如何利用发出有价值的信号。
 - 环境要素的价格可以反映其在生产中的重要性。

产权明晰的环境要素：自然资源和土地

- 假设 C-D 生产函数为：

$$Y(t) = K(t)^\alpha R(t)^\beta T(t)^\gamma [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta-\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

- $\dot{T}(t) = 0, \dot{R}(t) = -bR(t), b > 0.$

- 生产函数取对数后对时间微分：

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) + \beta g_R(t) + \gamma g_T(t) + (1 - \alpha - \beta - \gamma) [g_A(t) + g_L(t)] \quad (2)$$

- 根据资本运动方程： $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$, $g_K(t) = s \frac{Y}{K} - \delta$ 要
保持不变，则 K/Y 必须保持不变，即 $g_Y(t) = g_K(t)$ 。

- 由于 A 、 L 、 R 和 T 的增长速度不变，因此：

$$g_Y^{BGP} = g_K^{BGP} = \frac{(1 - \alpha - \beta - \gamma)(n + g) - \beta b}{1 - \alpha}$$

- 如果 $g_K(t) > g_K^{BGP}$ ，则根据 (2) 可知 $g_Y(t) < g_K(t)$ 。因此 Y/K 下降， $g_K(t)$ 将下降。反之， $g_K(t)$ 将上升。因此，经济的确会收敛于 BGP。

本章小结

- 卡尔多事实描述了各国经济增长的一些普遍规律。
- 索洛增长模型是一个单部门模型，关键假设包括：
 - 生产函数规模报酬不变，满足稻田条件；
 - 投入要素为资本、劳动和知识；
 - 哈罗德中性技术进步；
 - 储蓄率外生不变。
- 索洛模型的基本结论：
 - 经济总是收敛于平衡增长路径，各变量的增长率保持不变。
 - 在 BGP 上，人均产出增长率由技术进步率唯一确定。
 - 储蓄率会影响稳态的位置，但不会影响稳态增长率。
- 资本存量的黄金律水平可以使消费达到最大。
- 索洛模型的缺陷：
 - 人均产出增长率是外生的，用增长来解释增长。
 - 储蓄率是外生的，忽略了家庭的最优化行为。