第七章 连续时间跨时套利定价理论[1]

§7.1 布朗运动

布朗运动最早是由英国生物学家布朗(Brown)，于 1827 年在观察花粉颗粒在液体中做无规则运动时发现的。爱因斯坦对这种无规则运动作了物理学分析，并首先建立了布朗运动的数学模型。在他的理论中，假定在每一瞬间花粉颗粒在三个方向、六个面都受到随机冲击，这些冲击可以看作是正态分布的（二项分布的近似）。因此每个瞬时，花粉颗粒的运动可以看成是正态分布。

在经济学中第一个提出可以用布朗运动来刻画股票价格变动的是 Louis Bachelier（1900），他可能也是第一个对布朗运动进行研究的人。Itô(1951, 1974, 1987)的随机微分方程理论及后来建立在半鞅上的更一般的随机微分方程理论，为金融学家进行衍生产品定价提供了可能。Black 和 Scholes、Merton 等人的工作，给出了期权等衍生产品的精确价格公式，同时也使得布朗运动和随机分析的工具得到了巨大发展。

7.1.1 布朗运动的数学表述

定义：$(\Omega,(F_t)_{t\geq 0},(B_t)_{t\geq 0},P)$称为是一个标准的布朗运动（B.M.），如果它满足：

（1）$B_0=0$；

（2）B_t-B_s与F_s独立，$\forall t\geq s$。

（3）$B_{t+h}-B_t$的分布与 t 无关，具有零均值，且

$$\lim_{h\to 0^+} E|B_{t+h}-B_t|^3/h=0$$。

[1] 本章的写作参考了 Merton, R.C. (1990)等

（4）函数 $t \mapsto B_t$ 几乎处处连续。

定理 7.1.1：对于一个标准的布朗运动.，我们有：

$$\sigma^2(t) = E|B_t|^2 = at, \qquad (7.1.1)$$

特别地，a 可以取 1。

证明：$\sigma^2(t+s) = E|B_{t+s}|^2$

$$= E|B_{t+s} - B_t|^2 + 2E[(B_{t+s} - B_t)(B_t - B_0)] + E|B_t|^2$$

$$= \sigma^2(s) + \sigma^2(t)。$$

所以我们有：$\sigma^2(t) = at$。特别地，选取合适的单位后，我们有：

$$\sigma^2(t) = t。$$

定理得证。■

定理 7.1.2：$(B_t)_{t\geq 0}$ 是唯一的均值为零的高斯过程，满足：

$$\Gamma(s,t) \equiv E[B_t B_s] = t \wedge s。 \qquad (7.1.2)$$

注 1：称一个随机过程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 是高斯分布，如果任意 $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}\}$ 满足 k 维正态分布。

注 2：$t \wedge s = min(t, s)$。

证明：如果 $t > s$，则 $\Gamma(s,t) \equiv E[B_t B_s] = E[(B_t - B_s)B_s] + E[B_s^2] = s$；

如果 $t < s$，则 $\Gamma(s,t) \equiv E[B_t B_s] = E[(B_s - B_t)B_t] + E[B_t^2] = t$；如果 $t = s$，则由定理 7.1.1 得，$\Gamma(s,t) \equiv E[B_t B_s] = t = s$。定理得证。■

推论：当 $t \to 0^+$ 时，$B_{t+s} - B_s$ 的分布服从正态分布，其分布函数为：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \sim N(0,t)\text{。} \qquad (7.1.3)$$

定理 **7.1.3**：如果 B_t 是一个 B.M.，则

（1）$(\frac{1}{c} B_{c^2 t})$ 是一个 B.M.；

（2）$(t B_{1/t})$ 是一个 B.M.；

（3）$-B$ 是一个 B.M.；

（4）$(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ 是一个 B.M.。

证明：略。

定义：随机过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 称为是一个鞅（上鞅、下鞅），如果该随机过程满足：

$$E[X_t | F_s] = (<,>) X_s, \quad \forall t \geq s\text{。} \qquad (7.1.4)$$

注：股票价格的鞅性质蕴涵市场有效性假设。

定理 7.1.4(Lévy 定理)：如果(M_t)是一个连续鞅，使得(M_t^2-t)仍然是一个鞅，则(M_t)是 B.M.。

证明：略。

下面给出两个基本的鞅：

（1）B_t^2-t是个鞅，

（2）$e^{\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t}\triangleq X_t$是个鞅。

定理 7.1.5(B.M.的轨道性质)：

(1) $P(\omega|\forall\delta\in[0,1],\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|B_t(\omega)-B_s(0)|}{|t-s|^{\frac{1}{2}+\delta}}=+\infty)=1$； (7.1.5)

(2) B.M.的轨迹在任意区间上都不是单调的；

(3) B.M.的轨道处处不可微。

证明：略。

7.1.2 随机微分方程和 **Itô** 公式

定义：一个随机过程$\{X(t)\}$的变化如果可以用如下方程来刻画：

$$dX=\alpha[X(t),t]dt+\sigma[X(t),t]dB_t\text{；}\qquad(7.1.6)$$

则该随机过程被称为 Itô 过程。该方程就称为随机微分方程，其中$\alpha(X(t),t)$被称为漂移项，$\sigma(X(t),t)$被称为扩散项。

定义：给定概率空间(Ω, F, P)和布朗运动$B=\{B_t, F_t^W; 0 \le t) < \infty\}$，以及定义在其上的随机向量$\xi$，$\xi$独立于$F_\infty^W$，具有分布：

$\mu(\Gamma)=P[\xi \in \Gamma]$；$\Gamma \in \mathcal{B}$（$R$）。

记$\mathcal{G}_t \equiv \sigma(\xi) \vee F_t^W = \sigma(\xi, W_s; 0 \le s \le t)$，$0 \le t < \infty$。

记零事件集合：

$\mathcal{N} \equiv \{N \subseteq \Omega; \exists G \in \mathcal{G}_\infty, P(G)=0 \text{ 使得} N \subseteq G\}$。

构造：

$F_t \equiv \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$，$0 \le t < \infty$；$F_\infty \equiv \sigma(\bigcup_{t \ge 0} F_t)$。　　(7.1.7)

则在给定概率空间(Ω, F, P)上，随机微分方程(7.1.6)关于给定的布朗运动 B 和初始条件ξ的一个解，是一个具有连续时间样本轨道的随机过程$X=\{X_t; 0 \le t < \infty\}$，满足如下性质：

（1） X 关于(7.1.7)中的F_t适应；

（2） $P[X_0=\xi]=1$；

（3） 等式$P[\int_0^\infty \{|\alpha(X(t),t)| + \sigma^2(X(t),t)\} ds < \infty] = 1$对所有$0 \le t < \infty$成立。

（4） (7.1.6)的随机积分方程形式

$$X(T) - X(0) = \int_0^T \alpha(X(t),t)dt + \int_0^T \sigma(X(t),t)dB_t \quad (7.1.8)$$

几乎处处成立。

例 **7.1.1**：考虑一个 Itô 过程：

$$dX = \alpha dt + \sigma dB_t \sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt)$$

其积分方程为：

$$X(T) - X(0) = \int_0^T \alpha dt + \int_0^T \sigma dB_t$$

$$= \alpha T + \sigma B_T$$

。

如果 X(0)=0，则我们有：

$$X(T) = \alpha T + \sigma B_T$$

，

$$E[X(T)] = \alpha T \text{ , } var(X(T)) = \sigma^2 T$$

.

例 **7.1.2**：给定一个 Itô 过程：$dX_t = \alpha dt + \sigma dB_t \sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt)$，考虑一个随机过程 $Y_t = e^{X_t}$，即 $\ln Y_t = X_t$。$d\ln Y_t \sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt)$，即 Y_t 在瞬时满足对数正态分布。

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial X_t^2}(dX_t)^2$$

$$= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t}(dX_t)^2$$

$$= e^{X_t}(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + e^{X_t}\sigma dB_t$$

。

上式等价于：

$$dY_t/Y_t=(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2)dt+\sigma dB_t$$

两边积分，我们有：

$$\ln Y_T-\ln Y_0=(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma B_T$$
。

取 $\ln Y_0=X_0=0$，则有：

$$\ln Y_T=(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma B_T$$
，

或：

$$Y_T=e^{(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma B_T}$$

因此有：

$$E[\ln Y_T]=(\alpha+\frac{1}{2}\sigma^2)T$$
，
$$var(\ln Y_T)=\sigma^2T$$
。

例 **7.1.3**：假定 $dY(t)/Y(t)=\mu dt+\sigma dB_t$，令 $G=\ln Y_t$，

则有：

$$dG=\frac{\partial G}{\partial Y}dY+\frac{1}{2}\frac{\partial^2G}{\partial Y^2}(dY)^2$$

$$=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)dt+\sigma dB_t$$
。

$$\therefore G(t)-G(0)=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t$$
。

如果 $Y(0)=1$，则 $G(0)=0$，所以我们有：

$$G(t)=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t$$
，

相应地有：

$$E[G(t)]=(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t, \quad var(G(t))=\sigma^2 t。$$

定理 7.1.6（**Itô** 引理）：假定 X 是一个 Itô 过程，满足：

$$dX_t=\mu_t dt+\sigma_t dB_t, \qquad (7.1.9)$$

令 $f:R^2\to R$ 是一个二次连续可微的函数，则随机过程 $Y_t=f(X_t,t)$ 也是一个 Ito 过程，满足：

$$dY_t=[f_x(X_t,t)\mu_t+f_t(X_t,t)+\frac{1}{2}f_{XX}(X_t,t)\sigma_t^2]dt+f_X(X_t,t)\sigma_t dB_t$$

(7.1.10)

其中(7.1.10)式被称为 Itô 公式。

证明：对随机过程 $Y_t=f(X_t,t)$ 应用 Taylor 公式，我们有：

$$dY_t=f_x(X_t,t)dX_t+f_t(X_t,t)dt+\frac{1}{2}f_{XX}(X_t,t)(dX_t)^2,$$

将(7.1.9)式代入，略去高阶项，整理得：

$$dY_t=[f_x(X_t,t)\mu_t+f_t(X_t,t)+\frac{1}{2}f_{XX}(X_t,t)\sigma_t^2]dt+f_X(X_t,t)\sigma_t dB_t。$$

证毕。 ■

§7.2 Black-Scholes 期权定价公式

这一节我们介绍 Black-Scholes 期权定价公式的，构造利用

7.2.1 特殊情形下的期权定价公式推导

一、 模型的建立

考虑一个证券（股票），不考虑红利收益，其价格过程可以表示为：

$$S_t = x\, exp(\alpha t + \sigma B_t) \quad , \quad t \geq 0 \quad 。 \qquad (7.2.1)$$

其中 x>0、α 和 σ 都是常数，该过程被称为几何布朗运动，有时也被称为对数正态分布的，因为对任意的 t，$ln\, S_t = ln\, x + \alpha t + \sigma B_t$是正态分布。

因为函数$y \mapsto xe^y$二次连续可微，所以 S 是一个 Ito 过程。由 Ito 公式，得：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad , \qquad (7.2.2a)$$

$$S_0 = x \quad , \qquad (7.2.2b)$$

其中$\mu = \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2$（见前面讨论）。

考虑一个无风险资产（债券），其价格过程为β_t，定义为：

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \qquad (7.2.3)$$

其中$\beta_0 > 0$和 r 是常数，β_0为债券的初始价格，r 为无风险利率。β_t是一个平凡的 Ito 过程，可以表示为：

$$d\beta_t = r\beta_t dt \quad 。 \qquad (7.2.4)$$

考虑一个标的在股票上的欧式看涨期权，其执行价格为 K，成熟日为 T，在 t<T 时期权价格Y_t是未知的，在 T 时$Y_T = max(S_T - K, 0)$。直观地，期权价格应该是标的资产和时间的函数，即：

$$Y_t = C(S_t, t) \quad 。 \qquad (7.2.5)$$

二、无套利条件下期权价格的推导

定义：一个由股票和债券构成的交易策略(a,b)称为是自融资的(self-financing)，如果它不产生红利收益（红利收益既不是正的，也不是负的），即：

$$a_tS_t + b_t\beta_t = a_0S_0 + b_0\beta_0 + \int_0^t a_\tau dS_\tau + \int_0^t b_\tau d\beta_\tau \text{。} \qquad (7.2.6)$$

定理 **7.2.1**：在无套利条件下，假定存在由股票和债券构成自融资策略(a,b)，满足：

$$a_TS_T + b_T\beta_T = y_T \text{，} \qquad (7.2.7)$$

则有：

$$Y_t = a_tS_t + b_t\beta_t \text{。} \qquad (7.2.8)$$

证明：（反证法）假定该自融资策略满足(7.2.7)，但(7.2.8)不成立。如果$Y_t < a_tS_t + b_t\beta_t$，则购买一单位的期权，同时出售$a_t$单位的股票和$b_t$单位的债券，则该投资组合在 t 时的成本$Y_t - a_tS_t - b_t\beta_t < 0$，但 T 期的收益为零，所以存在套利机会，与假设矛盾。当$Y_t > a_tS_t + b_t\beta_t$时，同理可以构造出一个套利机会。

下面来计算期权价格。对(7.2.5)式，应用 Ito 公式，有：

$$dY_t = \mu_Y(t)dt + C_S(S_t,t)\sigma S_t dB_t \text{。} \qquad (7.2.9)$$

其中系数$\mu_Y(t)$满足：

$$\mu_Y(t) = C_S(S_t,t)\mu S_t + C_t(S_t,t) + \frac{1}{2}C_{SS}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2$$ 。(7.2.10)

假定存在一个自融资策略(a,b)满足(7.2.7)，根据定理 7.7，对任意

$t \in [0,T]$，我们有：

$$Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t = C(S_t,t)$$ 。(7.2.11)

对(7.2.11)式进行微分，利用 Itô 公式，有：

$$dY_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t$$

$$= (a_t \mu S_t + b_t \beta_t r)dt + a_t \sigma S_t dB_t$$ 。(7.2.12)

由(7.2.9)和(7.2.12)式中dB_t的系数相等，得：

$$C_S(S_t,t)\sigma S_t = a_t \sigma S_t$$ ，

整理得：

$$C_S(S_t,t) = a_t$$ 。(7.2.13)

由(7.2.11)式，得：

$$b_t \beta_t = C(S_t,t) - C_S(S_t,t)S_t$$ 。(7.2.14)

由(7.2.9)和(7.2.12)式中dt的系数相等，得：

$$a_t \mu S_t + b_t \beta_t r = C_S(S_t,t)\mu S_t + C_t(S_t,t) + \frac{1}{2}C_{SS}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2$$ ，

将(7.2.13)和(7.2.14)代入上式，整理得：

$$-rC(S_t,t)+C_t(S_t,t)+rS_tC_S(S_t,t)+\frac{1}{2}C_{SS}(S_t,t)\sigma^2S_t^2=0$$ 。(7.2.15)

由此，我们有如下定理：

定理 **7.2.2**：一个标的在股票 S_t 上、执行价格为 K、成熟日为 T 的欧式看涨期权的价格是如下偏微分方程（PDE）的解：

$$-C(S_t,t)+C_t(S_t,t)+rSC_{S_t}(S_t,t)+\frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2C_{S_tS_t}(S_t,t)=0$$ ，(7.2.16a)

满足边界条件：

$$C(S_T,T)=max(S_T-K,0)$$ 。 (7.2.16b)

其中 $(S_t,t)\in(0,\infty)\times[0,T)$ 。

定理 7.2.2 蕴涵，一个欧式看涨期权的价格可以通过求解上述 PDE 来得到。容易证明，Black-Scholes 公式：

$$C(S_t,t)=S_t\Phi(z)-e^{-r(T-t)}K\Phi(z-\sigma\sqrt{T-t})$$ ， (7.2.17a)

是上述偏微分方程的解。其中 z 满足：

$$z=\frac{ln(S_t/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ ， (7.2.17b)

函数 Φ 是标准正态分布的累计分布函数。

7.2.2 一般情形下的期权定价公式推导

假定股票价格服从一个更一般的随机微分方程：

$$dS_t=\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dB_t$$ ， (7.2.18a)

$$S_0 = x \quad , \qquad (7.2.18b)$$

其中$\mu: R \times [0,\infty) \to R$和$\sigma: R \times [0,\infty) \to R$是给定的函数。

假定债券价格服从：

$$\beta_t = \beta_0 exp[\int_0^t r(S_u,u)du] \quad , \qquad (7.2.19)$$

其中$r: R \times [0,\infty) \to R$是个给定的可积函数。上式蕴涵：

$$d\beta_t = \beta_t r(S_t,t)dt \; ; \; \beta_0 > 0 \; 。 \qquad (7.2.20)$$

考虑一个衍生证券，其 T 时回报为：

$$Y_T = g(S_T) \; 。 \qquad (7.2.21)$$

其中$g: R \to R$是一个给定的连续函数。

可以预见，衍生证券的价格取$Y_t = C(S_t,t)$的形式，类似于上一小节的讨论，我们可以得到如下的 PDE：

$$\begin{cases} -r(S_t,t)C(S_t,t) + C_t(S_t,t) + r(S_t,t)S_t C_{S_t}(S_t,t) + \dfrac{1}{2}\sigma(S_t,t)^2 C_{S_tS_t}(S_t,t) = 0 \\ C(S_T,T) = g(S_T), S_T \in R \end{cases} \qquad (7.2.22)$$

上述偏微分方程刻画了衍生证券的无套利价格。在一般情形下，由上述 PDE 很难得出一个如 Black-Scholes 公式那样的解析解，但该 PDE 可以用数值方法求解。

定理 **7.2.3**：在一定条件下，如果经济中不存在套利机会，则在 T 期回报为$g(S_T)$的衍生证券满足方程(7.2.22)的价格过程$Y_t = C(S_t,t)$，有一个解：

$$C(S_t,t)=E(exp[-\int_t^T r(Z_s^{S_t,t},s)ds]g(Z_T^{S_t,t})),\quad (S_t,t)\in R\times[0,T],\quad (7.2.23)$$

其中$Z^{S_t,t}$是服从：

$$Z_s^{S_t,t}=S_t,\quad s\le t;$$

$$dZ_s^{S_t,t}=r(Z_s^{S_t,t},s)Z_s^{S_t,t}ds+\sigma(Z_s^{S_t,t},s)dB_s,\quad s>t,$$

的随机过程。

§7.3 期权价格对参数的敏感性

下面我们来讨论衍生资产价格对影响其价格变化诸因素的敏感性。考虑到衍生资产价格C依赖于标的资产价格S、距到期日的时间$T-t$、波动率σ和无风险利率r，即

$$C=C(S,T-t,\sigma,r),\quad (7.3.1)$$

上式可以近似为：

$$dC\approx\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial C}{\partial S})(dS)^2+\frac{\partial C}{\partial(T-t)}d(T-t)+\frac{\partial C}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{\partial C}{\partial r}dr\quad (7.3.2)$$

上式给出了诸因素变化对衍生资产价格变化的影响。通常，我们在刻画敏感性时有几个应用的比较多概念，下面我们分别给以介绍。

定义：衍生资产的 delta 用于衡量标的资产价格变化一单位所导致的衍生资产价格的变化，通常记为Δ。

参数 Δ 在期权对冲中非常重要，利用它可以使得有价证券在短期内不受标的资产价格变化的影响。

例 **7.3.1**：考虑一个期权定价问题，如图 7.3.1 所示。标的资产价格由 Sd 上升到 Su ，看涨期权价格从 c_d 上升到 c_u ，从而 $\Delta = \frac{c_u - c_d}{Su - Sd}$ ，此处 $\boldsymbol{\Delta}$ 值就是第六章第一节中的 1/H。

假定该标的资产价格变化服从 $Sd = 15$ ， $Su = 30$ 。如果期权的执行价格为 $X \geq 35$ ，则 $\Delta = 0$ ；如果期权的执行价格为 $X = 25$ ，则 $\Delta = 1/3$ ；如果执行价格变为 $X = 20$ ，则 $\Delta = 2/3$ ；如果期权的执行价格为 $X \leq 15$ ，则 $\Delta = 1$ 。我们看到，对看涨期权来说， $\Delta \geq 0$ ，且随着执行价格的上升，期权执行的可能性减少， Δ 值下跌。

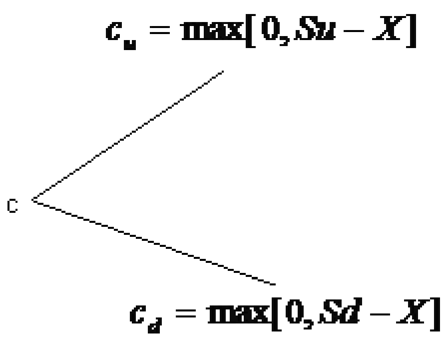


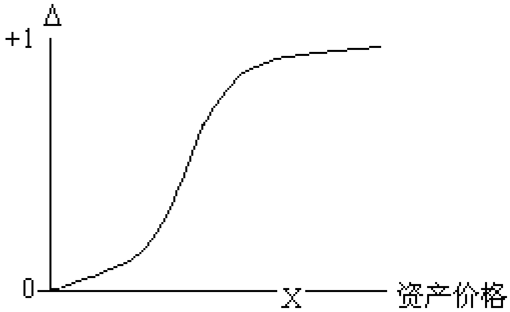
图 7.3.1：期权价格和 delta

例 **7.3.2**：如果期权价格服从 Black-Scholes 公式，则对标的资产价格求

导，整理得：

$$\Delta=\Phi(z)=\frac{ln(S/X)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$。

在这种情况下，Δ 值与资产价格的关系如图 7.3.1 所示。



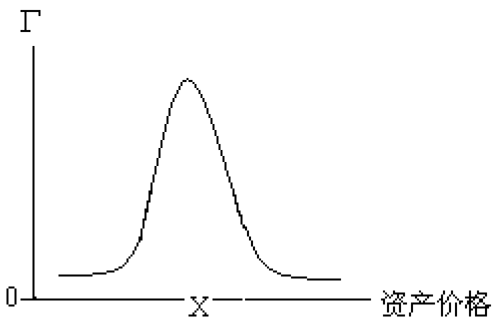
(图 7.3.1): Δ 与资产价格的相关性

定义：衍生资产的 gama 值刻画了股票价格变化所导致的衍生资产 delta 值的变化，通常记为 Γ 。

对于不计红利的欧式看涨期权，假定其期权价格服从 Black-Scholes 公式，则根据 Black-Scholes 公式，我们有：

$$\Gamma=\frac{\partial\Delta}{\partial S}=\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$。

在这种情况下，Γ 值与资产价格的关系如图 7.3.2 所示。



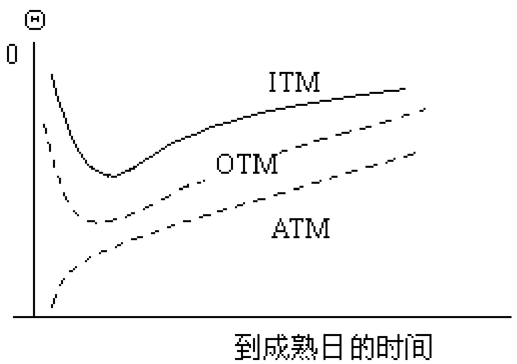
（图 7.3.2）：Γ 与资产价格的关系

定义：衍生资产的 Θ 值定义为在其它条件不变时，该衍生资产价格相对于时间变化的比率，刻画了期权价格随时间的流失而变化的特性。

对于不计红利的欧式看涨期权，假定其期权价格服从 Black-Scholes 公式，则根据 Black-Scholes 公式，Θ 可以刻画如下：

$$\Theta=\frac{\partial c}{\partial(T-t)}=-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}}-rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$；

因此期权价格对离到期日的时间的依赖性由下图所示。



（图 3）： Θ 与离到期时间的关系。

图 7.3.3 给出了期权处于实值期权(ITM)、虚值期权(OTM)和两平期权(ATM)下 Θ 值与到期日之间的关系。

另外，我们还用 **vega** 来刻画衍生资产价格与标的资产波动率之间的关系，即波动率增加一个单位时衍生资产价格的变化。

对于不计红利的欧式看涨期权，假定其期权价格服从 Black-Scholes 公式，则根据 Black-Scholes 公式，**vega** 满足：

$$vega=\frac{\partial c}{\partial \sigma}=S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$；

我们还用 ρ 来刻画衍生资产价格与无风险利率之间的关系，即利率增加一个单位时衍生资产价格的变化。

对于不计红利的欧式看涨期权，假定其期权价格服从 Black-Scholes 公式，则根据 Black-Scholes 公式， $\boldsymbol{\rho}$ 满足

$$\rho=X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$。

利用上述概念，我们可以将(7.3.2)改写为：

$$dC\approx\Delta dS+\frac{1}{2}\Gamma(dS)^2+\Theta d(T-t)+vega\times d\sigma+\rho dr,\qquad (7.3.3)$$

利用(7.3.3)，我们可以对证券组合进行套期保值。

习题

1、考虑一份一年期的欧式看涨期权，假定当前标的的股票价格为 30 元，

执行价格为 30 元，无风险利率为每年 5%，波动率为每年 25%，试计算该期权的价格，及 Δ、Γ、Θ、vega 和 ρ 值。

2、假定 X_t 是一个 Itô 过程，满足：$dX_t = dt + 2dB_t$，证明随机过程 $Y_t = exp(X_t)(t + \frac{1}{2}t^2)$ 也是一个随机过程，试计算 dY_t。