

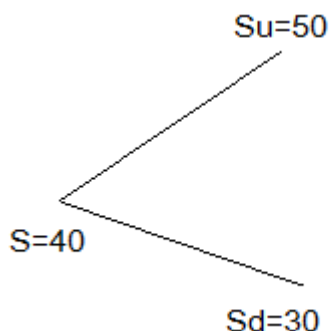
第六章 离散时间跨期套利定价理论¹

§ 6.1 介绍

上一章分析了无套利原理与 Ross(1976)的 APT 理论，这一章将套利定价理论推广到离散时间多期情形，给出离散时间多期衍生资产定价问题。由于衍生资产是由其它资产衍生出来的，其价格依赖于标的资产价格，因此定价时通常并不能采用第四章的均衡定价方法，而只能采用套利定价方法。

Harris 和 Kreps(1979)发现，如果一个价格系统不存在套利机会，那么该系统存在一个等价鞅测度，在该等价鞅测度下，资产价格等于未来收益的期望贴现和，从而我们可以非常方便地定价各种衍生资产的价格。下面我们通过两个简单例子，来说明等价鞅测度的存在及如何通过等价鞅测度对衍生资产定价。

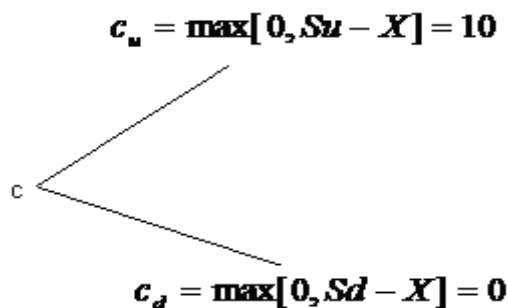
例 6.1.1: 考虑一个两期模型，假定第一期标的资产价格为 $S=40$ ，期权的执行价格为 $X=40$ ，无风险利率为 $R=1.2$ ，成熟期为一期。假定资产价格或者上升 25%，或者下跌 25%，即上升后价格为 $S_u=50$ ，下降后价格为 $S_d=30$ ，其资产价格变化如下图 6.1.1 所示。由此一个看涨期权的回报如图 6.1.2 所示。



(图 6.1.1): 一期资产价格树

¹主要参考了 Huang 和 Litzenberger(1998)、王江 (2006) 等教材及相关论文

下面我们来构建一个投资组合，利用期权来对该风险资产进行完全的套期保值，从而使得该组合成为一个无风险资产。假定我们出售 H 份标的在该资产上的看涨期权，使得该组合不存在风险，则其第一期成本为 $S - Hc$ ；由于资产价格下跌时回报为 $Sd - H \times 0 = 30$ ，在完全套期保值下资产的回报率都是 1.2，其回报过程可以用图 6.1.3 来刻画。



(图 6.1.2)：一期看涨期权树

1、求解所出售的期权份额 H

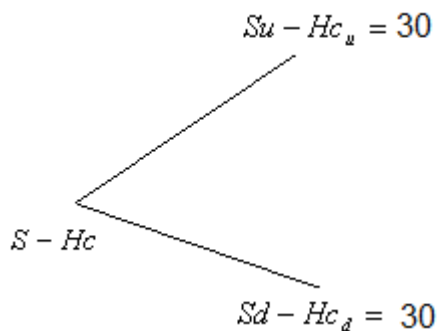
因为完全套期保值后成熟时的回报相同，因此我们有：

$$Su - Hc_u = Sd - Hc_d = 30,$$

因此我们可以求解出 H ：

$$H = \frac{Su - Sd}{c_u - c_d};$$

将相关数值代入，得 $H=2$ 。



(图 6.1.3)：一期的无风险投资组合树

2、无套利机会时的期权价格求解

因为无套利机会存在，无风险组合的回报率应该等于无风险资产上的回报率，因此我们有：

$$R(S - Hc) = Su - Hc_u,$$

整理得：

$$c = \frac{S(R - u) + Hc_u}{HR} = [c_u \frac{R - d}{u - d} + c_d \frac{u - R}{u - d}] / R;$$

此即欧式看涨期权价格。将相关数值代入上式，我们有 $c = 7.5$ 。欧式看跌期权的价格可以根据看涨-看跌平价关系得到。

3、等价鞅测度的引入

事实上我们可以将上式改写为：

$$c = \pi c_u R^{-1} + (1 - \pi) c_d R^{-1},$$

其中 $\pi = \frac{R - d}{u - d}$ 相当于一个概率，称为一个等价鞅测度。在该测度下，期权

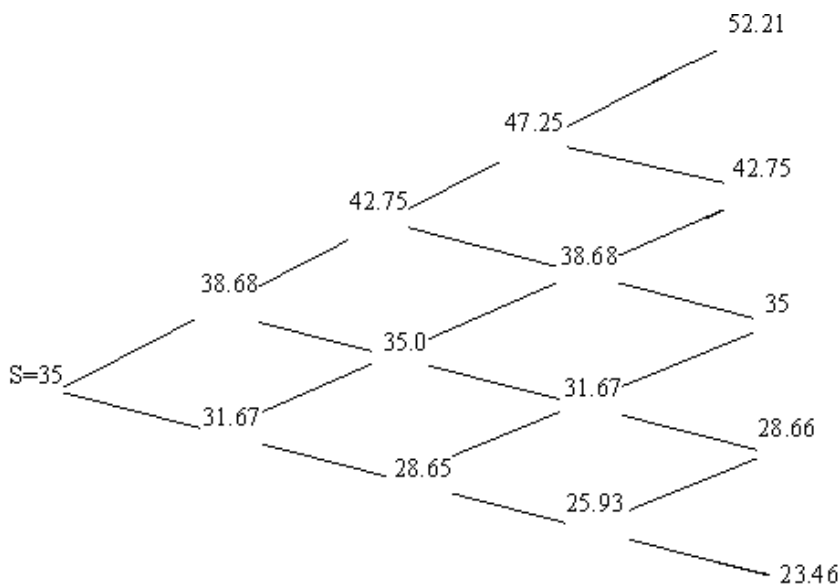
价格等于未来收益的期望贴现，与个体偏好等因素无关。

需要强调的是，该测度仅是一个假想的测度，并不真正反映股票价格上升和下降出现的概率。

例 6.1.2：考虑一个 5 期的衍生资产定价的例子。假定标的资产的价格 $S=35$ ，假定连续复利无风险利率为 9.525%，将一年分为四季，则 $R = e^{r(T-t)} = e^{0.09525 \times 0.25} = 1.024098$ 。假定资产价格变化如下图 6.1.4 所示。则 $u=1.1052$ ， $d=0.9048$ ， $R=1.024098$ ，则 $\pi = 0.595$ 。由此我们可以求解各种欧式期权和美式期权的价格。

(1) 在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 35 的欧式看涨期权价格，则个体只能是在第 4 期执行该期权，其价格可以表示为：

$$c = \left[\binom{4}{0} \pi^4 (Su^4 - X) + \binom{4}{1} \pi^3 (1 - \pi) (Su^3 d - X) \right] R^{-4} \approx 4.37。$$



(图 6.1.4): 资产价格和期权收益树

(2) 计算在第一期当资产价格为 38.68 时发行的、第三期成熟的、操作价格为 40 的欧式看涨期权价格:

$$c = \left[\binom{2}{0} \pi^2 (38.68 \times u^2 - X) \right] / (1+r)^2 \approx 2.79。$$

(3) 计算在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的欧式看跌期权价格和看涨期权。由于个体只能在第 4 期行权，看跌期权价格可以表示为:

$$p = \left[\binom{4}{3} \pi (1-\pi)^3 (X - Sud^3) + \binom{4}{4} (1-\pi)^4 (X - Sd^4) \right] R^{-4} \approx 0.37；$$

看涨期权价格可以表示为:

$$c = \left[\binom{4}{0} \pi^4 (Su^4 - X) + \binom{4}{3} \pi^3 (1-\pi) (Su^3d - X) + \binom{4}{2} \pi^2 (1-\pi)^2 (Su^2d^2 - X) \right] R^{-4} \\ \approx 8.07$$

将看跌、看涨期权的价格和股票价格及期权的执行价格代入看跌—看涨平价关系式的两边，我们有:

$$S + p \approx 35.37 ,$$

$$c + K / R^4 \approx 35.37 ,$$

因此看跌一看涨平价关系式成立。

(4) 计算在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的美式看涨期权价格。

在第 3 期 $S_3 = 47.25$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$[(52.21 - 30) \times \pi + (42.75 - 30)(1 - \pi)]R^{-1} = 18.01 ,$$

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $47.25 - 30 = 17.25$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3 = 47.25$ 时不会提前执行；

在第 3 期 $S_3 = 38.68$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$[(42.75 - 30) \times \pi + (35 - 30)(1 - \pi)]R^{-1} \approx 7.43 ,$$

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $38.68 - 30 = 8.68$ ，由于贴现期望值小于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3 = 47.25$ 时将提前执行，收益为 8.68；

在第 3 期 $S_3 = 31.67$ 下，看涨期权的贴现价格为：

$$(35 - 30) \times \pi R^{-1} \approx 2.91 ,$$

该期权在第 3 期立即执行的收益为 $31.67 - 30 = 1.67$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 3 期 $S_3 = 31.67$ 时不会提前执行；

在第 3 期 $S_3 = 25.93$ 时，下一期看涨期权不会执行，也不会在当前期执行，收益为 0。

在第 2 期 $S_2 = 42.75$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[18.01 \times \pi + 8.68 \times (1 - \pi)]R^{-1} = 13.93 ,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $42.75 - 30 = 12.75$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 2 期 $S_2 = 42.75$ 时不会提前执行；

在第 2 期 $S_2 = 35.0$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[8.68 \times \pi + 2.91 \times (1 - \pi)]R^{-1} \approx 6.19 ,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $35 - 30 = 5$ ，由于贴现期望值大于立即

执行的收益，因此该美式看涨期权在第 2 期 $S_2 = 35$ 时不会提前执行；

在第 2 期 $S_2 = 28.65$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$2.91 \times \pi R^{-1} \approx 1.69,$$

该期权在第 2 期 $S_2 = 28.65$ 下，由于标的资产价格小于执行价格，因此不会立即执行。

在第 1 期 $S_1 = 38.68$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[13.93 \times \pi + 6.19 \times (1 - \pi)]R^{-1} = 10.54,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $38.68 - 30 = 8.68$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 1 期 $S_1 = 38.68$ 时不会提前执行；

在第 1 期 $S_1 = 31.67$ 下，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[6.19 \times \pi + 1.69 \times (1 - \pi)]R^{-1} = 4.27,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $31.67 - 30 = 1.67$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 1 期 $S_1 = 31.67$ 时不会提前执行。

在第 0 期，看涨期权的贴现期望价格为：

$$[10.54 \times \pi + 4.27 \times (1 - \pi)]R^{-1} \approx 8.00,$$

该期权在第 2 期立即执行的收益为 $35 - 30 = 5$ ，由于贴现期望值大于立即执行的收益，因此该美式看涨期权在第 0 期不会提前执行。

综上所述可以发现，该美式看涨期权只在第 3 期当股票价格等于 47.25 时才提前执行。该美式期权在第 0 期的价格是 8。

§ 6.2 无套利机会与等价鞅测度

6.2.1 模型的建立

考虑一个 $T+1$ 期证券市场经济， $t=0,1,\dots,T$ 。假定在该经济中存在 I 位个体， $i=1,2,\dots,I$ 。为简化讨论，假定经济中只有一种易腐烂的消费品，并将这种消费品作为计价单位，因此消费品的现货价格为 1。

一、信息结构：

假定经济中有有限个自然状态，它们构成一个状态空间 Ω 。假定经济中的信息是逐渐展示出来的，到 T 期个体才能知道真正的自然状态是 Ω 中的哪一个，我们用一个事件树来刻画信息结构。

我们用 $F = \{F_t; t = 0, 1, \dots, T\}$ 来记个体被赋予的公共信息结构，其中每一个 F_t 都是 Ω 的一个分割，满足：如果 $t \geq s$ ，则 F_t 比 F_s 更精细； $F_0 = \{\Omega\}$ ， $F_T = \{\omega \mid \omega \in \Omega\}$ 。

二、资产结构：

定义：一个时间事件或有权益(time-event contingent claim)是一种证券，在交易日 $t \geq 1$ 、事件 $a_t \in F_t$ 发生时支付一单位消费品，在其它时间和情形下没有支付。

定义：一个复杂证券是由时间 0 消费品和一族时间事件或有权益构成的证券，它可以被表示为 $x = \{x_0, x_{a_t} \mid a_t \in F_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ ，其中 x_0 和 x_{a_t} 分别为以消费品衡量的时间 0 和时间 t 、时间 a_t 下的红利。

定义：一个长生命证券(long-lived security)是一种在任意交易日都可以交易的复杂证券。

假定经济中存在 $N+1$ 种长生命证券， $j=0, 1, \dots, N$ 。假定第 0 种资产是面值为 1 的 T 期贴现债券，其红利流可以表示为：

$$x_0 = \{0, 0, \dots, x_0(T) = 1\}, \quad (6.2.1)$$

记第 0 种资产的除息价格过程为 $\{B(t) \mid t = 0, 1, 2, \dots, T\}$ ，则有 $B(T) = 0$ 。

假定其它 N 种资产是风险资产，第 j 种资产的随机红利流可以表示为：

$$x_j = \{x_j(t) \mid t = 0, 1, 2, \dots, T\}. \quad (6.2.2)$$

记第 j 种资产的除息价格过程为 $\{S_j(t) \mid t = 0, 1, 2, \dots, T\}$ ，则有 $S_j(T) = 0$ 。

记 $S(t) = (S_1(t), \dots, S_N(t))^T$ ， $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$ 。显然， $x_j(t)$ 、 $B(t)$

和 $S_j(t)$ 关于 F_t 可测，因此红利过程、价格过程都关于 F 适应。

三、个体行为：

假定每一位个体 i 的偏好都具有 von Neuman-Morgenster 期望效用表示，假定个体效用函数 $u_{it}(c^i(t))$ 单调增、严格凹、充分光滑，假定

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} u_{it}'(z) = +\infty。$$

假定个体 i 在各自然状态上被赋予的主观概率为：

$$\pi^i = \{\pi_\omega^i \mid \omega \in \Omega\}。$$

在该主观概率下，记在给定事件 $a_t \in F_t$ 下，事件 $a_s \in F_s$ ($s \geq t$) 发生的条件概率为 $\pi_{a_s}^i(a_t)$ ，根据 Bayes 公式， $\pi_{a_s}^i(a_t)$ 可以表示为：

$$\pi_{a_s}^i(a_t) = \begin{cases} \frac{\sum_{\omega \in a_s} \pi_\omega^i}{\sum_{\omega \in a_t} \pi_\omega^i} & \text{如果 } a_s \subseteq a_t \\ 0 & \text{如果 } a_s \not\subseteq a_t \end{cases}。$$

假定个体都是理性预期的，所有个体都相信当前资产价格是自然状态 ω 和时间 t 的函数，即可以表示为 $B(\omega, t)$ 和 $S_j(\omega, t)$ 。

记个体被赋予的长生命证券的数量为：

$$\{\bar{\alpha}^i(0), \bar{\theta}^i(0) = (\bar{\theta}_j(0))_{j=1}^N\}。$$

个体的交易策略是一个 $N+1$ 维的随机过程，可以简记为：

$$(\alpha, \theta) = \{\alpha(t), \theta(t) = (\theta_j(t))_{j=1}^N\}_{t=0}^T，$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 代表个体在 $t-1$ 期交易发生后，到 t 期交易发生前所持有的第 0 种资产和第 j 种资产的数量。由于 $\alpha(t)$ 和 $\theta_j(t)$ 是在 $t-1$ 期被决定的，它们关于 F_t 可测，因此交易策略关于 F 适应。个体的消费计划是一个随机过程，可以简记为：

$$c = \{c(t) \mid t = 0, 1, 2, \dots, T\}。$$

其中 $c(t)$ 是 t 期消费量。

定义：称一个交易策略 (α, θ) 是可接受的(admissible)，如果存在一个消

费计划 c ，满足：

$$\alpha(t+1)B(t) + \theta^T(t+1)S(t) = \alpha(t)B(t) + \theta^T(t)(S(t) + X(t)) - c(t) \quad , \quad (6.2.3)$$

对 $\forall t = 0, 1, \dots, T-1$ 成立，且有：

$$\alpha(T) + \theta^T(T)X(T) = c(T) \quad . \quad (6.2.4)$$

相应地，我们也称该消费计划 c 是由交易策略 (α, θ) 融资的，也称为上市的 (marketed)。

6.2.2 无套利条件和等价鞅测度

定义： 一个套利机会是一个由可行交易策略融资的消费计划 c ，满足：

- (1) c 非负，且至少存在某个时期 t 和事件 $a_t \in F_t$ ，有 $c(a_t, t) > 0$ ；
- (2) 其成本非负，即

$$\alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) \leq 0 \quad .$$

定义： 一个随机过程 $Y = \{Y(t) \mid t = 0, 1, 2, \dots, T\}$ 被称为是一个在概率 π 下对 F 适应的鞅，如果它满足：

$$E[Y(s) \mid F_t] = Y(t), \quad \forall s \geq t,$$

其中 $E[\cdot \mid F_t]$ 是关于概率 π 、给定 F_t 下的条件概率。

定理 6.2.1： 一个价格系统 (B, S) 不允许存在任何套利机会，当且仅当经济中存在一个等价鞅。

证明：(必要性)： 假定价格系统 (B, S) 不允许存在任何套利机会。在价格系统下，个体 i 的最大化问题可以表示为：

$$\max_{(\alpha, \theta)} E_i \left[\sum_{t=0}^T u_{it}(c(t)) \right],$$

Subject to:

消费计划 c 由交易策略 (α, θ) 融资，

$$(\alpha(0), \theta(0)) = (\bar{\alpha}^i(0), \bar{\theta}^i(0)) \quad .$$

求解该最大化问题，Euler 方程为：

$$S_j(t) = E_i \left[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))} (S_j(t+1) + x_j(t+1)) \mid F_t \right], \quad (6.2.5)$$

$$B(t) = \begin{cases} E_i \left[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))} B(t+1) \mid F_t \right] & \text{如果 } t \leq T-2 \\ E_i \left[\frac{u_{it+1}'(c^i(t+1))}{u_{it}'(c^i(t))} \mid F_t \right] & \text{如果 } t = T-1 \end{cases} \quad (6.2.6)$$

此处(6.2.5)式可以改写为:

$$u_{it}'(c^i(t))S_j(t) = E_i[u_{it+1}'(c^i(t+1))(S_j(t+1) + x_j(t+1)) \mid F_t]; \quad (6.2.7)$$

对(6.2.6)式进行前向迭代, 可以改写为:

$$B(t) = \begin{cases} E_i \left[\frac{u_{is}'(c^i(s))}{u_{it}'(c^i(t))} B(s) \mid F_t \right] & \text{如果 } t \leq s \leq T-1 \\ E_i \left[\frac{u_{is}'(c^i(s))}{u_{it}'(c^i(t))} \mid F_t \right] & \text{如果 } s = T \end{cases} \quad (6.2.8)$$

(1) 如果经济中存在一个风险中性的个体 i , 且该个体并不存在任何时间偏爱, 则我们有:

$$u_{is}'(c^i(s)) = u_{it}'(c^i(t)) = \text{常数}, \quad \forall s, t。$$

代入(6.2.7)和(6.2.8)式, 整理得:

$$\begin{aligned} S_j(t) &= E[S_j(t+1) + x_j(t+1) \mid F_t], \\ B(t) &= 1。 \end{aligned}$$

记 $D_j(t) = \sum_{s=0}^t x_j(s)$, $\forall t = 0, 1, \dots, T$, 则我们有:

$$\begin{aligned} S_j(t) + D_j(t) &= E_i[S_j(t+1) + D_j(t+1) \mid F_t] \\ &= E_i[S_j(s) + D_j(s) \mid F_t], \quad \forall s > t。 \end{aligned}$$

因此由资产的价格加上红利构成的随机过程是一个鞅, 鞅测度是该风险中性个体的主观概率测度。

(2) 如果经济中并不存在这样一个风险中性的个体, 则我们可以构造出一个鞅测度。首先对价格过程和红利过程进行归一化:

$$S_j^*(t) = \begin{cases} S_j(t)/B(t) & \text{如果 } t \neq T \\ 0 & \text{如果 } t = T \end{cases}, \quad B^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } t \neq T \\ 0 & \text{如果 } t = T \end{cases};$$

$$x_j^* = \begin{cases} x_j(t)/B_j(t) & \text{如果 } t \neq T \\ x_j(t) & \text{如果 } t = T \end{cases}, \quad D_j^*(t) = \sum_{s=0}^t x_j^*(s)。$$

构造鞅测度 π^* 满足：

$$\pi_\omega^* \equiv \frac{u_{iT}'(c^i(\omega, T))}{u_{i0}'(c^i(0))} \frac{\pi_\omega^i}{B(0)}, \quad \forall \omega \in \Omega。 \quad (6.2.9)$$

考虑到个体是不饱和的，边际效用大于零，所以有 $\pi_\omega^* \geq 0$ ；对 π_ω^* 关于所有的自然状态求和，有：

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi_\omega^* = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{u_{iT}'(c^i(\omega, T))}{u_{i0}'(c^i(0))} \frac{\pi_\omega^i}{B(0)} = E\left[\frac{u_{iT}'(c^i(T))}{u_{i0}'(c^i(0))}\right] / B(0) = 1。$$

因此 π^* 确实是 Ω 上的一个概率测度。

在该鞅测度 π^* 下，记在给定事件 $a_t \in F_t$ 下，事件 $a_s \in F_s$ ($s \geq t$)

发生的条件概率为 $\pi_{a_s}^*(a_t)$ ，根据 Bayes 公式， $\pi_{a_s}^*(a_t)$ 可以表示为：

$$\pi_{a_s}^*(a_t) = \begin{cases} \frac{\sum_{\omega \in a_s} \pi_\omega^*}{\sum_{\omega \in a_t} \pi_\omega^*} & \text{如果 } a_s \subseteq a_t。 \\ 0 & \text{如果 } a_s \not\subseteq a_t \end{cases} \quad (6.2.10)$$

当 $a_s \subseteq a_t$ 时，将(6.2.9)代入(6.2.10)，有：

$$\begin{aligned} \pi_{a_s}^*(a_t) &= \frac{\sum_{\omega \in a_s} \pi_\omega^*}{\sum_{\omega \in a_t} \pi_\omega^*} \\ &= \frac{\sum_{\omega \in a_s} \pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega, T))}{\sum_{\omega \in a_t} \pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega, T))} \\ &= \frac{\pi_{a_s}^i u_{is}'(c^i(a_s, s)) \sum_{\omega \in a_s} \frac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega, T))}{\pi_{a_s}^i u_{is}'(c^i(a_s, s))}}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t, t)) \sum_{\omega \in a_t} \frac{\pi_\omega^i u_{iT}'(c^i(\omega, T))}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t, t))}}。 \end{aligned}$$

其中 $c^i(a_t, t)$ 为个体 i 在 t 期、事件 a_t 发生时的最优消费量。注意到对任意

$t \leq T-1$ ，有 $B(a_t, t) = \sum_{\omega \in a_t} \frac{\pi_{\omega}^i u_{iT}'(c^i(\omega, T))}{\pi_{a_t}^i u_{it}'(c^i(a_t, t))}$ 成立，因此我们有：

$$\pi_{a_s}^*(a_t) = \begin{cases} \frac{B(a_s, s) \pi_{a_s}^i(a_t) u_{is}'(c^i(a_s, s))}{B(a_t, t) u_{it}'(c^i(a_t, t))} & \text{如果 } t < T \\ \frac{1 \pi_{a_s}^i(a_t) u_{is}'(c^i(a_s, s))}{B(a_t, t) u_{it}'(c^i(a_t, t))} & \text{如果 } t = T \end{cases} \quad (6.2.11)$$

接下来我们来证明 $S_j^* + D_j^*$ 在 π^* 下是一个鞅：

当 $t < T$ 时，由(6.2.5) 和(6.2.11)，有：

$$\begin{aligned} S_j^*(t) &= S_j(t) / B(t) \\ &= E_i \left[\frac{B(t+1) u_{it+1}'(c^i(t+1))}{B(t) u_{it}'(c^i(t))} (S_j(t+1) / B(t+1) + x_j(t+1) / B(t+1)) \mid F_t \right] \\ &= E^* [S_j^*(t+1) + x_j^*(t+1) \mid F_t]。 \end{aligned}$$

类似于风险中性个体下的讨论，我们有：

$$\begin{aligned} S_j^*(t) + D_j^*(t) &= E^* [S_j^*(s) + D_j^*(s) \mid F_t] \quad \forall T > s \geq t \\ &= E^* [D_j^*(T) \mid F_t]。 \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

因此 $S_j^* + D_j^*$ 在 π^* 下是一个鞅，必要性得证。

(充分性)：假定对于所有的 $t < T$, $B(t) > 0$ ，并且存在一个等价鞅测度 π^* ，

在该测度下 $S_j^* + D_j^*$ 是一个鞅，要证明该经济中不存在套利机会。

采用反证法，假定经济中存在一个消费计划 c ，为一个可接受的交易策略 (α, θ) 所融资，满足：

$$c \geq 0, \quad c \neq 0, \quad \text{且 } \alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) \leq 0。$$

由交易策略 (α, θ) 所融资的消费计划 c 是一个套利机会，个体不需要付出任何成本就有正的机会获得正的消费，即一种免费午餐(free lunch)。

如果消费计划 c 由交易策略 (α, θ) 所融资，则有：

$$\begin{aligned}
 c(T) &= \alpha(T) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) \\
 &= \alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) + \sum_{s=1}^T \alpha(s)(B(s) - B(s-1) + x_0(s)) \\
 &\quad + \sum_{s=1}^T \theta^T(s)(S(s) - S(s-1) + X(s)) - \sum_{s=0}^{T-1} c(s) \quad (6.2.13)
 \end{aligned}$$

即 T 期消费等于 T 期的财富量，后者等于初始财富加上各期买卖资产所导致的财富增加，再减去各期消费。类似地，我们有：

$$\begin{aligned}
 c^*(T) &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) \\
 &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) \\
 &\quad + \sum_{s=1}^T \theta^T(s)(S^*(s) - S^*(s-1) + X^*(s)) - \sum_{s=0}^{T-1} c^*(s)
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } c^*(t) = \begin{cases} c(t)/B(t) & t < T \\ c(t) & t = T \end{cases}$$

记 $D^*(t) = (D_1^*(t), \dots, D_N^*(t))^T$ ，则有： $X^*(t) = D^*(t) - D^*(t-1)$ 。因

此我们有：

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=0}^T c^*(t) &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) \\
 &\quad + \sum_{t=1}^T \theta^T(t)(S^*(t) + D^*(t) - S^*(t-1) - D^*(t-1)) \quad (6.2.14)
 \end{aligned}$$

因为在鞅测度 π^* 下 $S_j^* + D_j^*$ 是一个鞅，所以我们有：

$$\begin{aligned}
 &E^*[\theta^T(t)(S^*(t) + D^*(t) - S^*(t-1) - D^*(t-1)) | F_{t-1}] \\
 &= \theta^T(t)(E^*[S^*(t) + D^*(t) | F_{t-1}] - S^*(t-1) - D^*(t-1)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

相应地，我们有：

$$\begin{aligned}
 &E^*[\theta^T(t)(S^*(t) + D^*(t) - S^*(t-1) - D^*(t-1))] \\
 &= E^*[E^*[\theta^T(t)(S^*(t) + D^*(t) - S^*(t-1) - D^*(t-1)) | F_{t-1}]] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

所以我们有：

$$\begin{aligned}
 E^* \left[\sum_{t=0}^T c^*(t) \right] &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) \\
 &\quad + E^* \left[\sum_{t=1}^T \theta^T(t)(S^*(t) + D^*(t) - S^*(t-1) - D^*(t-1)) \right] \\
 &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0))。
 \end{aligned}$$

因为 $B(t) > 0$ 对于所有的 $t < T$ 成立，有 $c \geq 0$ ， $c \neq 0$ ，所以

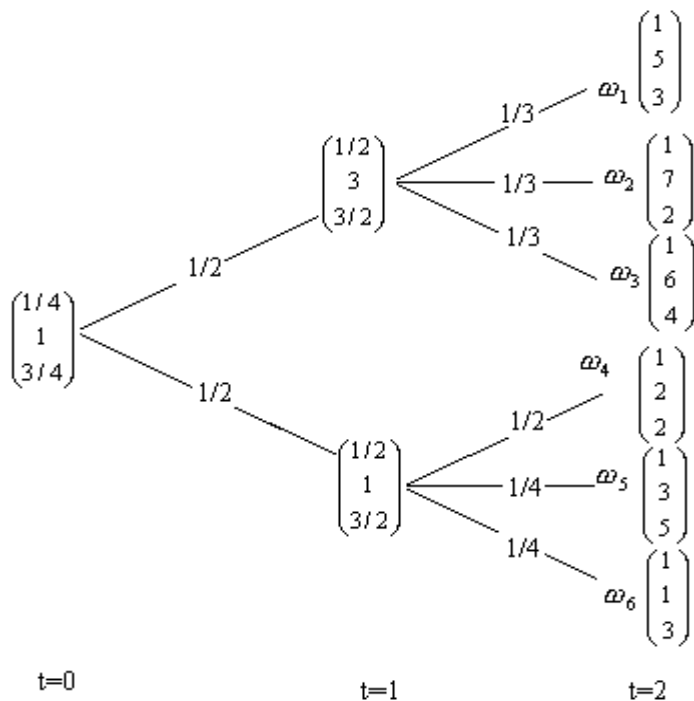
$$E^* \left[\sum_{t=0}^T c^*(t) \right] > 0, \text{ 这蕴涵:}$$

$$\alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) > 0$$

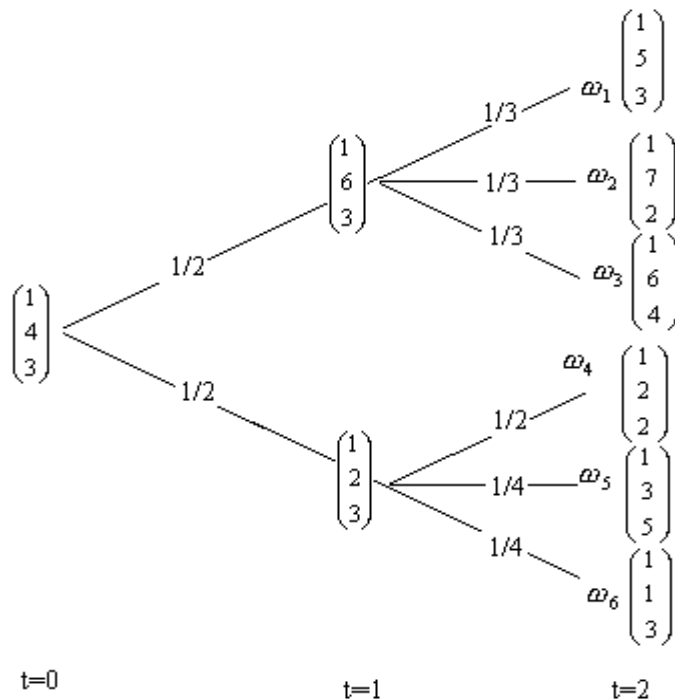
考虑到 $B(0) > 0$ ，所以有 $\alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) > 0$ ，与假设矛盾。

充分性得证。■

下面我们用一个证券市场实例，来说明无套利机会与等价鞅测度的关系，以及等价鞅测度的求解。



(图 6.2.1): 证券市场原始价格系统



(图 6.2.2): 证券市场贴现价格系统

例 6.2.1: 假定经济中有三种长生命证券, $j=0,1,2$, 它们只在 $t=2$ 时支付红利, $t=0, 1$ 时的价格和 $t=2$ 时的红利支付如图 6.2.1 所示。在该经济中, 第 0 种资产是一种无风险资产。下面我们通过构造一个等价鞅测度来说明该价格系统没有套利机会。此处无风险资产的价格在 $t=0$ 和 $t=1$ 时不为 1, 因此我们可以首先对该价格系统进行贴现, 如图 6.2.2 所示。

如果经济中不存在套利机会, 则存在一个鞅测度, $S_j^* + D_j^*$ 在该测度下是个鞅。记从 $t=1$ 上面一个节点出发, 即事件 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 发生后自然状态 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 出现的条件概率为 p_1 、 p_2 和 p_3 , 则 p_1 、 p_2 和 p_3 必须满足:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 5p_1 + 7p_2 + 6p_3 = 6, \\ 3p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 3 \end{cases} \quad (6.2.15)$$

该方程组存在唯一的解:

$$(p_1, p_2, p_3) = (1/3, 1/3, 1/3)。 \quad (6.2.16)$$

类似地，从 $t=1$ 、事件 $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 发生后自然状态 $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ 出现的条件概率为 p_4 、 p_5 和 p_6 必须满足：

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 2p_1 + 3p_2 + p_3 = 2 \\ 2p_1 + 5p_2 + 3p_3 = 3 \end{cases} \quad (6.2.17)$$

该方程组存在唯一解：

$$(p_4, p_5, p_6) = (1/2, 1/4, 1/4) \quad (6.2.18)$$

记事件 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 在 $t=0$ 发生后，事件 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 和 $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 在 $t=1$ 发生的条件概率为 (q_1, q_2) ，则 (q_1, q_2) 满足：

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ 6q_1 + 2q_2 = 4 \\ 3q_1 + 3q_2 = 3 \end{cases} \quad (6.2.19)$$

上式存在唯一解：

$$(q_1, q_2) = (1/2, 1/2) \quad (6.2.20)$$

根据上述条件概率，我们可以直接计算出鞅测度 π^* ：

$$\begin{pmatrix} \pi^*(\omega_1) \\ \pi^*(\omega_2) \\ \pi^*(\omega_3) \\ \pi^*(\omega_4) \\ \pi^*(\omega_5) \\ \pi^*(\omega_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/4 \\ 1/8 \\ 1/8 \end{pmatrix} \quad (6.2.21)$$

因为该经济中存在等价鞅测度，所以该价格系统不存在套利机会。

如果 $t=0$ 时的资产价格发生变化，例如从 $(1/4, 1, 3/4)$ 变为 $(1/4, 1, 1/2)$ ，则方程(6.2.19)应变为：

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ 6q_1 + 2q_2 = 4 \\ 3q_1 + 3q_2 = 2 \end{cases}$$

显然该方程组无解，从而系统不存在等价鞅测度，这蕴涵该价格系统存在套利机会。该套利机会可以轻易地构造，在第 0 期卖空两份资产 0，购买一份资产 2，则该投资组合的成本为零，是一个套利组合；到第一期将资产变现，

个体可以无风险地获得 $1/2$ 单位消费品。因此经济中存在套利机会。

6.2.3 消费计划的鞅性质

一个消费计划刻画了不同时间-事件下个体的消费量，而一个长生命证券由它在各时间-事件下的回报（消费品）刻画，因此一个长生命证券等价于一个消费计划。在无套利条件下，一个市场化了的消费计划或长生命证券的价格是唯一确定的，因为衍生产品是一种长生命证券，所以其价格也是唯一确定的，可以利用等价鞅测度来计算，衍生产品的这种定价方式称为套利定价。

定理 6.2.2: 一个消费计划有定义好了的价格，如果该消费计划是上市的，且经济中不存在套利机会。

证明：（1）如果消费计划 c 是由交易策略 (α, θ) 融资的，则该消费计划的初始成本为：

$$\alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)), \quad (6.2.22)$$

此即 $t=0$ 时该消费计划的连带红利的价格。其唯一性是显然的，如果存在一个交易策略 $(\hat{\alpha}, \hat{\theta})$ 融资该消费计划，满足：

$\alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) > \hat{\alpha}(0)B(0) + \hat{\theta}^T(0)(S(0) + X(0))$ ，
则 $(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\theta} - \theta)$ 是一个可接受的消费计划，其初始成本小于零，未来消费恒为零，存在套利机会。如果上述不等式取小于符号，类似地可以证明存在套利机会。进一步可以得到，该消费计划的除息价格等于：

$$\alpha(0)B(0) + \theta^T(0)(S(0) + X(0)) - c(0)$$

也是定义好的，唯一决定的。

（2）一个消费计划的 t 期除息价格，是指 t 期需要多少消费品的成本来启动一个动态交易策略，以获得该消费计划 t 期之后的所有消费。消费计划 c 是由交易策略 (α, θ) 融资的，则 $\{c(s) \mid s = t+1, \dots, T\}$ 的价格可以刻画为：

$$\alpha(t)B(t) + \theta^T(t)(S(t) + X(t)) - c(t) = \alpha(t+1)B(t) + \theta^T(t+1)S(t)。$$

类似地，我们可以证明该价格是唯一的。证明完毕。■

记该消费计划 t 期价格为：

$$S_c(t) = \alpha(t+1)B(t) + \theta^T(t+1)S(t)。 \quad (6.2.23)$$

下面我们来证明消费计划具有鞅性质。

定理 6.2.3: 如果价格系统 (B, S) 不存在套利机会，则上市的消费计划具有鞅性质。

证明：定义消费计划的贴现价格为：

$$S_c^*(t) = \begin{cases} S_c(t)/B(t) & t < T \\ 0 & t = T \end{cases}。 \quad (6.2.24)$$

所以我们有：

$$\begin{aligned} S_c^*(t) &= \alpha(t+1) + \theta^T(t+1)S^*(t) \\ &= \alpha(t) + \theta^T(t)(S^*(t) + X^*(t)) - c^*(t)。 \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

当价格系统 (B, S) 不存在套利机会时，存在一个等价鞅测度 π^* ，使得

$S_j^* + D_j^*$ 是一个鞅。下面我们来证明 $S_c^*(t) + \sum_{s=0}^t c^*(s)$ 也是一个鞅。

$$\begin{aligned} \text{由 } \sum_{t=0}^T c^*(t) &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) \\ &\quad + \sum_{s=1}^T \theta^T(s)(S^*(s) - S^*(s-1) + X^*(s))， \end{aligned}$$

得：

$$\begin{aligned} S_c^*(t) &= \alpha(t+1) + \theta^T(t+1)S^*(t) \\ &= \alpha(0) + \theta^T(0)(S^*(0) + X^*(0)) \\ &\quad + \sum_{s=1}^t \theta^T(s)(S^*(s) - S^*(s-1) + X^*(s)) - \sum_{s=0}^t c^*(s)。 \end{aligned}$$

$$\sum_{s=t+1}^T c^*(s) = \alpha(t+1) + \theta^T(t+1)S^*(t)$$

$$+ \sum_{s=t+1}^T \theta^T(s)(S^*(s) + D^*(s) - S^*(s-1) + D^*(s-1))。$$

所以我们有：

$$\begin{aligned}
E^*[\sum_{s=t+1}^T c^*(s) | F_t] &= \alpha(t+1) + \theta^T(t+1)S^*(t) \\
&+ E^*[\sum_{s=t+1}^T E^*[\theta^T(s)(S^*(s) + D^*(s) - S^*(s-1) + D^*(s-1)) | F_{s-1}] | F_t] \\
&= \alpha(t+1) + \theta^T(t+1)S^*(t) \\
&= S_c^*(t)。
\end{aligned}$$

上式蕴涵，一个消费计划的 t 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度 π^* 的预期。由此我们可以进一步得到：

$$S_c^*(t) + \sum_{s=0}^t c^*(s) = E^*[\sum_{s=0}^T c^*(s) | F_t], \quad \forall t. \quad (6.2.26)$$

所以有：

$$\begin{aligned}
E^*[S_c^*(s) + \sum_{v=0}^s c^*(v) | F_t] &= E^*[E^*[\sum_{v=0}^T c^*(v) | F_s] | F_t] \\
&= E^*[\sum_{v=0}^T c^*(v) | F_t] \\
&= S_c^*(t) + \sum_{s=0}^t c^*(s)。
\end{aligned}$$

因此 $S_c^*(t) + \sum_{s=0}^t c^*(s)$ 在 π^* 下是一个鞅。定理证明完毕。■

利用消费计划的等价鞅性质，我们可以给消费计划定价。下面我们给出一个例子来加以说明。

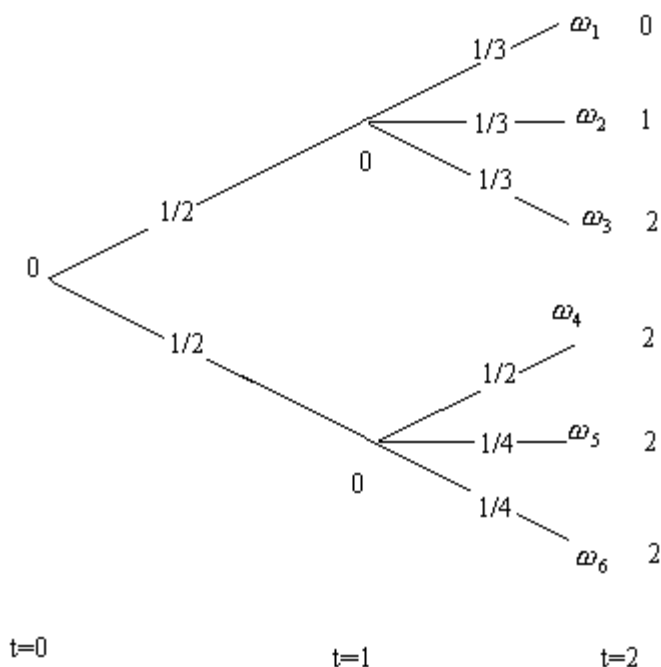
例 6.2.2：考虑一个如图 6.2.3 的消费计划，假定价格系统由图 6.2.1 所示。试计算该消费计划的价格。

因为价格系统中不存在套利机会，所以该消费计划具有鞅性质，该消费计划的 t 期贴现价格等于未来消费贴现和关于鞅测度 π^* 的预期。所以我们有：

$$S_c^*(0) = (\frac{1}{6})0 + (\frac{1}{6})1 + (\frac{1}{6})2 + (\frac{1}{4})2 + (\frac{1}{8})2 + (\frac{1}{8})2 = \frac{3}{2},$$

$$S_c^*((\omega_1, \omega_2, \omega_3), 1) = \left(\frac{1}{3}\right)0 + \left(\frac{1}{3}\right)1 + \left(\frac{1}{3}\right)2 = 1,$$

$$S_c^*((\omega_4, \omega_5, \omega_6), 1) = \left(\frac{1}{2}\right)2 + \left(\frac{1}{4}\right)2 + \left(\frac{1}{4}\right)2 = 2。$$



(图 6.2.3): 一个上市的消费计划。

考虑到 $B(0)=1/4$, $B(1)=1/2$, 所以该消费计划在时间 $t=0$ 和 $t=1$ 时的价格为:

$$S_c(0) = 3/8, \quad S_c((\omega_1, \omega_2, \omega_3), 1) = 1/2, \quad S_c((\omega_4, \omega_5, \omega_6), 1) = 1。$$

§ 6.3 Black-Scholes 公式的推导 (二叉树方法)

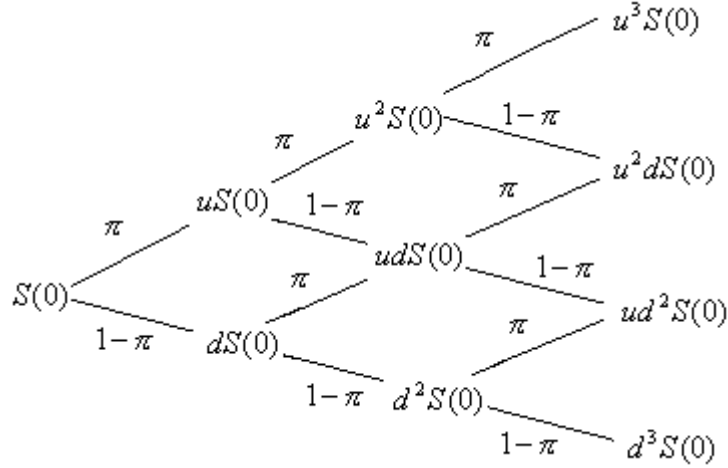
6.3.1 模型的建立

考虑一个具有两个长生命证券的多周期证券市场经济, 一个是普通股票, 一个是无风险债券。假定该经济持续很长时间, 我们仅考虑交易日 $t=0$ 、 1 、 2 、...、 T 。假定该经济满足如下假定:

1、不考虑标的资产的红利收益, 假定资产的波动性相同且已知, 资产

价格满足一个二项随机游动，如图 6.3.1 所示。 $S(0) > 0$ ；

$$S(1) = \begin{cases} uS(0) \\ dS(0) \end{cases}, \quad u > d; \dots$$



(图 6.3.1): 二项随机游动和等价鞅测度。

- 2、假定在期权生命中短期无风险利率 R 已知，个体可以以一个相同的无风险利率进行借贷，假定无风险资产不支付红利， t 期价格为 R^t 。
- 3、不考虑交易成本和税收，允许证券卖空，在期权成熟前不考虑有价证券的转让等事件。
- 4、假定个体拥有的信息结构由股票价格生成。 $F_0 = \{\Omega\}$ ； F_1 有两个事件； F_2 有三个事件，...；任意的 $a_t \in F_t$ 有两个子集 $a_{t+1} \subset a_t$ ， $a_{t+1} \in F_{t+1}$ 。假定个体可能有不同的主观概率，但每一事件上的主观概率都大于零。

6.3.2 等价鞅测度的求解

在图 6.3.1 所示的价格系统中，任意的 $a_t \in F_t$ 有两个子集 $a_{t+1} \subset a_t$ ， $a_{t+1} \in F_{t+1}$ ，根据前面的假定，我们在求解等价鞅测度时，只需在一个节点上求出即可。

因为 $B(t) = R^t$ ，所以我们首先对价格系统进行贴现调整：

$$S^*(t) = S(t)R^{-t}, \quad B^*(t) = 1, \quad (6.3.1)$$

如果经济中不存在套利机会，则价格加上红利和构成的随机过程是一个鞅。考虑到此处不考虑标的资产的红利收益，因此我们有：

$$E^*[S^*(t+1) | F_t] = S^*(t), \quad \forall t < T. \quad (6.3.2)$$

将具体价格代入上式，假定等价鞅测度为 $(\pi, 1-\pi)$ ，则我们有：

$$\pi u R^{-1} + (1-\pi) d R^{-1} = 1,$$

由此可得：

$$\pi = \frac{R-d}{u-d}. \quad (6.3.3)$$

当 $d < R < u$ 时， $\pi \in (0,1)$ ，因此经济中确实存在一个等价鞅测度，相应地，该价格系统不存在套利机会。

6.3.3 Black-Scholes 公式的推导

下面我们利用风险资产的二叉树结构，来推导出一个标的在普通股票上、操作价格为 K 、成熟期为 T 的欧式看涨期权的价格。在图 6.3.1 的二叉树中，从第 0 期出发， T 期股票价格为 $S(0)u^n d^{T-n}$ 的概率为 $\binom{T}{n} \pi^n (1-\pi)^{T-n}$ ；从 t 期出发， T 期股票价格达到 $S(t)u^n d^{T-t-n}$ 的条件概率为 $\binom{T-t}{n} \pi^n (1-\pi)^{T-t-n}$ 。

考虑到该欧式看涨期权在 T 期的回报为： $\max[S(T) - K, 0]$ ，

因此 t 期该看涨期权的贴现价格为：

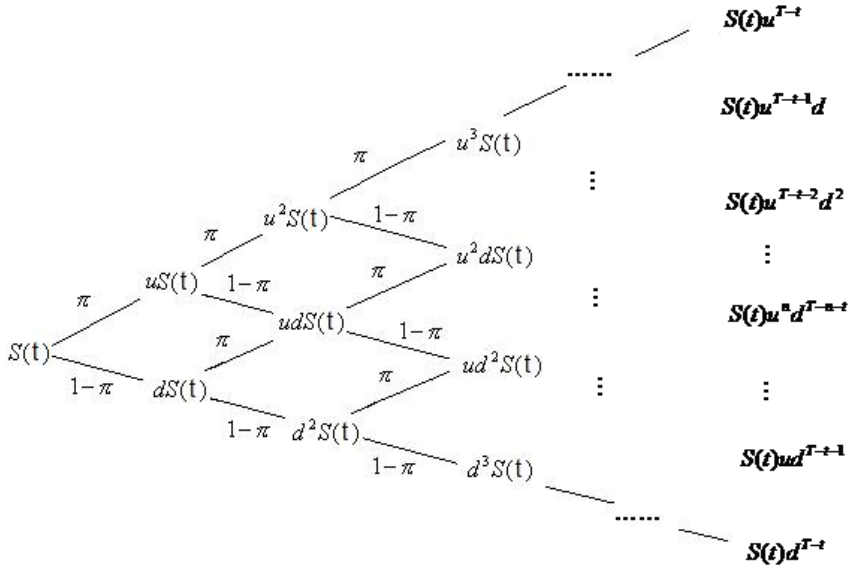
$$p^*(t) = E^*[\max(S(T) - K, 0) R^{-T} | F_t],$$

所以 t 期该看涨期权的价格可以表示为：

$$p(S(t), t, K) = R^t E^*[\max(S(T) - K, 0) R^{-T} | F_t].$$

由图 6.3.2，上式可以进一步改写为

$$\begin{aligned} & p(S(t), t, K) \\ &= R^{-(T-t)} \sum_{n=0}^{T-t} \binom{T-t}{n} \pi^n (1-\pi)^{T-t-n} \max[S(t)u^n d^{T-t-n} - K, 0], \quad (6.3.4) \end{aligned}$$



(图 6.3.2): 从 t 期开始的二项随机游动和等价鞅测度。

记 j 为满足 $S(t)u^j d^{T-t-j} \geq K$ 的正整数，则：

$$j \geq \lceil \ln \frac{K}{S(t)d^{T-t}} / \ln u/d \rceil。$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } p(S(t), t, K) &= R^{-(T-t)} \sum_{n=j}^{T-t} \binom{T-t}{n} \pi^n (1-\pi)^{T-t-n} (S(t)u^n d^{T-t-n} - K) \\ &= S(t) \sum_{n=j}^{T-t} \binom{T-t}{n} \left(\frac{\pi u}{R} \right)^n \left(\frac{(1-\pi)d}{R} \right)^{T-t-n} \\ &\quad - KR^{-(T-t)} \sum_{n=j}^{T-t} \binom{T-t}{n} \pi^n (1-\pi)^{T-t-n} \end{aligned}$$

$$\text{记 } \Phi(j; T-t, \pi) = \sum_{n=0}^{T-t} \binom{T-t}{n} \pi^n (1-\pi)^{T-t-n}, \text{ 则}$$

$$p(S(t), t, K) = S(t)\Phi(j; T-t, \pi u/R) - KR^{-(T-t)}\Phi(j; T-t, \pi)。 \quad (6.3.5)$$

该公式由 Cox、Ross 和 Rubinstein(1979)给出。

当独立时间数趋向于无穷时，即在区间 $T-t$ 中将时间间隔分得足够小，则二项分布趋向于正态分布，从而上式可以改写为标准的 Black-Scholes 公式：

$$p(S(t), t, K) = S(t)N(x_t) - Ke^{-r(T-t)}N(x_t - \sigma\sqrt{T-t}), \quad (6.3.6)$$

其中 $x_t \equiv \frac{\ln(S(t)/Ke^{-r(T-t)})}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$, r 和 σ 为无风险资产的连续复利和风险资产的标准差。该公式由 Black 和 Scholes(1973)首先给出, 他们的工作对市场参与者从事期权定价和对冲等行为提供了方便。

习题:

1、计算例 6.1.2 中在第 0 期开始时发行的、成熟期为 4、执行价格为 30 的美式看跌期权价格, 并检验看跌看涨平价关系对于美式期权是否成立。

2、在图 6.2.1 中, 如果在时间 $t=1$ 、事件 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 发生时, 三种资产的价格改为 $(\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2})$, 试证明该价格系统不存在等价鞅测度, 同时构造一个套利机会来验证 Harris-Creps 的理论。

3、假定某支股票当前价格是 50 元, 一个月之后该股票价格以 60% 的概率上升为 55 元, 以 40% 的概率下降为 45 元, 无风险利率为每月 2%, 试求解该系统的等价鞅测度, 并比较与真实概率之间的关系。