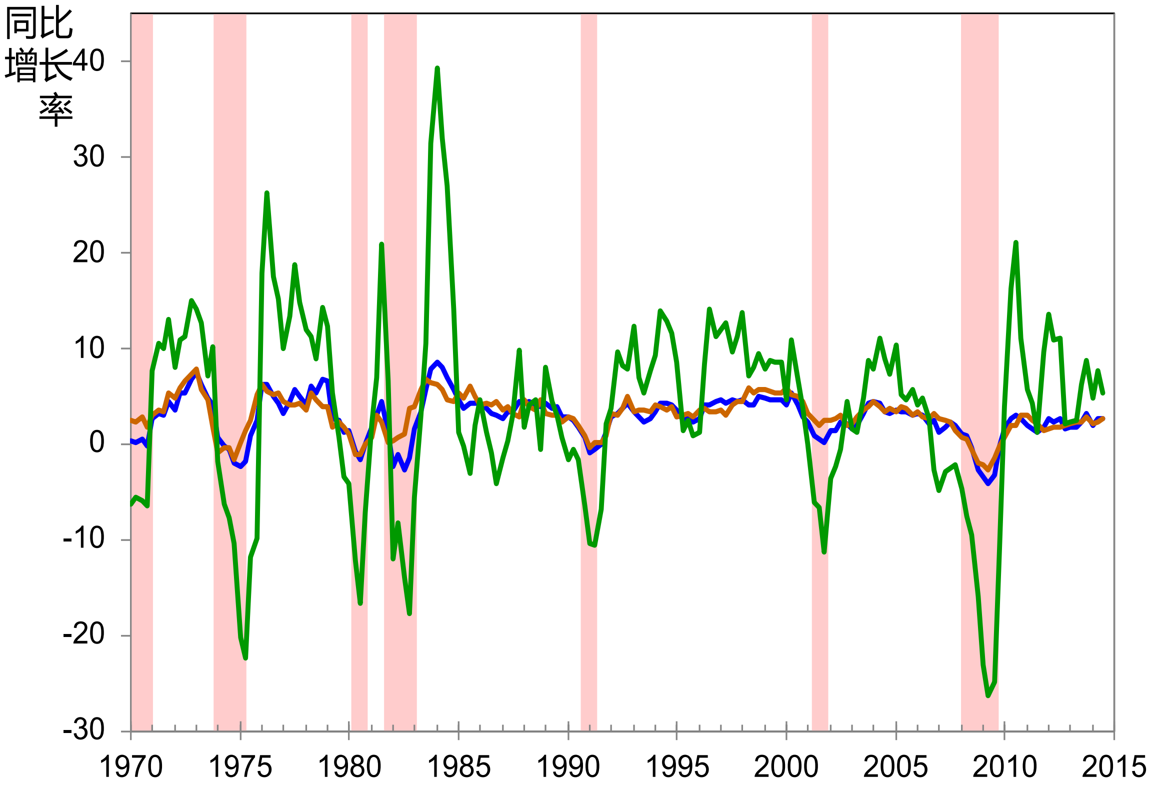
CHAPTER 5

实际经济周期理论

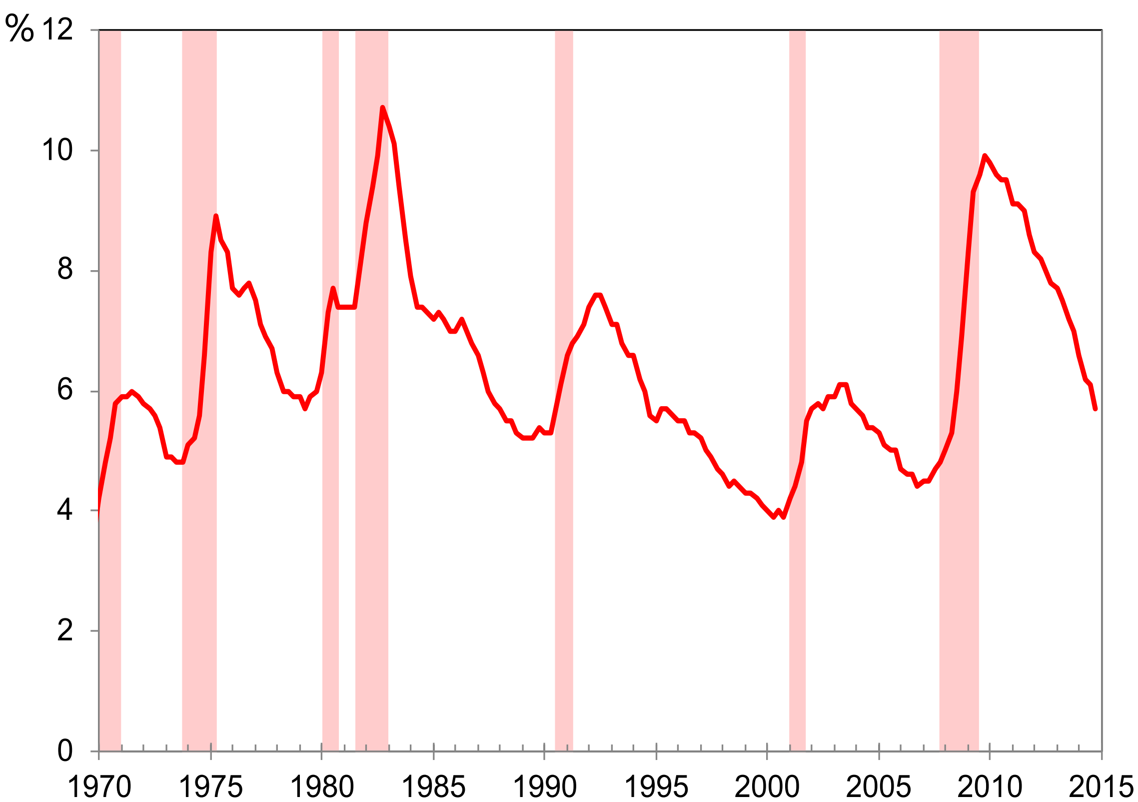
内容提要

- 经济波动的一些典型事实。
- 在拉姆塞模型中引入随机性。
- 动态宏观经济模型的数值求解、模拟和分析。
- Dynare 简介。

实际 GDP、消费与投资的增长率



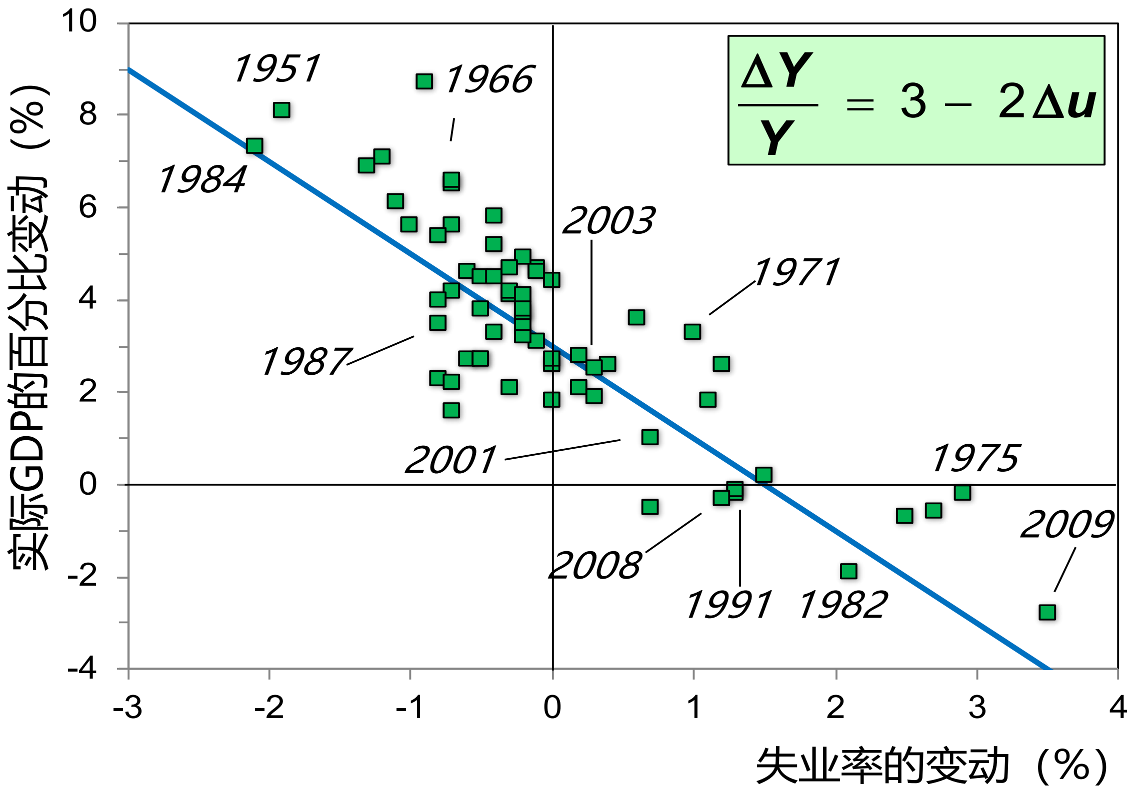
失业率



经济波动的一些典型事实

- 经济波动并没有简单的规律或者周期性。
- 产出各组成部分的波动程度各不相同：消费、投资、就业。
- 产出的上升与下降并没有明显的不对称性。
- 一些重要经济变量在衰退时期的表现：
  - 就业率下降、失业率上升。
  - 生产率/工人平均产出下降。
  - 工作时间下降。
  - 实际货币余额和通货膨胀变化并不明显。
  - 名义利率和实际利率通常会下降。实际工资略微下降。
- **奥肯定律**：GDP 每低于正常增长率 2 个百分点，失业率就会上升 1 个百分点。

奥肯定律



经济周期理论流派

- 古典学派：供给决定需求。
  - 供给冲击：技术、禀赋、生产成本。
  - 传导机制：调节成本、资本积累、建造时滞等。
  - 政策建议：无。
- 凯恩斯学派：需求决定供给。
  - 需求冲击：消费、投资、政府支出、出口、货币供给；预期、动物冲动、太阳黑子。
  - 传导机制：利率、资产组合、泡沫、银行与金融危机、国际贸易、汇率危机。
  - 政策建议：主动干预。

拉姆塞模型与经济波动分析

- 拉姆塞模型是研究宏观经济问题的一个基准模型。为了研究经济波动，我们需要从两个方面进行修改：
  - 引入随机冲击。
  - 考虑就业变化。
- 经典参考文献：
  - 技术冲击：Kydland and Prescott(1982)，Long and Plosser(1983)，King, Plosser and Rebelo(1988a, b)。
  - 投资品的生产技术冲击：Greenwood, Hercowitz, and Huffman(1988)。
  - 政府购买冲击：Baxter and King(1993)。
  - 消息冲击：Beaudry and Portier(2004, 2006)，Jaimovich and Rebelo(2009)。
- 阅读材料：Rebelo(2005)。

新古典实际经济周期模型

- 假设：
  - 经济由 $(0,1)$ 区间上大量相同的厂商和家庭组成。生产投入要素包括资本、劳动和技术。
  - 家庭生存无限期，每个成员的时间禀赋均为 1。瞬时效用是消费和闲暇的函数。
  - CRRA 效用函数和 C-D 生产函数：$Y_t = A_t K_t^{\alpha} \left(Z_t N_t\right)^{1-\alpha}$。
    - 严格递增、凹、二阶可微
    - 满足稻田条件：$\lim_{C,L\to 0} u'\left(C_t, L_t\right) = \infty$，$\lim_{C,L\to\infty} u'\left(C_t, L_t\right) = 0$。
  - 离散时间。技术进步率不变，$Z_t = g_z Z_{t-1}$。
- RBC 模型和 Ramsey 模型的主要区别：
  - 效用函数中引入了闲暇。
  - 生产技术中引入了随机性。

资源约束

- 资本积累方程：$\Delta K_t = K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$
- 家庭预算约束：$C_t + I_t = w_t N_t + r_t K_t$
- 时间约束：$L_t + N_t = 1$
- 产品市场出清：$Y_t = C_t + I_t$

社会计划者问题

- 经济不存在任何扭曲或市场不完美性质，满足福利经济学第一和第二定理。
  - 竞争均衡是帕累托最优的。
  - 帕累托最优配置可以通过竞争性均衡实现。
- 社会计划者问题

$$\max_{C_t,L_t,I_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t u\left(C_t, 1-N_t\right)$$
$$s.t. C_t + K_{t+1} - (1-\delta) K_t = Y_t$$

- 去势（detrend）：$c_t = \frac{C_t}{Z_t}$，$k_t = \frac{K_t}{Z_t}$，$y_t = \frac{Y_t}{Z_t}$，$i_t = \frac{I_t}{Z_t}$：

$$\max_{C_t,L_t,I_t} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + b \ln\left(1-N_t\right)\right]$$
$$s.t. c_t + g_z k_{t+1} - (1-\delta) k_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

假设 $\beta = \tilde{\beta} Z_0^{1-\theta} < 1$。

家庭最优化问题

- 家庭最大化终生效用的折现值：

$$\max_{c_t,N_t,k_{t+1}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} + b \ln\left(1-N_t\right)\right]$$
$$s.t. c_t + g_z k_{t+1} = \left(1+r_t\right) k_t + w_t N_t$$

- 拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u\left(c_t, 1-N_t\right) + \lambda_t \left(\left(1+r_t\right) k_t + w_t N_t - c_t - g_z k_{t+1}\right)\right]$$

- 均衡条件：

$$\frac{b}{1-N_t} = c_t^{-\theta} w_t \tag{1}$$
$$c_t^{-\theta} g_z = E_t c_{t+1}^{-\theta} \beta \left(1+r_{t+1}\right) \tag{2}$$
$$c_t = \left(1+r_t\right) k_t + w_t N_t - g_z k_{t+1} \tag{3}$$
$$\lim_{t\to\infty} \beta^t E_0 \lambda_t k_{t+1} = 0 \tag{4}$$

劳动供给的跨期替代问题

- 家庭的劳动供给：$N_t = 1 - b\frac{c_t^\theta}{w_t}$，工资的增函数。
- 假设 $\theta = 1$，且没有储蓄的情形。$c_t = w_t N_t$。则：$N_t = 1 - bN_t = \frac{1}{1-b}$，劳动供给与工资水平无关。
- 假设家庭只生活两期，家庭最优化问题：

$$\max_{c,N} \ln c_1 + b\ln(1-N_1) + \beta[\ln c_2 + b\ln(1-N_2)]$$

$$s.t.: c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = w_1 N_1 + \frac{1}{1+r}w_2 N_2$$

- 一阶条件：

$$\frac{1}{c_1} = \lambda \qquad \frac{b}{1-N_1} = \lambda w_1$$

$$\frac{\beta}{c_2} = \lambda\frac{1}{1+r} \qquad \frac{\beta b}{1-N_2} = \lambda\frac{1}{1+r}w_2$$

$$\Rightarrow \frac{1-N_1}{1-N_2} = \frac{1}{\beta(1+r)}\frac{w_2}{w_1}$$

  - 相对劳动受相对工资的影响。
  - 利率上升会提高 N_1。

家庭最优化问题

- 家庭的劳动供给：$N_t = 1 - b\frac{c_t^\theta}{w_t}$，工资的增函数。
- 根据欧拉方程：$c_t^{-\theta}g_z = E_t c_{t+1}^{-\theta}\beta(1+r_{t+1})$，$t$ 期减少消费 Δc，并把所得财富用于提高 $t+1$ 期消费，由此导致的边际效用变化应该相等。
- 当 $g_z = 1$ 时，欧拉方程变为：

$$\begin{aligned} c_t^{-\theta} &= \beta E_t c_{t+1}^{-\theta}(1+r_{t+1}) \\ &= \beta\left[E_t c_{t+1}^{-\theta}E_t(1+r_{t+1}) + Cov\left(c_{t+1}^{-\theta}, 1+r_{t+1}\right)\right] \end{aligned}$$

即最优消费路径取决于未来边际效用和收益率的期望值以及两者的相互作用。

厂商最优化问题

- 厂商最大化利润:

$$\max_{c_t,N_t,k_{t+1}} A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - (r_t+\delta)\,k_t - w_t N_t$$

- 均衡条件

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \tag{5}$$
$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta \tag{6}$$
$$w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{N_t} \tag{7}$$

- 劳动需求是工资的减函数。
- 外生技术冲击:

$$\ln A_t = \rho_A \ln A_{t-1} + \epsilon_{At}$$

有解析解的特例 I

- 假设 $g_z = 1$，$\delta = 1$，$\theta = 1$。即 $k_{t+1} = i_t = y_t - c_t$。则资本需求方程变为:

$$1 + r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} \tag{8}$$

- 令 s_t 表示储蓄率，则 $c_t = (1-s_t)\,y_t$，$k_{t+1} = s_t y_t$。我们可以解出模型解析解。
- 根据欧拉方程:

$$\begin{aligned}
c_t^{-1} &= \beta E_t c_{t+1}^{-1}\,(1+r_{t+1}) \\
&= \alpha\beta E_t c_{t+1}^{-1} \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} \\
&= \alpha\beta E_t \frac{1}{(1-s_{t+1})\,s_t y_t} \\
\ln (1-s_t)\,y_t &= \ln E_t\left[(1-s_{t+1})\,s_t y_t\right] - \ln \alpha\beta \\
\ln (1-s_t) &= \ln s_t + \ln E_t\,(1-s_{t+1}) - \ln \alpha\beta
\end{aligned}$$

有解析解的特例 II

- 假设储蓄率不变，即 $s_t=\bar{s}$。上式变为 $\ln\bar{s}=\ln\alpha\beta\Rightarrow\bar{s}=\alpha\beta$。可见模型确实存在储蓄率不变的解。
- 根据劳动供给方程：

$$
\begin{aligned}
N_t&=1-b\frac{c_t}{w_t}=1-b\frac{(1-\alpha\beta)\,y_t}{(1-\alpha)\,\frac{y_t}{N_t}}\\
&=1-bN_t\frac{1-\alpha\beta}{1-\alpha}\\
&=\frac{1-\alpha}{1-\alpha+b\,(1-\alpha\beta)}
\end{aligned}
$$

- 可见，劳动供给也是不变的。
- 模型其他变量的路径分别为：$y_t=A_tk_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}=A_t\bar{N}^{1-\alpha}k_t^{\alpha}$，$c_t=(1-\bar{s})\,y_t$，$k_{t+1}=\bar{s}y_t$，$r_t=\alpha\frac{y_t}{k_t}-1$，$w_t=\frac{(1-\alpha)}{\bar{N}}y_t$。
- 根据 Stocky, Lucas and Prescott(1989)，可以证明该均衡是唯一的。

模型动态

- 根据上述分析，产出波动是对冲击的最优反应，代表了随时间变化的帕累托最优值，并不表明市场失灵。
- 我们考虑产出相对稳态值 $\bar{y}$ 的变化率，根据生产函数 $y_t=A_tk_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha}$，外生技术冲击：$\ln A_t=\rho_A\ln A_{t-1}+\epsilon_{At}$。$\bar{y}=\bar{k}^{\alpha}\bar{N}^{1-\alpha}=(\bar{s}\bar{y})^{\alpha}\,\bar{N}^{1-\alpha}=\bar{s}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\bar{N}$。
- 外生技术冲击：$\ln A_t=\rho_A\ln A_{t-1}+\epsilon_{At}$。产出波动的路径为：

$$
\begin{aligned}
\ln y_t&=\ln A_t+\alpha\ln k_t+(1-\alpha)\ln\bar{N}\\
&=\ln A_t+\alpha\ln y_{t-1}+\alpha\ln\bar{s}+(1-\alpha)\ln\bar{N}
\end{aligned}
$$

- 令 $\hat{y}_t\equiv\ln\frac{y_t}{\bar{y}}$，$\hat{A}_t\equiv\ln\frac{A_t}{\bar{A}}$，则 $\hat{A}_t=\rho_A\hat{A}_{t-1}+\epsilon_{At}$，且

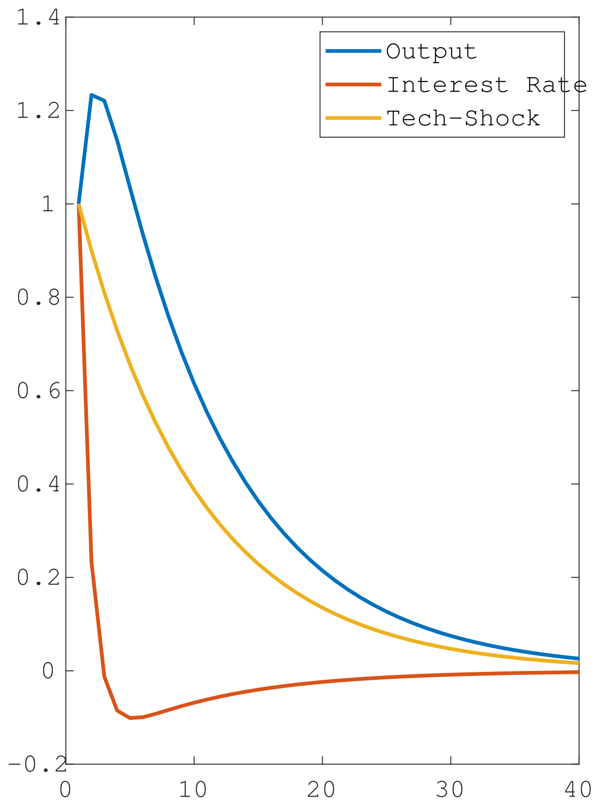
$$
\begin{aligned}
\hat{y}_t&=\hat{A}_t+\alpha\hat{y}_{t-1}+(\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\bar{s}+\ln\bar{N}\right)+\alpha\ln\bar{s}+(1-\alpha)\ln\bar{N}\\
\Rightarrow\hat{y}_t&=\hat{A}_t+\alpha\hat{y}_{t-1}=\rho_A\hat{A}_{t-1}+\epsilon_{At}+\alpha\hat{y}_{t-1}\\
&=\rho_A\hat{y}_{t-1}-\rho_A\alpha\hat{y}_{t-2}+\alpha\hat{y}_{t-1}+\epsilon_{At}\\
&=(\alpha+\rho_A)\,\hat{y}_{t-1}-\alpha\rho_A\hat{y}_{t-2}+\epsilon_{At}
\end{aligned}
$$

- 可见，产出偏离稳态的距离服从 AR(2) 过程，且具有驼峰形状。

脉冲反应

- 假设 $\rho_A = 0.9$，$\alpha = 1/3$，假设经济在 $t = 1$ 期面临一个对 ϵ_{A1} 的一次性冲击，大小为 1。则 $\hat{y}_1$ 的变化路径如下：

t	$\hat{\epsilon}_{At}$	$\hat{A}_t$	$\hat{y}_t$
1	1	1	1
2	0	0.9	1.23
3	0	0.81	1.22
...		...	
∞	0	0	0



简化模型总结

- 极端假设：折旧率为 1 (100%)。
- 结论：储蓄率固定不变，消费和投资的波动性相同，并且劳动投入不变，实际工资高度顺周期。
- 另一种极端假设：折旧率为 0。经济中没有折旧，投资在没有冲击时为零。假设储蓄率可变。在正的技术冲击下，资本的边际产出提高：
  - 厂商增加投资 i_t 和产出，家庭将增加储蓄和消费。
  - 相对于储蓄率不变的情形，储蓄率暂时提高意味着预期消费增长率更高
  - 根据欧拉方程可知预期利率 $E_t r_{t+1}$ 更高，因此劳动供给 N_t 会提高。
- 修正模型：年折旧率 10%。

一般情形：稳态

- 经济的均衡是满足一阶条件和初始条件的消费、劳动和资本存量路径：$\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$，$\{N_t\}_{t=0}^{\infty}$，$\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$。
- 稳态的定义：外生变量 A_t 保持不变，经济处于平衡增长路径，消费、劳动和资本存量不随时间变化。经济的稳态水平取决于基本参数（deep parameters）。

$$c^{\theta} = \frac{w}{b}(1-N) \tag{9}$$

$$g_z = \beta(1+r) \tag{10}$$

$$y = c + g_z k - (1-\delta)k \tag{11}$$

$$r = \alpha\frac{y}{k} - \delta \tag{12}$$

$$w = (1-\alpha)\frac{y}{N} \tag{13}$$

稳态求解

- 外生变量 A_t 保持不变，可见 $A=1$
- 根据 (10) 可得：$r = \frac{g_z}{\beta} - 1$
- 根据 (12) 可得：$r = \alpha\frac{y}{k} - \delta \Rightarrow \frac{k}{y} = \frac{\alpha}{r+\delta}$
- 根据 (11)：$y = c + g_z k - (1-\delta)k \Rightarrow \frac{c}{y} = 1 - (g_z - 1 + \delta)\frac{k}{y}$
- 根据生产函数：$y = Ak^{\alpha}N^{1-\alpha} \Rightarrow 1 = \left(\frac{k}{y}\right)^{\alpha}\left(\frac{N}{y}\right)^{1-\alpha}$，可见 $\frac{N}{y} = \left(\frac{k}{y}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$。根据 (13) 可得 w。
- $\theta = 1$ 时，根据 (9)：
  $c = \frac{w}{b}(1-N) = \frac{(1-\alpha)y}{b}\left(\frac{1}{N}-1\right) \Rightarrow \frac{1}{N} = \frac{c}{y}\frac{b}{1-\alpha} + 1$，可解出 N。
- $\theta \neq 1$ 时，根据 (9)：$\left(\frac{c}{y}y\right)^{\theta} = \frac{1-\alpha}{b}\left(\frac{y}{N} - y\right)$，代入 $\frac{c}{y}$ 和 $\frac{N}{y}$，可利用数值方法求解 y。

对数线性化

- 泰勒（线性）展开：$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$。
- 对数线性化：$\ln f(x) \simeq \ln f(x_0) + \left[\frac{\partial \ln f(x_0)}{\partial \ln x}\right]_{x=x_0} (\ln x - \ln x_0)$。

$$\hat{y} \equiv \ln \frac{y}{y_0} = \ln \frac{f(x)}{f(x_0)} \simeq \frac{f'(x_0)\, x_0}{f(x_0)} \hat{x}$$

或者：$\hat{y} \simeq \ln\left(1 + \frac{y-y_0}{y_0}\right) \simeq \frac{y-y_0}{y_0}$。
  - $Y = AK^\alpha L^\beta \Rightarrow \hat{Y} = \hat{A} + \alpha\hat{K} + \beta\hat{L}$
  - $Y = C + I + G \Rightarrow \hat{Y} = \frac{C_0}{Y_0}\hat{C} + \frac{I_0}{Y_0}\hat{I} + \frac{G_0}{Y_0}\hat{G}$
  - $y = w^a(x+z) \Rightarrow \hat{y} = a\hat{w} + \frac{x_0}{x_0+z_0}\hat{x} + \frac{z_0}{x_0+z_0}\hat{z}$
- 假设：$u(c,L) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + b\ln L$，$u_c(c,L) = c^{-\theta}$，$u_L(c,L) = \frac{b}{1-N}$。

对数线性化

- 劳动供给方程：$\frac{b}{1-N_t} = c_t^{-\theta} w_t \Rightarrow \theta\hat{c}_t = \hat{w}_t - \frac{N}{1-N}\hat{N}_t$，即 $\frac{N}{1-N}\hat{N}_t = \hat{w}_t - \theta\hat{c}_t$。
- 劳动需求方程：$w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{N_t} \Rightarrow \hat{N}_t = \hat{y}_t - \hat{w}_t$，即 $\alpha\hat{N}_t = \hat{A}_t + \alpha\hat{k}_t - \hat{w}_t$。
  - 生产率上升的影响。
- 欧拉方程：$c_t^{-\theta} g_z = E_0 c_{t+1}^{-\theta}\beta(1+r_{t+1}) \Rightarrow \theta\hat{c}_{t+1} = \theta\hat{c}_t + (1-\beta/g_z)\hat{r}_{t+1}$。
  - 利率上升，消费增加。收入效应大于替代效应。
- 产品市场出清条件：$y_t = c_t + i_t \Rightarrow \hat{y}_t = \frac{c}{y}\hat{c}_t + \frac{i}{y}\hat{i}_t$
- 生产率冲击：$\ln A_{t+1} = \rho_A \ln A_t + \epsilon_{At} \Rightarrow \hat{A}_{t+1} = \rho_A\hat{A}_t + \epsilon_{At+1}$

对数线性化

$$
\begin{aligned}
\frac{b}{1-N_t} &= c_t^{-\theta} w_t \\
c_t^{-\theta} g_z &= E_0 c_{t+1}^{-\theta} \beta \left(1 + r_{t+1}\right) \\
y_t &= A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \\
r_t &= \alpha \frac{y_t}{k_t} - \delta \\
w_t &= \left(1-\alpha\right) y_t / N_t \\
\ln A_{t+1} &= \rho_A \ln A_t + \epsilon_{At} \\
i_t &= g_z k_{t+1} - \left(1-\delta\right) k_t \\
y_t &= c_t + i_t
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\frac{N}{1-N} \hat{N}_t &= \hat{w}_t - \theta \hat{c}_t \\
-\theta \hat{c}_t &= -\theta \hat{c}_{t+1} + \frac{r}{1+r} \hat{r}_{t+1} \\
\hat{y}_t &= \hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t + \left(1-\alpha\right) \hat{N}_t \\
\frac{r}{r+\delta} \hat{r}_t &= \hat{y}_t - \hat{k}_t \\
\hat{w}_t &= \hat{y}_t - \hat{N}_t \\
\hat{A}_{t+1} &= \rho_A \hat{A}_t + \epsilon_{At+1} \\
\hat{i}_t &= \frac{g_z}{g_z - 1 + \delta} \hat{k}_{t+1} - \frac{1-\delta}{g_z - 1 + \delta} \hat{k}_t \\
\hat{y}_t &= \frac{c}{y} \hat{c}_t + \frac{i}{y} \hat{i}_t
\end{aligned}
$$

求解方法

- 线性系统的一般形式：

$$B \times E_t \begin{pmatrix} s_{t+1} \\ c_{t+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} s_t \\ c_t \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} \epsilon_{t+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Blanchard & Kahn(1980) 方法：B 可逆时的特征分解方法，$B^{-1}A = \Gamma\Lambda\Gamma^{-1}$：

$$E_t \begin{pmatrix} s_{t+1} \\ c_{t+1} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} s_t \\ c_t \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \epsilon_{t+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中，Λ_1 的特征值小于 1，Λ_2 的特征值大于或等于 1。$R = B^{-1}G$。令 $\begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix} \equiv \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} s_t \\ c_t \end{pmatrix}$：

$$E_t \begin{pmatrix} z_{1t+1} \\ z_{2t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \epsilon_{t+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 稳定性要求 $z_{2t} = 0$，即 $c_t = -\Gamma_{22}^{-1}\Gamma_{21} s_t \equiv \Phi s_t$。

$$z_{1t+1} = \Gamma_{11} s_{t+1} + \Gamma_{12} c_{t+1} = \Lambda_1 \left(\Gamma_{11} - \Gamma_{12}\Gamma_{22}^{-1}\Gamma_{21}\right) s_t + R\epsilon_t$$

$$s_{t+1} = \left(\Gamma_{11} - \Gamma_{12}\Gamma_{22}^{-1}\Gamma_{21}\right)^{-1} \Lambda_1 \left(\Gamma_{11} - \Gamma_{12}\Gamma_{22}^{-1}\Gamma_{21}\right) s_t + \tilde{R}\epsilon_t$$

RBC 模型求解

■ 替换变量 $\hat{y}$，$\hat{w}$，$\hat{r}$，$\hat{i}$ 可得：

$$\left(\frac{N}{1-N}+\alpha\right)\hat{N}_t=\hat{A}_t+\alpha\hat{k}_t-\theta\hat{c}_t$$

$$\theta\hat{c}_{t+1}=\theta\hat{c}_t+\frac{\delta+r}{1+r}\left[\hat{A}_{t+1}+(1-\alpha)\left(\hat{N}_{t+1}-\hat{k}_{t+1}\right)\right]$$

$$g_z\frac{k}{y}\hat{k}_{t+1}=\hat{A}_t+(1-\alpha)\hat{N}_t-\frac{c}{y}\hat{c}_t+\left[\alpha+(1-\delta)\frac{k}{y}\right]\hat{k}_t$$

$$\hat{A}_{t+1}=\rho_A\hat{A}_t+\epsilon_{At+1}$$

■ 令 $\xi\equiv\frac{1}{\left(\frac{N}{1-N}+\alpha\right)}$，$\phi\equiv\frac{\delta+r}{1+r}$

$$\hat{N}_t=\xi\hat{A}_t+\alpha\xi\hat{k}_t-\theta\xi\hat{c}_t$$

RBC 模型求解

■ 代入欧拉方程可得：

$$\theta\hat{c}_{t+1}=\theta\hat{c}_t+\phi\left[\hat{A}_{t+1}+(1-\alpha)\left(\xi\hat{A}_{t+1}+\alpha\xi\hat{k}_{t+1}-\theta\xi\hat{c}_{t+1}-\hat{k}_{t+1}\right)\right]$$

即：$\theta\left[1+\phi(1-\alpha)\xi\right]\hat{c}_{t+1}=$
$\theta\hat{c}_t+\phi\left[1+(1-\alpha)\xi\right]\hat{A}_{t+1}+\phi(1-\alpha)(\alpha\xi-1)\hat{k}_{t+1}$。

■ 代入资源约束方程可得

$$\begin{aligned}g_z\frac{k}{y}\hat{k}_{t+1}=&\hat{A}_t+\left[\alpha+(1-\delta)\frac{k}{y}\right]\hat{k}_t+(1-\alpha)\left(\xi\hat{A}_t+\alpha\xi\hat{k}_t-\theta\xi\hat{c}_t\right)-\frac{c}{y}\hat{c}_t\\=&\left[1+(1-\alpha)\xi\right]\hat{A}_t+\left[(1-\alpha)\alpha\xi+\alpha+(1-\delta)\frac{k}{y}\right]\hat{k}_t\\&-\left[(1-\alpha)\theta\xi+\frac{c}{y}\right]\hat{c}_t\end{aligned}$$

RBC 模型求解

- 结合外生冲击的定义式可以整理为：

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_z\frac{k}{y} & 0 \\ -\phi\left[1+(1-\alpha)\xi\right] & \phi(1-\alpha)(1-\alpha\xi) & \theta\left[1+\phi(1-\alpha)\xi\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \\ \hat{c}_{t+1} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \rho_A & 0 & 0 \\ \left[1+(1-\alpha)\xi\right] & \left[(1-\alpha)\alpha\xi+\alpha+(1-\delta)\frac{k}{y}\right] & -\left[(1-\alpha)\theta\xi+\frac{c}{y}\right] \\ 0 & 0 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix}
$$

- 上式可以写为：

$$X_{t+1} = \Omega X_t + R_1 \varepsilon_{At+1} \tag{14}$$

RBC 模型求解

- 特征分解得到 $\Omega = P\Lambda P^{-1}$，从而上述均衡系统可以表示成：

$$X_{t+1} = P\Lambda P^{-1} X_t + R\varepsilon_{t+1} \tag{15}$$

- 在 MATLAB 中，可使用命令 eig 得到特征值和特征向量。用 sort 进行排序。
- Dynare 使用 generalized Schur decomposition，也叫 QZ 分解，其优点是，在 A_0 不可逆时也适用。
- 根据上述分解结果，两边同时乘以 P^{-1}，把差分方程组的系数矩阵转化为对角矩阵：

$$\tilde{x}_{t+1} = \Lambda \tilde{x}_t + U\varepsilon_{t+1} \tag{16}$$

  其中 $\tilde{x}_t = P^{-1}X_t$，$U = P^{-1}R$。
- 假设 $|\lambda_3| > 1$，则鞍点路径要求 $\tilde{x}_{3t} = 0$，即

$$p_{31}\hat{A}_t + p_{32}\hat{k}_t + p_{33}\hat{c}_t = 0.$$

  由此可以解出控制变量的鞍点路径为：

$$\hat{c}_t = -p_{33}^{-1} \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} \equiv M_c \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}$$

RBC 模型求解

- 把政策路径代入均衡系统可得状态变量的转移路径为：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{A}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{At+1} \\
&= \begin{bmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{bmatrix} \hat{c}_t + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{At+1}
\end{aligned}
$$

- 利用 $\hat{c}_t = -p_{33}^{-1} \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix}$，可得：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} &= \left(-p_{33}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_{At+1} \\
&\equiv M_s \begin{bmatrix} \hat{A}_t \\ \hat{k}_t \end{bmatrix} + R_s \varepsilon_{At+1}
\end{aligned}
$$

求解方法

- Schur 方法：B 不可逆时的 QZ 分解方法。存在正交矩阵 Q、Z 和上三角矩阵 U、V，使得：$A = QUZ^T$、$B = QVZ^T$。
- 假设特征值已经按从小到大顺序排列：

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} s_{t+1} \\ c_{t+1} \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_t \\ c_t \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \epsilon_{t+1} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 稳定性要求 $Z_{21}s_t + Z_{22}c_t = 0$，即 $c_t = -Z_{22}^{-1}Z_{21}s_t \equiv \Phi s_t$，带入线性系统表达式第一行得：

$$
\begin{gathered}
(B_{11} + B_{12}\Phi) s_{t+1} = (A_{11} + A_{12}\Phi) s_t + G\epsilon_t \\
\left[V_{11} \left(Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21} \right) + V_{12} \left(Z_{21} - Z_{22}Z_{22}^{-1}Z_{21} \right) \right] s_{t+1} \\
= \left[U_{11} \left(Z_{11} - Z_{12}Z_{22}^{-1}Z_{21} \right) + U_{12} \left(Z_{21} - Z_{22}Z_{22}^{-1}Z_{21} \right) \right] s_t + R\epsilon_t \\
s_{t+1} = Ms_t + \tilde{R}\epsilon_{t+1}
\end{gathered}
$$

脉冲反应函数 IRF

- 脉冲反应函数描述内生变量如何对外生冲击作出反应。对于随机过程 $y_t = B(L)\epsilon_t$，脉冲反应函数定义为：

$$IRF(j) = E_t y_{t+j} - E_{t-1} y_{t+j}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

  - 例：$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \epsilon_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \epsilon_t$，则 $IRF_y(0) = E_t y_t - E_{t-1} y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \epsilon_t - \sum_{i=1}^{\infty} a_i L^i \epsilon_t = a_0 \epsilon_t$，$IRF_y(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \epsilon_{t+1} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i L^i \epsilon_{t+1} = a_1 \epsilon_t$。
  - 多元情形：$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \epsilon_{t-j}$，则 $IMP(j) = A_j I_i \epsilon_{it}$，其中 I_j 表示除了 (i,i) 位置为 1，其余位置均为 0 的矩阵。
- 根据模型均衡路径:

$$IRF_s(0) = E_t s_t - E_{t-1} s_t = M s_{t-1} + \tilde{R}\epsilon_t - M s_{t-1} = \tilde{R}\epsilon_t$$

$$IRF_s(1) = E_t s_{t+1} - E_{t-1} s_{t+1} = E_t M s_t - E_{t-1} M s_t = M\tilde{R}\epsilon_t$$

$$IRF_s(j) = E_t s_{t+j} - E_{t-1} s_{t+j} = M^j \tilde{R}\epsilon_t$$

$$IRF_c(j) = E_t c_{t+j} - E_{t-1} c_{t+j} = \Phi M^j \tilde{R}\epsilon_t$$

Dynare 介绍

- Dynare 可以根据一阶条件自动计算系数矩阵，并求解模型。
- 模型文件后缀名：.mod，.dyn。
- Preamble：声明内生变量、外生变量和参数，并对参数赋值。

```
% 1. Defining variables
var y c k N i w r A;
varexo ea;
parameters alf b bta tht dlt rhoa siga gz;
% 2. Calibration
alf  = 0.33;  bta = 0.9901;   dlt = 0.025;
tht  = 1;       b = 1;          gz = 1;
rhoa = 0.9;   siga = 0.01;
```

Dynare 介绍

- Model：Dynare 求解时会对模型在稳态附近进行泰勒近似，为了进行对数线性化，需要在模拟时添加选项loglinear。

```
% 3. Model
model;
  c^tht = w*(1-N)/b;
  c^(-tht)*gz = bta*c(+1)^(-tht)*(1+r(+1));
  y = c+gz*k-(1-dlt)*k(-1);
  r = alf*y/k(-1)-dlt;
  w = (1-alf)*y/N;
  i = gz*k-(1-dlt)*k(-1);
  y = A*k(-1)^alf * N^(1-alf);
  log(A) = rhoa*log(A(-1))+ea;
end;
```


Dynare 介绍

- 对数线性化的手动操作方式，直接输入对数线性化系统，并在模型设定模块声明linear。

```
% 3. Model
model(linear);
 #ky = alf/(gz/bta-1+dlt);
 #cy = 1-(gz-1+dlt)*ky;
 #ny = (ky^alf)^(1/(alf-1));
 #Nbar = ny* (1-alf)/ny/(b*cy+1-alf);
  tht*c = w-Nbar/(1-Nbar)*N;
  -tht*c = -tht*c(+1)+(1-bta/gz)*r(+1);
  y = cy*c+gz*ky*k-(1-dlt)*ky*k(-1);
  r*(gz-bta)*ky/(alf*bta) = A+(1-alf)*(N-k(-1));
  w = y - N;
  i*(gz-1+dlt) = gz*k-(1-dlt)*k(-1);
  y = A+alf*k(-1)+ (1-alf)*N;
  A = rhoa*A(-1)+ea;
end;
```

Dynare 介绍

- Steady State：3 种设定方法
  - 使用 initval 模块指定初始值，需要尽量接近稳态值，可以手动计算。
    - 在对数线性化模式下，可以忽略这一步，Dynare 会默认所有变量的稳态值都是 0。
  - 编写独立的 MATLAB 程序：文件名_steadystate.m。
  - 使用steady_state_model模块编写 MATLAB 程序计算。

```
% 4. Steady State Computation
steady_state_model;
  r  = gz/bta-1;          ky = alf/(r+dlt);
  cy = 1-(gz-1+dlt)*ky;   A = 1;
  ny = (ky^alf)^(1/(alf-1));
  y  = (1-alf)/ny/(b*cy+1-alf);
  c  = cy*y; k = ky*y;    N = ny*y;
  i  = (gz-1+dlt)*k;      w = (1-alf)/ny;
end;
```


Dynare 介绍

- Shocks：外生冲击设定，直接设定方差。

```
% 5. Shocks
shocks;
  var  ea = siga^2;
end;
```

- Simulation：options：

irf=int; nocorr; nomoments; nofunctions; noprint; loglinear; order=1,2,3; periods=int; drop=int; simul_seed=int.

```
% 6. Simulation
stoch_simul(order=1,irf=20) y c i k N A r w;
```

- 运行：确保 Dynare 在 MATLAB 的搜寻目录中：

addpath c:\dynare\5.0\matlab

```
dynare rbc
```

求解结果

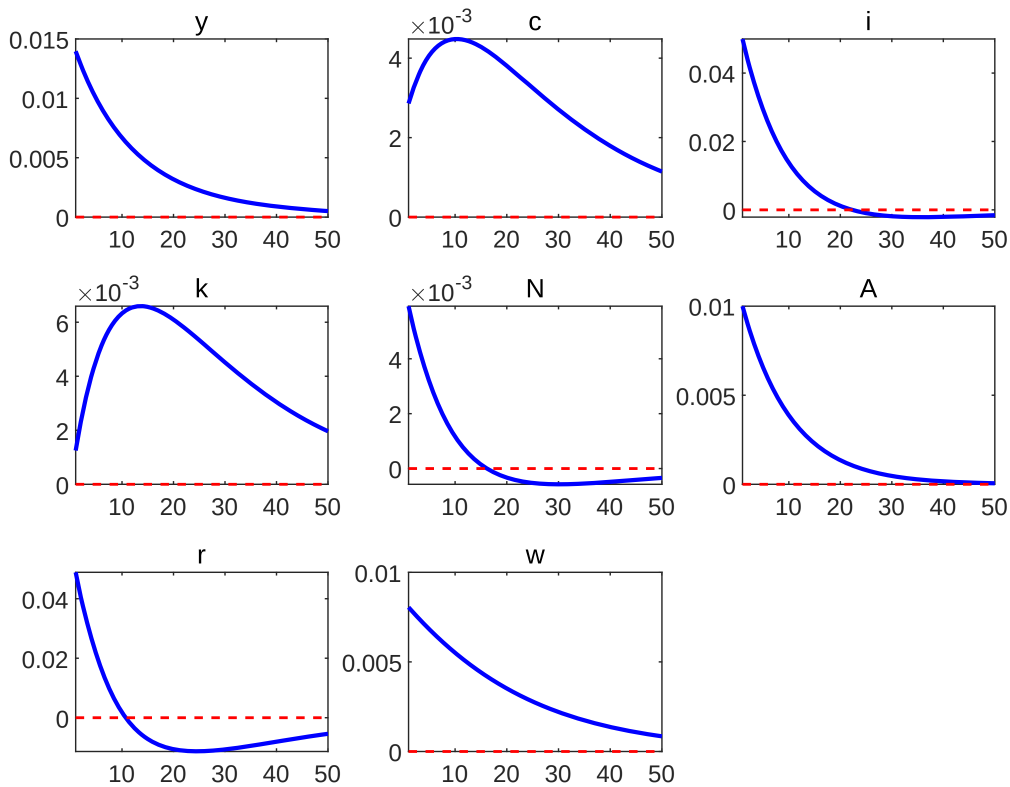
- 稳态：
  $\bar{y}=1.411,\ \bar{c}=1.078,\ \bar{k}=13.3,\ \bar{N}=0.467,\ \bar{i}=0.333,\ \bar{A}=1$。
- 令 $\hat{x}_t=\ln\frac{x_t}{\bar{x}}$，鞍点路径：

$$\begin{bmatrix}\hat{k}_t\\ \hat{A}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.952 & 0.112\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{k}_{t-1}\\ \hat{A}_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.125\\ 1\end{bmatrix}\epsilon_{at}$$

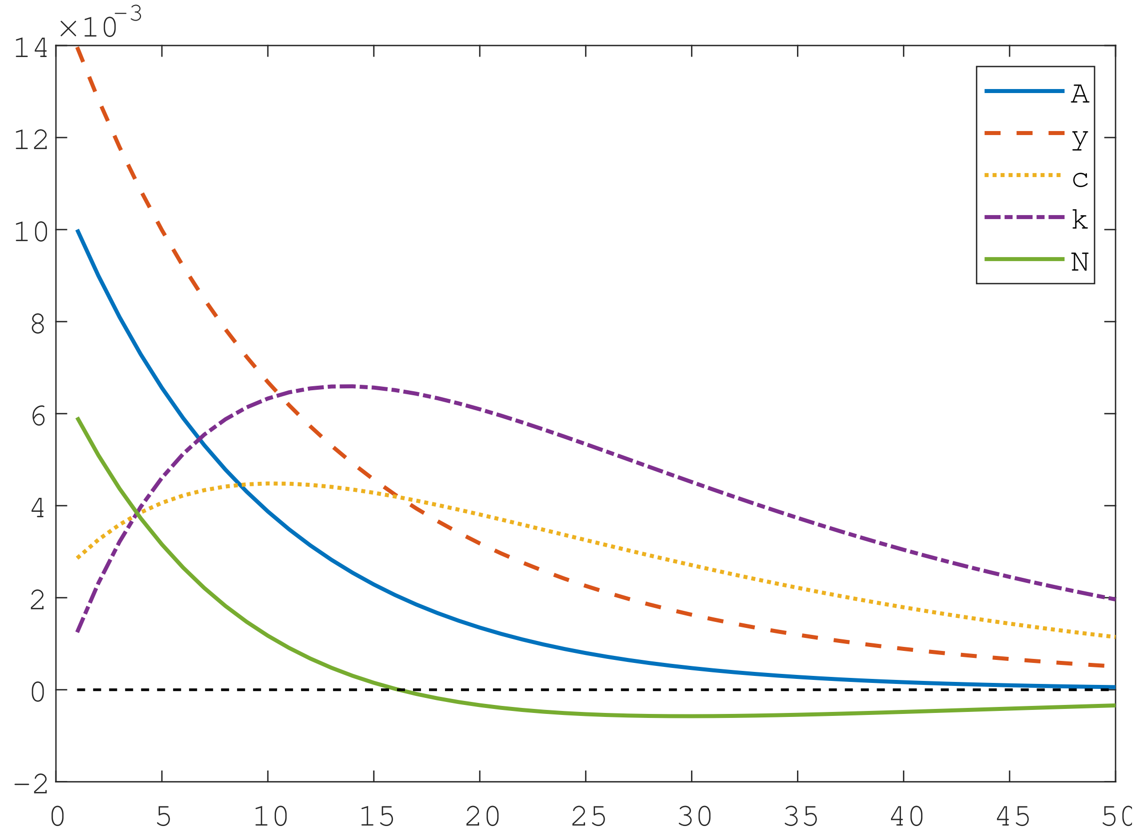
$$\begin{bmatrix}\hat{y}_t\\ \hat{c}_t\\ \hat{i}_t\\ \hat{N}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.218 & 1.369\\ 0.577 & 0.214\\ -0.947 & 5.116\\ -0.191 & 0.616\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{k}_t\\ \hat{A}_t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.208 & 1.257\\ 0.55 & 0.257\\ -0.901 & 4.498\\ -0.182 & 0.532\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{k}_{t-1}\\ \hat{A}_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.397\\ 0.286\\ 4.997\\ 0.592\end{bmatrix}\epsilon_{at}$$

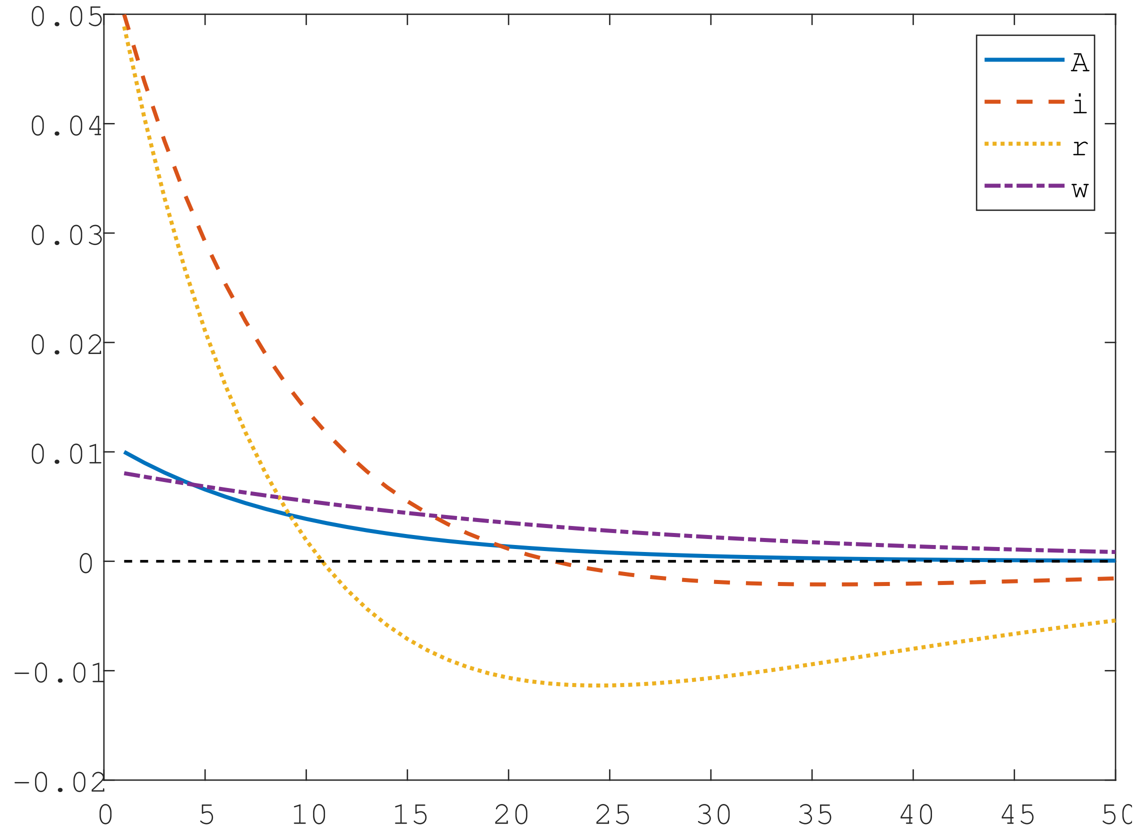
Dynare 介绍



Dynare 介绍



Dynare 介绍



参数校准

- 根据微观经济证据选择参数值（Kydland and Presscott, 1982），然后比较变量序列的二阶矩是否符合数据观测值。
- 校准方法的优点：
  1. 基于微观经济证据选择参数值，充分利用研究者的先验信息。
  2. 统计或计量方法中模型被拒绝与否的经济含义难以解释。
     - 一个模型可以拟合大多数数据，但是某个不太重要的数据不能很好地拟合，在统计上仍然可能被拒绝。
     - 如果观测数据对应多个 DGP，统计上不能拒绝某个模型并不意味着该模型就是正确的。
- 校准方法的问题：
  - 校准方法假设经济模型可以刻画现实。
  - 不同的模型可能会得到同样的二阶矩。
- 其他选择：极大似然估计（MLE）、模拟矩方法（SMM）、贝叶斯估计（BE）。

模拟二阶矩

- 用 S 和 C 分别代表状态变量和控制变量，则鞍点路径可以表示为：

$$\begin{bmatrix} C_t \\ S_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_c M_s \\ 0 & M_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{t-1} \\ S_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_c R_s \\ R_s \end{bmatrix} \varepsilon_t$$

$$Y_t = \Phi Y_{t-1} + \Psi \varepsilon_t$$

由此可以计算协方差矩阵：

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= EY_tY_t' = \Phi\Gamma(-1) + \Psi\Psi'\sigma^2 \\ &= \Phi\Gamma(0)\Phi' + \Psi\Psi'\sigma^2 \\ vec[\Gamma(0)] &= [I - \Phi \otimes \Phi]^{-1} vec(\Psi\Psi')\sigma^2 \\ \Gamma(i) &= \Phi^i\Gamma(0) \end{aligned}$$

另外，协方差矩阵 $\Gamma(0)$ 的对角元素即为变量方差，取平方根得到对应标准差。
- 自相关矩阵：

$$P(i) = D^{-1}\Gamma(i)D^{-1}$$

其中 D 为对角矩阵，对角元素为变量标准差。

参数校准

- 资本份额 $\alpha = 0.33$，折旧率 $\delta = 0.025$，$r = 0.01$。$\beta = \frac{g_z}{1+r}$，$\frac{k}{y} = \frac{\alpha}{r+\delta} = \frac{\alpha\beta}{g_z - \beta(1-\delta)}$。
- $\ln A_{t+1} = (1-\rho_A)\ln \bar{A} + \rho_A \ln A_t + \epsilon_{At}$，$\rho_A = 0.9$，$\sigma_A = 0.01$。

α	β	δ	ρ_A	g_z	σ_A	b
0.33	0.9901	0.025	0.9	1	0.01	1

- 代入参数可得：$\frac{k}{y} = 9.4288$，$\frac{c}{y} = 0.7643$，$N = 0.4671$，$y = 1.4106$，$k = 13.3002$，$c = 1.0781$。

模型的拟合程度

	美国的实际数据	校准实际经济周期模型
σ_Y	1.92	1.30
σ_C/σ_Y	0.45	0.31
σ_I/σ_Y	2.78	3.15
σ_L/σ_Y	0.96	0.49
$Corr\,(L, Y/L)$	-0.14	0.93

实际数据与校准后的实际经济周期模型

- RBC 模型难以解释：
  - 劳动市场的波动性。
  - 工资与劳动小时的相关性。
  - 产出的持续性。

圣路易方程

- RBC 模型的一个基本假设是货币冲击只会改变名义价格，不会改变实际经济变量和相对价格。
- 圣路易方程：使用产出对货币的回归检验货币变动是否具有实际效应。
  - 数据：实际 GDP，M2，1960Q2~2007Q4。

$$\begin{aligned}\Delta \ln Y_t = & \underset{(0.0028)}{0.0044} - \underset{(0.10)}{0.05}\,\Delta \ln m_t + \underset{(0.12)}{0.17}\,\Delta \ln m_{t-1} + \underset{(0.12)}{0.16}\,\Delta \ln m_{t-2} \\ & + \underset{(0.12)}{0.01}\,\Delta \ln m_{t-3} - \underset{(0.10)}{0.02}\,\Delta \ln m_{t-4} - \underset{(0.000012)}{0.000004t},\end{aligned} \tag{17}$$

$$\bar{R}^2 = 0.048, \qquad D.W. = 1.49, \qquad s.e.e. = 0.008,$$

- 上述回归的问题：
  - 内生性：1. 可能互为因果，产出波动通过影响需求改变货币总量。2. 货币政策往往是对产出的反应。如果货币具有实际效应，可能会观察到货币变动对应的产出并不变动。
  - 样本区间内的货币需求会发生较大变化，导致结果对统计口径敏感。

RBC 模型面临的难题

- 证据表明货币冲击具有不可忽视的实际效应。
- 索洛剩余的变动难以简单解释为技术冲击。规模报酬递增、要素利用率以及资源配置优化都可能提高生产率。
- 实证结果发现技术冲击可能会导致劳动投入下降而不是上升。
- 信贷市场、产品市场以及要素市场可能并不是竞争性的。价格也并不能灵活调整。
- RBC 模型预测的产出变动远远小于数据中的观察结论，并且其变化特征也大为不同。

模型扩展：不可分劳动

- Hansen (1985)，Rogerson (1988)。解决 RBC 中劳动市场的波动性偏低的问题。
- 在传统模型中，所有个体都工作的相同数量，在 t 期从闲暇获得的效用是 $b\ln[1-(L_t/N_t)]$。该表达式对 L_t 的二阶导数为负，即工作的边际负效用递增。
- 不可分劳动假设：
  - 工作具有固定成本，每个经济个体的劳动供给仅有两种可能的取值，0(对应于没有就业) 与某个正值 l_0(对应于就业)。
  - 给定就业工人数量，劳动人口随机分为就业者和失业者。
- 在 t 期就业的工人数 E_t 必须满足 $E_t l_0 = L_t$，也就是说，任意个体在 t 期的就业概率都是 $(L_t/l_0)/N_t$。
- 因此，每个经济个体在 t 期从闲暇中获得的期望效用为

$$\frac{L_t/l_0}{N_t} b\ln(1-l_0) + \frac{N_t-(L_t/l_0)}{N_t} b\ln 1 = \frac{b\ln(1-l_0)}{N_t l_0} L_t. \qquad (18)$$

- 这个表达式对 L_t 是线性的，可见经济个体对于就业波动并不是风险规避的。
- 传统模型中 L_t 的反应小于不可分劳动模型。

模型扩展

- 实际扩展：
  - 多部门，Long and Plosser (1983)（参考第 5.5 节）。多部门模型可以探讨冲击如何在各部门之间传播。
  - 比例税，Baxter and King (1993)。引入扭曲性税收以及税率波动。
- 名义粘性：
  - 价格粘性
  - 工资粘性
  - 局部均衡分析