在CNN中的反向传播

1. 链式法则

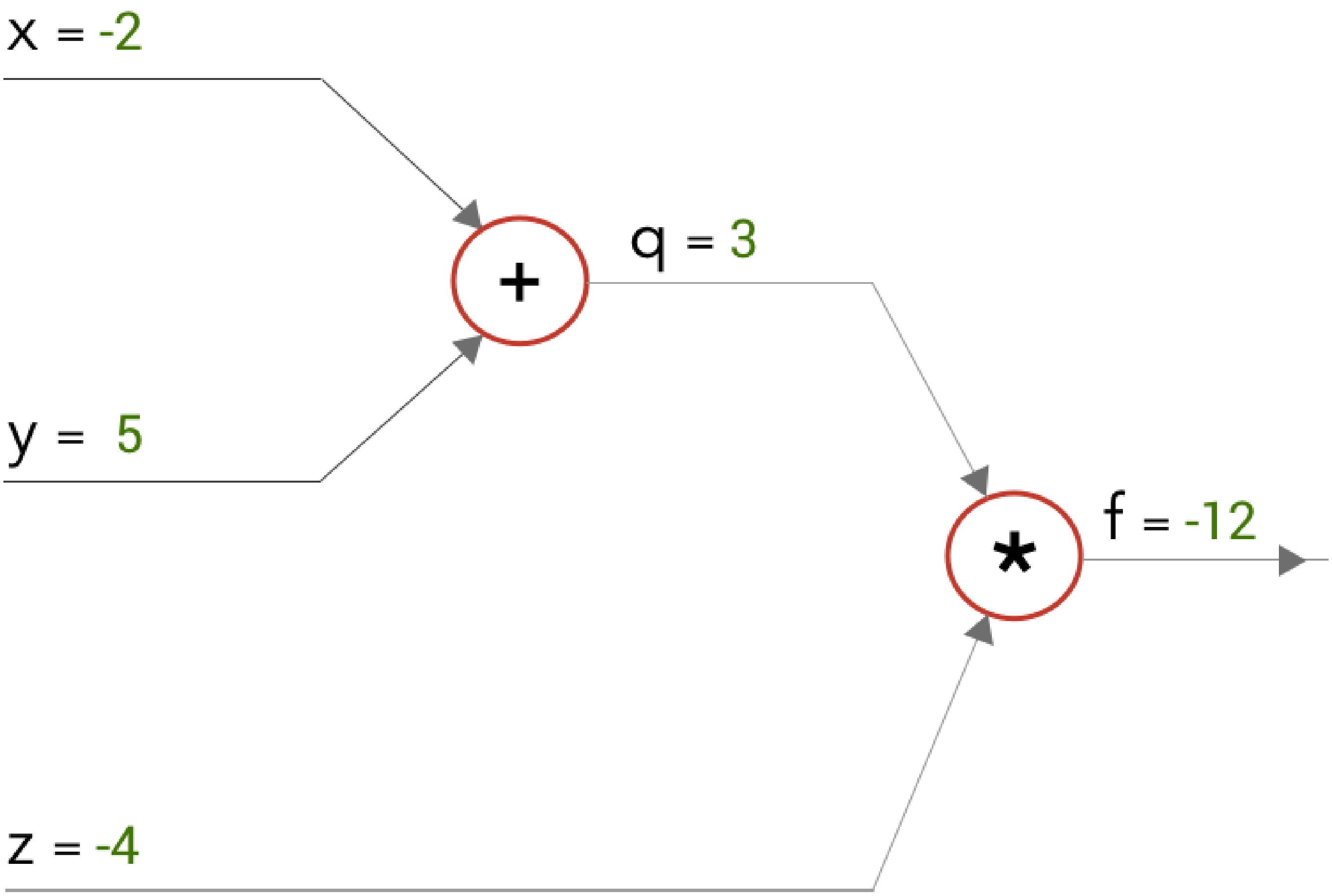
先理解一下在反向传播中的链式法则。
假设有下面这个等式：

$$f(x,y,z) = (x+y)z$$

我们可以把它划分成两个等式：

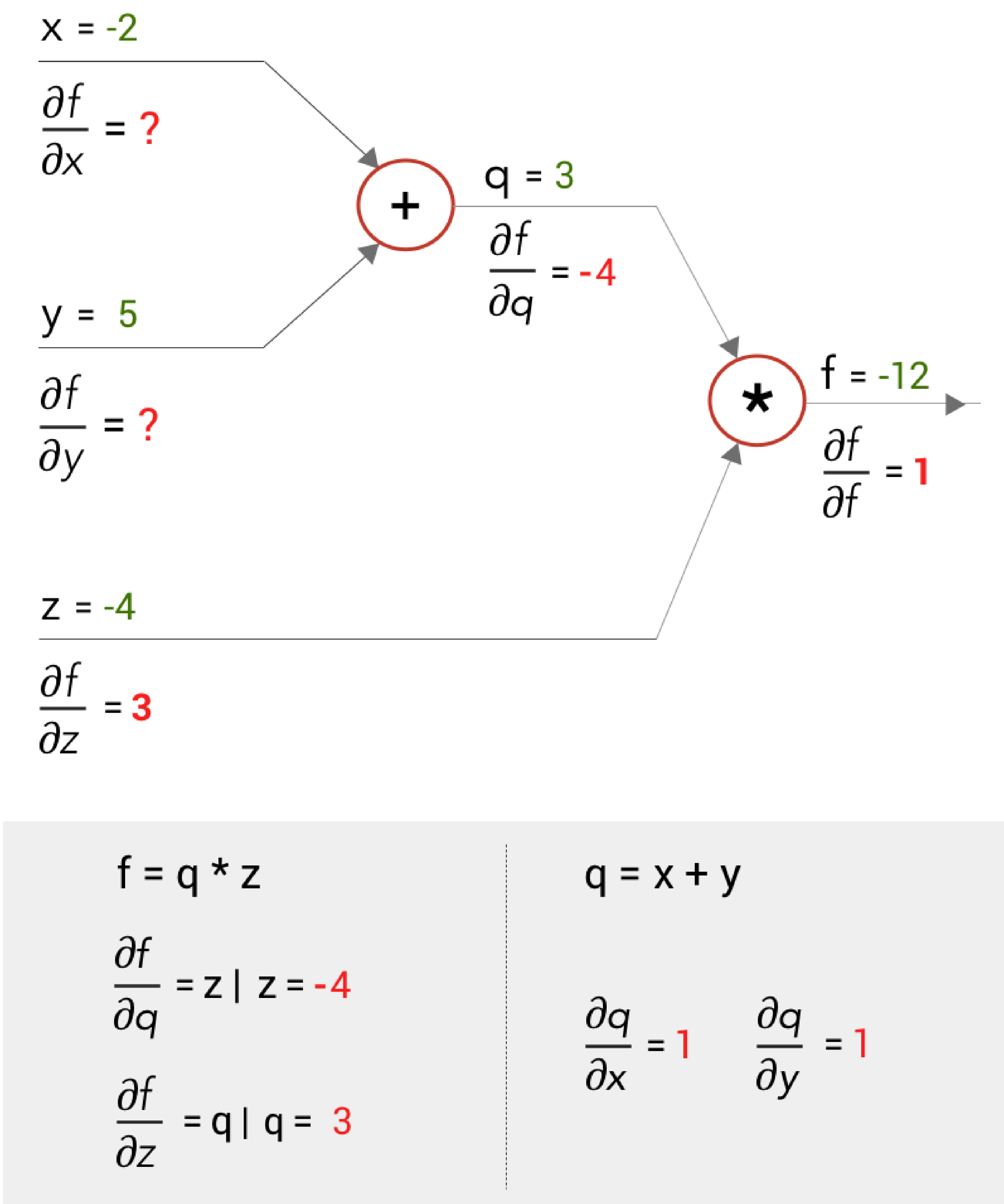
$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& (x+y)z \\ q =& x+y \\ f =& q*z \end{aligned}$$

下面让我们画出关于x, y, z的计算图，其中$x = -2, y = 5, z = 4$：



当我们按照上图从左到右进行计算时（前向传播），可以得到$f = -12$。

现在让我们回到反向传播阶段。我们计算梯度从右往左，因此最后，我们可以得到关于我们的输入x, y, z的梯度：$\partial f / \partial x$、$\partial f / \partial y$和$\partial f / \partial z$。
在从右往左进行计算时，在乘积门，我们可以得到$\partial f / \partial q$和$\partial f / \partial z$，
在加和门我们可以得到$\partial q / \partial x$和$\partial q / \partial y$。



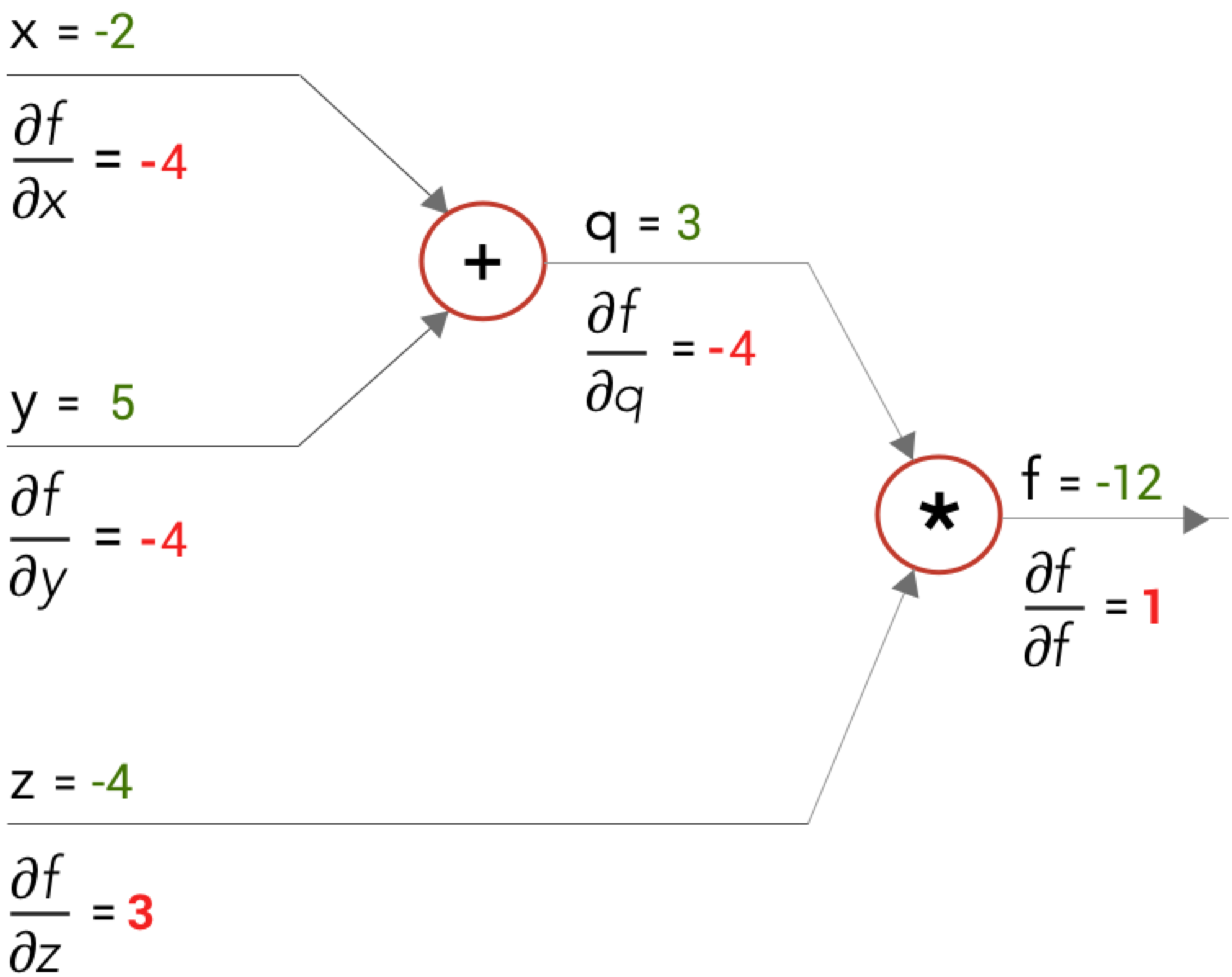
我们希望获得$\partial f/\partial x$和$\partial f/\partial y$，但是目前我们只获得了$\partial q/\partial x$和$\partial q/\partial y$，那么我们达到我们的目标

呢。
这里就可以使用链式法则来进行推导，通过链式法则，我们可以计算$\partial f/\partial x$：

Using chain rule:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q} * \frac{\partial q}{\partial x}$$

那么我们可以计算得到$\partial f/\partial x$和$\partial f/\partial y$如下：

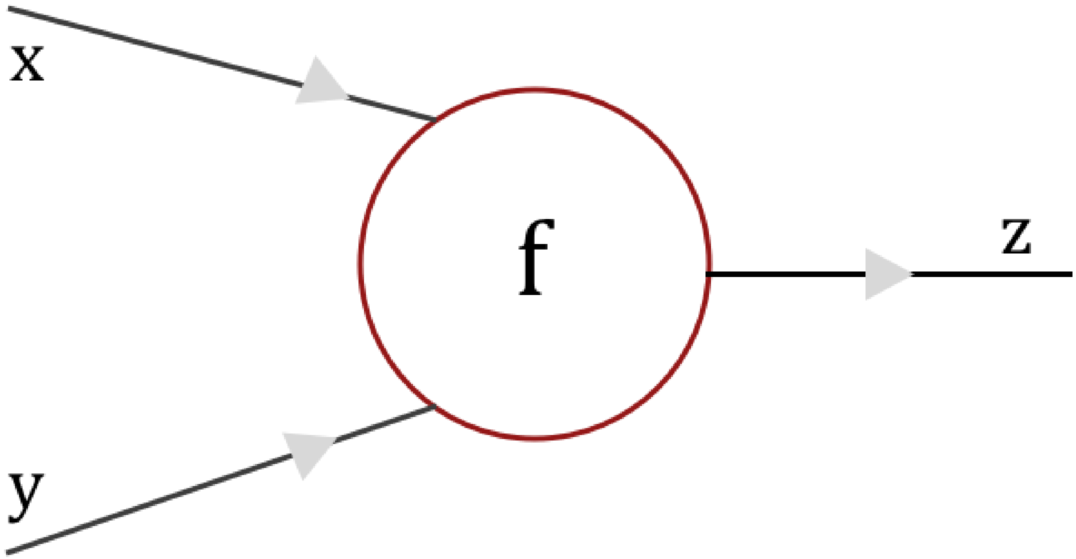


$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q} * \frac{\partial q}{\partial x} = -4 * 1 = -4$$

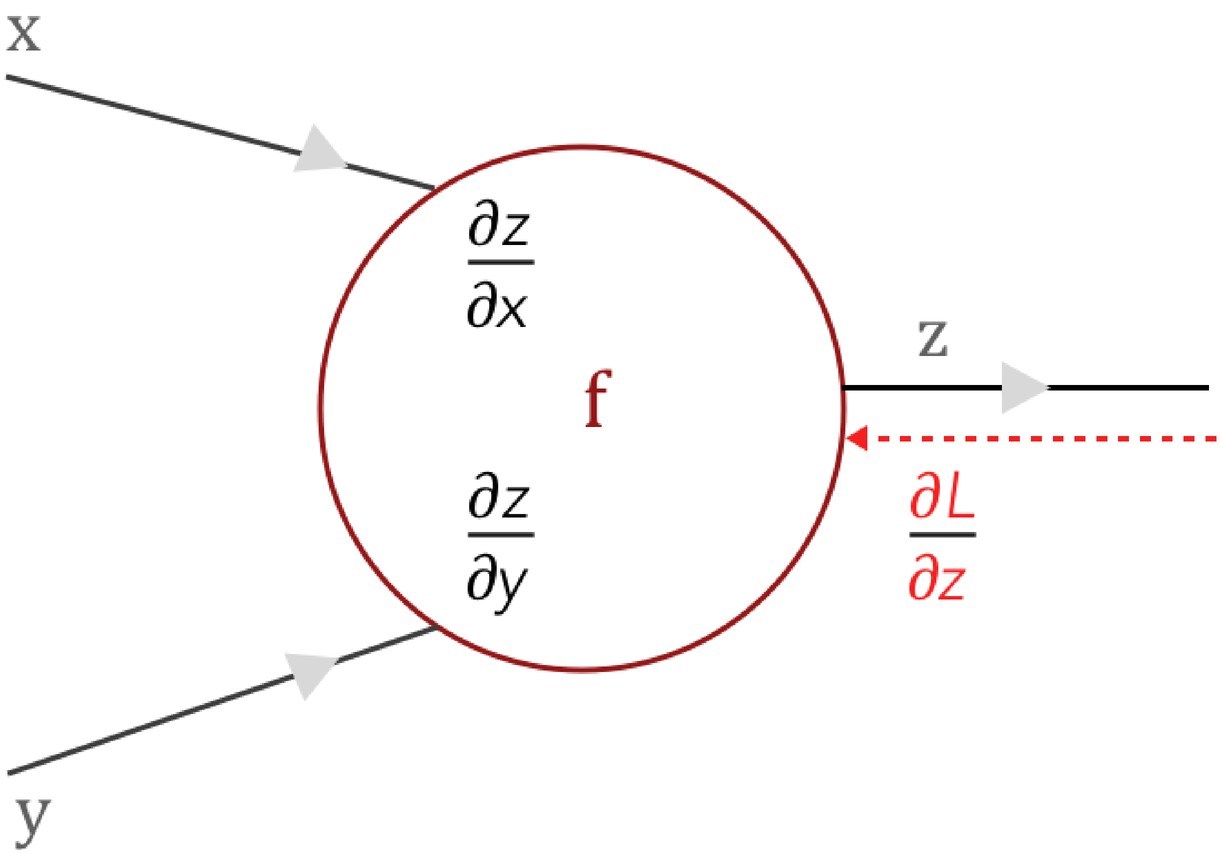
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q} * \frac{\partial q}{\partial y} = -4 * 1 = -4$$

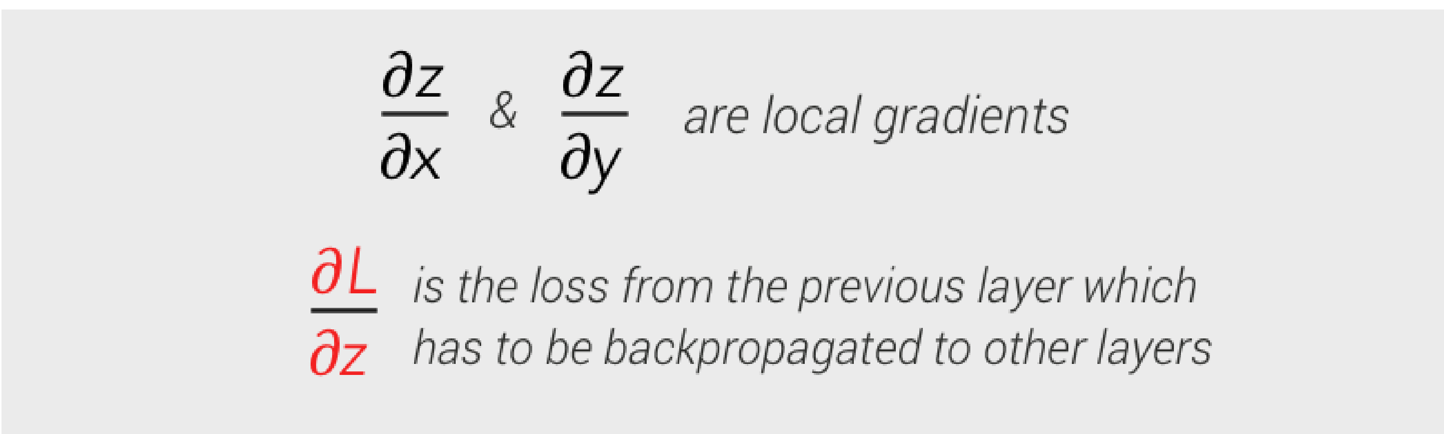
2. 在卷积层中的链式法则

如下所示，我们有一个门函数f，它的输入是x和y，输出是z：

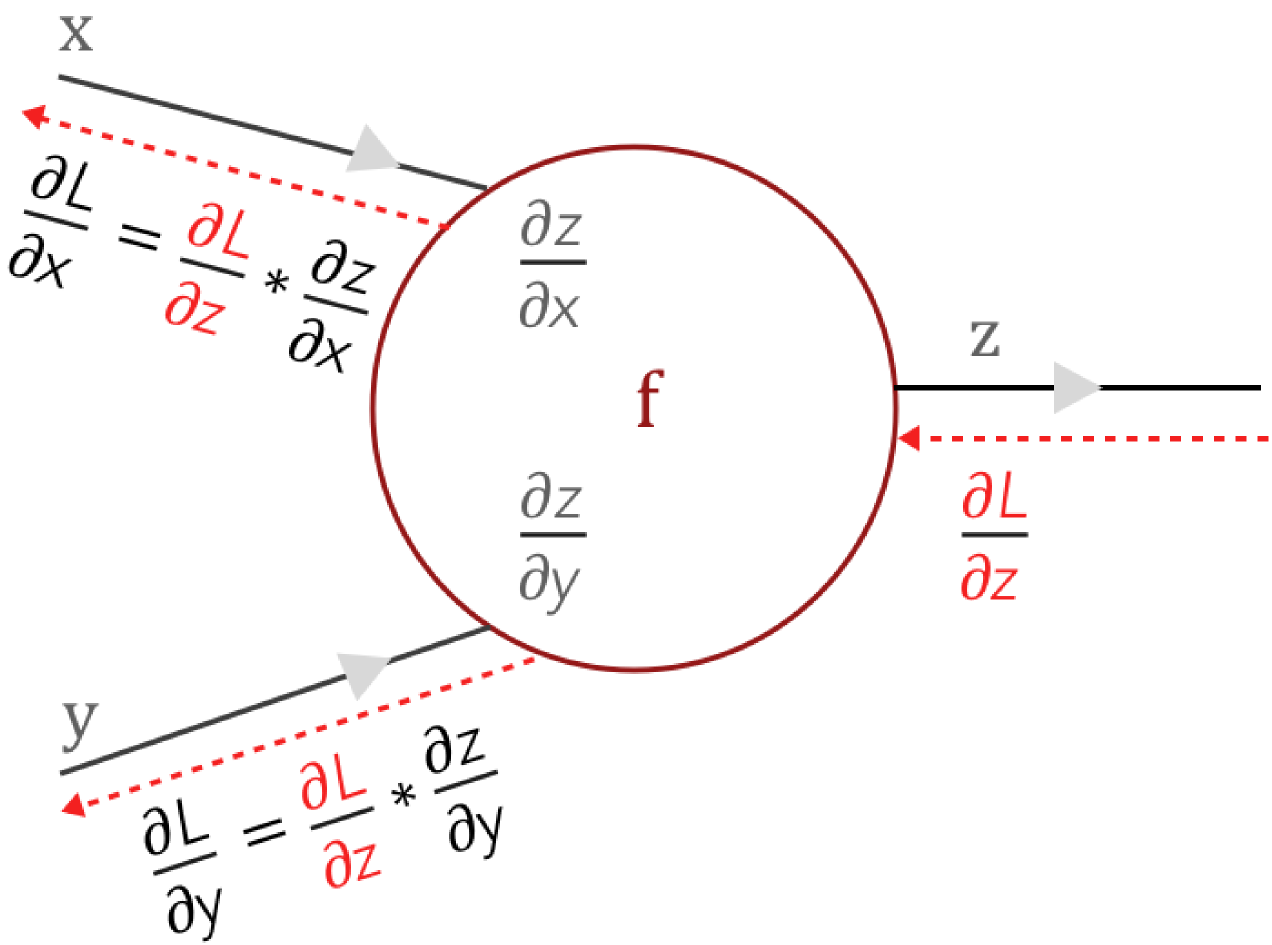


我们可以很容易的计算出局部梯度$\partial z / \partial x$ 和$\partial z / \partial y$。
对于前向传播阶段，我们可以通过一个CNN层，然后一直往后传，直到用损失函数计算出它的损失。
然后当我们计算损失反向传播时，一层一层的往前传，我们获得了对于z的梯度$\partial L / \partial z$。此时为了继续往前传，我们需要计算出$\partial L / \partial x$和$\partial L / \partial y$。





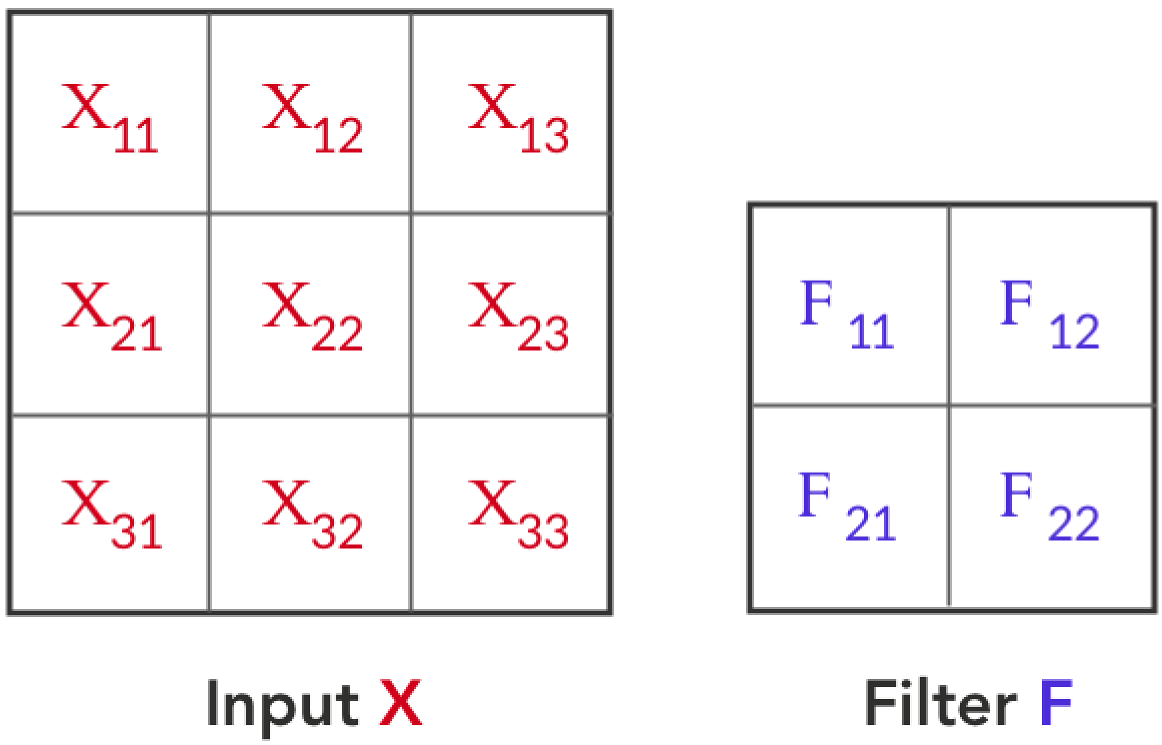
此时使用链式法则，我们可以计算出$\partial L/\partial x$和$\partial L/\partial y$:



$\frac{\partial z}{\partial x}$ & $\frac{\partial z}{\partial y}$ *are local gradients*

$\frac{\partial L}{\partial z}$ *is the loss from the previous layer which has to be backpropagated to other layers*

那么，具体的对于CNN中的卷积层是如何进行反向传播的呢?
现在，让我们假设f是一个卷积函数，对于输入X和卷积核F进行卷积计算，其中X是一个3×3的矩阵，而F是一个2×2的矩阵:



在X和F的卷积操作的输出为O，可以被表示为如下：