



# 数值计算笔记：中大 2022 人工智能学院课程

## 1 求解线性方程组的迭代方法

$$Ax=b \Leftrightarrow (N-P)X=b$$

↓  
可逆

$$\Leftrightarrow NX=b+PX$$

$$X=N^{-1}b+N^{-1}PX$$

$$X^{(k)}=MX^{(k-1)}+g \quad \text{迭代关系式}$$

$$\star \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (MX^{(k-1)} + g)$$

简单 (Jacobi) 迭代:

$$D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

$$\text{构造 } Ax=(D+A-D)X=b$$

$$\Leftrightarrow DX=(D-A)X+b$$

$$\Leftrightarrow X^{(k)}=(I-D^{-1}A)X^{(k-1)}+D^{-1}b$$

$$\star \text{ 记 } R=I-D^{-1}A, \quad g=D^{-1}b:$$

$$\text{迭代方程式: } X^{(k+1)}=RX^{(k)}+g$$

$$\text{收敛条件: } \rho(R)=\max_{1 \leq i \leq n} |r_{ii}| < 1 \quad (\text{充要})$$

$A$  为严格对角优 (行列都大于其它项之和)

## Gauss-Seidel 迭代

$$A = D + L + U$$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\searrow$  上三角  
 对角   下三角

$$X^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} U X^{(k)} + (D+L)^{-1} b$$

$$S X^{(k)} + f$$

当  $A$  严格对角优 / 正定, 收敛

## 松弛迭代

$$A = D + L + U$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^{(k+1)} = -D^{-1} L X^{(k+1)} - D^{-1} U X^{(k)} + D^{-1} b \\ X^{(k+1)} = \tilde{L} X^{(k+1)} + \tilde{U} X^{(k)} + g \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Gauss-Seidel} \\ \text{的另一种形式} \end{array} \right\}$$

对 Gauss-Seidel  $X^{(k+1)}$  和  $X^{(k)}$  加权平均即松弛迭代:

$$X^{(k+1)} = (1-w) X^{(k)} + w(\tilde{L} X^{(k+1)} + \tilde{U} X^{(k)} + g)$$

$$\text{记 } S_w = (I + w D^{-1} L)^{-1} [(1-w)I - w D^{-1} U]$$

$$f = w(I + w D^{-1} L)^{-1} D^{-1} b$$

$$\text{迭代方程: } X^{(k+1)} = S_w X^{(k)} + f$$