

# SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

TRABAJO FINAL

**ANÁLISIS DE UN SISTEMA PARA CALENTAR UN  
DEPÓSITO DE AGUA**



Ismael Gomez Garrido 100364570

## ÍNDICE

<b>ÍNDICE .....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>2</b>
<b>DEFINICIÓN DEL MODELO .....</b>	<b>2</b>
Fundamento teórico y ecuaciones .....	3
Implementación en MATLAB .....	4
<b>ANÁLISIS .....</b>	<b>5</b>
Cambio de depósito .....	5
Apagón en el sistema .....	6
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>9</b>

## INTRODUCCIÓN

Los calentadores de agua o de cualquier otro líquido son muy importantes y utilizados en el mundo actual. Por un lado, en todas las casas hay uno para calentar el agua de uso sanitario. En la industria también es bastante común la necesidad de calentar cualquier líquido a cierta temperatura en distintos procesos industriales.

## DEFINICIÓN DEL MODELO

Nuestro sistema consiste en un depósito cerrado de agua o algún otro líquido que tiene un calentador eléctrico sumergido. La transferencia de calor desde el calentador al líquido es a través de una cubierta de metal con resistencia térmica  $R_{HL}$ . También hay que tener en cuenta las pérdidas al exterior del depósito dadas por una resistencia térmica  $R_{La}$ . El depósito cuenta con un mezclador que hace que podamos considerar la temperatura del agua igual en todos los puntos. El líquido y el calentador tienen una capacidad térmica de  $C_L$  y  $C_H$  respectivamente. La capacidad térmica del líquido depende de su densidad, calor específico  $\sigma$  y del volumen del depósito. El calentador eléctrico suministra un calor al sistema  $q_i(t)$  que puede variar con el tiempo.

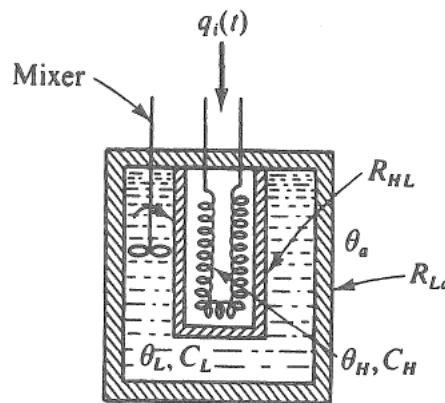


Ilustración 1. Esquema del modelo

Las temperaturas del líquido y del calentador vienen dadas por  $\theta_L$  y  $\theta_H$  respectivamente, la temperatura ambiente es  $\theta_a$  y es constante en el tiempo. Fijaremos también que en instante inicial las temperaturas del calentador y del líquido son iguales a la temperatura ambiente.

Los parámetros que definen nuestro modelo físico son:

(Por ahora pondremos los valores del agua en lo referente al líquido y consideraremos despreciables las variaciones en los valores de los parámetros debidas al cambio de temperatura)

- Resistencia térmica de la cubierta calentador-depósito  $R_{HL} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{K/J}$
- Resistencia térmica de la cubierta depósito-ambiente  $R_{La} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{K/J}$
- Capacidad térmica del calentador  $C_H = 20 \cdot 10^3 \text{ J/K}$
- Densidad del líquido  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Calor específico del fluido  $\sigma = 4179.6 \text{ J/Kg} \cdot \text{K}$
- Volumen del depósito  $V = 0.1 \text{ m}^3$
- Temperatura ambiente  $\theta_a = 300^\circ$

## ❖ Fundamento teórico y ecuaciones

En este modelo vamos a tener solo en cuenta la transferencia de calor mediante conducción, despreciaremos la radiación y la convección por que sus efectos en este modelo no son comparables a los de la conducción.

La ecuación fundamental de la transferencia de calor por conducción es:

$$\vec{\kappa} = -\frac{\vec{Q}}{\nabla T},$$

$\vec{Q}$  es el vector de flujo de calor (perpendicular a la sección de transferencia).  
 $\nabla T$  es el gradiente de temperaturas.

La resistencia térmica es una propiedad del calor y una medida de la diferencia de temperatura por la cual un objeto o material resiste un flujo de calor. La resistencia térmica para la conducción en una pared plana se define como:

$$R_t = \frac{L}{kA}$$

where  
 $k$  is the materials conductivity [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ]  
 $L$  is the plane thickness [m]  
 $A$  is the plane area [ $\text{m}^2$ ]

La capacidad térmica de un líquido se define como:

$$C_L = \rho \cdot \sigma \cdot V \quad (1)$$

De ahora en adelante usaremos  $C_L$  en lugar de los otros tres parámetros.

La velocidad de cambio de la temperatura de un cuerpo que está intercambiando calor con el exterior es:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{C} [q_{\text{in}}(t) - q_{\text{out}}(t)] \quad (2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_H &= \frac{1}{C_H} [q_i(t) - q_{HL}] \\ \dot{\theta}_L &= \frac{1}{C_L} [q_{HL} - q_{La}] \end{aligned} \quad (3)$$

El calor intercambiado entre el intercambiador y el líquido y entre el líquido y el ambiente viene dado por estas ecuaciones:

$$q_{HL} = (\theta_H - \theta_L)/R_{HL} \quad q_{La} = (\theta_L - \theta_a)/R_{La} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) en (2) tenemos que:

$$\dot{\theta}_H = \frac{q_i(t)}{C_H} + \frac{\theta_L}{C_H \cdot R_{HL}} - \frac{\theta_H}{C_H \cdot R_{HL}} \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_L = \frac{\theta_a}{C_L \cdot R_{La}} + \frac{\theta_H}{C_L \cdot R_{HL}} - \frac{\theta_L \cdot (R_{La} + R_{HL})}{C_L \cdot R_{HL} \cdot R_{La}} \quad (6)$$

Con las ecuaciones (5) y (6) ya podemos simular el sistema en MATLAB usando ode45.

## ❖ Implementación en MATLAB

Hacemos una simulación del sistema con los parámetros anteriormente dados durante 1 hora y con un calor constante en el tiempo de  $2 \cdot 10^4$  W.

Este es el código usado:

```
1 function z = Calentador(t,y, qi, oa, Rh1, Rla, Ch, Cl)
2     z = [(qi + y(2)/Rh1 - y(1)/Rh1)/Ch;
3         (oa/Rla + y(1)/Rh1 - (y(2)*(Rla+Rh1))/(Rh1*Rla))/Cl];
```

Ilustración 2. Función para el modelo principal

```
1 tend = 3600;%Tiempo en segundos
2 a = 10;%Puntos por segundo
3
4 Rh1 = 1e-3; Rla = 5e-3; % s*K/J
5 Ch = 20e3; %J/K
6 rho = 1000; sig = 4179.6; V = 0.1; % kg/m^3      J/kg*K      m^3
7 oa = 300; % *K
8
9 Cl = rho*sig*V;
10
11 qi = 2*10^4; %W
12 tspan = linspace(0,tend,a*tend);
13 ic = [oa oa];
14 [t,y] = ode45(@Calentador, tspan, ic, [], qi, oa, Rh1, Rla, Ch, Cl);
15 %%
16 plot(t, y(:,1), 'b-', t, y(:,2), 'b--')
17 xlabel('Tiempo[s]')
18 ylabel('Temperatura[K]')
19 text(0.45*tend, y(tend*a,2)-20, ['Temperatura final del líquido = ' num2str(y(tend*a,2)) '°K'])
20 title('Temperaturas')
21 legend('Temp Calentador', 'Temp Líquido', 'Location', 'Southeast');
22 hold on
```

Ilustración 3. Código para el modelo principal

Estos son los resultados:

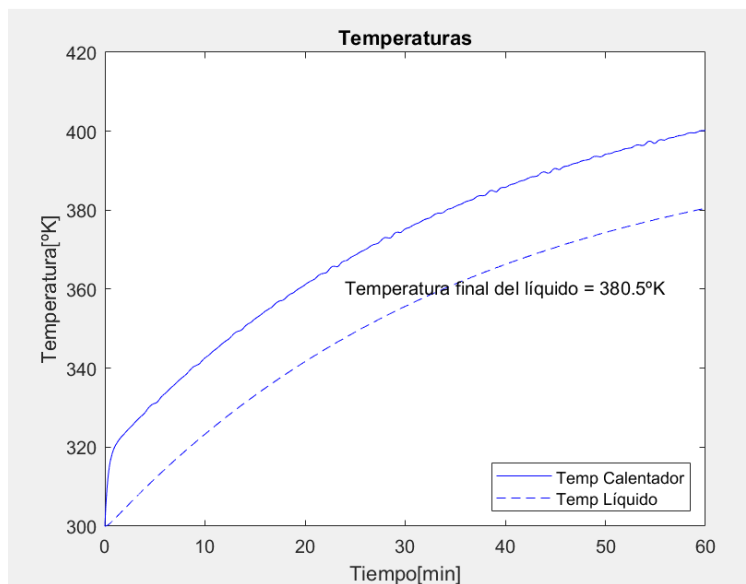


Ilustración 4. Resultados del modelo principal

Durante todo el proceso se observa como la temperatura del calentador es siempre mayor que la del líquido. A pesar de los primeros instantes donde el calentador se calienta muy rápido, las dos temperaturas crecen a un ritmo similar.

Se puede intuir que en algún momento el sistema llegará a un estado estacionario debido a que el crecimiento de las temperaturas va disminuyendo lentamente con el tiempo.

## ANÁLISIS DEL SISTEMA

Ahora que ya tenemos el sistema implementado en MATLAB podemos analizarlo cambiando algunos parámetros o características.

### 1 - Cambio de depósito

Probemos a cambiar 2 características del depósito como son la cubierta, que determina cuanto aislado está del ambiente, y el tamaño, que determina la cantidad necesaria de calor para calentar el líquido.

Primero cambiaremos solo la cubierta exterior, puede ser cambiando el material o el grosor.

La resistencia térmica de la cubierta depósito-ambiente es  $R_{La} = 100 \cdot 10^{-3} \text{ s} \cdot \text{K/J}$

Y el resultado es:

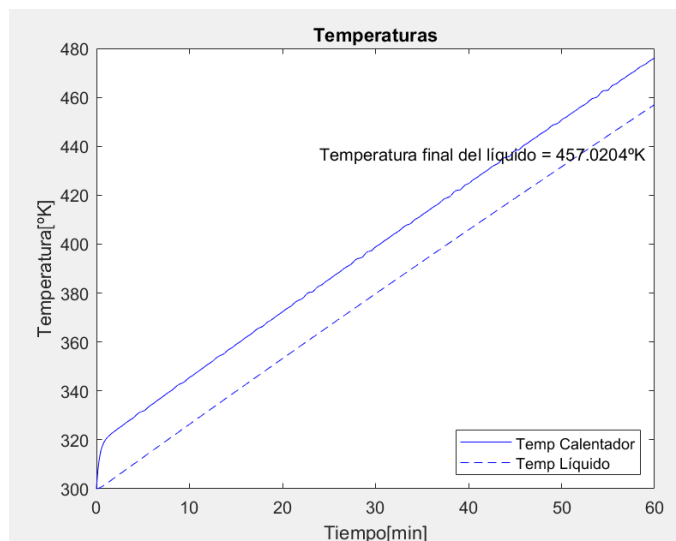


Ilustración 5. Resultado al cambiar la cubierta del depósito

La temperatura final del líquido es bastante mayor, esto es debido a la disminución de las pérdidas de calor con el ambiente. Además, podemos ver que el cambio de temperatura es mucho más lineal, la velocidad de cambio de temperatura es casi constante. En este caso no se intuye que pueda haber un futuro estado estacionario.

Ahora probamos a cambiar solo el volumen del depósito

Si el volumen del depósito es  $V = 0.3 \text{ m}^3$  el resultado es:

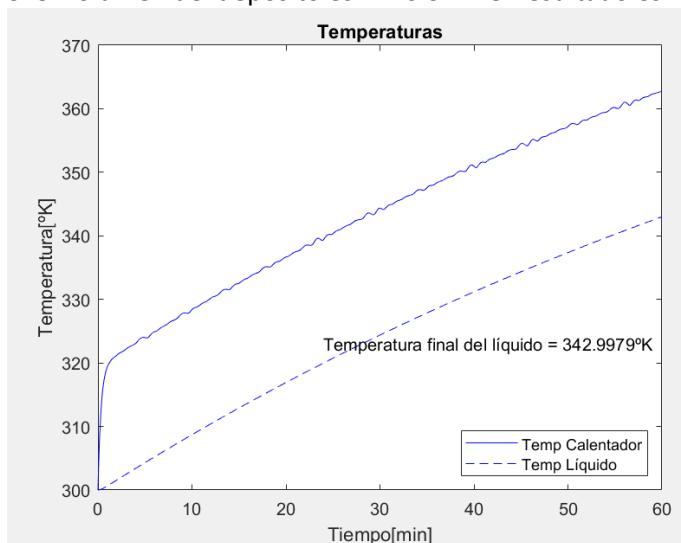


Ilustración 6. Resultado al cambiar el volumen del depósito

Evidentemente, la temperatura final ha disminuido debido a que la cantidad de agua a calentar es el triple. Sin embargo, podemos observar que esta vez el cambio de temperatura no es tan lineal como en el anterior caso.

## 2 - Apagón en el sistema

Ahora vamos a ver que pasaría si el calentador se apaga durante 15 minutos. El flujo de calor se mantendrá constante durante los 45 minutos restantes.

Para simular eso en MATLAB vamos a hacer uso de la función Heaviside, debemos considerar un flujo de calor dependiente del tiempo. Además, vamos a simular el apagón en 3 situaciones diferentes, primero cambiando el momento cuando se produce el apagón y luego cambiando su duración:

```

1 - tend = 3600; %Tiempo en segundos
2 - a = 10; %Puntos por segundo
3
4 - Rh1 = 1e-3; Rla = 5e-3; % s*K/J
5 - Ch = 20e3; %J/K
6 - rho = 1000; sig = 4179.6; V = 0.1; % kg/m^3      J/kg*K      m^3
7 - oa = 300; % Temperatura ambiente ^K
8
9 - Cl = rho*sig*V;
10
11 - qit = linspace(0,tend,tend*a);
12 - tspan = linspace(0,tend,tend*a);
13 - ic = [oa oa]; %Condiciones iniciales
14 - Ap = [15 30; 40 55; 15 35]; %Minutos de comienzo y final del apagón
15 - i = 0; %Contador de figuras
16 - for n = 1:3
17 -     apag = 1 - heaviside(qit-Ap(n,1)*60) + heaviside(qit-Ap(n,2)*60);
18 -     qi = 2*10^4*apag; %W
19 -     [t,y] = ode45(@Calentador1, tspan, ic, [], qit, qi, oa, Rh1, Rla, Ch, Cl);
20
21 -     Vmed = (y(Ap(n,1)*60*a,2)-y(Ap(n,2)*60*a,2))/(Ap(n,2)-Ap(n,1));

```

Ilustración 7. Código usando la función de Heaviside

```

1 - function z = Calentador1(t,y, qit, qi, oa, Rh1, Rla, Ch, Cl)
2 -     qi = interp1(qit,qi,t); % Interpolación de (qit,qi) en t
3 -     z = [(qi + y(2)/Rh1 - y(1)/Rh1)/Ch;
4 -         (oa/Rla + y(1)/Rh1 - (y(2)*(Rla+Rh1))/(Rh1*Rla))/Cl];

```

Ilustración 8. Función del modelo con el flujo variable en el tiempo

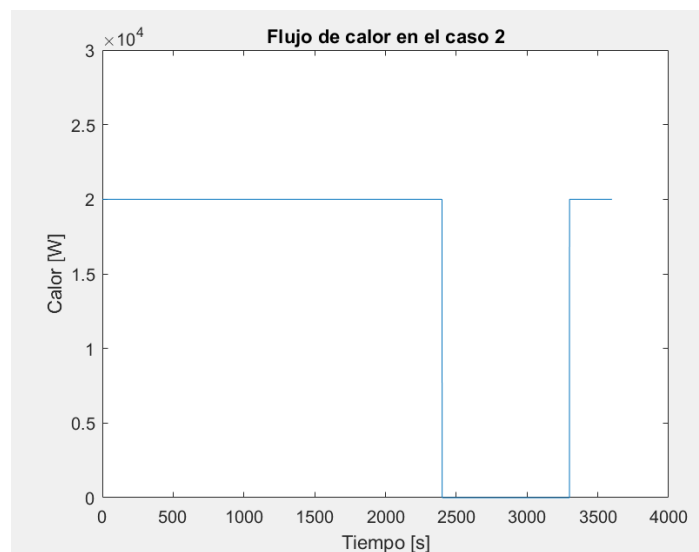


Ilustración 9. Flujo de calor usando la función de Heaviside durante el caso 2

- Primer caso: Apagón del minuto 15 al 30:

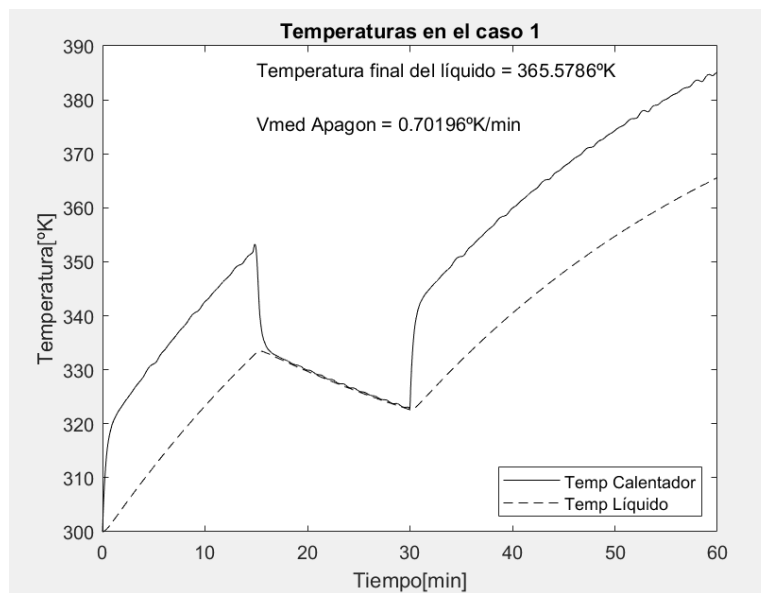


Ilustración 10. Resultados al simular apagón, caso 1

Se aprecia perfectamente el momento en el que se deja de aportar calor al sistema. Es interesante que la caída de temperatura del calentador es mucho mayor que la del líquido. Esto es debido a que, durante el apagón, el líquido y el calentador entran rápidamente en equilibrio. Luego se aprecia como el calentador vuelve a calentarse más rápido.

- Segundo caso: Apagón del minuto 40 al 55:

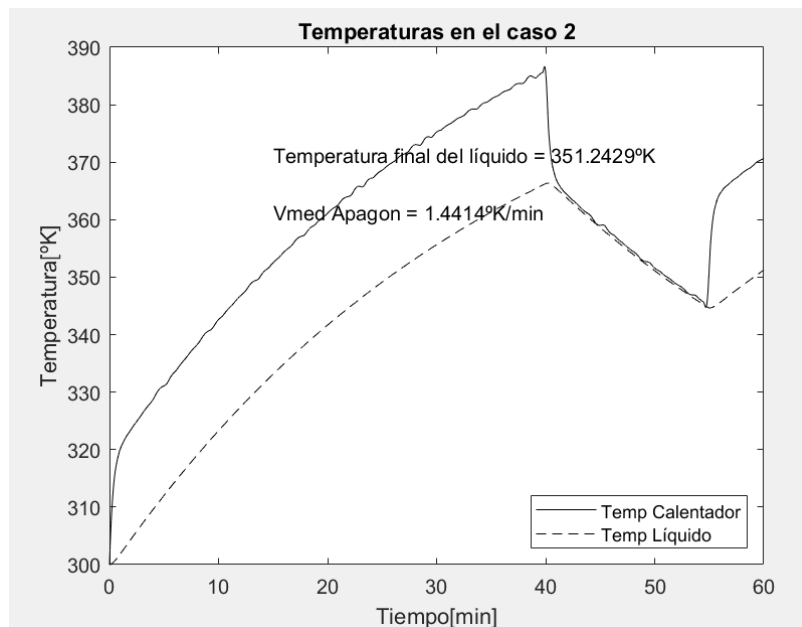
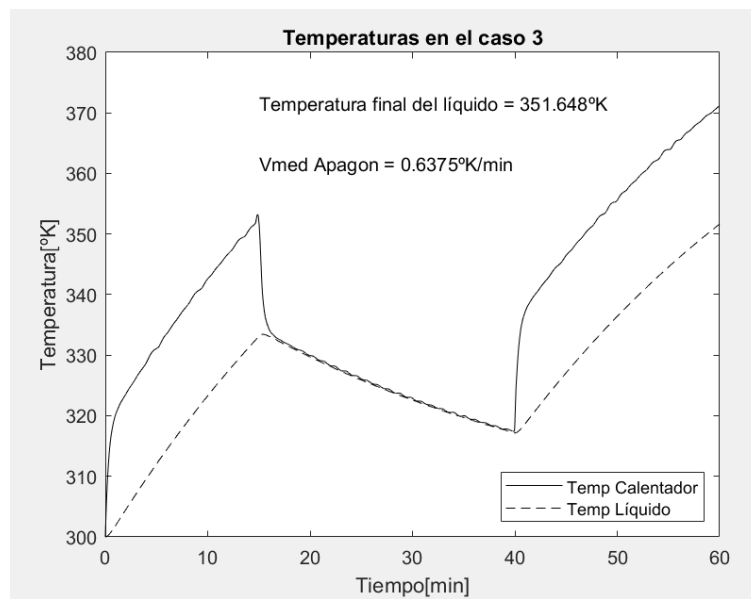


Ilustración 11. Resultados al simular apagón, caso 2

Se aprecian los mismos efectos relatados que en el primer caso, pero con ligeras diferencias. Al producirse el apagón más tarde, la pérdida de temperatura ha sido mayor debido a que la transferencia de calor es más rápida cuanto mayor es la diferencia de calor entre los cuerpos. Por eso, la temperatura final es más baja ahora.



- Tercer caso: Apagón del minuto 15 al 40:



Ahora la velocidad media de transferencia de calor es menor que en el caso 1, esto es por que según la temperatura del líquido se va acercando ala temperatura ambiente la transferencia es más lenta. Es interesante que la temperatura final del caso 3 es muy parecida a la del caso 2; en el caso 2 la pérdida es corta y rápida mientras que en el caso 3 es larga y lenta.

## REFERENCIAS

- ✚ Modeling and Analysis of Dynamic Systems 3<sup>rd</sup> Edition. Charles M. Close, Dean K. Frederick, Jonathan C. Newell
- ✚ <https://www.mobt3ath.com/uplode/book/book-28639.pdf>
- ✚ <https://www.thermal-engineering.org/what-is-thermal-resistance-thermal-resistivity-definition/>
- ✚ [https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal\\_mass/](https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_mass/)