置信域方法

维基百科，自由的百科全书

置信域方法（Trust-region methods）又称为信赖域方法，它是一种最优化方法，能够保证最优化方法总体收敛。

目录

算法发展

置信域方法的历史可以追溯到Levenberg(1944)，Marquardt(1963)，Goldfeld，Quandt and Trotter(1966)，但现代置信域方法是Powell(1970)提出来的。他明确提出了置信域子问题，接受方向步s_k的准则，校正置信域半径∇_k的准则，及收敛性定理。这些措施使置信域方法比线搜索方法具有更大的优越性。

思想框架

考虑$\min\limits_{x\in R^n} f(x)$，其中$f(x)$是定义在$R^n$上的二阶连续可微函数。 定义当前点的邻域$\Omega_k$

$$\Omega_k = \{x \in R^n \,|\, \|x - x_k\| \le \Delta_k\},$$

这里Δ_k称为置信域半径。假定在这个邻域中，二次模型是目标函数$f(x)$的一个合适的近似，则在这个邻域（称为置信域）中极小化二次模型，得到近似极小点s_k，并取 ，其中$\|s_k\| \le \Delta_k$。

置信域方法的模型子问题是

$$\begin{cases} \min\ q^{(k)}(s) = f(x_k) + g_k^T s + \dfrac{1}{2} s^T B_k s \\ s.t. \quad \|s\| \le \Delta_k \end{cases}$$

其中，$s = x - x_k$，$g_k = \nabla f(x_k)$，B_k是一个对称矩阵，它是黑塞矩阵$\nabla^2 f(x_k)$或其近似，$\Delta_k > 0$为置信域半径，$\|\cdot\|$为某一范数，通常我们采用l_2范数。

选择Δ_k的方法：根据模型函数$q^{(k)}(s)$对目标函数$f(x)$的拟合程度来调整置信域半径Δ_k。 对于置信域方法的模型子问题的解s_k，设目标函数的下降量

$$Ared_k = f(x_k) - f(x_k + s_k)$$

为实际下降量，设模型函数的下降量

$$Pred_k = q^{(k)}(0) - q^{(k)}(s_k)$$

为预测下降量。 定义比值

$$r_k = \frac{Ared_k}{Pred_k} = \frac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{q^{(k)}(0) - q^{(k)}(s_k)},$$

它用来衡量模型函数$q^{(k)}$与目标函数f 的一致性程度。

置信域算法

- 步1. 给出初始点x_0，置信域半径的上界$\bar{\Delta}$，$\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$，$\varepsilon \geq 0$，$0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$，$0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$，$k := 0$
- 步2. 如果$\|g_k\| \leq \varepsilon$，停止
- 步3. （近似地）求解置信域方法的模型子问题，得到 s_k
- 步4. 计算$f(x_k+s_k)$ 和 r_k。令

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + s_k, & \text{if } r_k \geq \eta_1 \\ x_k, & \text{else} \end{cases}$$

- 步5. 校正置信域半径，令

$$\begin{aligned} &\Delta_{k+1} \in (0, \gamma_1 \Delta_k], && \text{if } r_k < \eta_1; \\ &\Delta_{k+1} \in [\gamma_1 \Delta_k, \Delta_k], && \text{if } r_k \in [\eta_1, \eta_2); \\ &\Delta_{k+1} \in [\Delta_k, \min\{\gamma_2 \Delta_k, \bar{\Delta}\}], && \text{if } r_k \geq \eta_2. \end{aligned}$$

- 步6. 产生B_{k+1}，校正$q^{(k)}$，令$k:=k+1$，转步2。

应用

现今，置信域算法广泛应用于应用数学、物理、化学、工程学、计算机科学、生物学与医学等学科。相信在不远将来，信赖域方法会在更广泛多样的领域有着更深远的的发展。

参考文献

1. Andrew R. Conn,Nicholas I. M. Gould,Philippe L. Toint."Trust-region methods".Philadelphia, Pa. : SIAM [u.a.], 2000. ISBN 978-0-898714-60-9