# 置信域方法

维基百科,自由的百科全书

置信域方法(Trust-region methods)又称为信赖域方法,它是一种最优化方法,能够保证最优化方法总体收敛。

#### 目录

- 1 算法发展
- 2 思想框架
- 3 置信域算法
- 4 应用
- 5 参考文献

# 算法发展

置信域方法的历史可以追溯到Levenberg (1944),Marquardt (1963),Goldfeld,Quandt and Trotter (1966),但现代置信域方法是Powell (1970)提出来的。他明确提出了置信域子问题,接受方向步 $s_k$ 的准则,校正置信域半径 $\nabla_k$ 的准则,及收敛性定理。这些措施使置信域方法比线搜索方法具有更大的优越性。

## 思想框架

考虑 $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ ,其中f(x)是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的二阶连续可微函数。 定义当前点的邻域 $\Omega_k$ 

$$\Omega_k = \{x \in R^n | \|x - x_k\| \le \Delta_k\},\,$$

这里 $\Delta_{k}$ 称为置信域半径。假定在这个邻域中,二次模型是目标函数f(x)的一个合适的近似,则在这个邻域(称为置信域)中极小化二次模型,得到近似极小点 $s_{k}$ ,并取 ,其中 $\|s_{k}\| \leq \Delta_{k}$ 。

置信域方法的模型子问题是

$$\left\{egin{array}{l} \min \; q^{(k)}(s) = f(x_k) + g_k^T s + rac{1}{2} s^T B_k s \ s. \, t. \quad \|s\| \leq \Delta_k \end{array}
ight.$$

其中, $s=x-x_k$ , $g_k=\nabla f(x_k)$ , $B_k$ 是一个对称矩阵,它是黑塞矩阵 $\nabla^2 f(x_k)$ 或其近似, $\Delta_k>0$ 为置信域半径, $\|\cdot\|$ 为某一范数,通常我们采用 $l_2$ 范数。

选择 $\Delta_k$ 的方法:根据模型函数 $q^{(k)}(s)$ 对目标函数f(x)的拟合程度来调整置信域半径 $\Delta_k$ 。对于置信域方法的模型子问题的解 $s_k$ ,设目标函数的下降量

$$Ared_k = f(x_k) - f(x_k + s_k)$$

为实际下降量,设模型函数的下降量

$$Pred_k = q^{(k)}(0) - q^{(k)}(s_k)$$

为预测下降量。 定义比值

$$r_k = rac{Ared_k}{Pred_k} = rac{f(x_k) - f(x_k + s_k)}{q^{(k)}(0) - q^{(k)}(s_k)},$$

它用来衡量模型函数 $q^{(k)}$ 与目标函数f 的一致性程度。

#### 置信域算法

- 步1. 给出初始点 $x_0$  ,置信域半径的上界 $\bar{\Delta}$ , $\Delta_0 \in (0, \bar{\Delta})$ , $\epsilon \geq 0$ , $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$ , $0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2$ ,k := 0
- 步2. 如果 $\|g_k\| \leq \varepsilon$ ,停止
- 步3. (近似地) 求解置信域方法的模型子问题,得到 s<sub>k</sub>
- 步4. 计算 $f(x_k+s_k)$  和  $r_k$ 。令

$$x_{k+1} = egin{cases} x_k + s_k, & ext{if } r_k \geq \eta_1 \ x_k, & ext{else} \end{cases}$$

■ 步5. 校正置信域半径,令

$$egin{aligned} \Delta_{k+1} &\in (0,\gamma_1\Delta_k], & ext{if } r_k < \eta_1; \ \Delta_{k+1} &\in [\gamma_1\Delta_k,\Delta_k], & ext{if } r_k &\in [\eta_1,\eta_2); \ \Delta_{k+1} &\in [\Delta_k, \min\{\gamma_2\Delta_k,ar{\Delta}\}], & ext{if } r_k \geq \eta_2. \end{aligned}$$

■ 步6. 产生B<sub>k+1</sub>,校正q<sup>(k)</sup>,令k:=k+1,转步2。

#### 应用

现今,置信域算法广泛应用于应用数学、物理、化学、工程学、计算机科学、生物学与医学等学科。相信在不远将来,信赖域方法会在更广泛多样的领域有着更深远的的发展。

### 参考文献

1. Andrew R. Conn, Nicholas I. M. Gould, Philippe L. Toint. "Trust-region methods". Philadelphia, Pa. : SIAM [u.a.], 2000. ISBN 978-0-898714-60-9

取自 "https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=置信域方法&oldid=39027632"

- 本页面最后修订于2016年2月10日(星期三)06:07。
- 本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供,附加条款亦可能应用(请参阅使用条款)。 Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标:维基™是维基媒体基金会的商标。 维基媒体基金会是在美国佛罗里达州登记的501(c)(3)免税、非营利、慈善机构。