期末作业
利用 GSL 求解方程 $f(x) = 0$ 的探索

张立言
数学与应用数学
3210101207

2022 年 7 月 4 日

摘要

GSL 是一个十分强大的科学计算库。利用其提供的求解方程根的函数，快速求解出一般方程的根。本文主要探讨二分法、牛顿法以及其他迭代方法求解不同方程的数学原理，并且利用计算机实现出来，比较和分析了不同迭代方法的收敛性和收敛速度。

1 数学理论

利用迭代方法，使得计算机能够求解方程的数值解。下面我们讨论两种最简单的迭代求解方法。

二分法适用于连续函数是一种方程式根的近似值求法。它是基于连续函数的介值性质以及实数的闭区间套定理推导出来。

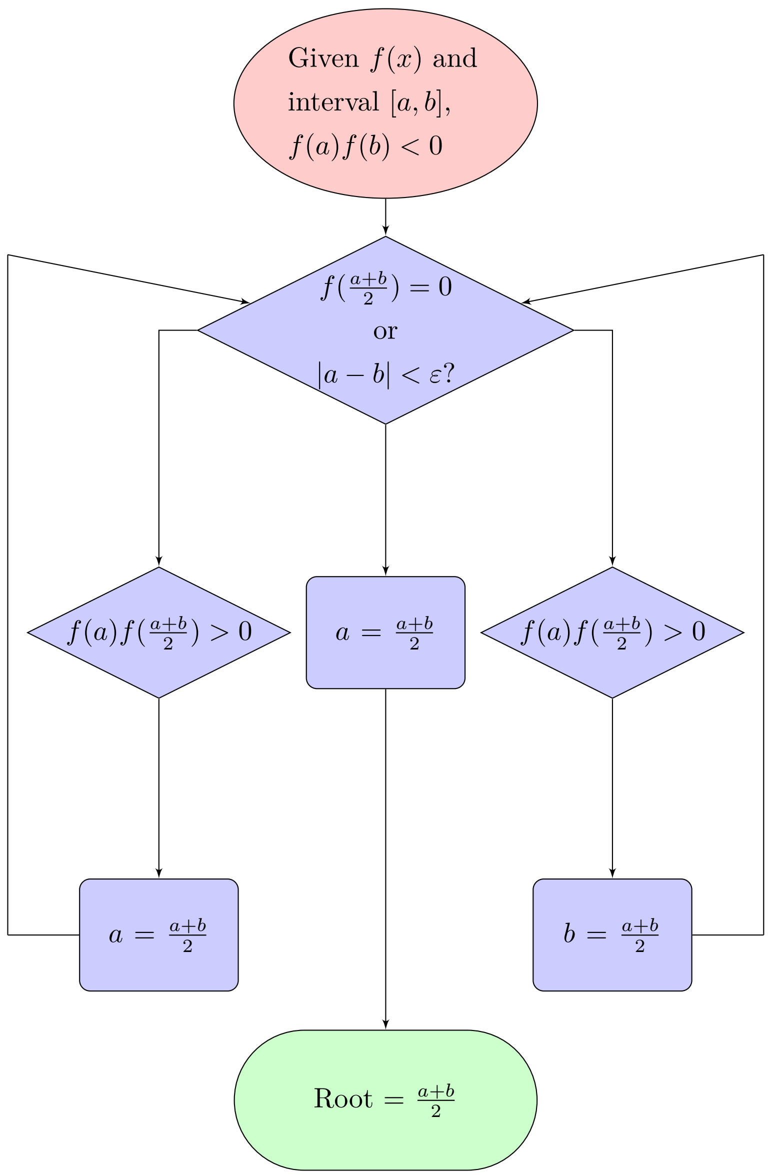
牛顿迭代 (Newton's method) 又称为牛顿-拉佛森方法 (Newton-Raphson method)，它是一种在 y 实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数 $f(x)$ 的泰勒级数的前面几项来寻找方程 $f(x) = 0$ 的根。

2 算法

两种迭代方法的实现都不困难。我们可以了解它们的算法实现。这对于我们理解收敛性很有帮助。

2.1 二分法 Bisection

二分法的思路十分简单，它要求我们求解的 $f(x) = 0$ 中的 $f(x)$ 为连续函数。算法流程如下：



2.2 牛顿法 Newton's method

其算法的实现更加简单，只要正确规定迭代停止的条件即可。

3 数值算例

3.1 不同的迭代方法

我们首先以求解方程 $f(x) = x^2 - 5 = 0$ 为例，让程序同时运行二分法和牛顿迭代法，判断其收敛性。我们设置最大迭代次数为 100, 迭代停止条件是间隔小于 0.001:

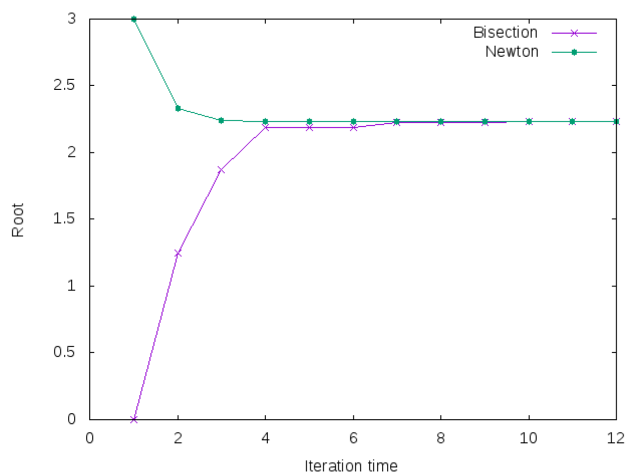


图 1: Solving $x^2 - 5 = 0$ using bisection and newton method

从图中我们可以看到，二分法以下界作为根的近似值。求解方程的迭代次数都没有超过最大迭代次数 100，而牛顿迭代法只需要 4 次即可达到迭代停止条件。

同样的，GSL 也提供了其他的迭代方法。以不需要导数的迭代为例，我们可以采用布伦特方法 (Brent's method), 在 GSL 中可以调用相关函数即可。我们进行同样的操作，与牛顿迭代法进行比较，得到如下图像:

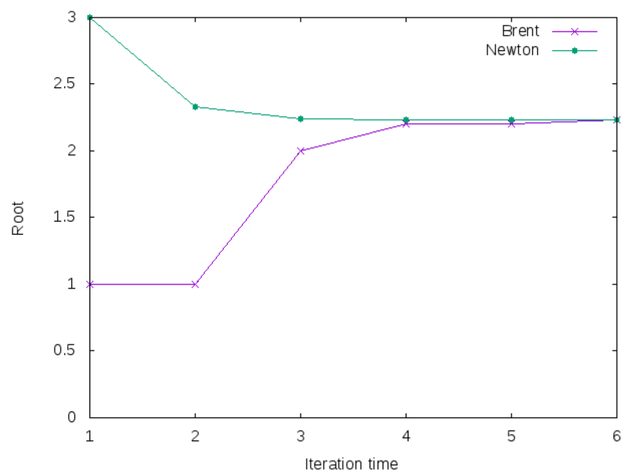


图 2: Solving $x^2 - 5 = 0$ using brent and newton method

Brent 比起二分法，迭代次数大大减少，只需要迭代 6 次就能够达到停止条件。但是从输出的数据文件来看，牛顿法迭代次数仍然少于 Brent 方法。比起不需要导数的迭代，牛顿法有着更明显的优势。

仍然以方程 $x^2 - 5 = 0$ 为例，我们再比较一下 Newton method 和斜截法 (Secant)。整理运行的数据得到如下示意图:

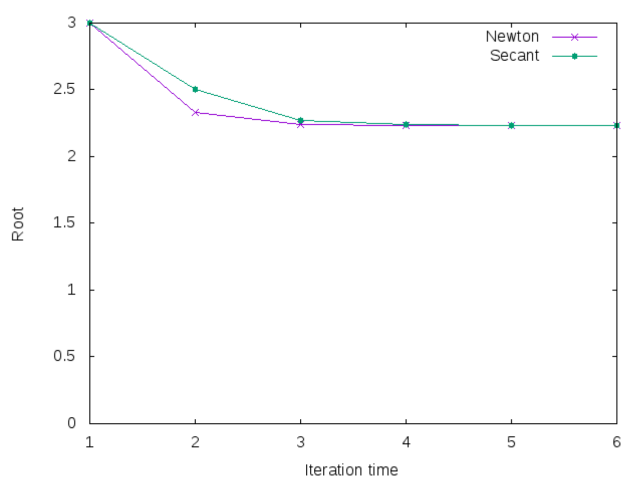


图 3: Using Newton method and secant method

从图中我们可以看到，虽然它们都是在迭代 6 次后就达到停止条件，但

是牛顿法的收敛速度明显快于斜截法。这与我们直观的想法是一致的，因为斜截法的表达式中”导数”是离散化的。

3.2 解一下超越方程

我们使用二分法和牛顿法解一个简单的超越方程：$f(x) = e^x - 4x = 0$. 我们首先看一下它在 $[0, 3]$ 的大致图像:

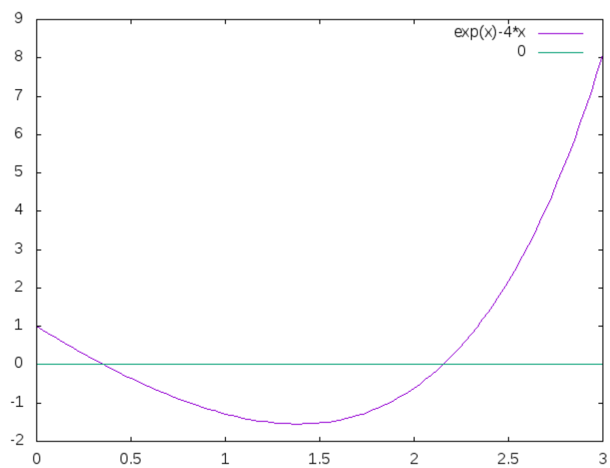


图 4: Image of $f(x)$

由此我们确定根的区间为 $[0, 3]$, 观察最终解的位置。

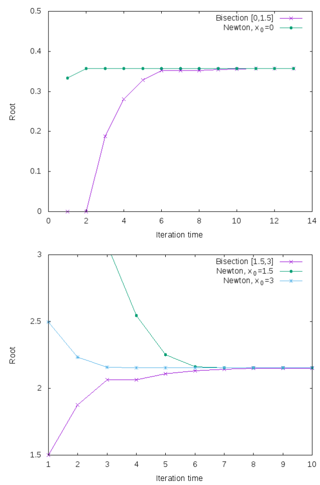


图 5: Different initial values, and bisection

首先让牛顿迭代的初值分别为 0,1.5 和 3, 最终都收敛到了较大的根, 由图中可以观察到，选取初值 $x_0 = 3$ 的时候，收敛的速度跟快。二分法由于区间的限制，必定收敛于某一个大根或者小根，相比于两次牛顿迭代，二分法仍然没有优势。

4 分析

有关二分法和牛顿法的收敛效果，我们可以由如下的一些定理进行描述:

Theorem 1 二分法达到精度 ε, 需要的最大迭代次数 N 满足:

$$N \geq \frac{ln(b_0 - a_0) - ln(\varepsilon)}{ln(2)} \tag{1}$$

因为 $varepsilon$ 在对数下，当 ε 很小的时候，需要的迭代次数会急剧增大。

Theorem 2 对于牛顿迭代法，有:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = |f''(\xi)| \tag{2}$$

在这里，e_k 表示第 k 次迭代的误差。

由上面的定理我们可以发现，牛顿迭代法的误差会以指数上的指数的级别缩小。所以说牛顿迭代法具有更好的收敛效果。

Theorem 3 对于斜截法，有:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^{\alpha}}=|f''(\xi)| where \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

通过简单的计算，我们知道 $\alpha<2$, 这一点说明了斜截法相对于牛顿迭代，收敛效果较差。但是斜截法也有优点，它适用于于导数难以计算或者导数未知的方程求解，但是牛顿法对此无能为力。

这些理论与我们实验中的数据的直观性质一致。

5 总结

这次实验充分利用了 GSL 来进行科学计算，同时也让我们看到了不同的算法求解同一个问题，虽然理论上的最终结果都是相同的，但是由于计算机只能处理离散的数据，我们要尽可能的通过离散的数据处理去接近精确的数学理论，这就体现出了不同算法的相对优势。