利用 GSL 求解方程 $f(x) = 0$ 的探索

期末作业

张立言
数学与应用数学
3210101207

浙江大学数学科学学院

2022 年 7 月 4 日

简介

- 二分法适用于连续函数是一种方程式根的近似值求法。它是基于连续函数的介值性质以及实数的闭区间套定理推导出来。我们在下面也会尝试一种基于二分法的迭代方法 Brent 方法 (Brent's method)，这种方法相比于简单的二分法收敛更快。
- 牛顿迭代 (Newton's method) 又称为牛顿-拉佛森方法 (Newton-Raphson method)，它是一种在 y 实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数 $f(x)$ 的泰勒级数的前面几项来寻找方程 $f(x) = 0$ 的根。

数学理论

有关二分法和牛顿法的收敛效果，我们可以由如下的一些定理进行描述:

Theorem 1 二分法达到精度 ε, 需要的最大迭代次数 N 满足:

$$N \geq \frac{ln(b_0 - a_0) - ln(\varepsilon)}{ln(2)} \tag{1}$$

因为 ε 在对数下，当 ε 很小的时候，需要的迭代次数会急剧增大。

数学理论

Theorem 2 对于牛顿迭代法，有:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = |f'(\xi)| \tag{2}$$

在这里，e_k 表示第 k 次迭代的误差。
由上面的定理我们可以发现，牛顿迭代法的误差会以指数上的指数的级别缩小。所以说牛顿迭代法具有更好的收敛效果。

数学理论

Theorem 3 对于斜截法，有:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^{\alpha}}=|f'(\xi)| \tag{3}$$

这里 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 通过简单的计算，我们知道 $\alpha<2$, 这一点说明了斜截法相对于牛顿迭代，收敛效果较差。但是斜截法也有优点，它适用于于导数难以计算或者导数未知的方程求解，但是牛顿法对此无能为力。

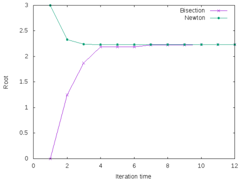
实验说明

从 Figure 1 中我们可以看到，二分法以下界作为根的近似值。牛顿迭代法只需要 4 次即可达到迭代停止条件。

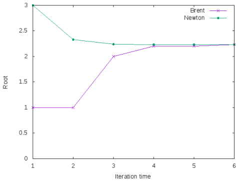
以不需要导数的迭代为例，我们可以采用布伦特方法。与牛顿迭代法进行比较，得到图像 Figure 2.

Brent 比起二分法，迭代次数大大减少。但牛顿法迭代次数仍然少于 Brent 方法。牛顿法有着更明显的优势。

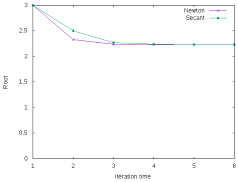
我们再比较一下 Newton method 和斜截法。整理运行的数据得到 Figure 3. 从 Figure 3 中我们可以看到，牛顿法的收敛速度明显快于斜截法。



(a) Figure 1



(b) Figure 2



(c) Figure 3

实验说明

我们使用二分法和牛顿法解一个简单的超越方程：
$f(x) = e^x - 4x = 0$. 我们确定根的区间为 $[0, 3]$, 观察最终解的位置。

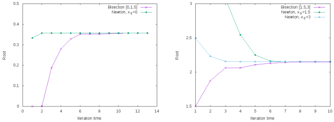


图: Different initial values, and bisection

首先让牛顿迭代的初值分别为 0,1.5 和 3, 最终都收敛到了较大的根，由图中可以观察到，选取初值 $x_0 = 3$ 的时候，收敛的速度跟快。二分法由于区间的限制，必定收敛于某一个大根或者小根，相比于两次牛顿迭代，二分法仍然没有优势。

总结

这次实验充分利用了 GSL 来进行科学计算，同时也让我们看到了不同的算法求解同一个问题，虽然理论上的最终结果都是相同的，但是由于计算机只能处理离散的数据，我们要尽可能的通过离散的数据处理去接近精确的数学理论，这就体现出了不同算法的相对优势。