作业 4
Mandelbrot Set 的生成和探索

张立言
数学与应用数学 3210101207

2022 年 7 月 1 日

摘要

Mandelbrot set 是十分有趣的数学现象，它凭借神奇的图像特征而变得广为人知。本报告利用了 C++ 和 Bitmap 库生成 Mandelbrot set 的图像并作出一些处理和探索，并且引申了 tricorn set 的图像。

1 引言

Mandelbrot set, 中文名又叫做曼德博集合。它是由复平面上组成分形的点组成的一种集合，最早在 1978 年由 Robert W.Brooks 和 Peter Matelski 定义并提出。后来在 1980 年由 Benoit Mandelbrot 作出了可视化处理并且最终广为人知。它的神奇之处在于，在图形的“边界”处不断进行放大总会有更多的细节显示出来。关于它的一些性质，许多数学家作出了探索，并且得出了一些结论，而也有很多猜想尚未得到证明，例如其局部联通性质 (local connectedness) 和某些特殊点的自相似性 (self-similarity)。我们利用一些简单的数学结论辅助完成本次可视化 Mandelbrot set 的工作。

2 问题的背景介绍

我们不必要关心 Mandelbrot set 的拓扑性质，但可以利用一些简单的结论辅助我们优化我们的可视化处理。绘制 Mandelbrot set 的图像的主要目的是练习掌握和使用 Linux 系统工作的技巧。

3 数学理论

Mandelbrot set 的通常定义如下：使得复平面上的迭代方程

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{1}$$

在初始值 $z_0 = 0$ 时进行迭代能够最终收敛的所有 c 的集合。其中，$c \in \mathbb{C}$. 下面给出一些关于该集合的一些基本的性质：在实轴上，Mandelbrot set 为严格的闭区间 $[-2, \frac{1}{4}]$. 拓扑学家证明了它的连通性。接下来介绍一些对于我们编写程序很有用的结论：

3.1 Theorem 1

若 $c \in M$，则 $|c| \le 2$

Proof 假设 $|c| > 2$, 则 $|z_1| = |c|, |z_1| > 2$

当 $n = 2$ 时，

$$|z_2| = |z_1^2 + c| \le |c^2| - |c|$$

由 $|c| > 2$ 可知

$$|c|^2 - |c| > |c|$$

从而 $|z_2| > |c|$

假设 $|z_n| > |c|$ 成立，则 $|z_n| > 2$,

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \le |z_n|^2 - |c|$$

又因为 $|z_n| > 2$, 从而

$$|z_{n+1}| > |z_n|^2 - |z_n| > |z_n|$$

可知 $|z_n|$ 递增，从而 $|z_n| > |z_1| > 2$. 假如 $|z_n|$ 不发散，由于它递增，从而收敛至某一常数 a. 于是由 $|z_{n+1}| \le |z_n|^2 - |c|$ 取极限可得 $a \le a^2 - |c| \Rightarrow a^2 - a = a(a-1) \le a \le |c|$, 矛盾，故而 $|z_n|$ 发散。

3.2 Theorem 2

若 $c \in M$ 则 $|z_n| \le 2$

限于篇幅，该定理的证明略去。

这个定理是我们判定收敛的一个重要的定理，我们可以避免一般的收敛判定繁琐的部分，使得编程难度降低和程序运行的效率提高。而且，由定理的证明过程，我们发现当迭代方程 1中的 z_n 项换成其共轭不会影响以上两个定理的成立。这允许了我们探索一种新的迭代，其图形又叫做 Tricorn set.

4 算法

生成 Mandelbrot set 图像的伪代码如下：我们作出一些细微的处理，让

Algorithm 1 Generating image of Mandelbrot set

```
Require: Max iteration time and criterion of convergence
  Getting the value of c
  Initrialize the z_0 z ← 0
  while |z| ≤ 2 and iteration time < max iteration time do
    z ← z^2 + c
  end while
  if Iteration time = max iteration time then
    c point converges, draw color
  else c point diverges, draw color
  end if
```

程序更加好用。

4.1 Color our set

在老师所给出的程序的基础上，我们可以调整着色的参数，让图案变得更加具有美感。

我们以进行迭代的次数为依据，迭代次数越少，说明其“收敛程度”越高，根据这个参数调整 RGB 参数，可以呈现出多种颜色，同时也利于我们观察图像的特征。而由于收敛的点执行循环的次数为最大迭代次数，这使得我们判定的收敛的 c 值可以呈现出同一个颜色，从而呈现出 Mandelbrot set 的大致形状。

itn 的意义也使得我们免去了判定的麻烦而直接进行调色。为了让颜色变化更明显，我采用了非线性的变化方式，但是保持了 RGB 第一个参数

(蓝色) 始终为 255, 这确定了颜色的基调为蓝色。类似的，我们可以设置更多样的颜色变化，这些并不困难，我们可以通过尝试找出更美观的变化。

4.2 Zooming into the set

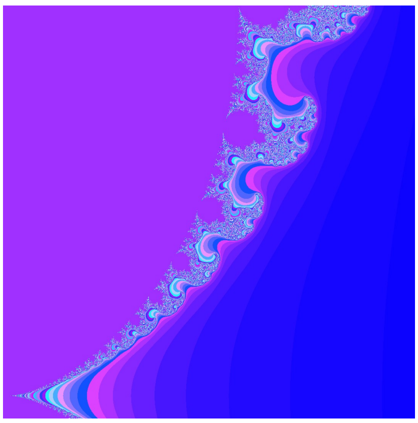
我们在老师给出的程序中可以进行放大，但我们难以确定放大位置。引入了 itn 参数之后，我们可以很容易解决这个问题。虽然 Mandelbrot set 很大，我们无法从它的本身入手，但我们可以考虑不收敛但是很“靠近”收敛的地方，从那里放大，我们可以观察到更细致的局部。限于代码水平和知识有限，我只对代码作出一些小的修改, 使其可以定位“边界”并且生成不断放大的图像。

4.3 Max iteration time and accuracy

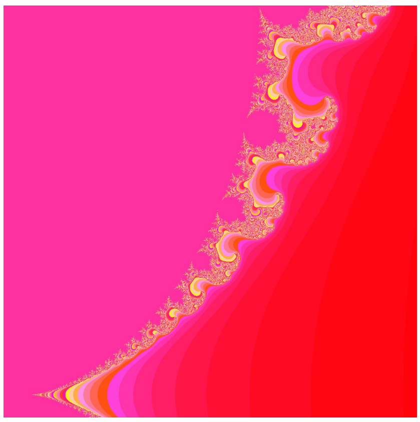
随着迭代次数的增加，我们会很自然的认为图像的精度会增加。这是明显的，在实验过程中，我们也可以简单验证一下这种性质。

5 数值算例

5.1 Varied colors



(a) Blue theme



(b) Red theme

图 1: A zooming in at around (0.3,0.1)

上面的颜色我分别调整蓝色和红色的数值为 255, 其他两个参数按照一个迭代次数按四次幂函数表达式的一个变化。不使用其他非多项式的数学表达式（考虑到系统性能）。

5.2 Zooming and accuracy

下面的一系列图片都是由程序自动寻找合适点 (即靠近“边界”的地方)，并且依次放大的结果。其中每次放大倍数均为 4 倍。

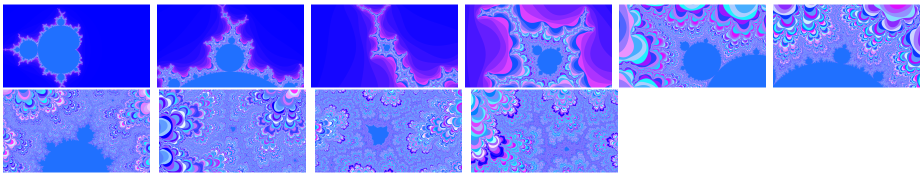


图 2: A zooming-in image series with max iteration = 500

对比一下，我们设置最大迭代次数为 100 的时候，有如下系列图。

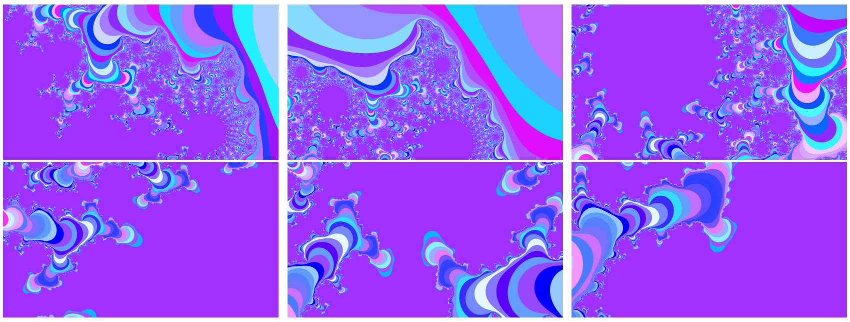


图 3: A zooming-in image series with max iteration = 100

从上面的放大过程我们可以看到，最大迭代次数越大，放大后的图像越显得平滑。数学上，随着其趋于无穷大，呈现出的结果是计算机难以模拟的。

5.3 结论

根据程序的运行，我们可以得出多彩的画面，具有独特的美感。同时，我们也可以简单地从观察的角度的出 Mandelbrot set 的一些几何特征。这次的探索使我加深了对于程序各个技能的理解。