

作业 4

Mandelbrot Set 的生成和探索

张立言

数学与应用数学 3210101207

2022 年 6 月 30 日

摘要

Mandelbrot set 是十分有趣的数学现象，它凭借神奇的图像特征而变得广为人知。本报告利用了 C++ 和 Bitmap 库生成 Mandelbrot set 的图像并作出一些处理和探索，并且引申了 tricorn set 的图像。

1 引言

Mandelbrot set, 中文名又叫做曼德博集合。它是由复平面上组成分形的点组成的一种集合，最早在 1978 年由 Robert W. Brooks 和 Peter Matelski 定义并提出。后来在 1980 年由 Benoit Mandelbrot 作出了可视化处理并且最终广为人知。它的神奇之处在于，在图形的“边界”处不断进行放大总会有更多的细节显示出来。关于它的一些性质，许多数学家作出了探索，并且得出了一些结论，而也有很多猜想尚未得到证明，例如其局部联通性质 (local connectedness) 和某些特殊点的自相似性 (self-similarity)。我们利用一些简单的数学结论辅助完成本次可视化 Mandelbrot set 的工作。

2 问题的背景介绍

我们不必要关心 Mandelbrot set 的拓扑性质，但可以利用一些简单的结论辅助我们优化我们的可视化处理。绘制 Mandelbrot set 的图像的主要目的是练习掌握和使用 Linux 系统工作的技巧。

3 数学理论

Mandelbrot set 的通常定义如下：使得复平面上的迭代方程

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (\text{iteq})$$

在初始值 $z_0 = 0$ 时进行迭代能够最终收敛的所有 c 的集合。其中, $c \in \mathbb{C}$. 下面给出一些关于该集合的一些基本的性质：在实轴上, Mandelbrot set 为严格的闭区间 $[-2, \frac{1}{4}]$. 拓扑学家证明了它的连通性。接下来介绍一些对于我们编写程序很有用的结论：

3.1 Theorem 1

若 $c \in M$, 则 $|c| \leq 2$

Proof 假设 $|c| > 2$, 则 $|z_1| = |c|, |z_1| > 2$

当 $n = 2$ 时,

$$|z_2| = |z_1^2 + c| \leq |c^2| - |c|$$

由 $|c| > 2$ 可知

$$|c|^2 - |c| > |c|$$

从而 $|z_2| > |c|$

假设 $|z_n| > |c|$ 成立, 则 $|z_n| > 2$,

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \leq |z_n|^2 - |c|$$

又因为 $|z_n| > 2$, 从而

$$|z_{n+1}| > |z_n|^2 - |z_n| > |z_n|$$

可知 $|z_n|$ 递增, 从而 $|z_n| > |z_1| > 2$. 假如 $|z_n|$ 不发散, 由于它递增, 从而收敛至某一常数 a . 于是由 $|z_{n+1}| \leq |z_n|^2 - |c|$ 取极限可得 $a \leq a^2 - |c| \Rightarrow a^2 - a = a(a - 1) \leq a \leq |c|$, 矛盾, 故而 $|z_n|$ 发散。

3.2 Theorem 2

若 $c \in M$ 则 $|z_n| \leq 2$