Clase 4

Análisis de algoritmos
Introducción a matemáticas discretas
(Comp. 420)

José Joaquín Zubieta Rico

Abstract

Continuación en ecuaciones en diferencias.

Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias tiene la forma general

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n$$

Caso homogéneo

En el caso homogéneo se cumple que

$$f_n = 0$$

Estrategia de solución

La estrategia general para resolver las ecuaciones en diferencia homogénea es la siguiente

- busca k soluciones particulares, es decir $a_n = r^k,\ n^j r^n,\ \begin{cases} |r|^n \cos(n\theta) \\ |r|^n \sin(n\theta) \end{cases}$
- solución general es una combinación lineal

Ejemplo Tomando el caso

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$$

Caso no homogéneo

Proposición La solución de una ecuación lineal no homogénea es siempre la suma de una solución de la homogénea asociada y una solución particular.

Estrategia de solución

Definimos un operador $T : T(a_{n+1}) = a_{n+1}$. Definido el operador T, podemos realizar las siguientes observaciones

$$\begin{aligned} T \circ T \circ T \cdots T &:= T^k \\ T^k(a_n) &= a_{n+k} \\ T^0(a_n) &= a_n \quad \Rightarrow T^0 = I \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que las ecuaciones lineales en diferencias se convierten en polinomios en T (un poco de abuso de notación).

Ejemplo de uso de notación Se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} D &= T^2 + 3T \\ &\Rightarrow \\ D(a_n) &= T^2(a_n) + 3T(a_n) \\ &= a_{n+2} + 2a_{n+1} \\ &\Rightarrow \\ D &= T + 2 \\ &= T + 2T^0 \end{aligned}$$

Podemos escribir $(T^k + b_1 T^{k-1} + \cdots + b_k T^0)[a_n] = f_n$.

Idea divina

$$D_0[D(a_n)] = d_0[f_n], \text{ se busca } D_0 : D_0(f_n) = 0 \tag{1}$$

$$(D_0 D)[a_n] = 0 \tag{2}$$

De lo anterior tenemos que la estrategia es buscar la solución de la ecuación 1 eq. 1 y sustituir la solución en la ecuación general eq. 2.

Ejemplo de solución Se tiene la ecuación no homogénea

$$x_{n+1} = x_n + 2n$$