Clase 3

Análisis de algoritmos
Introducción a matemáticas discretas
(Comp. 420)

José Joaquín Zubieta Rico

Abstract

Introducción en ecuaciones en diferencias.

Ecuaciones en diferencias

Ejemplo

Tenemos una caja de $2 \times n$ y fichas de 2×1, y se tienen las siguientes preguntas.

- Encontrar un algoritmo para generar las distintas maneras para llenar la caja con las fichas.
- Calcular a_n, que se define como la cantidad de maneras distintas en las que se pueden acomodar las fichas.

Hechos

Tenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Tenemos que en general

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

¿Cómo resolverlo?

Observación 1, si fijamos $\vec{x} = (a_1, a_2)$, toda la recurrencia es fija.

Para tratar con el problema pasamos a un *problema más general*, es decir

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{1}$$

con a_1, a_2 libres.

Observaciones 2

1. $a_n(x+y) = a_n(x) + a_n(y)$
2. $a_n(cx) = ca_n(x)$

Observaciones 3

Sean a_n y a_n^2 dos soluciones independientes, entonces, cualquier solución de eq. 1 es de la forma

$$a_n = c_1 a_n + c_2 a_n^2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Iluminación divina

Trata $a_n = r^n$ con $r \in \mathbb{R}$. Substituyendo en lo anterior

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \quad n \geq 3$$

dividiendo por r^{n-2}

$$r^2 = r + 1.$$

Resolviendo por la fórmula general obtenemos dos soluciones

$$\begin{aligned} r_1 = &\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = &\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

de esto obtenemos que la solución general del problema es

$$a_n = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}$$

Caso general

Tenemos interés en ecuaciones de la forma

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Notemos las siguientes dos cosas acerca de la ecuación

- la ecuación es lineal (en a_n) con coeficientes constantes (b's no dependen de n) de orden k.
- si para todo n se da que $f_n = 0$ entonces la ecuación se llama homogénea, en caso contrario se llama no-homogénea.

Caso homogéneo

Solución es totalmente determinado por $\vec{x}$.

Observación 1

Observación 2 Sean $a_n^{'}, \cdots a_n^k$, k solución independiente, entonces cualquier solución es de la forma

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_n^i \quad c_i \in \mathbb{R}$$

- " $\Rightarrow$ " Supongamos a_n^* es solución
  - $\exists\ \vec{x}^* \in \mathbb{R}; \quad a_n^* = a_n(\vec{x}^*)$
  - $\exists\ \vec{x}^* \in \mathbb{R}; \quad a_n^* = a_n(\vec{x}^*)$