

Clase 1

Análisis de algoritmos
Introducción a matemáticas discretas
(Comp. 420)

José Joaquín Zubieta Rico

Abstract

Ejemplo de algoritmo (*Gale-Shappley*) y análisis del mismo.

Caso prueba: Algoritmo de *Gale-Shappley*

Algoritmo demostrado por *David Gale* y *Lloyd Shappley* en 1962 para resolver el problema del matrimonio estable.

Pseudo-algoritmo

El pseudo-algoritmo correspondiente al algoritmo de *Gale-Shappley* es

```
Initially all  $m \in M$  and " $m \in M$ " are free
While there is a man  $m$  who is free and hasn't proposed to every woman
    Choose such a man  $m$ 
    Let  $w$  be the highest-ranked woman in  $m$ 's preference list
      to whom  $m$  has not yet proposed
    If  $w$  is free then
         $(m, w)$  become engaged
    Else  $w$  is currently engaged to  $m'$ 
        If  $w$  prefers  $m'$  to  $m$  then
             $m$  remains free
        Else  $w$  prefers
```

Análisis

Nota

El análisis aquí encontrado puede ser encontrado en la página 7 del libro de *Algorithm Analysis* de **Kleinberg**.

El algoritmo de **G-S** se puede realizar de la siguiente forma

Definiciones

$$\begin{aligned} M &= \langle m_1, \dots, m_n \rangle && \text{conjunto hombres} \\ W &= \langle w_1, \dots, w_n \rangle && \text{conjunto mujeres} \\ M \times W &&& \text{conjunto de pares ordenados } (m, w), m \in M \text{ y } w \in W \end{aligned}$$

Condiciones

- Cada elemento sólo una vez.
- Emparejamiento sin inestabilidades

Observaciones

1. w se queda comprometida desde su primera propuesta. Sus prospectos sólo pueden mejorar.
2. La secuencia de w 's a quien m se propone solo empeora.
3. El algoritmo de $G-S$ termina después de a lo más n^2 iteraciones de ciclo «while».
 - **Medida de progreso:** manera precisa de decir que cada iteración del algoritmo lo acerca a su terminación.
 - **Cada iteración:** un hombre rechazado hace propuesta a su siguiente mujer en la lista. $P(t)$ conjunto de pares (m, w) tal que m se haga propuesto a w al final de una iteración t , vemos que para todo t , el tamaño de $P(t) + 1$ es estrictamente mayor que el tamaño de $P(t)$.
4. Si m está libre en un punto de la ejecución del algoritmo, entonces significa que hay una mujer a quien no le ha propuesto matrimonio.
5. El conjunto S a la terminación es un *emparejamiento perfecto*.
 - **S:** conjunto de pares ordenados, todos de $M \times W$
 - cada miembro de M y cada miembro de W aparezca al menos una vez en S .
 - **Emparejamiento perfecto:** cada miembro de M y cada miembro de W aparece exactamente en un par de S' .