Transformada Discreta de Fourier Cuántica

William de la Cruz de los Santos

Universidad Autónoma del Estado de México
Ingeniería en Computación

WeWork Montes Urales, June 18 to 22, 2018

1. La Transformada Discreta de Fourier

2. La Transformada Cuántica de Fourier

Table of Contents

La transformada discreta de Fourier toma como entrada un vector de números complejos $x_0, \ldots, x_{N-1}$. Da como salida información transformada, un vector de números complejos $y_0, \ldots, y_{N-1}$, definidos como

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi i jk/N}.$$

La Transformada Discreta de Fourier

Escrito de otra forma, $Y = WX$ donde

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

La entrada $W_{ij} = \omega^{ij}$ y ω es la N-ésima raíz primitiva de la unidad ($\omega^N = 1$).

Table of Contents

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

Consideremos una base canónica ortonormal $|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle$ en un espacio de Hilbert de dimensión N.

La QFT actúa sobre los estados base como

$$|j\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ijk/N} |k\rangle.$$

En general,

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle \longrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle$$

donde las amplitudes y_k son la transformada discreta de Fourier de las amplitudes x_j.

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

Supongamos que $N = 2^n$ es una potencia de 2.

Para $n = 1$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
QFT(|0\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} e^{\frac{2\pi i 0k}{2}} |k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\
&= H|0\rangle
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

$$\begin{aligned} QFT(|1\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{1} e^{\frac{2\pi i 1k}{2}}|k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{1} e^{\pi i k}|k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{0}|0\rangle + e^{\pi i}|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= H|1\rangle \end{aligned}$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

Asuma que $n = 2$.

Calcule los siguiente: $QFT(|00\rangle)$, $QFT(|01\rangle)$, $QFT(|10\rangle)$ y $QFT(|11\rangle)$.

$$
\begin{aligned}
QFT(|00\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{k=0}^{3} e^{\frac{2\pi i 0k}{4}} |k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\
&= H^{\otimes 2} |00\rangle
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

$$
\begin{aligned}
QFT(|01\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{k=0}^{3} e^{\frac{2\pi i 1k}{4}}|k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + i|01\rangle - |10\rangle - i|11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

$$
\begin{aligned}
QFT(|10\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{k=0}^{3} e^{\frac{2\pi i 2k}{4}} |k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

$$
\begin{aligned}
QFT(|11\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{k=0}^{3} e^{\frac{2\pi i 3k}{4}} |k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}} (|00\rangle - i|01\rangle - |10\rangle + i|11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle)
\end{aligned}
$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

Asuma $N = 2^n$ es una potencia de 2.

Conviene escribir el estado $|j\rangle$ usando su representación binaria $j = j_1 j_2 \cdots j_n$. En otras palabras $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n 2^0$.

Para cada $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$:

$$\begin{aligned} QFT|j_1 \cdots j_n\rangle &= \bigotimes_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{\frac{\pi i j}{2^k}} |1\rangle \right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{\frac{\pi i j}{2^0}} |1\rangle \right) \otimes \cdots \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{\frac{\pi i j}{2^{n-1}}} |1\rangle \right) \end{aligned}$$

Veamos en detalle la derivación anterior:

$$
\begin{aligned}
|j\rangle &\rightarrow \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i jk/2^n} |k\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} e^{2\pi i j\left(\sum_{l=1}^{n} k_l 2^{-l}\right)} |k_1 \cdots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \bigotimes_{l=1}^{n} e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[\sum_{k_l=0}^{1} e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle \right]
\end{aligned}
$$

Cont.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle + e^{2\pi i j 2^{-l}} |1\rangle \right] \\
&= \frac{(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle)(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle)\cdots(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle)}{2^{n/2}}.
\end{aligned}
$$

Usamos la notación $0.j_l j_{l+1} \cdots j_m$ para representar la fracción binaria $j_l/2 + j_{l+1}/4 + \cdots + j_m/2^{m-l+1}$.

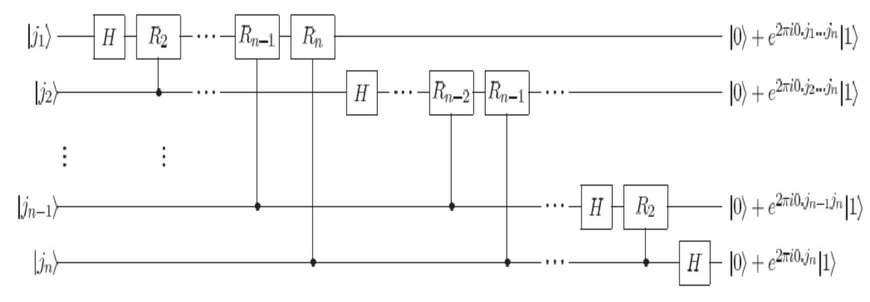
Cada producto se puede obtener por medio de la transformación unitaria $R_k : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1$ dado por

$$
R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}.
$$

Transformada Discreta de Fourier Cuántica

La forma de los productos sugiere el siguiente circuito para calcular la transformada cuántica de Fourier:

$$|j\rangle \rightarrow \frac{(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle)(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle)\cdots(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle)}{2^{n/2}}$$



Implementación de QFT en IBM Q: