POLYTECH LILLE

Recherche opérationnelle

Auteurs :
Yle SEVERINO CARVALHO
Simon DESCAMPS

Tuteur :
Clarisse DHAENENS

Table des matières

1 Introduction

Le but du projet est de résoudre un problème d'optimisation. L'entreprise GIS4Prod cherche à maximiser ses gains sur les 4 différents produits qu'elle vend, et à anticiper l'impact des changements à venir. Pour répondre à ce problème il faut trouver une modélisation correcte du problème en prenant en compte toutes les contraintes. Nous utiliserons l'outil Lindo afin de résoudre ce dernier. Nous rendrons dans une premier temps un rapport intermédiaire présentant la modélisation du problème ainsi que son dual. Ce rapport contiendra une analyse complète pour chaque solution ou modification proposée. Ce projet est intéressant car il nous permettra de mettre en application ce que nous avons pu voir en cours de Recherche Opérationnelle ou encore même en TP. Bien qu'il s'agisse d'un petit projet, ce sera l'occasion pour nous de nous initier à l'optimisation sur des cas précis. On pourrait se poser les mêmes questions plus tard dans le cadre de notre travail.

2 Programme linéaire du problème

On introduit les variables P1, P2, P3, P4 , respectivement les quantités de Prod 1, Prod 2, Prod 3 et Prod 4 produites chaque mois.

En prenant en compte les contraintes de coût unitaire des matières premières et des heures de travail, on obtient la fonction objectif suivante :
Maximiser : P1 * (30-2*4-3*6) + P2 * (42-3*4-4*6) + P3 * (53-4*4-5*6) + P4 * (72-7*4-6*6).

On introduit ensuite les contraintes sur les produits ainsi que les contraintes de disponibilités suivantes :

- $2 * P1 + 3 * P2 + 4 * P3 + 7 * P4 \leq 4600$(Matière première)
- $3 * P1 + 4 * P2 + 5 * P3 + 6 * P4 \leq 5000$(Heures de travail)
- $P1 + P2 + P3 + P4 = 950$(Contrainte commerciale)

— $P4 \geq 400$ (Contrainte commerciale) Puis les contraintes de non négativité sur les variables :

— $P1, P2, P3, P4 \geq 0$

En développant les expressions entre parenthèses, cela nous donne sous Lingo le programme primal suivant :

```
!Fonction obecjtif ;

MAX=(P1 * 4 + P2 * 6 + P3 * 7 + P4 * 8 ) ;

!Contraintes ;

2*P1 + 3*P2 + 4*P3 + 7*P4 < 4600;
3*P1 + 4*P2 + 5*P3 + 6*P4 < 5000;
P1 + P2 + P3 + P4 = 950;
P4 > 400;
```

Remarque : Sous Lindo, les variables sont par défaut positives.

À partir du primal, on peut définir son dual :

```
!Fonction obecjtif ;

@FREE(Y3);
@FREE(Y4);
MIN=( 4600*Y1 + 5000*Y2 + 950*Y3 + 400*Y4 ) ;

!Contraintes ;

2*Y1 + 3*Y2 + Y3 > 4 ;
3*Y1 + 4*Y2 + Y3 > 6 ;
4*Y1 + 5*Y2 + Y3 > 7 ;
7*Y1 + 6*Y2 + Y3 + Y4 > 8 ;
Y4<0;
```

Remarque : @FREE(Y) nous permet supprimer la contrainte de non négativité sur la variable Y.

On remarque que puisque la quatrième contrainte du primal est de type supérieure alors la quatrième variable du dual est donc inférieure à 0.

En résolvant le problème primal et dual sur Lindo, on obtient les résultats suivants :

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              6650.000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             4
Elapsed runtime seconds:                          0.05

Model Class:                                        LP

Total variables:                      4
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    5
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      17
Nonlinear nonzeros:                   0


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      P1        0.000000            1.000000
                                      P2        400.0000            0.000000
                                      P3        150.0000            0.000000
                                      P4        400.0000            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        6650.000            1.000000
                                       2        0.000000            1.000000
                                       3        250.0000            0.000000
                                       4        0.000000            3.000000
                                       5        0.000000           -2.000000
```

Cela signifie qu'on ne produira pas de produit P1, mais qu'on produira 400 produits P2, 150 produits P3 et 400 produits P4, pour une valeur optimale de 6650.

On peut voir que la contrainte ligne 3 ($3*P1 + 4*P2 + 5*P3 + 6*P4 \leq 5000$ (Heures de travail)) n'est pas saturée car son Slack or Surplus est de 250. Il est donc possible de réduire davantage sa valeur et les résultats seront toujours les mêmes, cela peut réduire les heures de travail des personnes.

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              6650.000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             3
Elapsed runtime seconds:                          0.03

Model Class:                                        LP

Total variables:                    4
Nonlinear variables:                0
Integer variables:                  0

Total constraints:                  6
Nonlinear constraints:              0

Total nonzeros:                    18
Nonlinear nonzeros:                 0


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      Y3        3.000000            0.000000
                                      Y4       -2.000000            0.000000
                                      Y1        1.000000            0.000000
                                      Y2        0.000000            250.0000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        6650.000           -1.000000
                                       2        1.000000            0.000000
                                       3        0.000000           -400.0000
                                       4        0.000000           -150.0000
                                       5        0.000000           -400.0000
                                       6        2.000000            0.000000
```

On remarque, que le dual atteint la même valeur optimale du gain que le primal.

Nos résultats sont donc cohérents.

3 Analyse de l'impact des modifications

On souhaite à présent prévoir l'impact que pourraient avoir certaines modifications de nos contraintes sur la société GIS Prod.

3.1 Prix de vente

Dans un premier temps, on cherche à savoir ce qu'il se passerait si on augmentait le prix de vente du produit 2 de 0.5€. On remarque que le coefficient du produit P2 est défini en soustrayant le coût de production au prix de vente. On en déduit que le coefficient de P2 augmentera de 0.5. Or, si on effectue une analyse Range, on remarque que le coefficient de P2 peut augmenter de 0.67€ (Allowable Increase). Cela signifie que l'on peut monter le prix du produit P2 de 0.6€ sans que le modèle ne change, si on dépasse ce seuil, le modèle de production devra changer. Puisqu'on augmente le prix du produit P2, le résultat de la fonction sera plus élevé, on obtiendra 6650 + 400*0.5 = 6850.

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
P1	4.000000	1.000000	INFINITY
P2	6.000000	0.6666667	0.5000000
P3	7.000000	1.000000	0.5000000
P4	8.000000	2.000000	INFINITY

On veut également connaître la conséquence si on augmente le prix de vente du produit 1 de 0.6€. Comme énoncé précédemment, on utilise l'analyse Range et on remarque que l'on peut augmenter le prix de 1€ (Allowable Increase). On peut donc dire que l'augmentation n'aura aucun impact sur notre modèle. De plus, puisqu'on ne vend pas de produits 1 dans ce modèle, cette augmentation ne changera pas non plus le résultat de solution optimale.

On cherche à présent à prédire ce qui se passera si on diminue le prix de produit 3 de 0.6€. On remarque que l'on peut au maximum diminuer le prix de 0.5€ (Allowable Decrease). Cela signifie que si on dépasse ce seuil de 0.5, il ne sera plus rentable de produire cette quantité de produits P3 et le modèle sera par conséquent différent.

‘

3.2 Nombre de produits

On veut finalement savoir ce qu'il se passerait si l'entreprise produisait 980 produits au lieu de 950. Il est possible d'obtenir une réponse en regardant le graphe ci-dessous, on remarque que la contrainte ligne 4 (Row 4), correspondant à la contrainte commerciale de produire exactement 950 produits, peut augmenter de 50. L'augmentation du nombre de produits à fabriquer n'aura pour conséquence que l'augmentation du résultat de la solution optimale et des bénéfices de l'entreprise. Le dual price correspondant à la contrainte est égal à 3. Cela signifie que pour chaque produit supplémentaire, l'entreprise gagne 3€ supplémentaires, soit 90€.
De plus, la contrainte n'ayant pas de Slack or Surplus et ayant le plus gros Dual price, c'est la contrainte la plus rentable à augmenter.

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	4600.000	250.0000	150.0000
3	5000.000	INFINITY	250.0000
4	950.0000	50.00000	100.0000
5	400.0000	37.50000	125.0000

4 Analyse de l'impact du nombre d'unités de matières premières

Nous souhaitons à présent analyser l'impact du nombre d'unités de matières premières.

4.1 Manque de matières premières

Dans un premier temps, on apprend qu'on dispose de 4500 unités au lieu de 4600 et on veut connaître l'impact. Si on regarde le graphe ci-dessous :

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	4600.000	250.0000	150.0000
3	5000.000	INFINITY	250.0000
4	950.0000	50.00000	100.0000
5	400.0000	37.50000	125.0000

On remarque que la contrainte de la ligne deux associés au nombre d'unités peut diminuer de 150 sans changer le modèle (Allowable Decrease). Cela signifie que l'on produira toujours les mêmes produits mais en quantités différentes.
Puisqu'on produit moins, le résultat de l'entreprise diminue. On peut calculer la perte en regardant le dual price associé à la contrainte :

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6650.000	1.000000
2	0.000000	1.000000
3	250.0000	0.000000
4	0.000000	3.000000
5	0.000000	-2.000000

Celui-ci est égal à 1. Cela signifie que pour chaque unité de matière première non disponible, l'entreprise perd 1€. La perte est donc estimée à 100€. Le résultat final sera de 6550€.

Si 100 unités supplémentaires sont abîmées, on passe sous le seuil à partir duquel le modèle change car on aura au total une diminution de 200 unités de matières première et qu'on voit sur le graphe que le allowable increase associé à la contrainte sur les matières premières est de 150. Pour connaître l'impact on peut donc effectuer une résolution du problème en prenant en compte la modification :

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              6400.000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             3
Elapsed runtime seconds:                          0.01

Model Class:                                        LP

Total variables:                      4
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    5
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      17
Nonlinear nonzeros:                   0


                    Variable           Value        Reduced Cost
                          P1        50.00000            0.000000
                          P2        500.0000            0.000000
                          P3        0.000000            1.000000
                          P4        400.0000            0.000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        6400.000            1.000000
                           2        0.000000            2.000000
                           3        450.0000            0.000000
                           4        0.000000            0.000000
                           5        0.000000           -6.000000
```

On remarque dans un premier temps que l'on ne produit plus de produits P3 et que l'on produit désormais des produits P1 alors qu'on en produisait pas. De plus, le résultat de l'entreprise a diminué de 250€ (Objective value).
Finalement, on remarque que l'on dispose encore de 450 heures de travail car le Slack or Surplus de la ligne associé à la contrainte sur les heures est de 450. Cela représente une augmentation de 200 heures en comparaison à la solution précédente ; les employés travaillent donc moins.

4.2 Opportunité d'achat de matières premières

L'entreprise a une chance d'acheter des matières premières, on cherche à savoir si cela est intéressant.

Dans un premier lieu, on observe les Slack or Surplus :

Variable	Value	Reduced Cost
P1	0.000000	1.000000
P2	400.0000	0.000000
P3	150.0000	0.000000
P4	400.0000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6650.000	1.000000
2	0.000000	1.000000
3	250.0000	0.000000
4	0.000000	3.000000
5	0.000000	-2.000000

On remarque sur la ligne associée aux matières premières (row 2) qu'on ne dispose plus de matières premières car la contrainte est pleine. En parallèle, on remarque que la contrainte associée aux heures de travail disponibles (row 3) n'est pas pleine, on dispose encore de 250 heures. Il pourrait donc être intéressant d'acheter des matières premières pour utiliser les heures de travail dont on dispose. Si on regarde le dual price associé aux matières premières (row 2) , on remarque que chaque nouvelle unité rapporte 1€. On peut donc dire que l'entreprise pourrait payer au maximum 1€ par unité de matière première si elle souhaite être rentable. Finalement, on peut définir le nombre maximum d'unités que l'entreprise pourrait acheter effectuant une analyse Range :

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	4600.000	250.0000	150.0000
3	5000.000	INFINITY	250.0000
4	950.0000	50.00000	100.0000
5	400.0000	37.50000	125.0000

On voit que sur la ligne associée (row 2) on peut augmenter le nombre d'unités de matières premières de 250 maximum avant de changer le modèle.

De plus, si on regarde le dual price de la ligne associées aux matières première lorsqu'on ajoute 250 unités, on remarque que le dual price est de 0, il n'est donc pas intéressant d'acheter davantage de matières premières. L'entreprise serait donc au maximum intéressée par 250 unités.

4.3 Modèle de production

On veut connaître le modèle de production en fonction du nombre d'unités de matières premières en retirant la contrainte sur le produit 4.

On effectue donc une analyse de Range et on obtient les résultats suivants :

Nombre d'unités de matière première	0 à 2850	2850 à 3800	3800 à 4550	4550 à 5250	5250 à l'infini
Modèle de production	Production de PI, P2	Production de P2, P3	Production de P3, P4	Production de P2, P3, P4	Production de P2, P4

5 Appel à des intérimaires

Une société d'intérim propose des intérimaires pour un certain nombre d'heures de travail. Si le prix des intérimaires est le même que l'entreprise, alors il n'est pas intéressant de les recruter. En effet, on a vu dans la partie précédente qu'avec son modèle de production, la société dispose d'heure de travail en surplus et ne dispose plus de matières premières. Cela veut dire que si elle recrutait davantage elle aurait simplement plus d'heures de travail en surplus. Il pourrait être intéressant pour l'entreprise de remplacer ses employés par des intérimaires si leur coût horaire était inférieur à 6€. Il peut également être intéressant de recevoir un renfort d'intérimaires si la société achetait plus de matière première.

6 Production pour d'autres entreprises

On veut à présent savoir s'il serait intéressant pour l'entreprise GISProd de fabriquer des produits pour d'autres entreprises concurrentes en plus des 950 produits qu'ils fabriquent. Cela signifie que la contrainte sur nos produits ($P1 + P2 + P3 + P4 = 950$) peut être libérée puisqu'on ne veut désormais plus produire exactement 950 produits mais au moins 950. On obtient donc la contrainte : $P1 + P2 + P3 + P4 \geq 950$.

On résout donc le programme primal modifié et on obtient le résultat suivant :

Variable	Value	Reduced Cost
P1	0.000000	0.000000
P2	600.0000	0.000000
P3	0.000000	1.000000
P4	400.0000	0.000000

On constate que l'entreprise produira donc 600 produits 2 et 400 produits 4. Elle peut donc revendre aux concurrents 50 produits. Cependant, puisqu'elle a la contrainte de fabriquer au moins 400 produits 4, elle ne peut vendre que ses produits 2. L'entreprise GISProd peut donc fabriquer un surplus de 50 produits 2.

Une entreprise demande spécifiquement des produits 4. Il n'est pas possible selon ce modèle de vendre des produits 4 puisque la résolution du problème nous a montré que l'entreprise ne produisant que 400 produits alors qu'ils doivent en produire au moins 400 en raison d'une contrainte commerciale ; ils n'ont donc aucun surplus de produits 4. On veut donc à présent savoir à quelles conditions il serait intéressant d'en produire davantage pour les vendre. Puisque leur coût de production ne peut pas changer, on va s'intéresser à leur prix de vente. Il sera plus intéressant d'en produire si leur prix de vente augmente. Au regard de l'analyse range, on voit que le prix peut augmenter de 6 sans que le modèle ne change. Il deviendra donc intéressant et possible de vendre des produits 4 à l'entreprise une fois que leur prix de vente aura été augmenté d'au moins 6€, c'est à dire dès lors que le prix dépassera les 14€.

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
P1	4.000000	0.000000	INFINITY
P2	6.000000	INFINITY	0.000000
P3	7.000000	1.000000	INFINITY
P4	8.000000	6.000000	INFINITY

7 Etude de l'opportunité d'un investissement

L'entreprise GISProd a embauché un commercial pour un coût relatif de 30 000€. Ce dernier a permis à l'entreprise d'augmenter le nombre de produits vendus de 100 et d'augmenter le nombre d'unités de matière premières disponibles de 500. On voudrait savoir en combien de temps l'investissement serait rentable.

Dans un premier lieu, on s'intéresse au bénéfices supplémentaires dégagés grâce à ce commercial. Pour cela, on modifie notre problème primal en ajoutant aux contraintes les nouveautés correspondant au nombre de produits et à la quantité de matière première.

On résout désormais le problème suivant :

```
!! P1, P2, P3, P4 : Quantité Produits 1, 2, 3, 4;

MAX = 4*P1 + 6*P2 + 7*P3 + 8*P4;

! Contraintes;
2*P1 + 3*P2 + 4*P3 + 7*P4 <= 5100;
3*P1 + 4*P2 + 5*P3 + 6*P4 <= 5000;
P1 + P2 + P3 + P4 >= 1050;
P4 > 400;
```

En résolvant le problème, on remarque que la valeur de la fonction objectif est désormais de 7100. Cela signifie qu'on gagne désormais 7100-6650 = 450€ supplémentaires par mois. Cela correspond à 450*12=5400€ par an.

On veut à présent savoir en combien de temps l'investissement sera amorti. Pour cela, on prendra en compte un taux d'actualisation de 10%.

En sachant que 1 euro gagné dans i années est égal à 1/(1+10%)i, on aura par exemple pour l'année 1 :

5400 * (1/1.10) = 4909€ gagnés.

En calculant les gains pour chaque année en en sommant ceux-ci, on obtient le tableau suivant :

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6	Année 7	Année 8	Année 9
	4909€	4462€	4057€	3688€	3352€	3048€	2771€	2519€	2290€
Total	4909€	9371€	13429€	17117€	20470€	23518€	26289 €	28808€	31098€

On remarque donc que l'investissement de 30 000€ sera amorti au courant de l'année 9. Par le calcul, on peut définir la date à laquelle celui-ci sera amorti :

$\frac{(30000-28000)*365}{2289} = 189.99$

Les 30 000€ seront donc amortis le 190ième jour de l'année 9, soit à la fin du mois de juillet (9 juillet).

8 Conclusion

En conclusion, nous avons pu appliquer ce que nous avons vu en cours de recherche opérationnelle à une situation réelle. Il a été intéressant de voir à quel point le modèle de production d'une entreprise peut changer en raison de nouvelles contraintes ou de nouvelles opportunités. Ce projet nous a donc permis de prendre conscience que lorsque nous serons dans le monde du travail il faudra en permanence se poser des questions relatives à l'impact d'une modification quelconque. De plus, ce projet étant rapide, il nous a permis de pouvoir toujours travailler en binôme grâce aux créneaux réservés sur notre emploi du temps. Si nous devions faire des reproches sur ce projet, nous dirions qu'il était parfois difficile de bien comprendre le sens précis des questions qui, parfois, pouvaient être mal interprétées. Nous avons en outre constaté une fois les TP terminés que certains groupes n'avaient pas interprété les questions de la même manière que nous, notamment au niveau des questions sur les intérimaires et sur la production pour d'autres entreprises. Finalement, nous pensons qu'il aurait été intéressant d'implémenter nous même les algorithmes des méthodes permettant de trouver une solution optimale.