O Teorema de Gauss-Bonnet

Guilherme Franco, Javier Correa

limint@ufmg.br Departamento de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais

Trabalho de Iniciação Científica - PROBIC

1. Objetivo

Gostaríamos de conhecer algumas versões do Teorema de Gauss-Bonnet, como é estudado na área de Geometria Diferencial, devidamente generalizados para espaços de dimensão maior que superfícies em $\mathbb{R}^3$ e, neste trabalho, daremos enfoque a versão do teorema publicada por H. Hopf. Para isso, precisaremos conhecer algumas ferramentas da Topologia Diferencial.

2. Ferramentas

1. **(Mapa de Gauss)** Se M é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$, então o mapa de Gauss é o mapa $G : M \to \mathbb{S}^n$ que leva cada ponto $x \in M$ em um vetor unitário normal a subvariedade em x. Seu determinante Jacobiano é a curvatura Gaussiana K de M.

2. **(Grau de um mapa)** Seja $f : M \to N$ um mapa suave entre duas variedades orientáveis de mesma dimensão. Suponha M compacta. A pré-imagem de cada valor regular p de f é um conjunto discreto $\{x_1, \cdots, x_k\}$. Em uma vizinhança de cada x_i, f é um difeomorfismo local. Seja r o número de x_i's tais que f preserva orientação e s o número de x_i's tais que f reverte orientação. O número $r - s$ é chamado o **grau do mapa** f e não depende do ponto p ou da classe de homotopia de f. Equivalentemente, se $f : M \to N$ é um mapa próprio, o grau de f é o número $\deg(f)$ tal que
$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \cdot \int_N \omega, \ \forall\, \omega \in \Omega_c^m(N).$$

3. **(Índice de um campo vetorial)** Considere um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e um campo vetorial suave $v : U \to \mathbb{R}^n$ com um zero isolado no ponto $z \in U$. A função
$$\overline{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$
mapeia uma pequena esfera em torno de z na esfera unitária. O grau desse mapa é chamado o **índice** $\imath$ de v no zero z. O índice é invariante sob difeomorfismos de U.

4. **Lema (Hopf)** Se $v : X \to \mathbb{R}^m$ é um campo vetorial suave com zeros isolados, e se v aponta para fora de X ao longo da fronteira, então a soma dos índices $\sum \imath$ é igual ao grau do mapa de Gauss de ∂X a $\mathbb{S}^{m-1}$. Em particular, $\sum \imath$ não depende da escolha de v.

5. **(Teorema do Índice de Poincaré-Hopf)** Se $\vec{v}$ é um campo vetorial suave na variedade compacta e orientada X com apenas um número finito de zeros, então a soma global dos índices de $\vec{v}$ é igual a característica de Euler de X.

6. **(Teorema da Separação de Jordan-Brouwer)** Qualquer hipersuperfície compacta e conexa X de $\mathbb{R}^n$ divide $\mathbb{R}^n$ em duas regiões conexas: o interior D_0 e o exterior D_1. Além disso, $\overline{D_1}$ é uma variedade compacta cujo bordo é $\partial\overline{D_1} = X$.

7. **(Teorema)** Se M é uma n-variedade fechada, então
$$\chi(2M) = 2\,\chi(M) - \chi(\partial M)$$

8. **(Teorema)** Se M é uma variedade fechada de dimensão ímpar, então
$$\chi(M) = 0$$

9. **(Teorema)** Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície e seja $G : M \to \mathbb{S}^n$ o mapa de Gauss de M. Então
$$G^*\mathrm{vol}_{\mathbb{S}^n} = (-1)^n K \mathrm{vol}_M$$
onde vol_M é a forma de volume de M.

3. Desenvolvimento Histórico

1. **(Gauss, 1827)** Observou que se T é um triângulo geodésico em uma superfície orientável $M \subset \mathbb{R}^3$:
$$\int_T K\,\mathrm{d}A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
onde K é a curvatura Gaussiana.

2. **(Bonnet, 1848)** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável e $\mathcal{R}$ uma região regular de S cuja fronteira $\partial\mathcal{R}$ consiste de um número finito de curvas fechadas, simples e regulares por partes $C_1, \cdots, C_n$, então:
$$\int_{\mathcal{R}} K\,\mathrm{d}A + \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g\,\mathrm{d}s + \sum_j (\pi - \alpha_j) = 2\pi\chi(\mathcal{R})$$
em que α_j é o ângulo interno no vértice da fronteira e k_g é a curvatura geodésica da fronteira.

3. **(Dyck, 1888)** Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície compacta orientável, então
$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,\mathrm{d}A = \chi(M)$$
onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M.

4. **(Hopf, 1925-26)** Se $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ é uma hipersuperfície de dimensão par compacta e orientável, $G : M \to \mathbb{S}^{2n}$ é o mapa de Gauss e $\mathrm{vol}_{\mathbb{S}^{2n}}$ é a forma de volume de $\mathbb{S}^{2n}$, então
$$\frac{2}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n})}\int_M G^*\mathrm{vol}_{\mathbb{S}^{2n}} = \chi(M)$$
onde G^* é um pullback de G. Chamamos $G^*\mathrm{vol}_{\mathbb{S}^{2n}}$ o **integrando de curvatura** de M. Pelo Teorema 9, podemos escrever
$$\frac{2}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n})}\int_M K\,\mathrm{vol}_M = \chi(M)$$
e quando $n = 1$, recuperamos a versão anterior.

Para uma ideia da prova do resultado do Hopf: Ora, por definição de grau,
$$\int_M G^*\mathrm{vol}_{\mathbb{S}^{2n}} = \deg(G) \cdot \int_{\mathbb{S}^{2n}} \mathrm{vol}_{\mathbb{S}^{2n}} = \deg(G) \cdot \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{2n})$$
E uma vez que pudermos provar que
$$\deg(G) = \frac{1}{2}\,\chi(M)$$
o resultado estará demonstrado. Ora, pelo Teorema 6, $M = \partial N$ é a fronteira de alguma variedade compacta N de codimensão 0. Seja v um campo de vetores suave em N que aponta para fora em ∂N e tem zeros isolados em $\mathrm{int}(N)$. Pelo Lema 4, a soma dos índices desse campo vetorial é igual ao grau do mapa de Gauss G, enquanto pelo Teorema 5 a soma também é igual a característica de Euler $\chi(N)$, portanto obtemos $\deg(G) = \chi(N)$.

Usando o Teorema 7 temos que $\chi(2N) = 2\,\chi(N) - \chi(\partial N)$ onde $2N = N \cup_{\mathrm{Id}} N$ é a variedade diferenciável sem bordo obtida de $N \sqcup N$ identificando cada ponto na fronteira em uma cópia de N com o mesmo ponto na outra. Uma vez que N é compacta e conexa, também é $2N$. Como $\dim(2N) = \dim(N)$ é ímpar, pelo Teorema 8 vem que $\chi(2N) = 0$, de onde segue que $\chi(M) = \chi(\partial N) = 2\,\chi(N) = 2 \cdot \deg(G)$, como se queria demonstrar.

4. Referências

1. WU, Hung-Hsi. **Historical Development of the Gauss-Bonnet Theorem**. - Artigo. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226231776_Historical_development_of_the_Gauss-Bonnet_theorem (2007).

2. **Degree of Gauss map equal to half the Euler characteristic and Poincaré-Hopf**. Fórum. Disponível em: https://math.stackexchange.com/questions/59668/degree-of-gauss-map-equal-to-half-the-euler-characteristic-and-poincar%c3%a9-hopf

3. **Pullback of n-sphere volume form via Gauss map**. Fórum. Disponível em: https://math.stackexchange.com/questions/4317159/pullback-of-n-sphere-volume-form-via-gauss-map?rq=1

4. MILNOR, John. **Topology From a Differentiable Viewpoint**. The University Press of Virginia, 1965.

5. GUILLEMIN, Victor. POLLACK, Alan. **Differential Topology** Prentice-Hall, Inc. Englecliff Woods, New Jersey, 1974.

5. Agradecimentos

Quero agradecer a Fapemig, que me proporcionou o auxílio financeiro para que eu pudesse permanecer estudando durante o projeto enquanto cursava outras disciplinas. Além disso, agradeço ao Professor Javier Correa, que com bastante paciência me orientou durante este momento importante da graduação, no qual pude me esforçar e aprender bastante.